No. 1 (ホソク)
Date: 2017. 10. 2

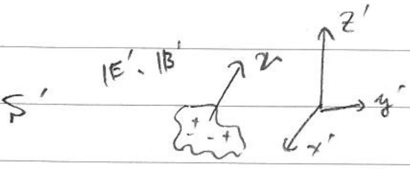
台灣大學

補足

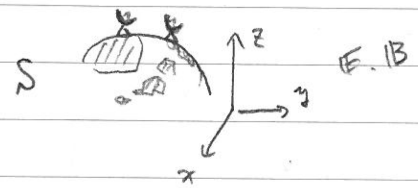
- 非相対論的なとき、Maxwell 方程式を

$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \qquad (13.53)$$

とできる理由



空間に固定された座標系：S
流体に　　　〃　　　　：S'
とする。



電場と磁場の関係は

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \qquad (13.44)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} \qquad (13.45)$$

$$\mathbb{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbb{E}_{\perp} + \frac{v}{c} \times \mathbb{B}_{\perp}\right) \qquad (13.46)$$

$$\mathbb{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbb{B}_{\perp} - \frac{v}{c} \times \mathbb{E}_{\perp}\right) \qquad (13.47)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (13.48)$$

ローレンツ変換
ムズそうなので
一旦割愛
直観的には
ローレンツ力
$\mathbb{E} = q\mathbb{E}'_{\perp} = q(\mathbb{E}_{\perp} + \frac{v}{c}\mathbb{B})$
静止してる　vでうごいてる

IE、IB が観測量で、求めたいものが IE'、IB'
S' 系からすると相対的に S 系が $-v$ で運動している
今、非相対論的な場合を考えるて、$v \ll c$ より
v^2/c^2 をムシできる。

よって $\mathbb{E}' = \mathbb{E} + \frac{v}{c} \times \mathbb{B}$ (13.49)

オームの法則

$$\boldsymbol{j} = \sigma \mathbb{E}' \qquad (13.50)$$

$$= \sigma\left(\mathbb{E} + \frac{v}{c} \times \mathbb{B}\right)$$

導電率が高いとき $\mathbb{E}' = \boldsymbol{j}/\sigma \sim 0$

（逆に、IE' が大きいと $\boldsymbol{j}$ は無限大になってしまう。）

$|\mathbb{E}'| \sim 0$ のとき、(13.49) より、

$$|\mathbb{E}| \approx \frac{|v|}{c} |\mathbb{B}| \qquad (13.51)$$

No. 2（ホソク）

Date: 2017. 10. 2

Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

l, t を典型的な長さ、時間とすると、

$$\frac{\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \approx \frac{|E|/ct}{|B|/l} \approx \frac{|v|}{c}\frac{|E|}{|B|}$$

(13.51) より $|E|/|B| \approx |v|/c$

よって $$\frac{\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \approx \frac{v^2}{c^2}$$

となるので、$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ の項はムシできる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (13.53)$$

・エネルギーの式の導出

熱力学第一法則

$$dQ = dU + p\,dV \quad (4.12)$$

$$\rho\, dq = \rho\, d\epsilon + p$$

dq, $d\epsilon$: 単位体積、単位質量あたりの（得られる）熱と内部エネルギー

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

連続の式は、

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

なので、 $$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

よって、 $$p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v}$$

No. 3（ホック）
Date: 2017、10、2

臺灣大學

ゆえに、

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\nabla\cdot v = -L \quad (4.13)$$

$$-L = \rho\frac{dq}{dt} \quad : \text{熱ゲイン}$$

L の中身を考える

温度の高いところから低いところへ、熱フラックスは伝わる。

$$F = -K\nabla T \quad (4.14)$$

フラックスは温度勾配に比例すると仮定

ガウスの発散定理

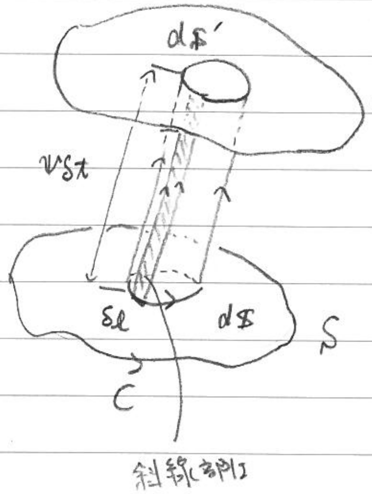
$$\underbrace{\oint F\cdot dS}_{\text{表面からの熱 loss}} = \underbrace{\int \nabla\cdot F\, dV}_{\text{単位体積あたりの熱 loss}}$$

よって

$$L = \nabla\cdot F = -\nabla\cdot(K\nabla T)$$

∘ $\frac{\partial Q}{\partial t} = \nabla\times(v\times Q)$ のとき $\frac{d}{dt}\int_S Q\cdot dS = 0$ の証明

$$\frac{d}{dt}\int_S Q\cdot dS = \int_S \frac{\partial Q}{\partial t}\cdot dS + \int_S Q\cdot\frac{d}{dt}(dS) \quad (4.44)$$



斜線部は

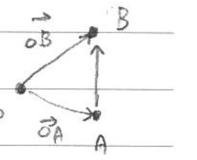
$\underbrace{\delta t\, v\times dl}$

$$dS' - dS = \delta t\oint v\times\delta l$$

イ゙：

dS → dS' の変化は、dS をつくる閉曲線上の1点1点が dS' にうつることをイ゙する。

右辺は、S上の微小な線分（点のまわり）から S'上へのベクトルを示している



$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ と同じ

No. 4 (ホップ)

Date: 2017.10.2

よって、

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{d\mathbf{S}' - d\mathbf{S}}{\delta t} = \oint \mathbf{v} \times \delta \mathbf{l}$$

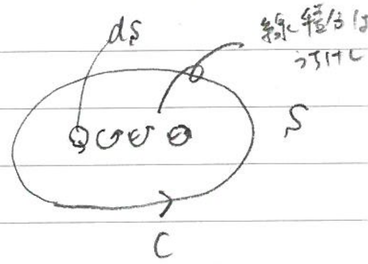
$$\therefore \int_S \mathbf{Q} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = \int \oint \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{v} \times \delta \mathbf{l}) = \int \oint (\mathbf{Q} \times \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{l}$$

$\int\oint$ のイミ：

1つめのインテグラルは、微小面積の足し合わせをイミしている。2つめの $\oint$ は微小面積の外周に沿った線積分。

全エリア S の内側の線積分は打ち消されるので、

結局、$\int_S \oint \to \oint_C$ となる



$$\therefore \int_S \mathbf{Q} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = \oint_C (\mathbf{Q} \times \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{l}$$

$$= \int_S [\nabla \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理

(4.44)に代入して

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q}) \right] \quad (4.45)$$

よって、

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q})$$ のとき

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

である。