3.2.1 The viscous time scale

(3.6) を より わかりやすくする.

変数変換

$$X \equiv 2 r^{1/2} \quad (3.7)$$

$$f \equiv \frac{3}{2} \Sigma X \quad (3.8)$$

$\nu = \text{const}$ を仮定

$$\frac{\partial}{\partial r} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial X}$$ より

(3.6) 右辺は.

$$\nu \cdot \frac{3}{r} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial X} \left[r^{\frac{1}{2}} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \Sigma X \right) \right]$$

$$= \frac{\nu}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{3}{2} \Sigma X \right)$$

$$= \frac{8\nu}{X^3} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$$

また、 $$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{2}{3} \frac{1}{X} \frac{\partial f}{\partial t}$$

よって $$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}}_{\text{拡散方程式}} \quad (3.9)$$

$$D = \frac{12\nu}{X^2}$$: 拡散係数

$\Sigma(r, t)$ の進化は. 拡散方程式の形でかける.

粒子としてランダムに動くものが
多数が十分に大きい

どういうときに起きるのか?
ものが十分に密集する
ランダム運動する多数に
あてはまる.

1次元の拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}$$

$$K = \frac{(\Delta X)^2}{2\Delta t}$$

Δt 間に より ΔX 拡散する

K: 拡散の度合いを示す

左辺: 物理量 f の時間変化

右辺: 〃 の X方向の勾配(の勾配)

○ time scale τ_ν

スケール Δx (Δr) にわたる拡散のタイムスケール

$$\tau_\nu = \frac{(\Delta x)^2}{D} = \frac{(\Delta x)^4}{12\nu} = \frac{16(\Delta r)^2}{12\nu} \sim \frac{(\Delta r)^2}{\nu}$$

円盤のサイズを r とすると、全体にわたる Σ の進化のタイムスケールは、

$$\underbrace{\tau_\nu \approx \frac{r^2}{\nu}}_{\text{viscous time scale}}$$

accretion decay vs stellar age

観測から測れる。

太陽型星周囲の円盤で 10^6 yr 程度

3.2.2 Solutions to the disk evolution equation

円盤進化の式の、定常状態での解を求める。

定常状態 … $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 　　↳ 定常状態での $\Sigma(r)$ の profile

$\Omega = \Omega_{kep}$ を仮定しない

(3.4) より

$$\frac{\partial}{\partial r}(2\pi r \Sigma v_r \cdot r^2 \Omega) = \frac{\partial G}{\partial r}$$

$$\therefore \quad 2\pi r \Sigma v_r \cdot r^2 \Omega = 2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} + \text{const} \qquad (3.14)$$

降着率を $\dot{M} = -2\pi r \Sigma v_r$ とすると。$(= \rho v_r)$

$$-\dot{M} \cdot r^2 \Omega = 2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} + \text{const} \qquad (3.14)$$

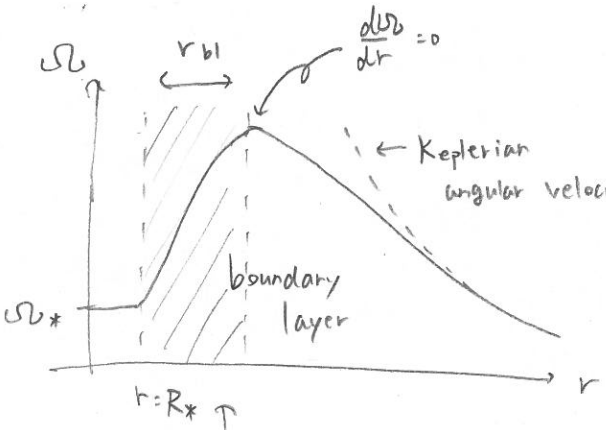
$\Omega = \text{const}$ となる (剛体回転)

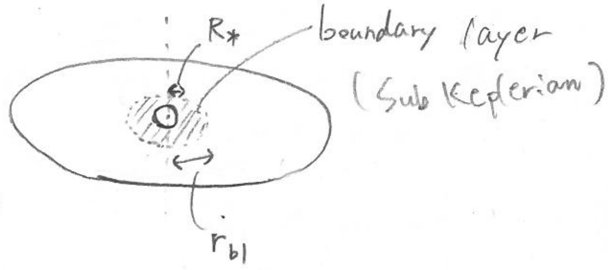
積分定数を求めるために、ある場所で粘性摩擦がなくなり、$\frac{d\Omega}{dr} = 0$ となるとすると、積分定数は角運動量フラックスと等しくなる。

$$\text{const} = -\dot{M} \cdot r^2 \Omega$$

$$(= \rho \cdot r \cdot V_{rot} \cdot v_r = L v_r)$$

単純な場合として、円盤が中心星の表面まで広がっている場合を考える。





星の表面から円盤まで、Ωは連続

・中心星 $r \le R_*$

$\Omega = 0$、もしくは十分遅く回転

・boundary layer $R_* < r \le r_{bl}$ (sub-Keplerian)

viscous stressが消える、星とKeplerianな円盤との境界層

角運動量は半径と共に増加

・円盤 $r > r_{bl}$

粘性摩擦がなければ、Keplerianな回転となる。

rが小さい方が回転が速く、

粘性摩擦で角運動量を外へ輸送しながら、

中心へ落ちていく。

$$L = \rho \cdot r \cdot v_{rot}$$

$$= \rho r \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r}}}_{v_{kep}}$$

$$\propto r^{0.5}$$

$$v_{kep} \propto r^{-0.5}$$

○ boundary layer

boundary layer の物理 (hydrodynamics や magneto hydrodynamics) や accretion flow の構造は複雑でよくわかっていない。

しかし、ほとんどの場合、星に対して広がりが小さいことが提唱されている。

磁場と粘性がムシできるとすると、軸対称な場合の

(r方向の) 運動方程式は、

$$\frac{v_{\phi\,gas}^2}{r} = \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + v_r\frac{dv_r}{dr} \qquad (3.16)$$

P: 圧力 、ρ: 密度 、M_*: 中心星質量

圧力が重力とつり合うとすると、

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} \sim \frac{c_s^2}{r_{bl}} \sim \Omega_k^2 r \qquad (3.17)$$

→ 次元は $\frac{P}{\rho}$

$c_s^2 \sim \frac{P}{\rho}$

$\Delta r \sim r_{bl}$

c_s: 音速

Ω_k: ケプラー角速度

スケールハイト $h = \frac{c_s}{\Omega_k}$ より、

$$\frac{r_{bl}}{r} \sim \left(\frac{h}{r}\right)^2 \qquad (3.18)$$

boundary layer (disk も) は geometrically thin とすると、

$h/r \ll 1$ 、つまり $r_{bl}/r \ll 1$

このことから、boundary layer は十分に薄い。

式 (3.14) に戻る

$R_* + r_{bl} \simeq R_*$ と考えられるので、(3.14)の積分定数は、

$$const \simeq -\dot{M} R_*^2 \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}} \qquad (3.19)$$

とできる。よって (3.14) は

$$2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} = -\dot{M} \cdot r^2 \Omega - \dot{M} R_*^2 \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}}$$

と書ける。

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} \quad (= \Omega_{kep})$$

として

$$\frac{d\Omega}{dr} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_*}{r^5}}$$

$$r^2 \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} = \sqrt{GM_* r}$$

$$\therefore \quad -3\pi \nu \Sigma \sqrt{GM_* r} = -\dot{M} \cdot r^2 \Omega - \dot{M} R_*^2 \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}}$$

$$\therefore \quad \nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}}\right) \qquad (3.20)$$

- viscosity が決まれば、$\dot{M} = const$ の円盤の Σ profile が得られる。
- $\Sigma(r) \propto \nu^{-1}$

○ (3.20) 式について、

(3.20) は、円盤の inner edge でトルクがなくなる、という境界条件の下での解

中心星の表面まで広がる円盤に対して、近似的には正しい

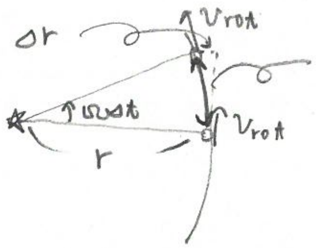
⟺ 一方で、classical T Tauri stars では、中心星の磁場によって円盤が中心星表面に届くまでにきれるのも一般的

(3.20)では、$r = R_*$ を境に Σ の profile が逆転する(負になる).

→ これは、Keplerian な flow では、トルクを 0 にするために、Σ が 0 になる必要があることを示している。

* (3.16) の(きれいな)導出 (復習)

そもそも、円運動における $\frac{\partial v_r}{\partial t} = r\Omega^2$ はどこからか。



微小な時間 Δt での、radial 方向の変化 Δr

$$\Delta x = r\Omega\Delta t$$

$$\Delta r \simeq \Delta x \cdot \sin(\Omega\Delta t)$$

$$\simeq \Delta x \cdot \Omega\Delta t$$

$$= r\Omega^2\Delta t^2$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$$

r の時間変化の時間変化

$$\rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$$

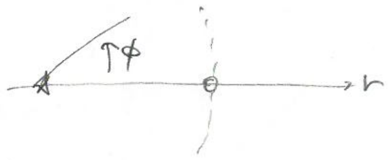
$$\therefore \frac{\Delta r}{\Delta t^2} = r\Omega^2$$

$\lim_{\Delta t \to 0}$ をとる

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial v_r}{\partial t} = r\Omega^2 = \frac{v_{rot}^2}{r}$$

粒子的な立場 (Lagrange)

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \mathbb{F}_{Grav} + \frac{1}{\rho}\nabla \mathbb{P}$$



$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\nabla \boldsymbol{v})$$

2次元軸対称 (r方向のみを考える)

内向きが正

向きは負 $\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{dv_r}{dr} = -\frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$ → $\frac{v_{rot}^2}{r} = \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + v_r\frac{dv_r}{dr}$

○ 式(3.6)の時間依存する解析解

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu \Sigma r^{\frac{1}{2}} \right) \right] \qquad (3.6)$$

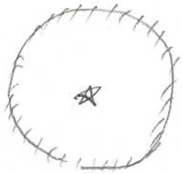
円盤進化の式

νを簡単な形で仮定。実際は、νは複雑だが、(3.6)の解のふるまいを見るには良い

・ $\nu = \mathrm{const}$ (Green's function solution)

仮定 ・ $t=0$で、リング状にガスが分布。

どう進化するか



$$\Sigma(r, t=0) = \frac{m}{2\pi r_0}\delta(r - r_0) \qquad (3.21)$$

$$\delta(r-r_0) = \begin{cases} 0 & (r \neq r_0) \\ 1 & (r = r_0) \end{cases}$$

Dirac delta function

・ $r=0$でトルク0 (応力なし)

・ $r=\infty$まで広がれる

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi r_0^2}\frac{1}{\tau} x^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(1+x^2)}{\tau} \right] I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau} \right) \qquad (3.22)$$

$x \equiv r/r_0$

$\tau \equiv 12\nu t / r_0^2$

$I_{1/4}$: 第1種のBessel function

$$I_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\ell+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\ell+2k}$$

(nは整数)

ガンマ関数 : $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$ 　 $n! = \Gamma(n+1)$

$\nu = f(r)$ に対して、(3.6) は線形

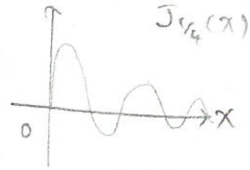
解は (3.22) の重ね合わせで書ける。

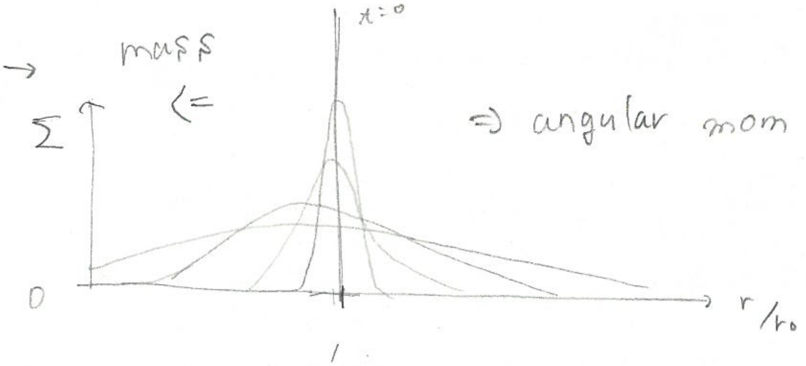
・(3.22) の振る舞い

$\exp\left(-\frac{1+x^2}{\tau}\right)$ … $x=0$ ($r=0$) にピーク。τ の増加とともに広がる

$I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau}\right)$ … 0.7〜0.8 あたりにピーク。振動する

τ が増加するほど、関数は広がる。





質量は中心へ向かい、リングは拡散していく。

一方で、角運動量は外に運ばれる。

⇒ 粘性進化する円盤の一般的な特徴であり、

系で角運動量を保存したまま質量降着が起こるとすると、これも必ず起こる。

・ $\nu \propto r^{\gamma}$ (self-similar solution) (3.23)

仮定

・$t=0$で 定常状態解に対応。

・$r=r_1$までの有限な広がり。exponentialなcut-off

$$\Sigma(t=0) = \frac{C}{3\pi\nu_1 \tilde{r}^{\gamma}} \exp\left[-\tilde{r}^{(2-\gamma)}\right] \qquad (3.24)$$

C: 規格化定数

$\tilde{r}$: r/r_1

$\nu_1 \equiv \nu(r_1)$

このとき、自己相似解は、

$$\Sigma(\tilde{r}, T) = \frac{C}{3\pi\nu_1 \tilde{r}^{\gamma}} T^{-(5/2-\gamma)/(2-\gamma)} \exp\left[-\frac{\tilde{r}^{(2-\gamma)}}{T}\right] \qquad (3.25)$$

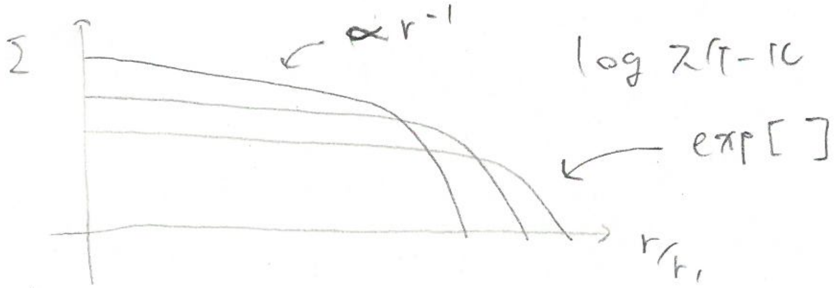
$$T \equiv \frac{t}{t_s} + 1 \qquad (3.26)$$

$$t_s \equiv \frac{1}{3(2-\gamma)^2} \frac{r_1^2}{\nu_1} \qquad (3.27)$$

(3.25)の振る舞い

・$\exp\left[-\frac{\tilde{r}^{(2-\gamma)}}{T}\right]$ … $t=0\ (T=1)$において $\tilde{r}=\frac{r}{r_1}$が1を超えると効いてくる (cut-off)

・分布は $\tilde{r}^{-\gamma} = \frac{r_1}{r} \propto r^{-1}$



観測との比較によい

・円盤サイズは進化とともに大きくなる。(角運動量保存のため)