

シャルコフスキーの順序関係の証明

訳：谷川清隆 (国立天文台)

補遺：山口喜博 (帝京平成大学)

平成 28 年 8 月 8 日

シャルコフスキーの論文は歴史的にも意義があり、またこの論文を理解することは教育的な効果もある。ここではシャルコフスキーの論文に書かれている証明を紹介する。最初に用語等についていくつかの注意をしておく。

注意.

- (1) 写像 T は具体的には $x_{n+1} = f(x_n)$ と記述される。ここで $f(x)$ は連続関数である。以下ではこれを写像関数と呼ぶ。
- (2) 原論文で使用されている用語「次数 3 のサイクル」は、周期 3 の周期軌道を意味する。次数 3 という用語は今日ではなじまないので周期 3 と表現する。同様にサイクルは周期軌道とした。 k -サイクルと言う表現は、周期 k の周期軌道と書く。 k の約数で k 未満の数を j としたとき、周期 k の周期軌道は周期 j の周期軌道でないことを意味する。
- (3) 一次の不動点 (a fixed point of first order) を単に不動点と書く。 $n (\geq 2)$ 次の不動点は周期 n の不動点と書く。
- (4) 原論文で使用されている定理 1 等の名称をそのまま利用する。論文は節に分かれていない。分かりにくいので適当に分けた。
- (4) 原論文における証明の流れを図 1 に示した。原論文では、定理 4 の後に定理 4 に従う具体的な写像の構成方法が述べられている。また定理 6 の後にも定理 6 に従う具体的な写像の構成方法が述べられている。順序関係の証明を優先し、これらの写像の構成方法は最後にまとめて紹介する。

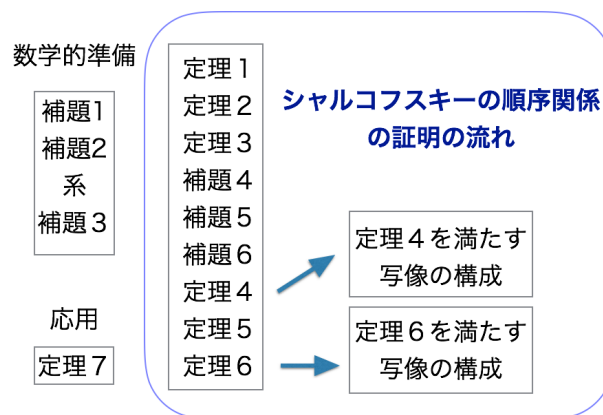


図 1: シャルコフスキーの論文の構成

1 シャルコフスキーの定理の紹介

論文の最初に書かれている内容を簡単にまとめておく.

任意の実線から実線への連続な写像において, 周期 n_1 の存在から周期 n_2 の周期の存在が示せる場合, $n_1 \preceq n_2$ と書く. これを周期 n_1 が周期 n_2 を先行させると読む.

ここで下記の出現順序関係が成立する.

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 3 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec \dots \\ \prec 3 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

[1] 出現順序関係には全ての自然数が一回だけ出現している.

[2] 周期軌道の定義. $f^k \alpha = \alpha$ を満たしかつ, $f^j \alpha \neq \alpha$ ($1 \leq j < k$) を満たすならば, α は周期 k の軌道点である. $T\alpha, T^2\alpha, \dots, T^{k-1}\alpha$ は, T^k における不動点である.

[3] この順序関係の証明は「中間値の定理」のみを利用して行う.

[4] 周期 1 の存在性. 写像 T の連続性から, 周期 $k > 1$ が存在するならば, 周期 1 の軌道点 (不動点) 存在することが導かれる (図.2). 周期が 2 以上の軌道点は図の 45 度線の上部和下部に必ず軌道点を持つ. 写像 T の連続性より写像関数 $f(x)$ は 45 度線と必ず交差する.

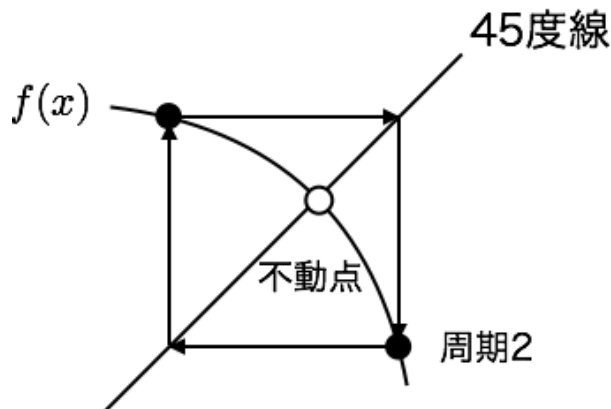


図 2: 周期 2 があれば不動点がある証明.

2 定理 1

定理 1. 写像 T において周期 k (> 2) の周期軌道があれば, 周期 2 の周期軌道がある [1].

証明. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ を周期 k の周期軌道の軌道点とする. $\alpha_{i+1} = T\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), $\alpha_1 = T\alpha_k$. ここで α_1 が軌道点の中で最小値であるとし, α_r が最大値であるとする.

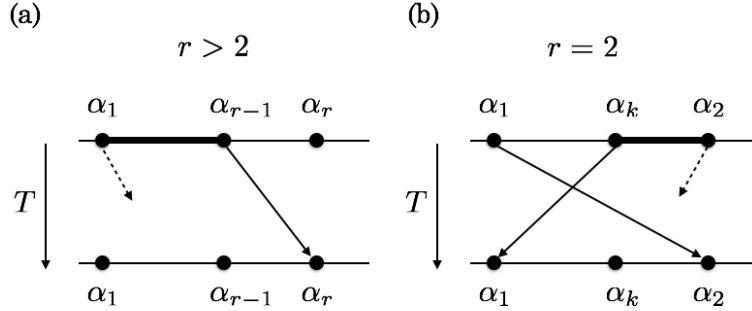


図 3: (a) $r > 2$ における, $\alpha_1, \alpha_{r-1}, \alpha_r$ の配置. 区間 $[\alpha_1, \alpha_{r-1}]$ の定義. (a) $r = 2$ における, $\alpha_1, \alpha_k, \alpha_r$ の配置. 区間 $[\alpha_k, \alpha_2]$ の定義.

$r > 2$ の場合, 区間 (α_1, α_{r-1}) を用意する (図 3(a)). $r = 2$ の場合, 区間 (α_k, α_r) を用意する (図 3(b)). これから $r > 2$ の場合の議論を行う. $r = 2$ の場合も同様に議論できる.

区間 (α_1, α_{r-1}) の中に不動点がある場合を最初に証明する. 区間 (α_1, α_{r-1}) の中にある不動点の最大の不動点を β としよう (図 4(a)). 区間 $(\beta, \alpha_{r-1}]$ に T の不動点は存在しない. 点 $x \in (\beta, \alpha_{r-1}]$ の像 Tx は x より右側にある ($x < Tx$). 下記の関係が成立する.

$$T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = T\alpha_k = \alpha_1 < \alpha_{r-1}.$$

β の右近傍に次の条件を満たす x が存在する. β の右近傍にある点 x に T^{k-r+2} を写像すると, 像 $T^{k-r+2}x$ は x の右にある (図 5(a)). 写像の連続性より, $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$ を満たす点 γ が区間 (β, α_{r-1}) にある. この点 γ は T の不動点でないから, 点 γ は周期 l ($1 < l \leq k-r+2$) の周期軌道点である. $1 < l \leq k-r+2$ は, $l = 2$ を含むから定理 1 は証明された.

不動点がない場合, $\beta = \alpha_1$ とする (図 4(b)). $\beta = \alpha_1$ の像 $T^j\alpha_1$ ($1 < j < k$) は α_1 の右にある. これは α_1 が最小であるから自明. $T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = T\alpha_k = \alpha_1 < \alpha_{r-1}$. $j = 2 = k-r+2$ として, 区間 (β, α_{r-1}) に $T^2\gamma = \gamma$ を満たす点があることがわかる. 区間 (β, α_{r-1}) に不動点はないから, γ は周期 2 の軌道点である. 以上で定理 1 は証明を終える.(Q.E.D.)

補足.

[1] 証明では不動点がある場合と不動点がない場合に分けた. ロジスティック写像における周期 5 (分岐図で $a = 3.74$ あたりを見よ) を例として紹介する. α_1 が最小値で, α_5 が最大値である. 考える区間は太い線で描いた. $\alpha_3 = T^2\alpha_1 > \alpha_1$ で, $\alpha_1 = T^2\alpha_4 < \alpha_4$ が満たされるからこの太い区間に $\gamma = T^2\gamma$ を満たす点がある. 不動点 Q は区間 (α_2, α_3) にある.

[2] 定理 1 の証明で出てきた論法について説明しよう. 区間 (a, b) の写像 T における像を $A = Ta > a$ とし, $B = Tb < b$ とする. よって, 図 7(a) が得られる. 図の A と B を連続につなぐ曲線は必ず 45 度線と交差する. 交差点は少なくとも一つある. A と B をつなぐ連続曲線はグラフである. 曲線と 45 度線との交点が写像 T の不動点である. 区間 (a, b) の写像 T における像を $A = Ta < a$ とし, $B = Tb > b$ とする (図 7(b)). この場合も A と B を連続につなぐ曲線は必ず 45 度線と交差する. 曲線と 45 度線とが交差することが中間値の定理に他ならない. シャルコフスキーの論文における定理 1 と補題 4,5,6 の証明では中間値の定理のみが使用される.

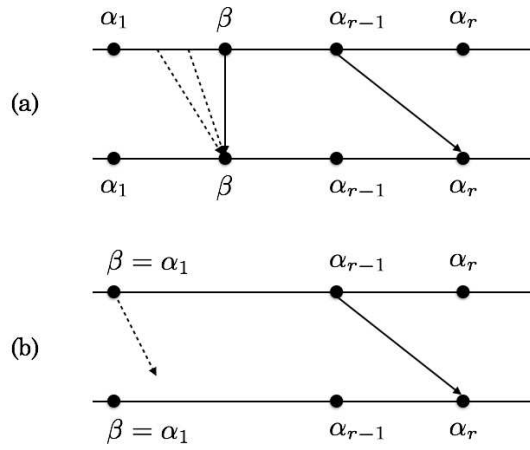


図 4: (a) 不動点がある場合の β の定義. (b) 不動点がない場合の β の定義.

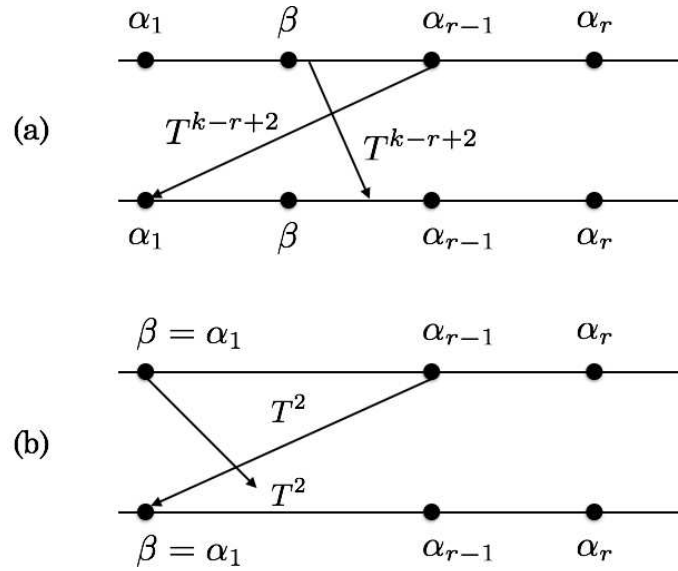


図 5: (a) 不動点がある場合. (b) 不動点がない場合.

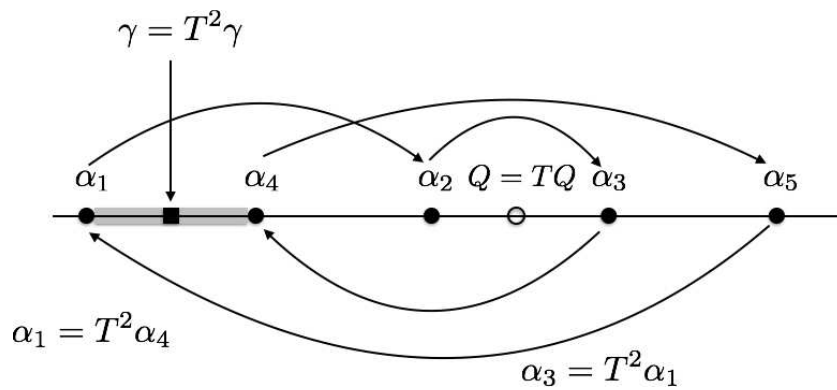


図 6: ロジスティック写像における周期 5. 分岐図で $a = 3.74$ あたりにある.

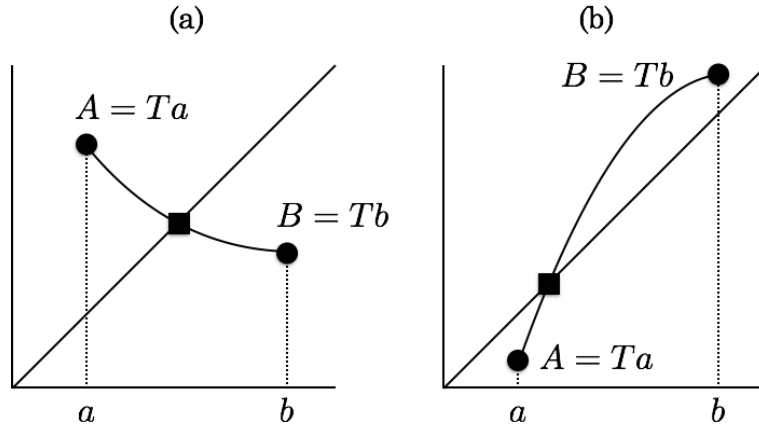


図 7: (a). $A = Ta > a$ で $B = Tb < b$. (b). $A = Ta < a$ で $B = Tb > b$. A と B を連続につなぐ曲線は区間 (a, b) において 45 度線と交差する.

3 基本的な結果

補題 1 から補題 3 までと, 定理 2 と定理 3 については簡単な結果である.

補題 1. α を周期 k の周期軌道点とする. $T^p\alpha = \alpha$ ならば, p は k の倍数である.

証明. $0 \leq r < k$ として, $p = ks + r$ とする. $T^p\alpha = T^r(T^k)^s\alpha = T^r\alpha = \alpha$. もし $0 < r < k$ ならば, α は周期 r の周期軌道点である. よって矛盾. $r = 0$ が得られる.(Q.E.D.)

補題 2. 点 α が T の周期 $k = 2^n \cdot l$ の周期軌道点とする. l は奇数とする. ここで q を以下のようにする.

$$q = 2^{n-m} \cdot l \quad (n \geq m), \quad q = l \quad (n \leq m).$$

つまり, α は写像 $S = T^{2^m}$ の周期 q の周期軌道点である.

証明. $\alpha = S^q\alpha = T^{2^mq}\alpha$ である. よって

$$2^m \cdot q = 2^n \cdot l \cdot i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たす最小の i を決めると q が得られる. $n \geq m$ ならば 2^n は 2^m で割り切れる. よって $i = 1$. これより $q = 2^{n-m} \cdot l$ が得られる. $n \leq m$ ならば $(2^n \cdot l \cdot i)/2^m = l \cdot i/2^{m-n}$. よって $i = 2^{m-n}$ とおけば, $q = l$ が得られる. $n = m$ の場合は, $q = l$ である. (Q.E.D.)

例. $n = 5, l = 5. k = 2^5 \cdot 5 = 160. m = 4$ ならば, $2^4 = 16. 2^5$ は 2^4 で割れるから, $i = 1. q = 2^5 \cdot 5/2^4 = 10$. これは 160 と 16 の最大公約数としても得られる.

$m = 6$ ならば, $q = 2^5 \cdot 5 \cdot i/2^6 = 5 \cdot i/2. i = 2$ として, $q = 5$. これは $k = 160$ と 64 の最小公倍数である 320 を求め, $320/64 = 5$ としても得られる.

系. 補題 2 の仮定のもとで, $l > 1$ ならば α は写像 S の 2 より大きい周期の軌道点である.

補題 3. α が写像 T の周期 2^m の周期軌道点である必要十分条件は, $T^{2^m}\alpha = \alpha$ かつ $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$ である.

証明. 必要性は自明. よって十分性を証明する. $T^{2^m}\alpha = \alpha$ より, α は $0 \leq j < m$ に対して周期 2^j の周期軌道点である. これは補題 1 から得られる.

$$T^{2^{m-1}}\alpha = (T^{2^j})^{2^{m-j-1}}\alpha \neq \alpha.$$

よって, $j < m - 1$ ならば, $T^{2^j} \alpha \neq \alpha$. (Q.E.D.)

定理 2. T が周期 2^n ($n > 1$) の周期軌道を持てば, 周期 2^i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) の周期軌道がある [2].

証明. α を周期 2^n の周期軌道点であるとする. $i \leq m < n$ として, 写像 $S = T^{2^{m-1}}$ を考える. 補題 2 より α は S の周期 2^{n-m+1} の周期軌道点である. 定理 1 より S には周期 2 の周期軌道点 β がある. つまり $S^2 \beta = \beta, S\beta \neq \beta$. よって, $S^2 = T^{2^m}$ より, $T^{2^m} \beta = \beta, T^{2^{m-1}} \beta \neq \beta$. (Q.E.D.)

定理 3. k を 2 のべき乗でないとする. T が周期 k の周期軌道を持てば, 周期 2^j ($i = 1, 2, \dots$) の周期軌道がある [2].

証明. α を周期 k の周期軌道点であるとする. $m \geq 1$ として, $S = T^{2^{m-1}}$ とする. 補題 2 より, α は S に関して周期が 2 より大きい軌道点である. 定理 1 より S には周期 2 の周期軌道点 β が存在する.

$$S^2 \beta = \beta, S\beta \neq \beta.$$

$$T^{2^m} \beta = \beta, T^{2^{m-1}} \beta \neq \beta.$$

よって β は T の周期 2^m の周期軌道点である. (Q.E.D.)

4 L 機構

周期 k の一つの周期軌道を下記のように書く.

$$\alpha_1, \alpha_2 = T\alpha_1, \dots, \alpha_k = T\alpha_{k-1}.$$

ここで軌道点 α_i の像 $T\alpha_i$ が右へ動く点の集合を M_1 とする. つまり $\alpha_i \in M_1, \alpha_i < T\alpha_i$. M_1 に含まれる軌道点の最大値を α^{M_1} とする.

次に軌道点 α_i の像 $T\alpha_i$ が左へ動く点の集合を M_2 とする. つまり $\alpha_i \in M_2, \alpha_i > T\alpha_i$. M_2 に含まれる軌道点の最小値を α_{M_2} とする.

$\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ と $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ の可能性がある. $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ の場合は, 補題 5 を見よ. ここでは, $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ の場合を検討する.

補題 4. $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ ならば, 写像 T は任意の周期の周期軌道を持つ.

証明. α_i は M_1 に含まれかつ α_{M_2} より大きいとする. この条件を満たす α_i の像 $T\alpha_i$ の中で最大値を与える軌道点 α_i を β とする. ここで区間 (α_{M_2}, β) を用意する. $T\beta > \beta$ で, $T\alpha_{M_2} < \alpha_{M_2}$ である. よってこの区間に T の不動点の集合は空でない閉集合. 区間 (α_{M_2}, β) にある不動点の最大のもを γ とする. $T\gamma = \gamma$. 区間 (γ, β) にある点 x の像 Tx は右へ動く. つまり $Tx > x$. これは β の像が右へ動くからである.

補足を述べておこう. $\beta < T\beta$ かつ $T^2\beta < T\beta$ であるから, 区間 $(\beta, T\beta)$ に不動点がある. これは論文には書かれてない. 図 8 の写像のグラフでは, この不動点は β の右にある.

区間 $(\gamma, T\beta]$ には元の周期軌道の軌道点が含まれている. 例えば, β と $T\beta$. これら以外に $T\delta > T\beta$ または $T\delta < \gamma$ を満たす元の周期軌道の軌道点が少なくとも一つある. このような点がないとすると区間 $(\gamma, T\beta]$ にある元の周期軌道の軌道点から出発した軌道は, 区間 $(\gamma, T\beta]$ から出られない.

$T\delta > T\beta$ を満たすことは不可能である. δ が M_2 に含まれるならば, $T\delta < \delta < T\beta$. δ が M_1 に含まれるならば, β の定義から $T\delta < T\beta$ である. よって区間 $(\gamma, T\beta]$ には $T\delta < \gamma$ を満たす点 δ がある ($\delta = T\beta$ もありうる).

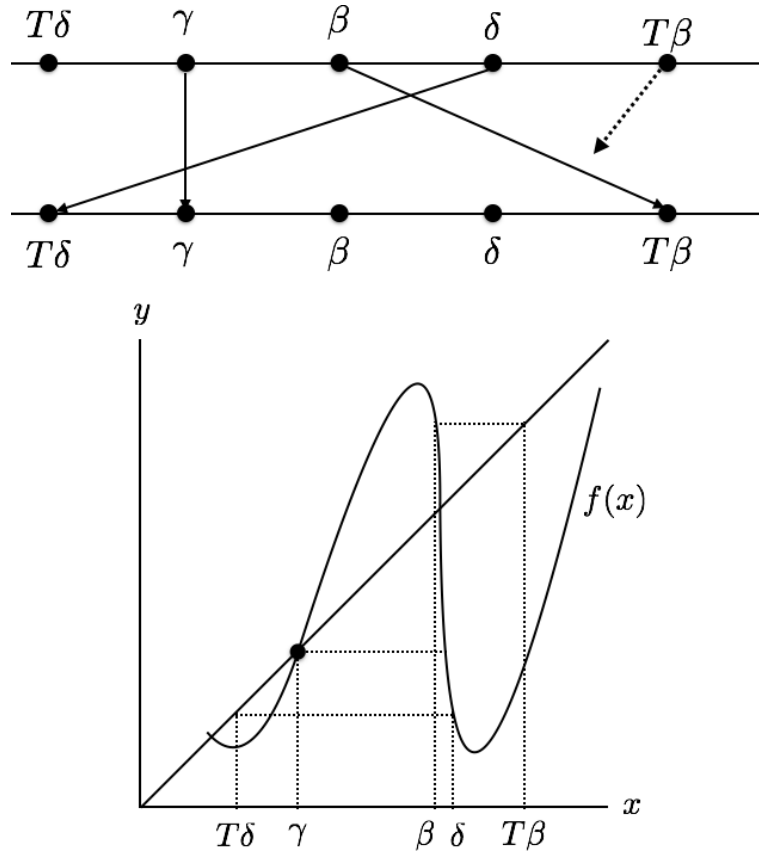


図 8: L-機構 (上図) と L-機構を満たす写像関数 (下図). 下図は原論文の Fig.1.

区間 $(\gamma, \beta]$ に含まれる x の像 Tx は右へ移動するから, δ は区間 $(\beta, T\beta]$ にある.

この議論がわかりにくい. 区間 $(\gamma, T\beta)$ に上記の性質を満たす δ がない場合, この場合は $\delta = T\beta$ とすればよい. この場合は, $T^2\beta < \gamma$ を満たさないと, 軌道は, 区間 $(\gamma, T\beta]$ から出られない. 次に 区間 $(\gamma, T\beta)$ に上記の性質を満たす δ があれば, $T^2\beta < \gamma$ を満たしても, 満たさなくてもよい.

ここで得られた幾つかの機構まとめよう.

$$T\gamma = \gamma, Tx > x (x \in (\beta, T\beta]), T\delta < \gamma.$$

これを “L-機構” と呼ぶ (図 8). L-機構を示したグラフについて説明しよう. 不動点 γ が存在するから写像関数 $f(x)$ は点 γ で交差している. 点 β は点 γ の右にあり, その像がさらに β よりさらに右にあることより, $f(x)$ は区間 (γ, β) では 45 度線より上方にあることがわかる. 次に β の右にある点 δ の像は δ の左にあるから, $f(x)$ は δ のあたりでは 45 度線より下方にあることがわかる. 後は γ の位置と $T\delta$ の位置を考慮すると図 8 の関数 $f(x)$ の形状が得られる. この図から $T\beta$ の像 $T^2\beta$ について, $T^2\beta < T\beta$ であることがわかる.

L-機構があれば全ての周期の周期軌道があることをこれから証明する. $T(\gamma, \beta] \supset (\gamma, T\beta]$ であるから, $Tx = \delta$ を満たす x が区間 $(\gamma, \beta]$ にある. 複数ある場合, x の最小のものを δ_1 とする. 図 9 を見よ. 同様にして $T(\gamma, \delta_1] \supset (\gamma, \delta]$ であるから, $Tx = \delta_1$ を満たす δ が区間 $(\gamma, \delta_1]$ にある. x の最小のものを δ_2 とする. この手順を続けると

$$\gamma < \cdots < \delta_i < \delta_{i-1} < \cdots < \delta_2 < \delta_1 < \delta$$

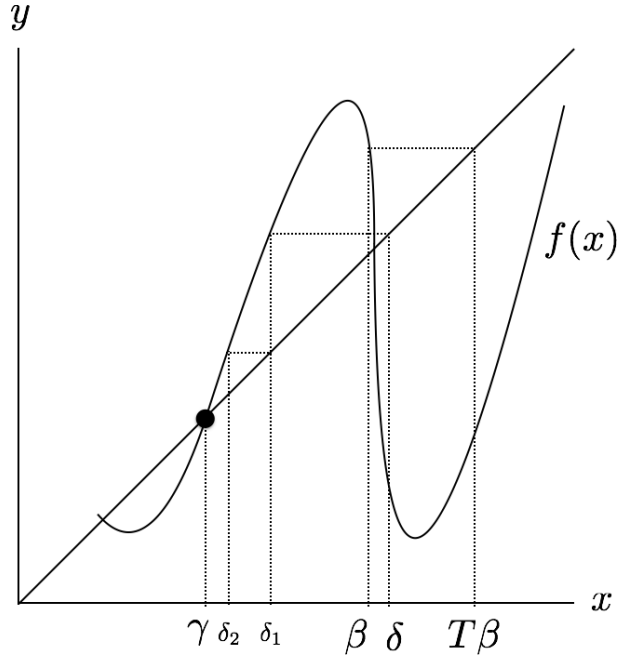


図 9: $\delta = f(\delta_1)$, $\delta_1 = f(\delta_2)$, $\delta_2 = f(\delta_3)$ の配置.

が得られる. ただし, $T\delta_i = \delta_{i-1}$. $T^i\delta_{i-1} = T\delta$, $T^i\delta_i = \delta$ である. 従つて, $T^i\delta_i > \delta_i$ で $T^i\delta_{i-1} < \delta_{i-1}$ である. これより $T^i\rho_i = \rho_i$ を満たす点 ρ_i が区間 (δ_i, δ_{i-1}) にある. ところが $T^j\rho_i \neq \rho_i$ ($1 \leq j < i$) であるから, ρ_i は周期 i の周期軌道点である.

実際, $T^j(\gamma, \delta_{i-1}] = (\gamma, \delta_{i-j-1}] \subset (\gamma, \delta_1]$ ($j < i-1$) である. 区間 $(\gamma, \delta_1]$ に $Tx > x$ を満たす点 x があるから, 区間 $(\gamma, \delta_{j-1}]$ に $T^jx > x$ ($1 \leq j < i$) を満たす点 x がある. つまり, 区間 $(\gamma, \delta_{j-1}]$ には周期 j ($1 \leq j < i$) の周期軌道点はない. (Q.E.D.)

5 M 機構

図.6 の場合,

$$M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\},$$

$$M_2 = \{\alpha_3, \alpha_5\}.$$

$\alpha^{M_1} = \alpha_2$, $\alpha_{M_2} = \alpha_3$. 明らかに, $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ が成り立つ. $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ が成り立つ場合を調べる.

補題 5. $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ で, α とその像 $T\alpha$ がともに M_1 に含まれるとする. このような点 α が存在するならば, T には k より大きな全ての奇数を周期とする周期軌道と, 任意の偶数周期の周期軌道がある.

注意: 補題 5 は, α とその像 $T\alpha$ がともに M_2 に含まれる場合にも成立する. 補題 5 の証明の一部が補題 6 に持ち越されている.

$\xi \in M_1$ とし, さらに $\xi \geq T\alpha$ を満たすとする. この点の像を順々に追い, 初めて $T^j\xi \leq \alpha$ となったとする. ここで別の ξ から初めて同様にして回数 j を決める. j として最小になる ξ を β と名付け, 最小の回数を n とする. まとめると

$$\beta \in M_1, \beta \geq T\alpha, T^i\beta > \alpha \ (i < n), T^n\beta = \gamma \leq \alpha.$$

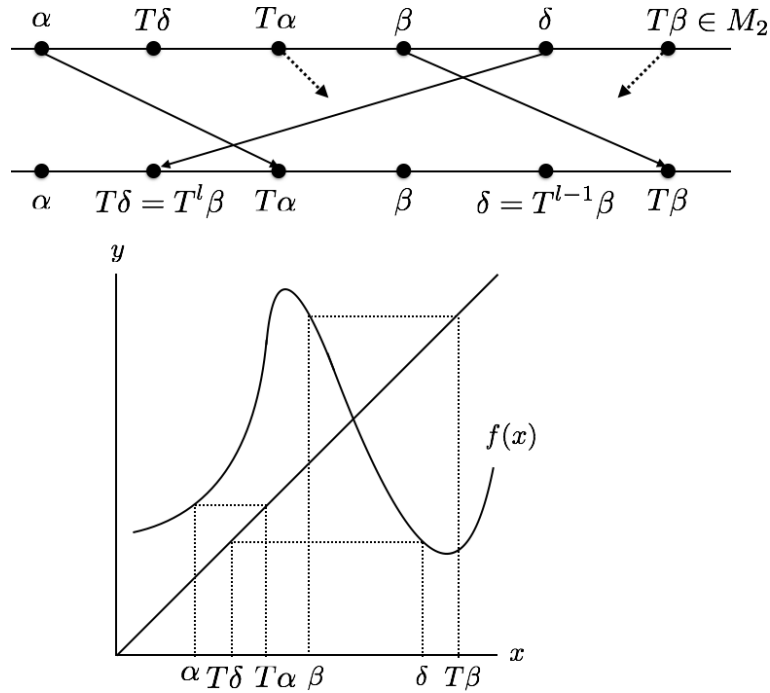


図 10: 上図は M-機構. 下図は M-機構を満たす写像関数. $\alpha < T\alpha, \beta < T\beta, T\alpha \in M_1$ だから, 写像関数 $f(x)$ は α から β あたりまでは 45 度線の上にある. $T\delta < \delta$ で $T\beta \in M_2$ より, 写像関数 $f(x)$ は δ から $T\beta$ あたりまでは 45 度線の下部にある. 原論文の Fig.2.

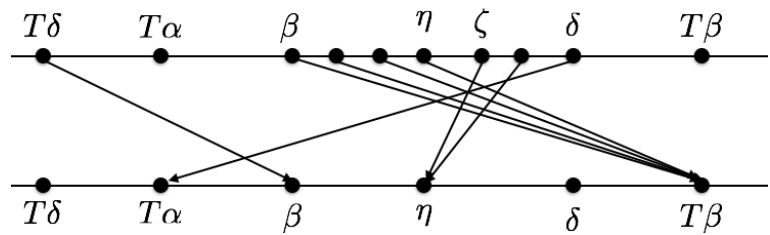


図 11: 点 η, ζ の定義.

β から出発する点列 $T\beta, T^2\beta, \dots$ で最初に M_1 に入る点を $T^l\beta$ とする. $T^l\beta < T\alpha$ である. $T^l\beta = T\alpha$ が成り立つと, $T^{l-1}\beta = \alpha$ となる. これは l が最小であることに反する. $T^l\beta > T\alpha$ とすると, $T^l\beta$ を改めて β とおけば, より小さな n が得られる. これも n の最小性に反する.

$T\beta > \beta \geq T\alpha$ であるから, $T\beta$ は M_2 に属する. これより $l \geq 2$ が得られる. 実際, $T\beta$ は M_1 に属するとすると, $T\beta < T^2\beta$ となり回数が増える. よって n の最小性に反する.

ここで $\delta = T^{l-1}\beta$ とおくと, $T\delta (= T^l\beta) < T\alpha$. つまり $\delta \in M_2$. $\beta \in M_1$ で $T\beta \in M_2$ であるから, δ は β より右にある. つまり $\delta \in (\beta, T\beta]$. これらの関係を図 10 に描いた. この機構を “M-機構” と呼ぶ.

区間 $[\beta, \delta]$ において $Tx = T\beta$ を満たす点のうち最大の点を η とおく (図 11). $\eta = \beta$ もありうる. 区間 (η, δ) にある点 x について, $Tx < T\beta$ が成り立つ. もし成り立たないとすると, 区間 (η, δ) に $Tx = T\beta$ を満たす点 x があることになる.

$T\eta = T\beta \geq \delta$ であり, $T\delta < T\alpha \leq \eta$ より, 区間 $[\eta, \delta]$ に $Tx = \eta$ となる点がある. これらの中で最小の点を ζ とする (図 12). $T\eta = T\beta$ で, $T\zeta = \eta$ であるから, 区間 (η, ζ) に $\eta < Tx < T\beta$ を満たす点 x が存在する. 区間 $[\eta, \zeta]$ において $Tx = \zeta$ を満たす最大の点を ξ とする (図 13). つまり,

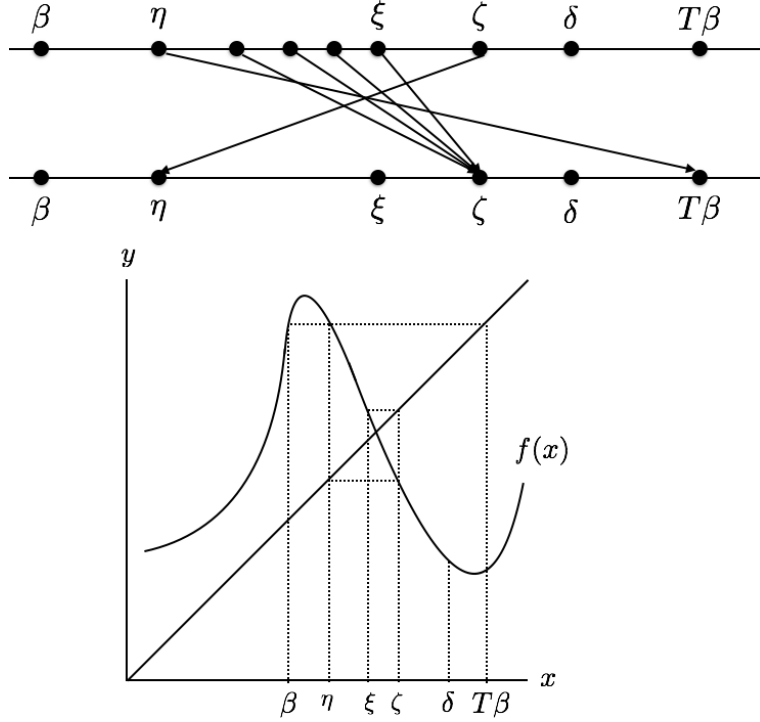


図 12: 点 ξ の定義並びに点 η, ζ, ξ の関係. 下図は原論文の Fig.3.

区間 (ξ, ζ) の中に, $\eta < Tx < \zeta$ を満たす点 x が存在する. $T^2\xi = \eta < \xi$, $T^2\zeta = T\beta > \zeta$ であるから, 区間 (ξ, η) に $\eta < T^2x < T\beta$ を満たす点 x が存在する. 以上より区間 (ξ, η) には T^2 の不動点がある. これらのうち最小の点を ω_1 とし, 最大の値を ω_2 とする. よって, $T\omega_1 = \omega_2$, $T\omega_2 = \omega_1$ が成り立つことを示す.

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ならば, ω は T の不動点である. $\omega_1 \neq \omega_2$ ならば, $T^2(T\omega_2) = T\omega_2$. よって $T\omega_2$ は周期 2 の周期軌道点. ω_1 は最小の点であるから, $\omega_1 \leq T\omega_2$. 言い換えると $T\omega_2$ は区間 (ξ, ω_1) には存在しない. 同様にして $T\omega_1 \leq \omega_2$. $T\omega_1$ は区間 (ω_2, ζ) には存在しない. つまり $T(\xi, \omega_1) \supset (\omega_2, \zeta)$ であるから, 区間 $[\xi, \omega_1]$ に $Tx = \omega_2$ を満たす点 x がある. ところが区間 $[\xi, \omega_1]$ の点 x について, $T^2x \leq x$ が成り立つ. つまり, $x \geq T^2x = T\omega_2 \geq x$. $T^2x = x$ である. これより $x = \omega_1$ が得られる. 更に $T(\xi, \omega_1) = (\omega_2, \zeta)$, $T(\omega_2, \zeta) = (\eta, \omega_1)$ である (図 14).

L-機構を利用して, 点列 θ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) と κ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) を構成する (図 15,16).

$$\omega_2 < \dots < \theta_2 < \theta_1 < \theta_0 = \zeta, (T^2\theta_i = \theta_{i-1}, T^2(\omega_2, \theta_i) = (\omega_2, \theta_{i-1})).$$

$$\xi = \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \omega_1, (T^2\kappa_i = \kappa_{i-1}, T^2(\kappa_{i1}, \omega_1) = (\kappa_{i-1}, \omega_1)).$$

$$T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = T^{2(i-1)+1}(\omega_2, \theta_{i-1}) = \dots = T(\omega_2, \theta_0) = (\eta, \omega_1).$$

$$T^{2i+2}(\kappa_i, \omega_1) = T^{2(i-1)+2}(\kappa_{i-1}, \omega_1) = \dots = T^2(\kappa_0, \omega_1) = (\eta, \omega_1).$$

以上より, $T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = (\eta, \omega_1)$ と $T^{2i+2}(\kappa_i, \omega_1) = (\eta, \omega_1)$ が成り立つ.

$T\alpha < \eta$, $T\eta = T\beta > \xi$ であるから, 区間 (α, η) には T による像が

$$\omega_1, \omega_2, \eta, \theta_i, \kappa_i (i = 0, 1, 2, \dots)$$

となる点が存在する (図 17). すなわち

$$T\lambda_1 = \omega_1, T\lambda_2 = \omega_2,$$

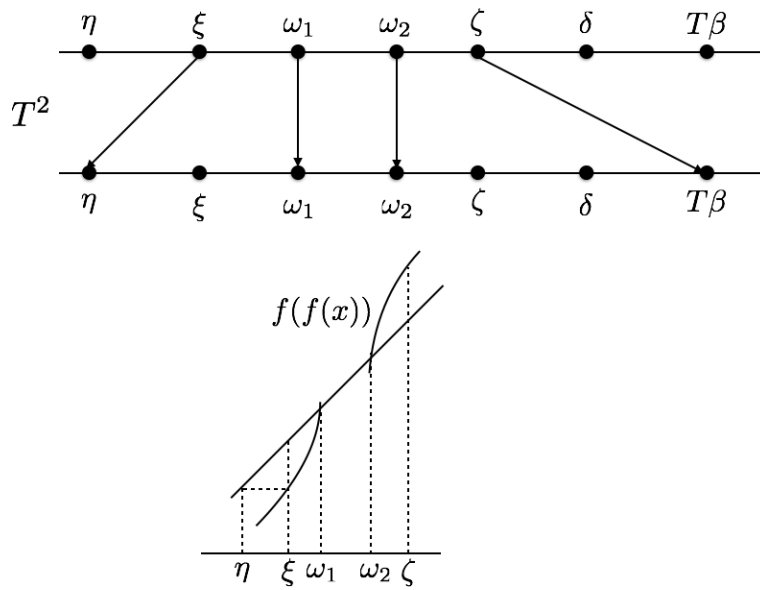


図 13: 点 ω_1 と ω_2 の関係. 下図は原論文の Fig.4.

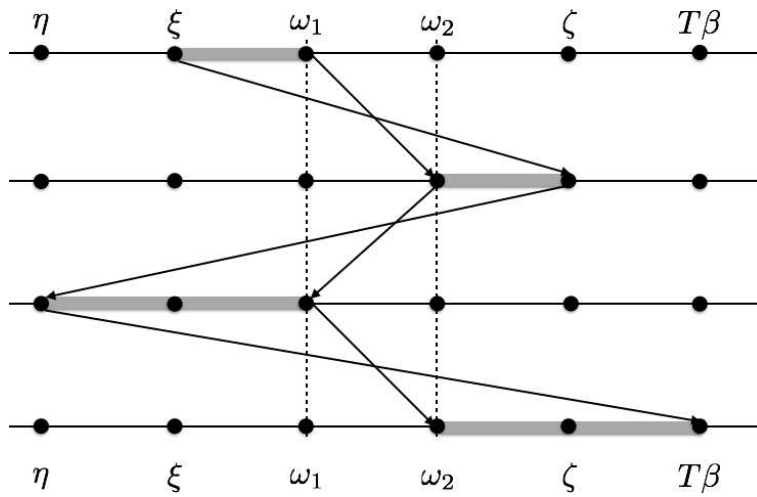


図 14: 区間の移され方.

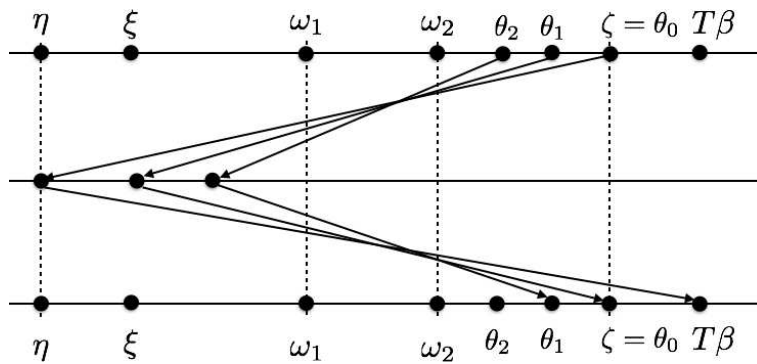


図 15: 点 θ_i の移され方.

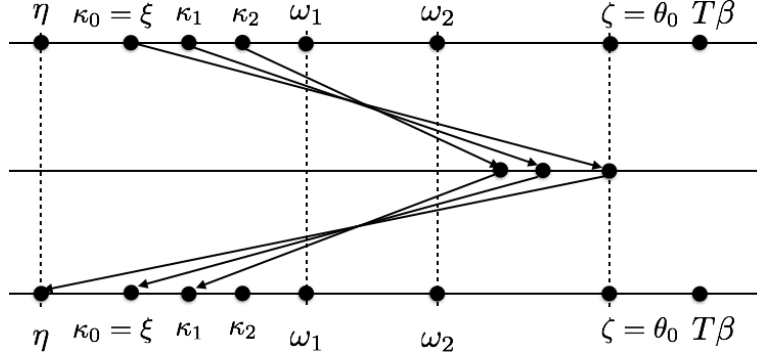


図 16: 点 κ_i の移され方.

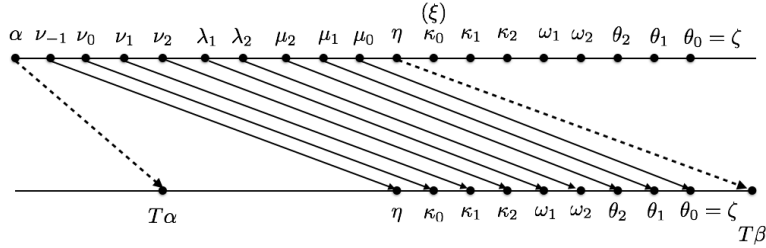


図 17: ν_{-1} 等の定義と配置.

$$T\mu_0 = \theta_0 = \zeta, T\nu_{-1} = \eta,$$

$$T(\nu_{-1}, \lambda_1) = (\eta, \omega_1), T(\lambda_2, \mu_0) = (\omega_2, \zeta).$$

さらに

$$T\mu_i = \theta_i, T(\lambda_2, \mu_i) = (\omega_2, \theta_i),$$

$$T\nu_i = \kappa_i, T(\nu_i, \lambda_1) = (\kappa_i, \omega_1).$$

これらより

$$T^{2i+2}\mu_i = \eta, T^{2i+2}(\lambda_2, \mu_i) = (\eta, \omega_1),$$

$$T^{2i+3}\nu_i = \eta, T^{2i+3}(\nu_i, \lambda_1) = (\eta, \omega_1).$$

図.18 も参照のこと.

$T\eta = T\beta$ であるから, $T^n\eta = \gamma$ である (n は $T^n\beta = \alpha$ を満たす最小の正数). 周期 k の周期軌道点 α_i から別の周期軌道点に移るにあたっては高々 $k-1$ 回写像を作用すればよい. 従って $n \leq k-1$ である. ただし, $\gamma = \alpha$ で $\beta = T\alpha$ の場合は, $n = k-1$ である.

k より大きな奇数周期軌道があることを示そう. n が偶数の場合. $s = n + 2i + 3$ ($i \geq 0$) は奇数. $i = 0$ ならば, $s = n + 3$. $n \leq k-1$ より, $s \leq k+2$. これより s は k を超える最小の奇数より大きくはならない. (これは, 「 s は k を超える最小の奇数と等しくなることはできるが, 最小の奇数の次の奇数よりは小さい」という意味である.) 任意の i (≥ 0) に対して周期 s の周期軌道があることを示せば, n が偶数の場合の証明が与えられたことになる.

$$T^s\lambda_1 = T^{n+2i+3}\lambda_1 = T^{n+2i+2}\omega_1 = \omega_1 > \lambda_1,$$

$$T^s\nu_i = T^{n+2i+3}\nu_i = T^{n+2i+2}\kappa_i = T^n < \gamma_i.$$

これらより $T^s(\nu_i, \lambda_1) \subset (\nu_i, \lambda_1)$. 区間 (ν_i, λ_1) に $T^s x = x$ を満たす点 x がある. これらの点のうち最大の点を ρ_s とする (図 19).

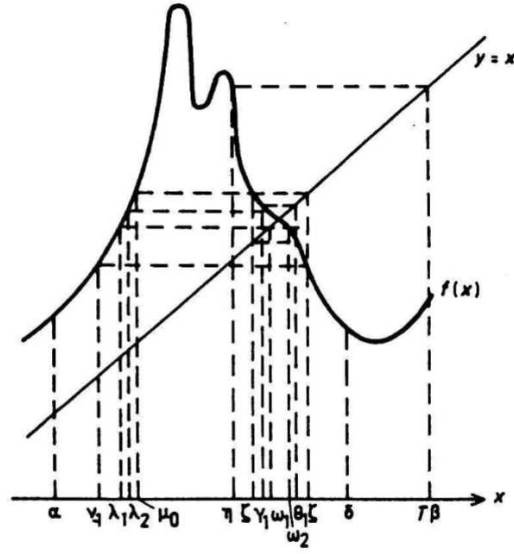


図 18: 原論文の Fig.5.

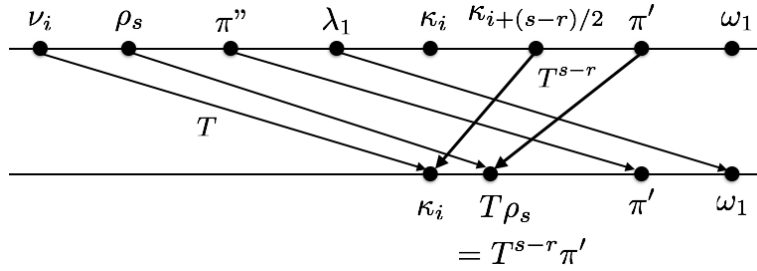


図 19: 点 ρ_s , π'' , λ_1 等の移され方.

次に ρ_s が周期 s の周期軌道点であることを示す. s は奇数であるから, ρ_s は奇数周期軌道点である. ここで $r < s$ を満たす奇数とする. ρ_s が周期 r の周期軌道点であると仮定する. $T\rho_s \in (\kappa_i, \omega_1)$ で, $T^{2m}(\kappa_j, \omega_1) = (\kappa_{j-m}, \omega_1)$. $(s-r)$ は偶数であることに注意する. $T^{2(s-r)/2}(\kappa_{i+(s-r)/2}, \omega_1) = (\kappa_i, \omega_1)$. よって, $T^{s-r}\pi' = T\rho_s$ を満たす点 π' が区間 $(\kappa_{i+(s-r)/2}, \omega_1)$ にあることがわかる. $T^2x < x$ を満たす点 x が区間 (κ_j, ω_1) ($j = 0, 1, 2, \dots$) にある. また, $T^2\pi' < \pi' < \omega$ であるから, T^2 を順次作用すると, 左へと移されていく. $T^{s-r} = (T^2)^{(s-r)/2}$ より, $T\rho_s < \pi' < \omega_1$. よって, $T\pi'' = \pi'$ を満たす点 π'' が区間 (ρ_s, λ_1) にある.

$$T^s\pi'' = T^{s-1}\pi' = T^{r-1}(T^{s-r}\pi') = T^{r-1}(T\rho_s) = T^r\rho_s < \pi''.$$

$T^s\rho'_s = \rho'_s$ を満たす点 ρ'_s が区間 (π'', λ_1) にあることがわかる. ρ_s が区間 (ν_i, λ_1) にありかつ, $T^s x = x$ を満たす最大の点であることに反する. 以上で ρ_s が周期 s の周期軌道点であることを示された.

n が奇数の場合, 点列 $\{\nu_i\}$ を利用して同様の議論を行えばよい.

次に任意の偶数周期の周期軌道の存在を示す. n が偶数とする. 点列 $\{\mu_i\}$ を利用する. $s = n + 2j + 2$ ($i \geq 0$) とする. $s-1$ は奇数であることに注意.

$$T^s\lambda_2 = T^{s-1}\omega_2 = \omega_1 > \lambda_2, \quad T^s\mu_i = T^{n+2i+2}\mu_i = T^n\eta = \gamma < \mu_i.$$

$T^s x = x$ を満たす点 x が区間 (λ_2, μ_i) にある. これらの x の中のひとつを σ_s とする. ここで, $s \geq 2k - 2$ の場合, σ_s が周期 s の周期軌道点であることを示そう. $T^s \sigma_s = \sigma_s$ より, σ_s は周期 s の周期軌道点であるか, または s の約数 $r (< s)$ を周期としてもつ周期軌道点である. $r \leq s/2$ である. $i \leq j \leq s/2$ において, $T^j \sigma_s \neq \sigma_s$ ならば σ_s は周期 s の周期軌道点である. ところで $j < s - n$ である限り, $T^j(\lambda_2, \mu_i) \subset (\eta, \zeta)$ である. 区間 (λ_2, μ_i) にある点 x とその像 T^j について, $x < \eta < T^j x$ ($1 \leq j \leq s - n$) が成り立つ. だから $s - n \geq s/2$ ならば, σ_s は周期 s の周期軌道点である. $n \leq k - 1$ より, $s \geq 2k - 2$. この条件が成り立つならば, $s - n \geq s/2$ は必ず成り立つ.

n が奇数の場合, 点列 $\{\nu_i\}$ を利用して同様の議論を行えばよい. この場合も, $s \geq 2k - 2$ なる偶数周期 s の周期軌道点がある.

$2k - 2$ より小さな偶数周期を持つ周期軌道の存在は次の補題 6 で証明される. 補題 5 では k より大きな奇数周期の周期軌道の存在が示されているので全ての偶数周期の周期軌道が存在することが導かれた. (Q.E.D.)

補題 6. T に奇数周期の周期軌道があれば, 全ての偶数周期の周期軌道が存在する.

証明. $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ なら, 全ての周期の周期軌道が存在する (補題 4). よってここでは $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ とする. 補題 2 より, k が奇数ならば T において奇数周期の周期軌道は $S = T^2$ でも周期 k の周期軌道である.

T において M_1 と M_2 を構成したように, S においても同様の集合 M_1^2 と M_2^2 を構成する. $\alpha_i < T^2 \alpha_i$ ならば, α_i は M_1^2 に含まれ, $\alpha_i > T^2 \alpha_i$ ならば, α_i は M_2^2 に含まれる. また M_1^2 の最大値を $\alpha^{M_1^2}$ と書き, M_2^2 の最小値を $\alpha_{M_2^2}$ と書く. それでは S が全ての周期の周期軌道を持つことを証明しよう.

$\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ であるから, T は区間 $(\alpha^{M_1}, \alpha_{M_2})$ に不動点 γ を持つ. 当然, γ は S の不動点でもある. $\alpha^{M_1^2} > \alpha_{M_2^2}$ ならば, 補題 5 より S は全ての周期の周期軌道を持つ. よって, $\alpha^{M_1^2} < \alpha_{M_2^2}$ の場合を考える.

$\alpha^{M_1^2} \neq \alpha^{M_1}$ とするなら, 直ちに $\alpha_{M_2^2} \neq \alpha_{M_2}$ となる. この場合, $\alpha^{M_1^2} \in M_2$ であつ $\gamma < \alpha^{M_1^2}$ の状況か, $\alpha_{M_2^2} \in M_1$ であつ $\gamma > \alpha_{M_2^2}$ の状況のどちらかが成り立つ. いずれの状況でも補題 4 の直後の注意より, 全ての周期の周期軌道が存在する. よって残る場合は $\alpha^{M_1^2} = \alpha^{M_1}$ である. この場合, $\alpha_{M_2^2} = \alpha_{M_2}$ が成り立つ. そして $M_1^2 = M_1$ であり, $M_2^2 = M_2$ でもある. さて α_1 を軌道点 α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) の最小値であるとする. $\alpha_k \in M_2$ である. $\alpha_{k-1} > \alpha_1$ である. S によって, α_{k-1} から α_1 に戻るから α_{k-1} は M_2^2 に含まれる. よって, この点 α_{k-1} も M_2 に含まれる. 結果として, $\alpha_k < \alpha_{k-1}$ である.

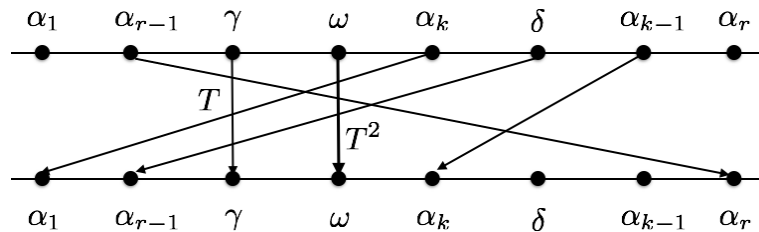


図 20: α_k と α_{k-1} の関係.

軌道点の最大を α_r とする. つまり, α_{r-1} の T による像が α_r であるから, α_{r-1} は M_1 に含まれ, かつ M_1 に含まれる最大である. つまり $\alpha^{M_1} = \alpha_{r-1}$. $\alpha_k, \alpha_{k-1} \in M_2$ と $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ より, $\alpha_{r-1} < \alpha_k$ である. これらの点の関係を図 20 に描いた. 図 21 も参照のこと.

$T\delta = \alpha_{r-1}$ を満たす点 δ が区間 (α_k, α_{k-1}) にある. $Sx = x$ を満たす点 x が区間 $[\gamma, \delta)$ にある. $S\gamma = \gamma$ であるから, $Sx = x$ を満たす点は少なくとも 1 個ある. このような点の最大を ω とおく.

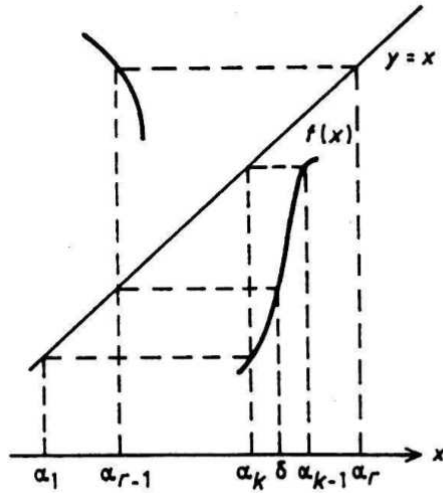


図 21: α_k と α_{k-1} の関係. 原論文の Fig.6.

以上をまとめると

$$S\omega = \omega, S\delta = \alpha_r > \delta, Sx > x \ (x \in (\omega, \delta)),$$

$$\alpha_{k-1} \in (\delta, \alpha_r), S\alpha_{k-1} = \alpha_1 < \omega.$$

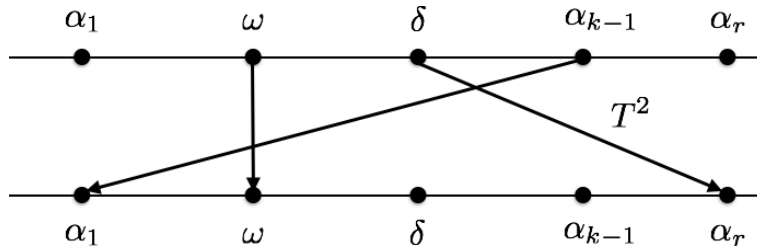


図 22: L-機構.

これは L-機構である (図 22, 23). 従って補題 4 の証明より S には全ての周期の周期軌道が存在する. これから直ちに T に全ての偶数周期の周期軌道があることが言える.

例として周期が $l = 2l_1$ の周期軌道の存在を示す. α を S における周期 l_1 の周期軌道点とする. すなわち $S^{l_1}\alpha = \alpha$, $S^{j_1}\alpha \neq \alpha$ ($1 \leq j_1 < l_1$). これを T で表現すると, $T^l\alpha = \alpha$, $T^j\alpha \neq \alpha$ ($j < l$, j は偶数).

$S\alpha \neq \alpha$ であるから, $T\alpha \neq \alpha$. よって, α は T における周期 l の周期軌道点であるか, $l_2 \leq l_1$ を満たす周期が奇数である l_2 (一つではない) の周期軌道点であるかである. 一般に, 補題 2 より, l_1 が偶数ならば点 α は T における周期 $2l_1$ の周期軌道点である. l_1 が奇数ならば点 α は T における周期 $2l_1$ の周期軌道点であるか, または周期 l_1 の周期軌道点であるかである.

ところが周期が奇数であれば, 常に補題 4 または補題 5 (奇数周期についての部分) が適用できる. 奇数周期軌道には奇数個の軌道点がある. これらは M_1 か M_2 に含まれる. よって M_1 に含まれる個数が多い場合と, M_2 に含まれる個数が多い場合がある. M_1 に含まれる個数が多いとすると, 軌道点とその T による像がともに M_1 に含まれるような軌道点 μ が必ずある. そうでなければ M_1 に含まれる個数が M_2 に含まれる個数より多くなれない.

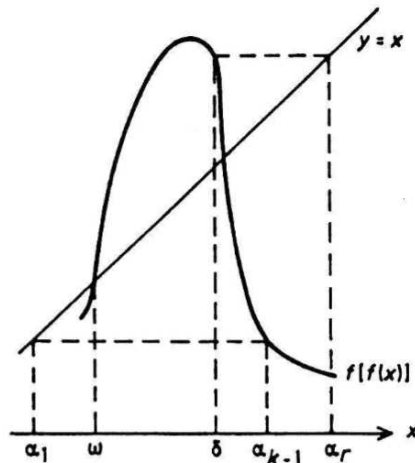


図 23: 原論文の Fig.7

周期 l_2 の周期軌道を有する T は, 補題 4 または補題 5 の仮定を満たす. よって, T は周期 $(2l_2 - 2)$ 以上の周期を持つ周期軌道を有する. よって周期 l の周期軌道を有する. 以上で補題 6 の証明を終える. (Q.E.D.)

補題 6 によって, 補題 5 の証明が完結する.

6 順序関係

補題 6 の証明の中で k より大きな奇数周期の周期軌道の存在を示したので, 全ての偶数周期の周期軌道の存在も導かれる. 得られた結果をまとめて定理 4 が得られる.

定理 4. 写像 T において奇数 k を周期としてもつ周期軌道が存在すれば, k より大きな全ての奇数を周期としてもつ周期軌道も存在し, かつ全ての偶数を周期としてもつ周期軌道も存在する.

定理 4 に従う写像の構成方法は §7.1 にある.

定理 5. ここで l を 3 以上の奇数とし, r は $r > l$ を満たす任意の奇数とする. また, s は任意の自然数. 写像 T において周期 $2^n \cdot l$ の周期軌道が存在すれば, 周期 $2^n \cdot r$ の周期軌道が存在しかつ周期 $2^{n+1} \cdot s$ の周期軌道も存在する.

証明. ここでは数学的帰納法を利用する. 定理 4 で $n = 0$ の場合の証明が行なわれている. よって $n = m - 1$ の場合に定理 5 が成立するとして, $n = m$ の場合に定理 5 が成立することを示そう.

T に周期 $2^m l$ の周期軌道点 α があるとする. r_0 を $r_0 > l$ を満たす奇数として T に周期 $2^m r_0$ の周期軌道点 α があることを示す. α は $S = T^2$ における周期 $2^{m-1} l$ の周期軌道点である. 帰納法の仮定より S は周期 $2^{m-1} l$ の周期軌道点 β を有す.

$$S^{2^{m-1} r_0} \beta = \beta, S^j \beta \neq \beta \quad (j = 1, 2, \dots, 2^{m-1} r_0 - 1).$$

これを T で表現すると

$$T^{2^m r_0} \beta = \beta, T^i \beta \neq \beta \quad (i < 2^m r_0, i : \text{偶数}).$$

ところで $S\beta \neq \beta$ であるから $T\beta \neq \beta$. これより, β は T の周期 $2^m r_0$ の周期軌道点であるか, または奇数周期の周期軌道点である. 後者の場合, 補題 6 より任意を偶数を周期とする周期軌道があるから, どちらの場合でも周期 $2^m r_0$ の周期軌道点がある.

周期 $2^{n+1} \cdot s$ の周期軌道も存在についても同様にして証明できる. (Q.E.D.)

定理 2,3,5 で得られた結果を定理 6 としてまとめる. この定理 6 がシャルコフスキーの順序関係を与える.

定理 6.

[i] 写像 T が周期 2^n ($n > 0$) の周期軌道を持てば, T は周期 2^i ($0 \leq i \leq n-1$) の周期軌道を持つ.

[ii] 写像 T が周期 $2^n(2m+1)$ ($n \geq 0, m > 0$) の周期軌道を持つとする.

(a) T は周期 2^i ($0 \leq i \leq n$) の周期軌道を持つ.

(b) T は周期 $2^n(2r+1)$ ($r = m+1, m+2, \dots$) の周期軌道を持つ.

(c) T は周期 $2^{n+1}s$ ($s = 1, 2, \dots$) の周期軌道を持つ.

定理 7. 周期 k (> 1) の周期軌道の中から任意に二つの軌道点を選ぶ. これらの軌道点の間に, 周期 l ($< k$) の周期軌道点が少なくとも一つ含まれる.

証明. 周期 k (> 1) の周期軌道の中から任意に選んだ軌道点を α と β とする. ただし, $\alpha > \beta$. α より小さい軌道点の個数を n_α とし, β より小さい軌道点の個数を n_β とする. $0 \leq n_\beta < n_\alpha < k$. 点 α から出発した軌道点で $T^{s_i}\alpha < \alpha$ を満たす s_i は n_α 個ある. s_i ($i = 1, 2, \dots, n_\alpha; s_i < k$). $n_\beta < n_\alpha$ であるから, $T^{s_0}\alpha < \alpha$ かつ $T^{s_0}\beta > \beta$ を満たす s_0 が存在する. s_0 として n_α に含まれるが, n_β に含まれない自然数を選べばよい. $T^{s_0}\alpha < \alpha$ かつ $T^{s_0}\beta > \beta$ より, $T^{s_0}\gamma = \gamma$ を満たす点が区間 (β, α) にあることを意味する. 点 γ は周期 s_0 ($< k$) の周期軌道点である. (Q.E.D.)

例. 周期 3 の場合. $\alpha_1 = T\alpha_3 < \alpha_2 = T\alpha_1 < \alpha_3 = T\alpha_2$. 区間 (α_1, α_2) には周期 2 の周期軌道点がある. また区間 (α_2, α_3) には不動点がある.

補足.

定理 7 はいわゆるシャルコフスキーの順序関係とは直接の関係はない. しかし, 周期軌道 A の隣接する二つの軌道点の間に周期軌道 B の軌道点があれば, 先に周期軌道 B が生じ後に周期軌道 A が生じたことがわかる. 軌道点の広がり $[x_{\min}, x_{\max}]$ とする. そうすると, 後から生じた軌道点の広がりが先に生じた軌道点の広がり $[x_{\min}, x_{\max}]$ に比べて広いことが示唆される. これはシャルコフスキーの順序関係の拡張の際に利用できる. 定理 7 から, 元の周期軌道の周期より長い周期軌道の存在は言えない.

7 具体的な写像の構成方法

7.1 定理 4 で述べた性質を持つ写像の構成方法

定理 4 の後に定理 4 で述べた性質を持つ写像を具体的に構成している. 原論文の構成方法を理解するために最初に簡単な例を紹介する. 「周期 5 は存在するが, 周期 3 は存在しない写像」を構成する.

45 度線を横切るように山形を描く. 45 度線と交差している線分の傾きは -1 より小さくする. 山形の最高点に一つ点を置く. この点と不動点の間に 1 点を置き, 45 度線の下部に 2 点を置く. 山形の左の線分上に一つ点を置く. これで 5 個の点をおいた. 一番左から出発して, 左から二番目を通り過ぎて元の位置に戻るように残りの 3 個の点の位置をずらす. このようにすれば図 24 が得

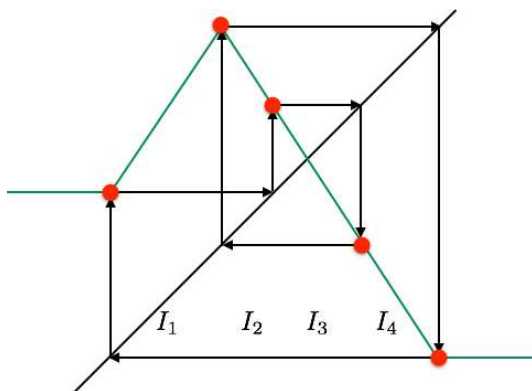


図 24: 周期 5 は存在するが, 周期 3 は存在しない写像.

られる. 図に示したように左から区間 I_1 , I_2 , I_3 と I_4 を定義する. これらの区間の間の遷移関係を図 25 に示した. 図から明らかなように周期 3 は存在しない. 7 以上の奇数を周期としてもつ周期軌道が存在することは簡単にわかる.

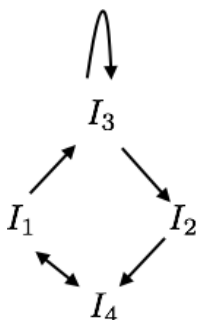


図 25: 四つの区間の遷移関係.

この構成方法を一般化する. 山形の最高点に一つ点を置き, この点と不動点の間に $(m - 1)$ 点を置く. 次に 45 度線の下部に m 個の点を置く. 最後に, 山形の左の線分上に一つ点を置く. 一番左から出発して, 元の位置に戻れるように山形の最高点以外の点の位置をずらす. これで周期 $(2m + 1)$ の周期軌道が得られた. 左から区間 I_1, I_2, \dots, I_{2m} の区間を定義する. ここで I_{m+1} は不動点を含む. これらの区間の間の遷移関係より, 遷移関係の図 26 が得られる. この図より, I_1 から出発し円周上の区間を通過し, I_1 に戻ると周期は $2m$ となる. I_1 から I_{m+2} へ向かう矢印に従って遷移することを「近道」と呼ぶ. このような近道を利用して周期は必ず偶数になる. また I_1 と I_{2m} を行ったり来たりしても周期は偶数となる. 以上より, 周期 $(2m - 1)$ の周期軌道が存在しないことが導かれる. 周期 $(2m + 1)$ とか周期 $(2m + 3)$ の奇数周期の周期軌道が存在することは簡単にわかる. 図 27 がシュテファングラフと呼ばれるグラフの一例である.

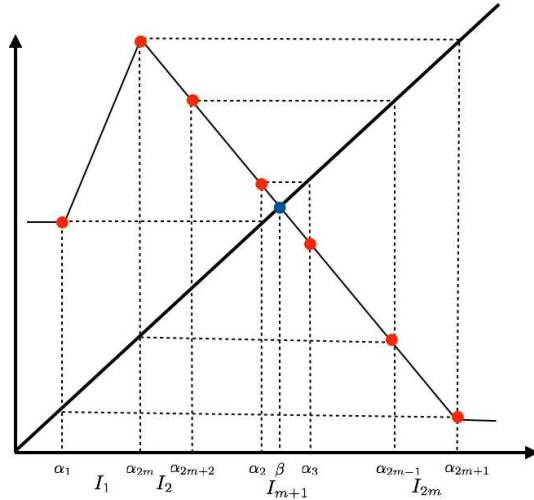


図 26: 周期 $2m + 1$ の周期軌道の存在する写像の構成. 原論文の Fig.8.

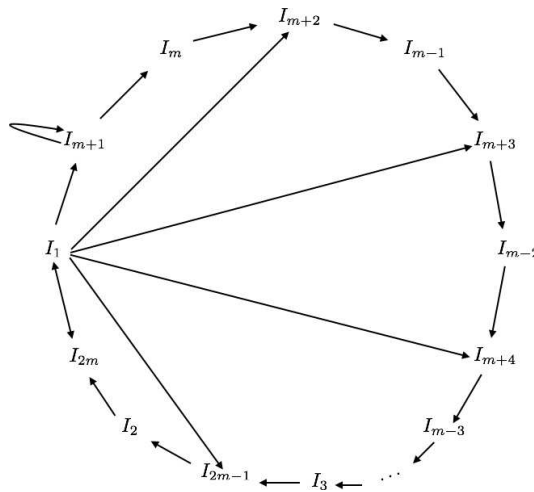


図 27: $2m$ 個の区間の遷移関係.

7.2 定理 6 で述べた性質を持つ写像の構成方法

45 度線の上部に, 45 度線に垂直な線分を引き, この上に A_1 とおく (図 27). 45 度線の下部に, 45 度線に平行な線分を引き, この上に A_2 をおく. A_1 と A_2 が周期 2 になるように調整する.

次に, 垂直な線分上で A_1 の左上に A_{11} を, 右下に A_{12} をおく. 平行な線分上で A_2 の左下に A_{21} を, 右上に A_{22} をおく. これらが周期 4 になるように調整する.

垂直な線分上で A_{11} の左上に A_{111} を, 右下に A_{121} をおき, A_{12} の左上に A_{121} を, 右下に A_{122} をおく. 平行な線分上で A_{21} に垂直な線分を引く. この線分上に A_{21} の左上に A_{211} を, 右下に A_{212} をおく. 最後に A_{22} の左下に A_{221} を, 右上に A_{222} をおく. これらが周期 8 になるように調整する.

ここで A_1 と A_2 を利用して, 写像 $T_{A_1 A_2}$ を構成する (図 29(a)). $T_{A_1 A_2}$ は周期 2 と不動点を含む写像である.

次に $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を利用して写像 $T_{A_{11} A_{12} A_{21} A_{22}}$ を構成する (図 29(b)). ただし, 区間 $[A_{11}, A_{12}]$ は A_1 を含み, 区間 $[A_{21}, A_{22}]$ は A_2 を含むとする. $T_{A_{11} A_{12} A_{21} A_{22}}$ は周期 2^2 , 周期 2 と不動点を含む. 以上の手順を繰り返し周期 $2^n, 2^{n-1}, \dots, 2, 1$ を含む写像が構成できる.

図 29(a) をもとに, 2×3 が存在する写像を構成する. A_1 の周りに 3 点配置し, A_2 の周りにも

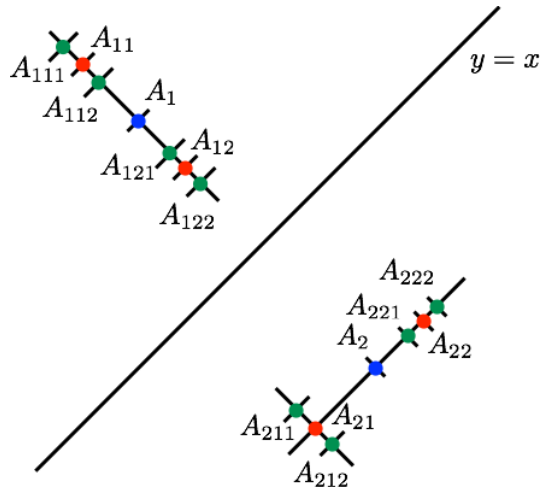


図 28: 周期 $2^3, 2^2, 2$ を含む写像の構成するための点の配置. 原論文の Fig.9.

3 点配置する. T^2 のもと A_1 を中心としてこれらの 3 点が周期 3 になることが必要である. 当然, T^2 のもと A_2 を中心として置いた 3 点が周期 3 になるようにする. このようにして得られたグラフを図 30 に描いた. この図で区間 I_1 から I_5 までを定義した. これらの区間の間の遷移を仕方を図 31 に示した. 周期 2×5 があることは簡単に確認できる.

$$I_4 \rightarrow I_2 \rightarrow I_5 \rightarrow I_1 \rightarrow I_5 \rightarrow I_1 \rightarrow I_5 \rightarrow I_1 \rightarrow I_5 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4.$$

周期 2×5 が存在する写像を構成し, 周期 2×3 が存在しないこと, 周期 2×7 が存在することを確認する (図 32,33).

同様の方法で周期 $2^n \times (2k + 1)$ が存在する写像を構成できる.

参考文献

[1] S. N. Sharkovskii, Ukrain. Math. J. 12, 4 (1960).

[2] S. N. Sharkovskii, Dokl. Akad. Nauk SSSR 139, 5 (1961).

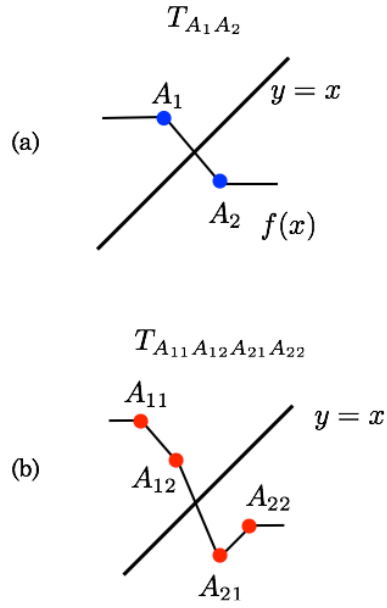


図 29: (a) 周期 2 を含む写像の構成. (b) 周期 4 を含む写像の構成. 原論文の Fig.10.

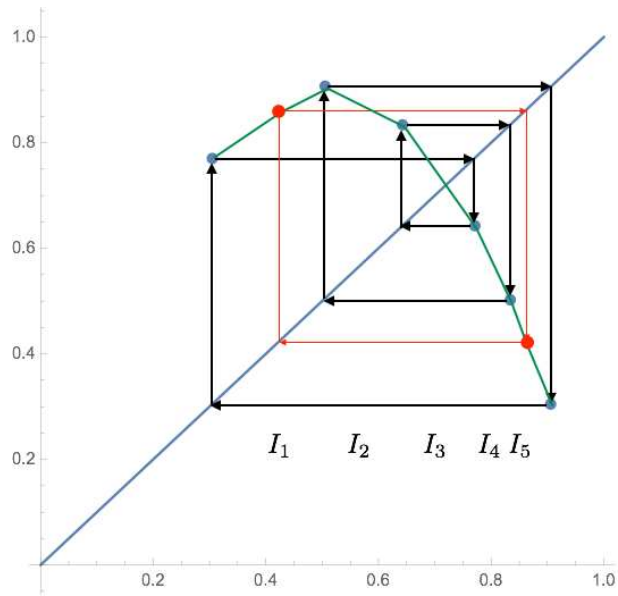


図 30: 周期 2×3 を含む写像の構成.

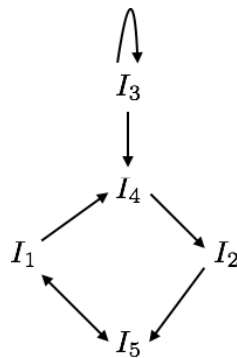


図 31: 区間 I_1 から I_5 までの区間の間の遷移関係.

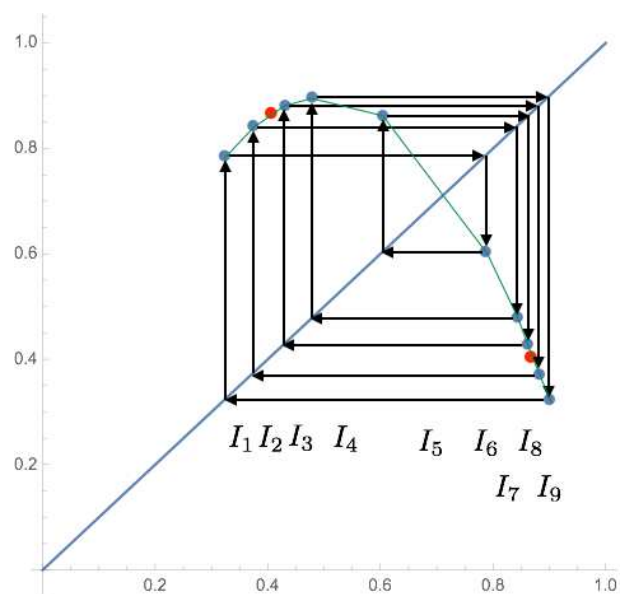


図 32: 周期 2×5 を含む写像の構成.

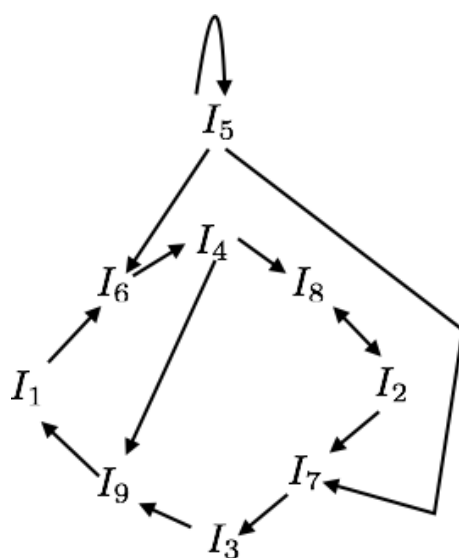


図 33: 区間 I_1 から I_9 までの区間の中の遷移関係.