4. 微惑星形成

4.1. Aerodynamic drag on solid particles

円盤内におけるダストに対するガスの抵抗則にはダストのサイズ（半径 s）と周囲のガスの平均自由行程の大小に応じて、2通りのものがある。

→ ｛ ◦ エプスタイン抵抗（Epstein Drag）
　 ◦ ストークス抵抗（Stokes Drag）

そもそも、
ダストの運動は、ダスト粒子と中心星の二体問題にガス抵抗をあてはめた式となる。

$$m\frac{du}{dt} = -G\frac{M_* r}{r^3} \underline{\underline{-F_D}} \quad \text{Drag}$$

今回は、ガス抵抗 F_D について考えてみる。

◦ はじめに、ガス分子の熱速度（〜音速）u_{th} は、

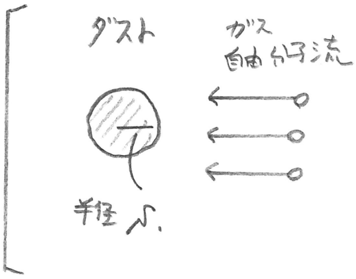
$$u_{th} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi\mu m_H}} \quad [\mathrm{cm/s}]$$

と求まる。

μ : 平均分子量
m_H : 水素原子の質量

エプスタイン抵抗

球と仮定したダストの半径 s が cm 以下のとき、$s < l_g$（ガスの平均自由行程）となるとき、



→ 円盤のガスは流体近似ができなくなる。

そのため、ガス分子が粒子的に働くものとして扱う。

このときのエプスタイン抵抗 F_D は、

$$F_D = -\frac{4\pi}{3}\rho s^2 u_{th} v$$

となる。 —（4.5）

ダスト粒子の速度 : v [cm/s]
ガス密度 : ρ [g/cm³]

⊙ エプスタイン抵抗の依存性は簡単に求めることもできる。

<u>仮定</u>：ダストに入射したガスは運動量を全てダストに渡す。

ガス分子を速度 u_{th} で等方的に飛び回る粒子として扱う。

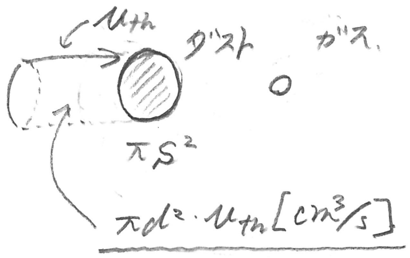
このとき全体のガスは v [cm/s] で流れているので

ガスが与える平均的な単位質量あたりの運動量は $\langle u_{th}+v \rangle \sim v$ [cm/s] となる。

$$F_{力} \sim \begin{bmatrix} \text{単位時間あたりにダストに入射する} \\ \text{ガスの体積 [cm}^3\text{/s]} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ガスが与える単位質量} \\ \text{あたりの運動量 [m/s]} \end{bmatrix} \times \left[\text{ガス密度 [g/cm}^3\text{]} \right]$$

$$\sim (\underbrace{\pi s^2}_{\text{ダストの断面積}} \cdot \underbrace{u_{th}}_{\text{ガスに対するダストの相対速度}}) \times v \times \rho \propto s^2 \rho u_{th} v \quad \left[\frac{g \cdot cm}{s^2} \right] \quad -(4.4)$$

となる。



ガス全体に対するダストの相対速度

ここで、ダストがもつ運動量：$m_d \cdot v$ $[g \cdot cm/s]$ と表せるので、

ダストがガスの運動量に馴染む時間スケール τ_s (stopping time) は

$$\tau_s = \frac{m_d \cdot v}{F_{力}} = \frac{\frac{4\pi \rho_s s^3}{3} v}{\pi s^2 \cdot \rho u_{th} v} \propto \frac{\rho_s s}{\rho u_{th}}$$ となる。 [ρ_s：ダストの内部密度 [g/cm³]

→ エプスタイン抵抗では、ダストのサイズ s によって τ_s は異なる。

—〃

ストークス抵抗

球と仮定したダストの半径 s が $s > l_g$ のとき、

MMSNモデルだと

$s \sim$ 数十cm程度

↓

レイノルズ数 (Reynolds number) : Re は

$$Re \equiv \frac{2sv}{v_m} \leq 1 \quad \text{となる。}$$

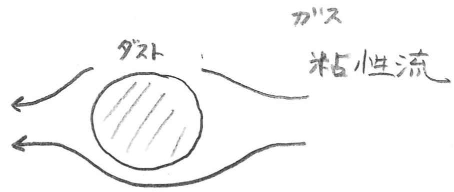
v : ガスの速度

v_m : 動粘性

$Re \leq 1$ のとき、ダストに対するガスは粘性としての近似が必要になる。

→ ダストからみるとガスは流体的に働く、

このときのガス抵抗（ストークス抵抗）は、



ガスの流れは粘性流体としてふるまう。

$$F_D = -\frac{C_D}{2}\pi s^2 \cdot V \quad \text{となる} \quad - (4.6)$$

ここで C_D は抵抗係数である。C_D はレイノルズ数に依存するため、

Weidenschilling (1977) で得られている C_D の表式は、

$$C_D \simeq \begin{cases} 24 Re^{-1} & (Re < 1) \\ 24 Re^{-0.6} & (1 < Re < 800) \\ 0.44 & (Re > 800) \end{cases}$$

である。

エプスタイン則とストークス則によるガス抵抗が等しくなるのは、$s = \frac{9}{4} l_g$ であり、

このとき、2つの抵抗則が遷移する。

⊙ ストークス抵抗の依存性は、簡単に求めることもできる。

粘性流体では、物体近傍の流体は、物体と一緒に動こうとする。

そのため、

$\longrightarrow$ 抵抗を受ける断面積が実効的に大きくなる。

そこで、ダスト半径 S の代わりに粘性境界層の厚み $\frac{d}{\sqrt{Re}}$ を用いると、

ストークス抵抗 F_D は、

$$F_D \sim \left[\begin{array}{l}\text{単位時間あたりにダストに入射する}\\ \text{ガスの体積 [cm}^3\text{/s]}\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{l}\text{ガスが与える単位質量}\\ \text{あたりの運動量 [cm/s]}\end{array}\right] \times \left[\text{ガス密度 [g/cm}^3\text{]}\right]$$

$$\sim \left[\pi\left(\frac{S}{\sqrt{Re}}\right)^2 \cdot v\right] \times v \times \rho$$

$$= \frac{\pi S^2 v^2 \rho}{Re}$$ となる。

ここで、レイノルズ数 $Re \sim \frac{dv}{\nu_m} \sim \frac{dv}{l_g \cdot v_{th}}$ とする。

v : ガスの流体速度

v_{th} : ガスの熱運動速度（$\sim$音速）

このときのダストがガスの運動量に馴染む時間スケール τ_s は

$$\tau_s = \frac{m_d \cdot v}{F_D} = \frac{(4\pi/3)\rho_s S^3 v}{\frac{\pi S^2 \rho v^2}{Re}} \sim \frac{\rho_s S}{\rho v} Re = \frac{\rho_s \cdot S^2}{\rho\, v_{th} \cdot l_g} \ \text{[s]}$$ となる。

ここで、平均自由行程 l_g は

$$l_g = \frac{1}{\sigma n_g} \propto \frac{1}{\rho}$$ なので、

σ : ガスの断面積 [cm^2]

n_g : ガスの数密度 [1/cm^3]

$$\tau_s \propto \frac{\rho_s \cdot S^2}{v_{th}}$$ となり、ガス密度 ρ に依存しない結果となる。

〃