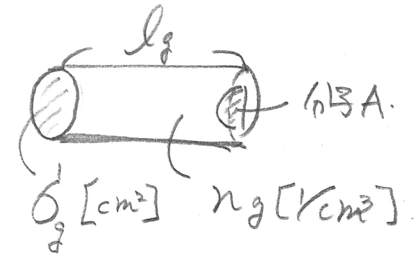
ゼミメモ.

距離rに依存したガスの平均自由行程 l_g の導出.



○円筒の体積

$$V = l_g \cdot \sigma_g \quad [cm^3]$$

○分子Aが他の分子に初めて衝突するときまでの長さ

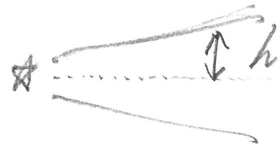
$$1 = n_g \cdot V = n_g\, l_g \cdot \sigma_g \longrightarrow l_g = \frac{1}{n_g \cdot \sigma_g} \quad [cm] \qquad \left(l_g = \frac{\mu m_H}{\rho_g \cdot \sigma_g} \right) \text{ -①}$$

$n_g = \dfrac{\rho_g\,[g/cm^3]}{\mu m_H\,[g]}$ より

ここで MMSNモデルより

○ガスの面密度 $\Sigma_g = 1700 \left(\dfrac{r}{1AU}\right)^{-1.5}$ [g/cm²] -②

○ガスの内部密度 $\rho_g = \dfrac{\Sigma_g}{\sqrt{2\pi}\,h}$ -③

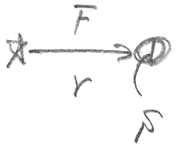


$h = \dfrac{c_s}{\Omega}$ [cm]

○温度の導出

$\boxed{\text{中心星}}$

$$L = F \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow F = \frac{L}{4\pi r^2} \quad [erg/s\,cm^2] \text{ -④}$$



$\boxed{\text{物体}}$

$$L_R = F \cdot \pi s^2 \text{ -⑤}, \quad L_E = \overset{[erg/s\,cm^2]}{\sigma T^4} \cdot \overset{[cm^2]}{4\pi s^2} \quad [erg/s]. \text{ -⑥}$$

④⑤より $L_R = \dfrac{L}{4\pi r^2}\pi s^2 = \dfrac{L s^2}{4 r^2}$ [erg/s].

$L_R = L_E$ より $\dfrac{L s^2}{4 r^2} = \sigma T^4 \cdot 4\pi s^2$

$$\longrightarrow T = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi r^2 \sigma}} \propto r^{-\frac{1}{2}}. \xrightarrow{\text{1AUの太陽温度が280kより}} T = 280\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-0.5}$$

となる -⑦

○角速度 Ω [rad/s] の導出

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \propto r^{-\frac{3}{2}}, \quad \Omega \sim \frac{2\pi}{365\times24\times60\times60} \sim 2\times10^{-7} \text{ より}$$

$$\Omega \sim 2\times10^{-7}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

となる -⑧

・音速の導出.

$$\frac{1}{2} m c_s^2 = \frac{1}{2} kT \longrightarrow c_s = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad \left(m = \mu m_H \sim 2.34 \times \frac{1}{6.0\times10^{23}} \right) \quad - ⑨$$

①、⑨より

$$c_s = \sqrt{\frac{1.38\times10^{-16}\times 6.0\times10^{23}}{2.34} \times 280 \times \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-0.5}} \sim 10^5 \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{1}{4}} [cm/s]$$

− ⑩

⑧、⑩より

$$h = \frac{c_s}{\Omega} = \frac{10^5 \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{1}{4}}}{2\times10^{-7}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{3}{2}}} \sim 5.0\times10^{11}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{\frac{5}{4}} \quad - ⑪$$

②、③、⑪より

$$\rho_g = \frac{\Sigma_g}{\sqrt{2\pi}\, h} \sim \frac{1.7\times10^{3}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{3}{2}}}{5.0\times10^{11}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{\frac{5}{4}}} \sim 6.0\times10^{-9}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{11}{4}} [g/cm^3].$$

− ⑫.

→正確には

$\sim 1.4\times10^{-9}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{11}{4}}$ となる。

したがって、

平均自由行程 l_g は

$$l_g = \frac{1}{n_g \cdot \sigma_g} = \frac{\mu m_H}{\rho_g \cdot \sigma_g} = \frac{0.4\times10^{-23}}{1.4\times10^{-9}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{11}{4}} \cdot 10^{-15}} \sim 3\times\left(\frac{r}{1AU}\right)^{\frac{11}{4}} [cm]$$

となる

$$\left[\begin{aligned} \sigma_g &= \pi s^2 \sim \pi (10^{-8} cm)^2 \\ &\sim 10^{-16} cm^2 \end{aligned} \right]$$

正確には、
水素の断面積は $10^{-15} cm^2$ となる.

(例)

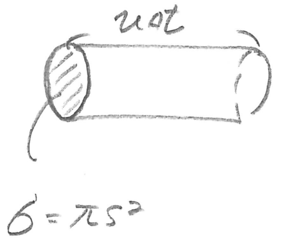
・$1AU \longrightarrow l_g \sim 3cm.$

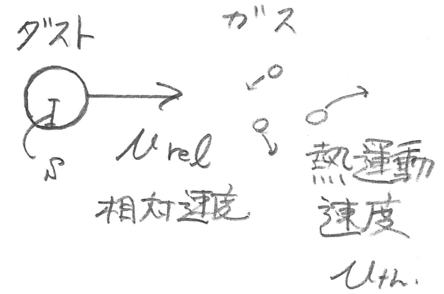
$$100AU \longrightarrow l_g \sim 3\times(10^2)^{\frac{11}{4}} = \underbrace{3\times(10)^{\frac{1}{2}}}_{\sim 3}\cdot(10)^5 \sim 9\times10^5 [cm]$$

$(= 9 [km])$

となる.

エプスタイン則の導出





○Δt間にダストがはく体積を考える.

$$V = \pi s^2 \cdot \underline{v} \cdot \Delta t$$

$(= v_{th} \pm v_{rel})$

○ガス分子と衝突する回数.

$$n_{gas} \times V = n\pi s^2 \cdot v\Delta t \longrightarrow$$

衝突頻度：$f\,[1/s]$

$$f = n\pi s^2 v$$

前面：$f_f = n\pi s^2 (v_{th} + v_{rel})$

後面：$f_b = n\pi s^2 (v_{th} - v_{rel})$

(仮定：$v_{rel} < v_{th}$)

○ダストがガスから受けとる運動量 p

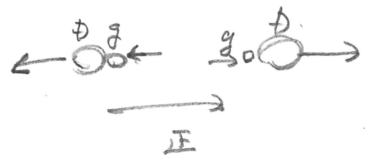
$$p = \mu m_H \times 2 v_{th}$$

← ガスが熱運動で衝突して、向きが逆になる。

ガス抵抗

$$F_D = p \times f$$

$$= -p \times f_f + p \times f_b = -p \times n\pi s^2 \times 2 v_{rel} = -4\mu m_H \overset{n}{\overset{\parallel}{\frac{\rho_{gas}}{\mu m_H}}} \pi s^2 v_{th} v_{rel}$$



$$\sim -\rho_{gas} \pi s^2 v_{th} v_{rel}$$

(正しくは、$-\frac{4}{3}\pi \rho_{gas} s^2 v_{th} \cdot v_{rel}$)

Stopping time : t_s

力積

$$F_D\, t_s = \underbrace{m_d}_{\text{dust mass}} \cdot u \longrightarrow t_s = \left| \frac{m_d \cdot u}{F_D} \right|$$

$$= \frac{3 m_d \cdot u_{rel}}{4\pi \rho_{gas} s^2 \cdot u_{th} \cdot u_{rel}}$$

$\downarrow$ $m_d = \frac{4\pi}{3} s^3 \rho_m$ より

$$= \frac{\rho_m \cdot s}{\rho_{gas} \cdot u_{th}}$$ となる //

ストークス数 : St

$$St = t_s \times \Omega_K = \frac{\rho_m \cdot s}{\rho_{gas} \cdot u_{th}} \Omega_K$$ より

$\downarrow$ $\rho_{gas} = \frac{\Sigma_{gas}}{\sqrt{2\pi}\, h}$, $u_{th} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, c_s$, $h = \frac{c_s}{\Omega_K}$ を代入すれば

$$St = \frac{\pi \rho_m \cdot s}{2 \Sigma_{gas}}$$ となる //

例) 円盤 (mmサイズのダスト) のストークス数

$\rho_m \sim 1\ g\,cm^{-3}$, $s \sim 1mm$, $\Sigma_g = 1700 \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-1.5} (g/cm^2)$ より,

$$St = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \times 0.1}{1700} \left(\frac{r}{1AU}\right)^{1.5} \sim 10^{-4} \times \left(\frac{r}{1AU}\right)^{1.5}$$ となる。