2017.4.17 Mon.

3 Protoplanetary disk evolution

3.2 Surface density evolution of a thin disk

・localな角運動量の保存があると、円盤進化・降着は起こらない

→ 円盤の進化には角運動量の輸送が必要

粘性摩擦による角運動量の再分配 (<=> loss due to outflow)

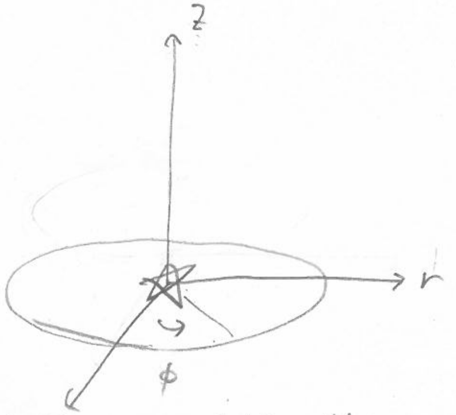
→ 面密度 $\Sigma(r,t)$ の進化

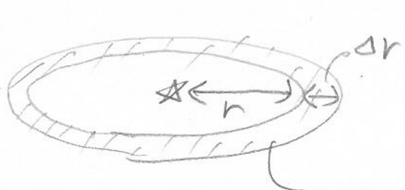
ちょっとちがう

$\Sigma(r,t)$ の進化を考える

軸対称で、幾何学的に薄い円盤を円筒座標系で考える

$(h/r \ll 1)$





○ 質量保存(連続の式)

半径 r、幅 Δr のリングの質量の時間変化

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi r \Delta r \Sigma) = \underbrace{2\pi r \Sigma(r) v_r(r)}_{\substack{v_r>0 \text{で} \\ \text{リングに入ってくる mass}}} - \underbrace{2\pi(r+\Delta r)\Sigma(r+\Delta r)v_r(r+\Delta r)}_{\text{出ていく mass}} \quad \cdots (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\Sigma) = -\frac{(r+\Delta r)\Sigma(r+\Delta r)v_r(r+\Delta r) - r\Sigma(r)v_r(r)}{\Delta r}$$

$\Delta r \to 0$ の極限をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\Sigma) = -\frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r)$$

$$\therefore \quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{r\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r) = 0} \qquad (3.3)$$

▫ 角運動量保存

$$\frac{dL}{dt} = \tau$$

L: 角運動量

τ: トルク ($\mathbb{F}\times\mathbb{r}$)

先ほどと同じように、リングを考える。

$$L = \underbrace{2\pi r\Delta r\Sigma}_{m}\cdot\underbrace{r}_{r}\cdot\underbrace{r\Omega}_{v}$$

Ω: 角速度

応力（単位面積あたりに働く面積力）

粘性流体において、以下のように与えられる。

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

P: 圧力、μ: 粘性係数

r方向に垂直な面のφ方向に働く応力 $\sigma_{r\phi}$ は、

$$\sigma_{r\phi} = \mu\left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right)$$

$$= \mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)$$

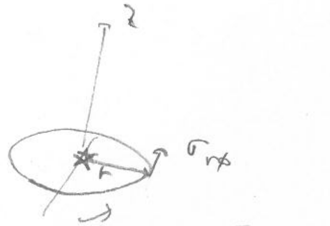
$$= \rho\nu r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

ν: 動粘性係数 (kinetic viscosity)

ρ: 密度

質量

$\sigma_{r\phi}$ は単位面積あたりの力



$\tau = \sigma_{r\phi}\times r$

半径rでの、総トルクは

$$G(r,t) = 2\pi r\int_{-h}^{h} r\,\sigma_{r\phi}\,dz = 2\pi r\cdot r\cdot\Sigma\nu r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

リングを考えているので、トルクも差分をとる

$$\frac{dL}{dt} = G(r+\Delta r, t) - G(r, t)$$

ラグランジュ … 粒子的

オイラー … 場的

ところで、

ラグランジュの微分をオイラーの微分に書きかえる。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\nabla$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial t} + v\cdot\nabla L = G(r+\Delta r, t) - G(r, t)$$

$v\cdot\nabla L$ の項について

今、$v = (v_r,\ r\Omega,\ 0)$
$\qquad\qquad\quad (v_\phi)$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\therefore v\cdot\nabla L = v_r\frac{\partial L}{\partial r}$$

→ リングに流入（流出）するトルクとみなせる

$$v\cdot\nabla L = 2\pi(r+\Delta r)^3 v_r(r+\Delta r)\Sigma(r+\Delta r)\Omega(r+\Delta r) - 2\pi r^3 v_r(r)\Sigma(r)\Omega(r)$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi r\Delta r\Sigma\cdot r\cdot r\Omega) + 2\pi(r+\Delta r)^3 v_r(r+\Delta r)\Sigma(r+\Delta r)\Omega(r+\Delta r) - 2\pi r^3 v_r(r)\Sigma(r)\Omega(r) = G(r+\Delta r, t) - G(r, t)$$

両辺、$2\pi\Delta r$ で割って $\lim_{\Delta r\to 0}$ とすると、

$$r\frac{\partial}{\partial t}(r^2\Omega\Sigma) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega\cdot r\Sigma v_r) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial r} \qquad (3.4)$$

$$G = 2\pi r\cdot \nu\Sigma r\frac{d\Omega}{dr}r$$

○ $\Sigma(r, t)$ の進化

(3、3)、(3、4) より v_r を消す。

(3.4) より

$$r^3\Omega\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + r\Sigma v_r\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega) + r^2\Omega\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r)} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^3\nu\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}$$

$$= -r\frac{\partial\Sigma}{\partial t} \quad (\because (3.3))$$

$$\therefore\quad r\Sigma v_r = \left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega)}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^3\nu\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}\right]$$

(3、3) より

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega)}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^3\nu\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}\right]$$

Kepler 回転、$\Omega \propto r^{-\frac{3}{2}}$ とすると、$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\frac{3}{2}r^{-\frac{5}{2}}$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega) = \frac{\partial}{\partial r}r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}$$

より、

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[2r^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{3}{2}\nu\Sigma r^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}(\nu\Sigma r^{\frac{1}{2}})\right]} \qquad (3.6)$$

拡散偏微分方程式

diffusive partial differential equation.

3.2.1 The viscous time scale

(3.6)をよりわかりやすくする.

変数変換

$$X \equiv 2r^{1/2} \quad (3.7)$$

$$f \equiv \frac{3}{2}\Sigma X \quad (3.8)$$

$\nu = \mathrm{const}$ を仮定

$\frac{\partial}{\partial r} = r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial X}$ より

(3.6)右辺は,

$$\nu \cdot \frac{3}{r} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial X}\left[r^{\frac{1}{2}} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{2}\Sigma X\right)\right]$$

$$= \frac{\nu}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{3}{2}\Sigma X\right)$$

$$= \frac{8\nu}{X^3}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$$

また, $\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{2}{3}\frac{1}{X}\frac{\partial f}{\partial t}$

よって $\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (3.9)$

拡散方程式

$D = \frac{12\nu}{X^2}$: 拡散係数

$\Sigma(r,t)$ の進化は,拡散方程式の形でかける.

1次元の拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$k = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$$

Δt 間に Δx 拡散する

k: 拡散の度合いを示す

○ time scale τ_ν

スケール Δx (Δr) にわたる拡散のタイムスケール

$$\tau_\nu = \frac{(\Delta x)^2}{D} = \frac{(\Delta x)^4}{12\nu} = \frac{16(\Delta r)^2}{12\nu} \sim \frac{(\Delta r)^2}{\nu}$$

円盤のサイズを r とすると、全体にわたる Σ の進化のタイムスケールは、

$$\underbrace{\tau_\nu \approx \frac{r^2}{\nu}}_{\text{viscous time scale}}$$

accretion decays vs stellar age

観測から測れる。

太陽型星周囲の円盤で 10^6 yr 程度

3.2.2 Solutions to the disk evolution equation

円盤進化の式の、定常状態での解を求める。

定常状態 … $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 　↳ 定常状態での $\Sigma(r)$ の profile

$\Omega = \Omega_{kep}$ を仮定しない

(3.4) より

$$\frac{\partial}{\partial r}(2\pi r\Sigma v_r \cdot r^2\Omega) = \frac{\partial G}{\partial r}$$

$$\therefore\ 2\pi r\Sigma v_r \cdot r^2\Omega = 2\pi r^3 \nu\Sigma\frac{d\Omega}{dr} + \text{const} \quad (3.14)$$

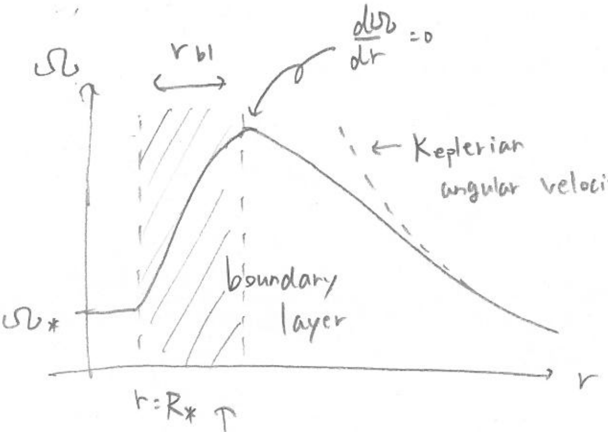
降着率を $\dot{M} = -2\pi r\Sigma v_r$ とすると、

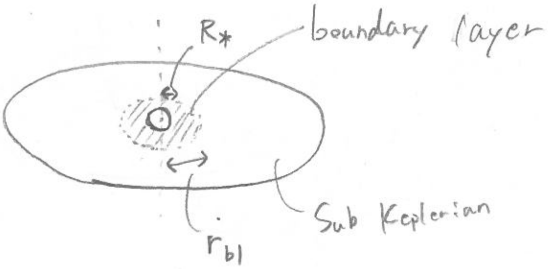
$$-\dot{M}\cdot r^2\Omega = 2\pi r^3\nu\Sigma\frac{d\Omega}{dr} + \text{const} \quad (3.14)$$

積分定数を求めるために、ある場所で粘性摩擦がなくなり、$\frac{d\Omega}{dr} = 0$ となるとすると、積分定数は角運動量フラックスと等しくなる。

$$\text{const} = -\dot{M}\cdot r^2\Omega$$

単純な場合として、円盤が中心星の表面まで広がっている場合を考える。





星の表面から円盤まで、Ωは連続

- 中心星　$r \leq R_*$

  $\Omega=0$、もしくは十分遅く回転

- boundary layer　$R_* < r \leq r_{bl}$　(sub-Keplerian)

  viscous stressが消える、星とKeplerianな円盤との境界層

  角運動量は半径と共に増加

- 円盤　$r > r_{bl}$

  粘性摩擦がなければ、Keplerianな回転となる。

  つまり、rが小さい方が角運動量が大きい（回転が速い）。

  粘性摩擦で角運動量を外へ輸送しながら、

  中心へ落ちていく。

○ boundary layer

boundary layer の物理（hydrodynamics や magneto hydrodynamics）や accretion flow の構造は複雑でよくわかっていない。

しかし、ほとんどの場合、星に対して広がりが小さいことが提唱されている。

磁場と粘性がムシできるとすると、軸対称な場合の運動方程式は、

$$\frac{v_{\phi gas}^2}{r} = \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + v_r \frac{dv_r}{dr} \qquad (3.16)$$

P：圧力、ρ：密度、M_*：中心星質量

圧力が重力とつり合うとすると、

$$c_s^2 \sim \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} \sim \frac{c_s^2}{r_{bl}} \sim \Omega_k^2 r \qquad (3.17)$$

c_s：音速

Ω_k：ケプラー角速度

スケールハイト $h = \frac{c_s}{\Omega_k}$ より、

$$\frac{r_{bl}}{r} \sim \left(\frac{h}{r}\right)^2 \qquad (3.18)$$

boundary layer（disk も）は geometrically thin とすると、

$h/r \ll 1$、つまり $r_{bl}/r \ll 1$

このことから、boundary layer は十分に薄い。

式 (3.14) に戻る

$R_* + r_{B} \simeq R_*$ と考えられるので、(3.14)の積分定数は、

$$\mathrm{const} \simeq -\dot{M} R_*^2 \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}} \qquad (3.19)$$

とできる. よって (3.14) は

$$2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} = -\dot{M} \cdot r^2 \Omega - \dot{M} R_*^2 \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}}$$

と書ける.

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} \ (= \Omega_{\mathrm{kep}})$$

として

$$\frac{d\Omega}{dr} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_*}{r^5}}$$

$$r^2 \cdot \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} = \sqrt{GM_* r}$$

$$\therefore \ -3\pi \nu \Sigma \sqrt{GM_* r} = -\dot{M} \cdot r^2 \Omega - \dot{M} R_*^2 \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}}$$

$$\therefore \ \nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}}\right) \qquad (3.20)$$

- viscosity が決まれば、$\dot{M} = \mathrm{const}$ の円盤の Σ profile が得られる.
- $\Sigma(r) \propto \nu^{-1}$

○ (3.20) 式について.

(3.20) は、円盤の inner edge でトルクがなくなる、という境界条件の下での解.

中心星の表面まで広がる円盤に対して、近似的には正しい

⟺ 一方で、classical T Tauri stars では、中心星の磁場によって円盤が中心星表面に届くまでにきれるのも一般的

(3.20)では、$r = R_*$ を境に Σ の profile が逆転する(負になる)。

→ これは、Keplerian な flow では、トルクを 0 にするために、

Σ が 0 になる必要があることを示している。