補題および定理の証明

シャルコフスキーの下記の論文より

Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself

Ukrain. Math. Zh. 16 (1964), pp.61-71

原文はロシア語

谷川清隆

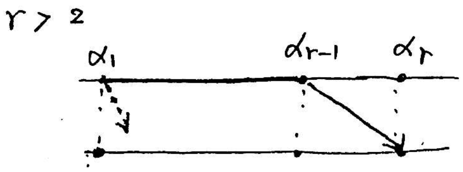
1983.5.29

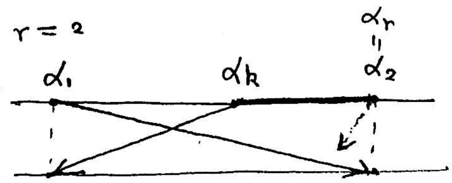
定理 1. 変換Tに k-cycle $(k>2)$ があれば 2-cycle もある。

証明

α_i $(i=1,2,\cdots,k)$ を同一の k-cycle に属する点とする。ただし $T\alpha_i=\alpha_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,k-1$, $T\alpha_k=\alpha_1$.

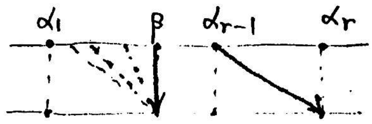
$\alpha_1=\min\alpha_i$ であるように番号づけする。このとき $\alpha_r=\max\alpha_i$ であるとする。$r>2$ の場合と $r=2$ の場合を分けて考える。

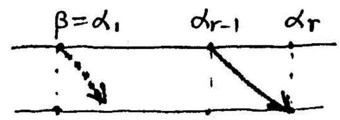




上図のように区間 (α_1,α_{r-1}) における状況と区間 (α_k,α_r) における状況が類似であり、取り扱いも同様にできるので $r>2$ の場合のみ考察する。

区間 (α_1,α_{r-1}) に不動点があるとき、そのうち最大のものを β, 不動点がないとき $\beta=\alpha_1$ とおく。





いずれの場合も $\quad Tx>x \quad \text{for} \quad x\in(\beta,\alpha_{r-1}]$

β が不動点なら β の近傍 $U_\varepsilon(\beta)$ で次の性質を満たすものがある

$$T^j x>x \quad \text{for any } j>0 \text{ and any } x>\beta,\ x\in U_\varepsilon(\beta)$$

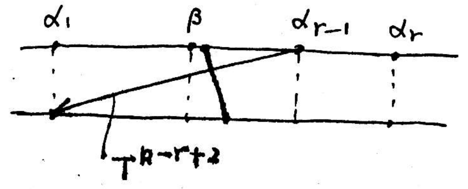
$\beta=\alpha_1$ なら ($\alpha_1=\min\alpha_i$ だから)

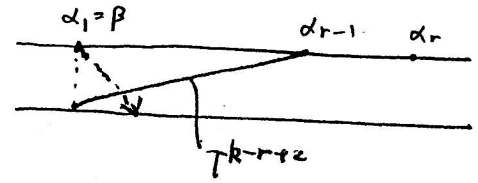
$$T^j\beta=\alpha_{j+1}>\alpha_1=\beta \quad \text{for} \quad 1<j<k$$

一方 $T^{k-r+2}\alpha_{r-1}=\alpha_1<\alpha_{r-1}$ である

なぜなら $2<r<k$ より $2<k-r+2<k$ であって

$$T^{k-r+2}\alpha_{r-1}=T^{-(r-2)}\alpha_{r-1}=\alpha_1$$





明らかに $\exists\gamma \in (\beta, \alpha_{r-1})$, $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$ かつ $T\gamma \neq \gamma$

したがって γ は $1 < l \leqq k-r+2 < k$ なる l に対して l-cycle である。

以上 k-cycle ($k>2$) があれば l-cycle ($1<l<k$) のあることが言えた。
上の手続きをどんどん行えば結局 2-cycle の存在まで行きつく Q.E.D.

補題 1. α が k-cycle の点で $T^p\alpha = \alpha$ なら p は k の倍数である

証明

$p = ks + r$, $r<k$ とおくと $T^p\alpha = T^r \underbrace{T^k \cdot T^k \cdots T^k}_{s} \alpha = T^r\alpha = \alpha$

ところが α は k-cycle だから $T^j\alpha \neq \alpha$ for $1<j<k$. 故に $r=0$

Q.E.D.

1983.5.25 ③

補題2. 点 α が T の $2^n \cdot l$-cycle (l: odd) であれば、

$$g = \begin{cases} 2^{n-m} \cdot l & \text{for } n \geq m \\ l & \text{for } n \leq m \end{cases}$$

として、α は $S = T^{2^m}$ の g-cycle である。

証明

$\alpha = S^g \alpha = T^{2^m g} \alpha$ であるから 補題1より

$$2^m g = 2^n l \cdot i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

これを満たす最小の i が求める g を与える。

実際それを i_0 とすると、$2^m \cdot g = 2^n \cdot l \cdot i_0 = k \cdot i_0$ ただし $k = 2^n \cdot l$.

$1 \leq j < g$ として

$S^j \alpha = T^{2^m \cdot j} \alpha = \alpha$ であるための必要十分条件は $2^m \cdot j = k \cdot s$

でなければならないが、$j < g$ なので不可能。

$n \geq m$ と $n \leq m$ のときを分けて考えれば補題の条件が出る。 Q.E.D

系. 補題2の仮定のもとで、$l > 1$ なら、点 α は S の周期2以上の点である

点 α は S のもとで周期は2より大

証明 明らか

補題3. $T^{2^m}\alpha=\alpha$, $T^{2^{m-1}}\alpha\neq\alpha$ のとき，またそのときに限って，αは
Tの 2^m-cycle の点である

証明．(必要性) 明らか
(十分性) $T^{2^m}\alpha=\alpha$ だから αは $0\leqq j\leqq m$ に対して 2^j-cycleである。
ところが

$$T^{2^{m-1}}\alpha=\underbrace{T^{2^j}\cdot T^{2^j}\cdots T^{2^j}}_{2^{m-j-1}\text{個}}\alpha\neq\alpha$$

であるから $j<m-1$ のとき $T^{2^j}\alpha\neq\alpha$ Q.E.D

定理2. Tに 2^n-cycle $(n>1)$ があれば，2^i-cycle $(i=1,2,\cdots,n-1)$ もある

証明 αをTの 2^n-cycleの点とする。$1\leqq m<n$ として $S=T^{2^{m-1}}$ とおく
補題2より，αはSの 2^{n-m+1}-cycleの点である。このとき定理1によって
Sには2-cycleがある。その点はTの 2^m-cycleの点である Q.E.D

定理3. Tに k-cycle (kは2のべき乗以外の数) があれば 2^i-cycle $(i=1,2,\cdots)$ もある

証明．αをTのk-cycleの点とする。$m\geqq1$ として $S=T^{2^{m-1}}$ とおく
補題2より，αはSに関し周期が2より大きい周期点である。
このとき定理1によって，Sには周期2の点βがある。すなわち

$$S^2\beta=\beta,\quad S\beta\neq\beta$$

i.e.

$$T^{2^m}\beta=\beta,\quad T^{2^{m-1}}\beta\neq\beta$$

βはTの 2^m-cycle の点である

Q.E.D.

補題 4.　$\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ なら T には任意の周期点がある。

ただし $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ は k-cycle, $\alpha_2 = T\alpha_1$, $\alpha_3 = T\alpha_2, \cdots$, $\alpha_i < T\alpha_i$ のとき $\alpha_i \in M_1$, $\alpha_i > T\alpha_i$ のとき $\alpha_i \in M_2$, さらに $\alpha^{M_1} = \max_{\alpha_i \in M_1} \alpha_i$, $\alpha_{M_2} = \min_{\alpha_i \in M_2} \alpha_i$

<u>証明</u>　$T\beta = \max\{T\alpha_i \mid \alpha_i \in M_1,\ \alpha_i > \alpha_{M_2}\}$ なる β を導入する。

$T\alpha_{M_2} < \alpha_{M_2}$, $T\beta > \beta$ であるから 区間 (α_{M_2}, β) の不動点の集合は空でない閉集合である。γ を (α_{M_2}, β) 内の不動点の最大のものとする。

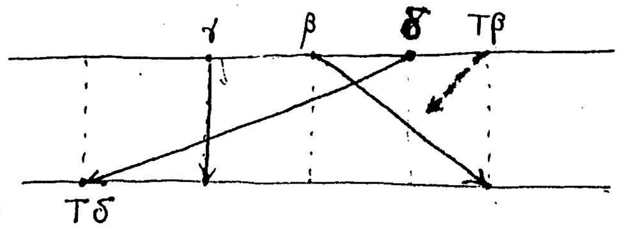
このとき, $T\gamma = \gamma$ かつ $Tx > x$ for $x \in (\gamma, \beta]$.

また このとき, 区間 $(\gamma, T\beta]$ には もとの k-cycle の点 α_i の いくつかが含まれる (例えば, β, $T\beta$)。$(\gamma, T\beta]$ には もとの k-cycle の点のうち, $T\delta > T\beta$ または $T\delta < \gamma$ を満たす点 δ がある。ないとすれば, $(\gamma, T\beta]$ 内の k-cycle の点から出発して $(\gamma, T\beta]$ を出られない。

ところで $T\delta > T\beta$ は不可能である なぜなら, $\delta \in M_2$ なら $T\delta < \delta$ であるし, $\delta \in M_1$ なら β の定義によって $T\delta < T\beta$ だからである。

したがって, まとめれば, $(\gamma, T\beta]$ にはもとの k-cycle の点 δ があって $T\delta < \gamma$ ($\delta = T\beta$ もあり得る)。$Tx > x$ for $x \in (\gamma, \beta]$ であるから $\delta \in (\beta, T\beta]$.

これを $\boxed{\text{L-schema}}$ と呼ぶことにする



L-schema

この L-schema があれば, すべての周期がある。それを以下示そう。

$T(\gamma, \beta] \supset (\gamma, T\beta]$ であるから $\exists x \in (\gamma, \beta]$, $Tx = \delta$

これらの x のうち最小のものを δ_1 とする。

同様に, $T(\gamma, \delta_1] = (\gamma, \delta]$ であるから, $\exists x \in (\gamma, \delta_1]$, $Tx = \delta_1$

これらの x のうち最小のものを δ_2 とする。

このやり方を続けることにより

$$\gamma < \cdots\cdots < \delta_i < \delta_{i-1} < \cdots\cdots < \delta_2 < \delta_1 < \delta,$$

$$T\delta_i = \delta_{i-1}$$

なる点列が得られる。

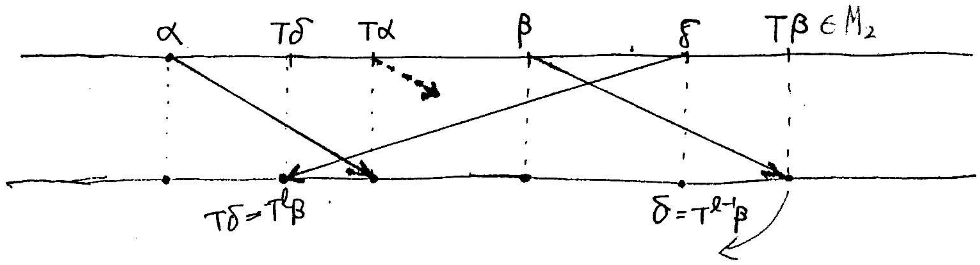
$T^{i-1}\delta_{i-1}=\delta$　　$T\delta<\gamma<\delta$, $\gamma<\delta_{i-1}$　1983.5.28

明らかに　$T^i\delta_{i-1}=T\delta$,　$T^i\delta_i=\delta$ である。
したがって　$T^i\delta_i>\delta_i$,　$T^i\delta_{i-1}<\delta_{i-1}$　$\longrightarrow$ $^\exists\rho_i\in(\delta_i,\delta_{i-1})$, $T^i\rho_i=\rho_i$
ところが $T^j\rho_i\neq\rho_i$ for $1\leqq j<i$ であって ρ_i は i-cycle である。
実際, $T^j(\gamma,\delta_{i-1}]=(\gamma,\delta_{i-j-1}]\subset(\gamma,\delta_1]$ for $j<i-1$ であって
$Tx>x$ for $x\in(\gamma,\delta_1]$ であるから, $T^jx>x$ for $x\in(\gamma,\delta_{j-1}]$ and
$1\leqq j<i$. すなわち $(\gamma,\delta_{j-1}]$ には j-cycle $(1\leqq j<i)$ の点はない。

Q.E.D.

補題 5. $\alpha^{M_1}<\alpha_{M_2}$ で $\alpha\in M_1$, $T\alpha\in M_1$ なる点 α のあるとき, T には
kより大きなすべての奇数周期点, および任意の偶数周期点がある。

証明　$\boxed{M\text{-schema}}$ なる図式をとり出そう。すなわち

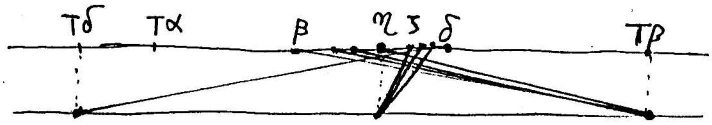


これは可能である。実際, $\xi\in M_1$, $\xi\geqq T\alpha$ を満たすもののうち,
$T^j\xi\leqq\alpha$ をはじめて満たす j が最小なるものを β とし, そのときの
最小の j を n とおく。つまり $\beta\in M_1$, $\beta\geqq T\alpha$, $T^i\beta>\alpha$ for $i<n$, $T^n\beta=\gamma\leqq\alpha$.
点列 $\{T^i\beta\}_{i=1,2,\dots}$ 内の点のうち, はじめて M_1 に属するものを $T^l\beta$ とおく。
明らかに $T^l\beta<T\alpha$ である。なぜなら, まずもちろん $T^l\beta\neq T\alpha$ である。
というのは $T^l\beta=T\alpha$ のとき $T^{l-1}\beta=\alpha$ となって l の定義に反する。また,
$T^l\beta>T\alpha$ とすれば, あらためて $T^l\beta$ を β と置き直すことによって より小さな
n が得られてしまう。　より小さな n の値が得られる

$T\beta>\beta\geqq T\alpha$ であるから $T\beta\in M_2$, したがって $l\geqq2$ である。
($T\beta\in M_1$ とすると n の定義に反する)

そこで, $\delta=T^{l-1}\beta$ とおくと (最小) $\delta\in(\beta,T\beta]$ であって, $T\delta<T\alpha$ となり
上記の図式が得られる。　$\because)$ $T\beta,\cdots,T^{l-1}\beta\in M_2$ $\therefore$ $T\beta>T^2\beta>\cdots>T^{l-1}\beta>\beta$

区間 $[\beta, \delta]$ で $Tx = T\beta$ を満たすものの最大のものを η とおく ($\eta = \beta$ もありうる)。

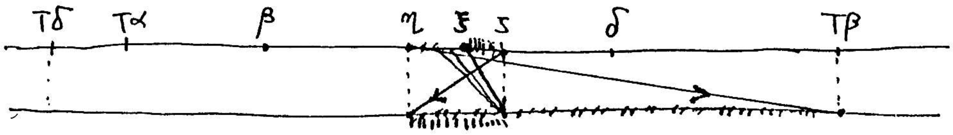


明らかに $Tx < T\beta$ for $x \in (\eta, \delta)$

∵) そうでないとすれば (η, δ) 内にまだ $Tx = T\beta$ なる x が存在する。

$T\eta = T\beta \geq \delta$, $T\delta < T\alpha \leq \eta$ であるから $^{\exists}x \in [\eta, \delta]$, $Tx = \eta$. これらの x のうち最小のものを ζ とおく。

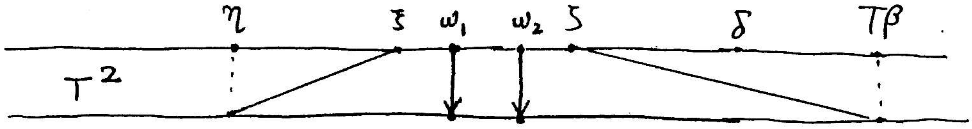
こうして, $T\eta = T\beta$, $T\zeta = \eta$, および $\eta < Tx < T\beta$ for $x \in (\eta, \zeta)$ が得られた。



さらに $[\eta, \zeta]$ 中 $Tx = \zeta$ を満たすものの最大のものを ξ とおく。

このとき $\eta < Tx < \zeta$ for $x \in (\xi, \zeta)$ である。

以上より, $T^2\xi = \eta < \xi$, $T^2\zeta = T\beta > \zeta$ かつ $\eta < T^2x < T\beta$ for $x \in (\xi, \zeta)$.
したがって (ξ, η) に T^2 の不動点がある。それらのうち最小のものを ω_1, 最大のものを ω_2 とする



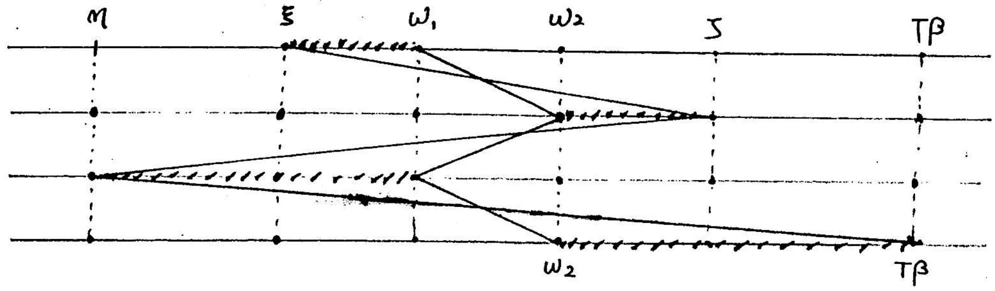
このとき $T\omega_1 = \omega_2$, $T\omega_2 = \omega_1$ である

∵) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ のときは ω は T の不動点である。

$\omega_1 \neq \omega_2$ のとき, $T^2(T\omega_2) = T\omega_2$ より $T\omega_2$ も 2-cycle であり, ω_1, ω_2 の定義により
$\omega_1 \leq T\omega_2$, i.e. $T\omega_2 \notin (\xi, \omega_1)$. 同様に $T\omega_1 \leq \omega_2$, i.e. $T\omega_1 \notin (\omega_2, \zeta)$.
したがって $T(\xi, \omega_1) \supset (\omega_2, \zeta)$. ゆえに $^{\exists}\chi \in [\xi, \omega_1]$, $T\chi = \omega_2$
ところで $T^2x \leq x$ for $x \in [\xi, \omega_1]$ であるから $\chi \geq T^2\chi = T\omega_2 \geq \chi$
これより $\chi = T^2\chi$. すなわち $\chi = \omega_1$ Q.E.D.

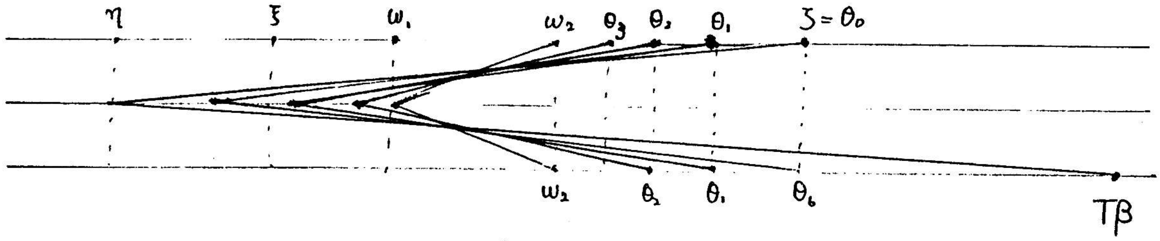
さらに $T(\xi, \omega_1) = (\omega_2, \zeta)$, $T(\omega_2, \zeta) = (\eta, \omega_1)$ である。

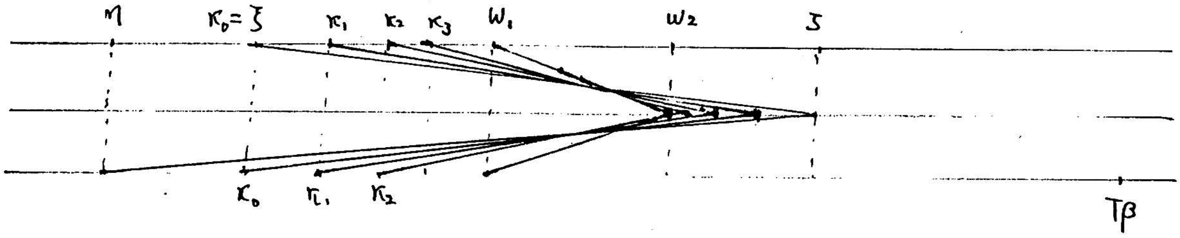
以上の性質を図示すると



次に点列 θ_i, κ_i $(i=0,1,2,\cdots)$ を構成しよう。

$$\omega_2 < \cdots\cdots < \theta_2 < \theta_1 < \theta_0 = \zeta, \quad T^2\theta_i = \theta_{i-1}, \quad T^2(\omega_2, \theta_i) = (\omega_2, \theta_{i-1}),$$
$$\xi = \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots\cdots < \omega_1, \quad T^2\kappa_i = \kappa_{i-1}, \quad T^2(\kappa_i, \omega_1) = (\kappa_{i-1}, \omega_1)$$





このとき $T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = (\eta, \omega_1)$, $T^{2i+2}(\kappa_i, \omega_1) = (\eta, \omega_1)$ である。

∵) $T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = T^{2(i-1)+1}(\omega_2, \theta_{i-1}) = \cdots = T(\omega_2, \theta_0) = (\eta, \omega_1)$

$T^{2i+2}(\kappa_i, \omega_1) = T^{2(i-1)+2}(\kappa_{i-1}, \omega_1) = \cdots\cdots = T^2(\kappa_0, \omega_1) = (\eta, \omega_1)$

ところで $T\alpha < \eta$, $T\eta = T\beta > \zeta$ であるから 区間 (α, η) には, T による像が

$\omega_1, \omega_2, \eta, \theta_i, \kappa_i$ $(i=0,1,2,\cdots)$

となる点がそれぞれ存在する。すなわち $\lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \nu_{-1} \in (\alpha, \eta)$ で

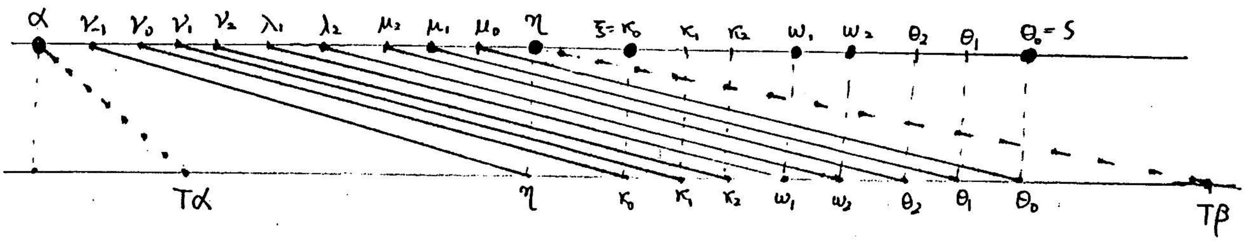
$$T\lambda_1 = \omega_1, \quad T\lambda_2 = \omega_2, \quad T\mu_0 = \theta_0 = \zeta, \quad T\nu_{-1} = \eta,$$
$$T(\nu_{-1}, \lambda_1) = (\eta, \omega_1), \quad T(\lambda_2, \mu_0) = (\omega_2, \zeta).$$

さらに μ_i $(i=1,2,\cdots)$ および ν_i $(i=0,1,2,\cdots)$ があって

$$T\mu_i = \theta_i, \quad T(\lambda_2, \mu_i) = (\omega_2, \theta_i)$$
$$T\nu_i = \kappa_i, \quad T(\nu_i, \lambda_1) = (\kappa_i, \omega_1)$$

このとき明らかに

$$T^{2i+2}\mu_i = \eta, \quad T^{2i+2}(\lambda_2, \mu_i) = (\eta, \omega_1)$$
$$T^{2i+3}\nu_i = \eta, \quad T^{2i+3}(\nu_i, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$$



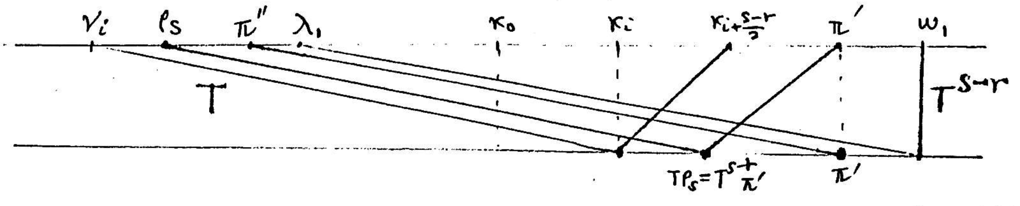
$T\eta = T\beta$ であるから $T^n\eta = \gamma$ である。k-cycle の点 α_i の1つから他の1つへうつるのには高々 T を $k-1$ 回作用すればよい。したがって $n \leq k-1$ である。$\gamma = \alpha$, $\beta = T\alpha$ のときはもちろん $n = k-1$ である。

さて k より大きな奇数周期点のあることを示そう。
まず n が偶数の場合を考える。このとき、$s = n+2i+3$, $(i \geq 0)$ は奇数である。$i=0$ のとき $s = n+3$ であり、$n \leq k-1$ であるから $s \leq k+2$。すなわち s は k を超える最小の奇数より大きくない。したがって任意の $i \geq 0$ に対して s-cycle のあることが言えれば、n: 偶数のとき上記の主張が言えたことになる。以下 s-cycle の存在を示そう。

$$T^s\lambda_1 = T^{n+2i+3}\lambda_1 = T^{n+2i+2}\omega_1 = \omega_1 > \lambda_1$$
$$T^s\nu_i = T^{n+2i+3}\nu_i = T^{n+2i+2}\kappa_i = T^n\eta = \gamma < \nu_i$$

すなわち $T^s(\nu_i, \lambda_1) \supset (\nu_i, \lambda_1)$. よって $\exists x \in (\nu_i, \lambda_1)$, $T^s x = x$.
これらの x のうち最大のものを ρ_s とする。ρ_s が s-cycle の点であることを言おう。s は奇数であるから、ρ_s は奇数周期点である。r を $r<s$ なる奇数として、ρ_s が r-cycle と仮定する。

$T\rho_s \in (\kappa_i, \omega_1)$ である。一方、$T^{2m}(\kappa_j, \omega_1) = (\kappa_{j-m}, \omega_1)$ $(m \leq j)$
であるから $T^{2\cdot\frac{s-r}{2}}(\kappa_{i+\frac{s-r}{2}}, \omega_1) = (\kappa_i, \omega_1)$
したがって $\exists\pi' \in (\kappa_{i+\frac{s-r}{2}}, \omega_1)$, $T^{s-r}\pi' = T\rho_s$



ところで $T^2x < x$ for $x \in (\kappa_j, \omega_1)$ $(j=0,1,2,\cdots)$ であり $T^{s-r} = \overbrace{T^2\cdot T^2\cdots T^2}^{(s-r)/2\text{個}}$ であるから
$T\rho_s < \pi' < \omega_1$. したがって $\exists\pi'' \in (\rho_s, \lambda_1)$, $T\pi'' = \pi'$. 故に

$$T^s\pi'' = T^{s-1}\pi' = T^{r-1}T^{s-r}\pi' = T^r\rho_s = \rho_s < \pi''$$

すなわち $\exists \rho_s' \in (\pi^\nu, \lambda_1)$, $T^s \rho_s' = \rho_s'$. これは ρ_s が (ν_i, λ_1) 内で $T^s x = x$ を満たす最大の点であることに矛盾する。したがって ρ_s は s-cycle である。

n が奇数の場合は点列 $\{\nu_i\}$ を用いて同様の議論をすればよい。

次に任意の偶数周期点のあることを示そう。
まず n が偶数の場合を考える。点列 $\{\mu_i\}$ を使う。 $s = n+2i+2$ $(i \geq 0)$ とおく

$$T^s \lambda_2 = T^{s-1} \omega_2 = \omega_1 > \lambda_2, \quad T^s \mu_i = T^{n+2i+2} \mu_i = T^n \eta = \gamma < \mu_i$$

であるから $\exists x \in (\lambda_2, \mu_i)$, $T^s x = x$. これらの x の1つを σ_s とする。
$s \geq 2k-2$ のとき σ_s が s-cycle であることを言おう。 $T^s \sigma_s = \sigma_s$ より, σ_s は s-cycle であるか, あるいは s の或る約数 r に対して r-cycle である。明らかに $r \leq s/2$ であるから, もし $T^j \sigma_s \neq \sigma_s$ for $1 \leq j \leq s/2$ なら σ_s は s-cycle である。ところで $j < s-n$ である限り $T^j(\lambda_2, \mu_i) \subset (\eta, \xi)$ であるから, 任意の $1 \leq j \leq s-n$ に対して $x < \eta < T^j x$ for $x \in (\lambda_2, \mu_i)$ である。だから, $s-n \geq s/2$ のとき, すなわち, $s \geq 2k-2$ のとき σ_s は s-cycle である。

n が奇数の場合は点列 $\{\nu_i\}$ を用いて同様な議論をすれば, やはり $s \geq 2k-2$ なる偶数 s-cycle のあることが言える。

$2k-2$ より小さな偶数周期点の存在は補題6よりただちに言える。なぜなら本補題は奇数周期点の存在をすでに示しているから。

Q.E.D.

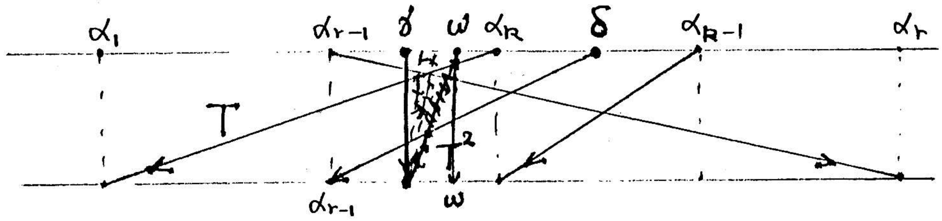
補題6. Tに奇数周期点があれば，すべての偶数周期点もある

証明

$\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ なるすべての周期点が存在することがわかっているから（補題4），$\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ とする。補題2より，kが奇数のとき，Tの k-cycle は $S=T^2$ の k-cycle でもある（今 α_i は k-cycle であることに注意）。
TにおけるM₁, M₂と同様な集合をSにおいても構成し，それを M_1^2, M_2^2 とする。
すなわち　$\alpha_i \in M_1^2$ if $\alpha_i < T^2\alpha_i$,　$\alpha_i \in M_2^2$ if $\alpha_i > T^2\alpha_i$.
また　$\alpha^{M_1^2} = \max_{x\in M_1^2}\{x\}$,　$\alpha_{M_2^2} = \min_{x\in M_2^2}\{x\}$ とおく。

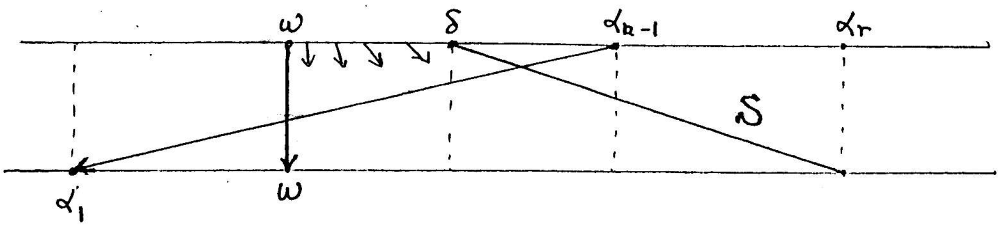
Sにすべての周期の点のあることを示そう。

$\alpha^{M_1}<\alpha_{M_2}$ であるから $\exists\gamma\in(\alpha^{M_1},\alpha_{M_2})$，$\gamma$ はTの不動点。したがってもちろん $S=T^2$ の不動点でもある。一方 $\alpha^{M_1^2} > \alpha_{M_2^2}$ のときには補題5より，Sにはすべての周期の点があるから，今 $\alpha^{M_1^2}<\alpha_{M_2^2}$ の場合を考える。
すると，$\alpha^{M_1^2}\neq\alpha^{M_1}$（今述べたことにより $\alpha_{M_2^2}\neq\alpha_{M_2}$）のとき，$\alpha^{M_1^2}\in M_2$, $\gamma<\alpha^{M_1^2}$ であるか，$\alpha_{M_2^2}\in M_1$, $\gamma>\alpha_{M_2^2}$ である。いずれの場合も補題4の直後の remark により，すべての周期の点が存在する。
そこで残る場合は $\alpha^{M_1^2}=\alpha^{M_1}$ である。このとき $\alpha_{M_2^2}=\alpha_{M_2}$ でもあり，
$M_1^2=M_1$,　$M_2^2=M_2$ である。
α_i のうち最小のものを α_1 とする。このとき明らかに $\alpha_k\in M_2$。　$\alpha_{k-1}>\alpha_1$ であるから $\alpha_{k-1}\in M_2^2=M_2$.　だから $\alpha_{k-1}>\alpha_k$ である。
α_i のうち最大のものを α_r とする。このとき $\alpha_{r-1}\in M_1$. したがって $\alpha_{r-1}<\alpha_k$.
また $T^2\alpha_{r-2}=\alpha_r>\alpha_{r-2}$ であるから $\alpha_{r-2}\in M_1^2=M_1$. したがって $\alpha_1=\alpha_{r-1}$ となることは有り得ず $\alpha_1<\alpha_{r-1}$.
これを図示すると，



明らかに $\exists\delta\in(\alpha_k,\alpha_{k-1})$,　$T\delta=\alpha_{r-1}$
また $\omega=\max\{x\mid Sx=x,\ x\in[\gamma,\delta)\}$ とおく。

以上まとめると， $S\omega = \omega$, $S\delta = \alpha_r > \delta$, $Sx > x$ for $x \in (\omega, \delta)$,
$\alpha_{k-1} \in (\delta, \alpha_r)$, $S\alpha_{k-1} = \alpha_1 < \omega$. これを図示すると



これは L-schema である。したがって S にはすべての周期の点がある（補題4の証明参照）。

これから直ちに T にすべての偶数周期の点のあることが言える。
実際，例えば T に $2l_1$-cycle のあることを示そう。$l = 2l_1$ とおく
α を S の l_1-cycle の点とする。すなわち $S^{l_1}\alpha = \alpha$, $S^{j_1}\alpha \neq \alpha$ for $1 \le j_1 < l_1$
換言すれば，$T^l\alpha = \alpha$, $T^j\alpha \neq \alpha$ for $j < l$, j : even.
ところで $S\alpha \neq \alpha$ であるから $T\alpha \neq \alpha$. したがって，α は T の l-cycle の点であるか，或は $1 < l_2 \le l_1$ なる奇数 l_1 に対し l_1-cycle であるか，である。

ところが奇数周期の点があれば，つねに補題4または補題5の前提が満たされる。実際，奇数 cycle には奇数個の点が属すから，M_1 に含まれる点が多いか，M_2 に含まれる点が多いかどちらかである。たとえば，M_1 に含まれる点の方が多いとする。このとき，$\mu \in M_1$, $T\mu \in M_1$ なる μ が必ず存在する。
故に，T は l-cycle を有して，かつ補題4または補題5の前提を満たすから，$2l_2-2$ 以上の偶数周期点を有する。したがって l-cycle を有する。

Q.E.D.

定理5. T に $2^n \cdot l$ − cycle（$l > 1$, l は奇数）があれば、$2^n \cdot r$ − cycle（r は $r > l$ なる任意の奇数）および $2^{n+1} \cdot s$ − cycle（s は任意の自然数）もある。

証明

数学的帰納法による。$n = 0$ のときは定理4に帰着するから明らかに成立する。
$n = m - 1$ のときに主張が成り立つとして、$n = m$ のときにも成り立つことを示そう。
T に $2^m l$ − cycle の点 α があるとする。例えば、r_0 を $r_0 > l$ なる奇数として T に $2^m r_0$ − cycle のあることを言おう。α は $S = T^2$ の $2^{m-1} \cdot l$ − cycle の点である。帰納法の仮定により S は $2^{m-1} \cdot r_0$ − cycle の点 β を有する。すなわち
$S^{2^{m-1} \cdot r_0} \beta = \beta$, $S^j \beta \neq \beta$ for $j = 1, 2, 3, \cdots 2^{m-1} \cdot r_0 - 1$. 換言すれば、
$T^{2^m \cdot r_0} \beta = \beta$, $T^i \beta \neq \beta$ for $i < 2^m \cdot r_0$, i : even. ところで $S\beta \neq \beta$ だから
$T\beta \neq \beta$. したがって β は T の $2^m \cdot r_0$ − cycle の点か、或は奇数周期の点である。後者の場合、補題6により任意の偶数周期点があるから、いずれにしても $2^m \cdot r_0$ − cycle の点がある。

$2^{m+1} \cdot s$ − cycle（s は任意の自然数）の存在も同様にして言える。 Q.E.D.

定理7. 同一の k-cycle（$k > 1$）に属する任意の2点の間に、少くとも1つ l-cycle（$l < k$）の点がある。

証明

点 α, β（$\beta < \alpha$）を同一の k-cycle に属する点とし、n_α, n_β をこの k-cycle に属する点のうちそれぞれ α, β より小さいものの数とする。
明らかに $0 \leqq n_\beta < n_\alpha < k$ である。このとき、$T^{s_i} \alpha < \alpha$ を満たす相異なる n_α 個の正整数 s_i（$i = 1, 2, \cdots, n_\alpha$; $s_i < k$）がある。
$n_\beta < n_\alpha$ であるから $T^{s_{i_0}} \alpha < \alpha$, $T^{s_{i_0}} \beta > \beta$ なる s_{i_0}（$1 \leqq i_0 \leqq n_\alpha$）がある。これは $\exists \gamma \in (\beta, \gamma)$, $T^{s_{i_0}} \gamma = \gamma$ を意味する。この γ は s_{i_0}-cycle（$1 \leqq s_{i_0} < k$）である。 Q.E.D.