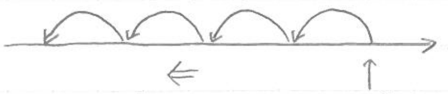
自己相似衝突カスケードの定常状態サイズ分布 (Tanaka et al. 1996)

衝突破壊



→ m（質量）　：衝突カスケード

⇐ 一定の mass flow　↑ 大質量天体は長く生き残る

- 定常状態の質量分布：　$n(m)\,dm = A m^{-\alpha}\,dm$　(1.1)
  A, α：定数.

- 質量保存：

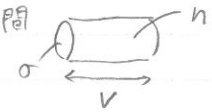
$$\underbrace{\frac{\partial m n(m)}{\partial t}}_{\text{ある質量}m\text{の質量密度時間変化}} + \underbrace{\frac{\partial F(m)}{\partial m}}_{\text{ある質量}m\text{への質量フラックス}} = 0 \qquad (2.1)$$

※非常に小さい破片が取り除かれる効果（Poynting - Robertson とかガス抵抗）は考えない.

- $F(m)$ は ①衝突頻度に比例し、②衝突結果に依る

① 質量 m_1 が質量 m_2 に衝突する単位数密度あたりの rate：C_{m_1,m_2}

単位時間



n　σ　V

$$\frac{\sigma V n}{n}\text{回} = \sigma V \text{回}$$

$$C_{m_1,m_2} = \underbrace{\sigma_{m_1,m_2}}_{\text{衝突断面積}} \underbrace{V_{m_1,m_2}}_{\text{相対速度}} \qquad (2.2)$$

質量 $m_1 \sim m_1 + dm_1$ と $m_2 \sim m_2 + dm_2$ の衝突頻度は.

$$C_{m_1,m_2}\, n(m_1)\, dm_1\, n(m_2)\, dm_2 \qquad (2.3)$$

② 衝突破片の質量分布
※衝突速度への依存は考えない

累積質量分布：$f(m, m_1, m_2)$

$(m_2) \longrightarrow (m_1) \rightrightarrows$ 破片 m

projectile　target

$m_2 > m_1$ でも $m_1 > m_2$ でも関係ないとする.
$f(m, m_1, m_2)$ と $f(m, m_2, m_1)$ は別物

target m_1 の衝突で

$$\xrightarrow{\hspace{6cm}} m$$

$\Leftarrow$ m_1 $\Rightarrow$

$m_1 f(m, m_1, m_2)$ (2.4) $\quad$ $m_1(1-f(m, m_1, m_2))$ (2.5) $\quad$ ← fは累積なのでこうなる

$$F(m) = -\int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2\, m_1 f(m, m_1, m_2)\, C_{m_1,m_2}\, n(m_1)\, n(m_2)$$
$$+ \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2\, m_1 (1 - f(m, m_1, m_2))\, C_{m_1,m_2}\, n(m_1)\, n(m_2) \qquad (2.6)$$

$\Rightarrow m_1(1-f)$ $(m \geq m_1)$ 合体

$\Leftarrow m_1 f$ $(m \leq m_1)$ 破壊

$$\xrightarrow{\hspace{3cm}} m$$

破壊が重要なときを考えている（衝突カスケードでは合体は考えていない）ので (2.6) の第一項のみ必要

$$F(m) = -\int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2\, m_1 f(m, m_1, m_2)\, C_{m_1,m_2}\, n(m_1)\, n(m_2) \qquad (2.7)$$

- (2.1) の定常解を求めるための仮定

(a) 自己相似、すなわち $\quad f(m, m_1, m_2) = f\left(\frac{m}{m_1}, \frac{m_2}{m_1}\right) \qquad (3.1)$

(b) 定常状態

(c) $\quad C_{m_1,m_2} = m_1^{\nu} h\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \qquad (3.2)$

ν：定数

衝突断面積が幾何的に決まっている（$\propto$ (半径)^2 $\propto$ $m^{\frac{2}{3}}$）ときは $\nu = 2/3$

(b) より (2.1) は $\quad \dfrac{\partial F(m)}{\partial m} = 0 \qquad (3.3)$

ここで $x_1 = m_1/m$, $x_2 = m_2/m$ とすると (2.7) は

$$F(m) = -m^{\nu+3} \int_1^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2\, x_1 f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right) x_1^{\nu} h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) n(m x_1)\, n(m x_2) \qquad (3.4)$$

(1.1) を代入すると、

$$F(m) = -m^{\nu+3-2\alpha} \int_1^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \; x_1^{\nu-\alpha+1} x_2^{-\alpha} A^2 f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right) h\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\propto -m^{\nu+3-2\alpha} \qquad (3.5)$$

定常状態 (3.3) より、 $\nu + 3 - 2\alpha = 0$ (3.6)

すなわち、(3.3) の解として、

$$\begin{cases} n(m) = A m^{-\alpha} & (3.7) \\ \alpha = \dfrac{\nu+3}{2} & (3.8) \end{cases}$$

$\nu = \frac{2}{3}$ を代入すると、 $\alpha = \frac{11}{6}$ (4.1)

モデルが自己相似である限り、衝突結果のモデルに α は依らない。
衝突頻度の質量依存 (ν) にのみ依る。