Celestial Mechanics in the 21st Century
21 世紀の天体力学

Takashi Ito and Kiyotaka Tanikawa
伊藤孝士 ・谷川清隆 (文部科学省 国立天文台)
National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo 181–8588, Japan

We review some of the major achievements in celestial mechanics and dynamical astronomy in the 20th century to look for their new directions in the 21st century.
20 世紀の天体力学を振り返り、21 世紀における天体力学の方向を探る。できれば新たなる方向を作りたい。他分野との境界領域に大いなる発展の可能性が存在している。

0. はじめに

天体力学のみならず世界のあらゆる局面で怒濤を巻き起こした 20 世紀が去った。かつて国立天文台あるいは東京大学東京天文台のメンバーを中心として開催されていた「天体力学研究会」は「N体力学研究会」へと発展解消し、量的にも質的にも大いなる変貌を遂げている。21 世紀最初の年に開催された記念すべき草津 N体力学研究会に際し、大胆にも 20 世紀の天体力学を振り返り、21 世紀に於ける天体力学の方向を探ろうと試みたのが本稿である。もちろん非力な筆者らに前世紀の天体力学を完全にレビューし切れる力量があるはずはなく、況や今世紀の天体力学の発展の方向を完全に予測出来ようはずもない。改めて言うまでもないが、本稿に記したのは筆者自身が興味を持つ範囲内に於ける天体力学の来し方行く末についての偏った見方の露悪に過ぎない。その意味で、「21 世紀の天体力学」という題目は大仰すぎるとの謗りを免れ得まい。ここに記載された内容は偏っているばかりでなく、筆者らの不勉強によりそもそも正しくない事柄が述べられている可能性もある。だが、21 世紀は百年間継続する。筆者らの試みである 20 世紀天体力学の総括と 21 世紀天体力学の発展予測作業は今回で終わるものではなく、今世紀初頭の数年間に亘って継続するものと考えて頂きたい。本稿は私達がその端緒に付いたことを示すものである。なお、本稿で記した内容が極めて偏っていることは前述した通りだが、同様に引用文献の質・量についてもやはり大いに偏向し、且つ不完全なものである。この点についても筆者らの力量の低さが反映されていることは明らかなのだが、枉げて読者の寛恕を願う次第であると共に、不十分な点については各方面からの指摘を常に甘受する用意がある。

第一節では 20 世紀の天体力学の成果と諸問題について概観する。まず理論的 (本稿では「数値的でない」くらいの意味で、「解析的」に近い) な研究の流れについて、三体問題、摂動論、KAM 理論、アーノルド拡散、Aubry–Mather 集合、可積分性カオス、自転運動理論などについて触れる。数値的研究に関しては、三体問題、惑星系の起源と進化、太陽系惑星の長期数値積分と安定性、数値計算法について触れる。第二節は第三節の準備として、21 世紀の天体力学を考える際の指針の一例を示す。そもそも天体力学とは何であるかという定義を改めて考えておくことは重要であろう。然る後に第三節では、21 世紀の天体力学の展望について私見を述べる。Lyapunov 時間と不安定時間の関係の解明、惑星系、惑星探査の成果、星団の現実的数値積分、惑星の自転運動と公転運動の相互作用、三体問題、アーノルド拡散、カオスの世界、KAM の崩壊、解析的摂動論の精密化、天体の衝突破壊過程、数値計算法の発展、新世紀の現実生活への応用的側面、など、考えるべき領域は無数に存在する。以上の議論を踏まえた第四節では、主として理論的研究の立場から若干の議論を行う。

本稿の筆者は「伊藤孝士・谷川清隆」の順に記されているが、これは単に人名を五十音順に並べたに過ぎず、本稿への寄与は完全に対等である。執筆分担としては、理論的研究部分を主として谷川清隆が、それ以外の部分、特に惑星運動の数値計算に関する部分を伊藤孝士が担当した。文体を見ればいずれが執筆した部分であるかは自明であるが、時間の制約により調整が不完全な箇所もあり、一部内容の重複が見られる部分もある。この点についてはあらかじめお詫びしておきたい。なお、本稿は常に筆者のウェブページ (http://th.nao.ac.jp/~tanikawa/) にて最新版にアップグレードし続けられる予定である。

1. 20 世紀の天体力学の成果と諸問題

1.1 理論的研究

天体力学は、19 世紀末にポアンカレ (Poincaré) に流れ込み、ポアンカレから流れ出た。天体力学に於いて、摂動展開の無限級数は微小分母の存在のために一般に収束しない。摂動論をどんどん高次まで進めて行っても正しい解に辿り着かないことが明らかになった。摂動展開が収束するとは、系が積分可能であることを意味する。19 世紀末にわかったことは、天体力学の問題が一般には積分可能でないことである。世の中には積分可能な系の方が遙かに少ない。その典型例が剛体の回転 (コマ) 運動である。19 世紀末、ロシアにおいてリャプーノフが独自に安定性の議論を展開した (Lyapunov, 1892)。リャプーノフの仕事の成果は今日、リャプーノフ指数、リャプーノフ関数、リャプーノフの第一法および第二法、リャプーノフ安定性、漸近安定性などの用語として残っており、その影響の大きさが窺われる。

20 世紀の天体力学はバーコフから始まったと見てよい。バーコフは力学の定性論を本格的に開始した。個々の軌道を簡単な関数で表すことが出来ないなら、軌道の束の動きを知ることで我慢する。ここからいわゆる力学系という学問分野が発生した。一方、Siegel は三体問題が何故に可積分でないかを追究した。三体衝突が悪さをしている。Chazy (1922) の後、1940 年代から 1960 年代にかけて、旧ソ連では三体問題の定性論が盛んに展開された (Hagihara, 1971)。

太陽系の惑星運動の研究も進んだ。惑星の発見や小惑星の追跡発見は 19 世紀の天体力学の華であった。20 世紀も惑星の存在が予言され、冥王星の発見として結実した。小惑星の平山族の発見 (Hirayama, 1918) は太陽系小天体の起源および安定性の力学的問題の動機付けとなった.

新発見の惑星を加えた惑星暦の作製が天体力学のひとつの目標となった。ミランコビッチによる気候変動研究は摂動論を踏まえている。人工衛星の運動の研究も進んだ。1957 年のソ連によるスプートニク打ち上げ以後、Kozai (1962), Hori (1966, 1967, 1970, 1971), Kinoshita (1977) ら日本の天体力学研究者が人工衛星の軌道理論への大きな貢献を果たした。Hori (1966) の理論は新旧の正準変数が混じらない簡明かつ有用な手法を提供した。ハミルトン系の可積分性の研究では Yoshida (1983a, 1983b) が突破口を開いた。

運動方程式の数値積分法も大いに研究された。ルンゲクッタ法に始まり、予測子–修正子法、補外法らによって精度の向上が達成された。近年ではハミルトン系であることを明らさまに利用するシンプクティック法が考案され、少数多体系においては正則化法などが現在進行形で発展中である。

20 世紀天体力学の最大の成果は何かと問われれば、純理論的には KAM 理論であろうと答える。20 世紀の半ば、1957 年に人類が打ち上げたスプートニクは、天体力学に限らず 20 世紀人類の最高の成果のひとつであろう。これは技術革新の勝利とも言えるが、天体力学の立場から見ると摂動論の勝利とも言うことができる。

現在流行中のカオスもまた、ポアンカレに端を発する。ポアンカレは、双曲型不動点に流れ込んで再び流れ出す特別な流れや、安定多様体および不安定多様体の複雑な絡み合いを注意深く観察した。ポアンカレはニュートン力学が垣間見せた無限の深淵に身震いしたのであろう。パン屋のおやじがこねる生地そのままに、われらが世界は引き伸ばされ、折り畳まれる。Hénon & Heiles (1964) は 1960 年代に数値的に KAM 曲線の崩壊を観察して力学的カオスを発見し、1980 年代の始めに Wisdom (1983) は太陽系の惑星の運動に予測不可能な運命を見た。パワースペクトルもリャプーノフ指数もカオスの存在を示す。至る所にカオスが跳梁跋扈している。宇宙に於いて、太陽系に於いて、カオスが常態であることが 20 世紀後半の共通認識となった。

相対論を天体力学としてどう評価するか？相対論的天体力学、これは筆者らの手に負えない。1970 年代前半までの天体力学については相対論も含めて Hagihara (1970, 1972, 1974, 1975, 1976a, 1976b) が詳しい。

1.1.1 20 世紀の三体問題研究の流れ

19 世紀の末にポアンカレやブルンスにより三体問題の非可積分性が証明されて以来、定性的な方向への研究が盛んになった (Whittaker, 1904)。具体的な課題としては、19 世紀末に Painlevé (1895) が提出した非衝突特異性の存在または非存在の問題、Chazy (1922) が提出した振動解の存在または非存在の問題が挙げられる。前者は 1990 年代に Xia (1992) により解決され、後者は 1960 年にまず Sitnikov (1960) により考証され、Alexeev (1968a, 1968b, 1969) により摂動論を使って一般三体に拡張され、Xia (1994) によって平面問題に於いて解決された。Siegel (1941) は三体衝突が真性特異点であることを示した。旧ソ連では最終運動、初期運動の分類の研究が行われた (Merman, 1958; Hilmi, 1961)。これは軌道の束の行方を追う方法であり、一本一本の軌道を追うのに比べると遠慮した目標と言える。これにより、粒子の捕獲や交換の可能性、エスケープ (escape) など幾つもの成果が得られた。

Saari (1971) は衝突特異性と N 体問題に興味を持った。1974 年に McGehee (1974) の変数が導入され、三体問題の理論研究が再び盛んになった。Moeckel, Simo, Devaney 等は McGehee 変数を使って衝突近傍を通過する解の振舞いを考察した。最近では数値計算を援用する研究 (Tanikawa *et al.*, 1995; Umehara, 1997; Zare and Chesley, 1998; Umehara and Tanikawa, 2000; Tanikawa and Mikkola, 2000a; Tanikawa and Mikkola, 2000b; Tanikawa, 2000) により、相空間一般の構造を明らかにする方向で研究が進んでいる。エスケープの判定条件を求める分野もあり (例えば Marshal 1990)、現在は Yoshida (1972, 1974) の判定基準が最良のものと考えられている。

1.1.2 20 世紀の摂動論の簡単な流れ

20 世紀中盤に展開されてよく使われた Brouwer & van Woerkom (1950) の摂動論は、20 世紀初頭の Hill 理論の拡張および再構築であった (cf. Hill 1897)。ここでは木星と土星の六次の効果までを考慮し、惑星質量に関しては木星と土星の大均差 (the great inequality) について二次の効果を考慮した。Brouwer & van Woerkom (1950) の理論を拡張したのが Bretagnon (1974, 1992) であり、離心率と軌道傾斜角については四次の効果まで、惑星質量についてはすべて二次まで考えた解析的理論である。こうした流れを踏まえ、Laskar は離心率と軌道傾斜角については六次、惑星質量については二次までを考慮した精密な永年摂動論を構築した (Laskar 1985, 1986, 1988, 1990)。Laskar の理論は木星型四惑星に関する Duriez (1977, 1982) の永年摂動論の拡張であるが、永年摂動の運動方程式を数値積分で解き、その解をフーリエ展開して主要な周期成分の周期と振幅を求めた研究である。Laskar の理論は現代の永年摂動理論の業界標準として用いられている。

Milankovitch (1920, 1930, 1941) に代表されるように摂動論の範囲を自転運動にまで広げ、地球に入射する日射量の幾何的変動を検証しようとする試みも綿綿と続けられている。これについては中島 (1980) や木下 (1993) のレビューが詳しいので、そちらを参照のこと。

1.1.3 KAM 理論 ・アーノルド拡散 ・Aubry–Mather 集合

天体力学のみならず、20 世紀の数理科学すべてにとって KAM 理論 (Kolmogorov–Arnold–Moser) は一つの救いであった (Kolmogorov, 1954; Arnold, 1963; Moser, 1962)。18 世紀後半から 19 世紀第一四半世紀を生きた Laplace は、自著 『確率の哲学的試論』(岩波文庫から内井惣七による邦訳あり) の中でいわゆる 「ラプラスの魔」を考えた。われにすべての初期条件を与えよ、さすれば、未来のすべてを予言して見せよう、というわけである。これはまさにニュートン力学の勝利である。この線に沿って、19 世紀中は摂動論を発展させて、太陽系の未来ばかりでなくすべての力学系の未来は完全に予測可能あるいは解けると思われた。あるいは思いたかった。だが、19 世紀中に力学で説明のできない現象 (熱現象、電磁気現象など) が次々と研究の対象となり始め、力学的世界観および摂動論への信頼はゆるぎ始めた。最終的には、ポアンカレが摂動展開が一般には収束しないことを示してしまった。時まさに、統計力学が擡頭していた。振り子は揺れた。突然未来は統計的になった。粒子が多数になればなるほど、統計力学の領分に入る。

一方で太陽系の推定年齢はどんどん伸びていた。19 世紀には高々数千万年と思われ、20 世紀に入っても、1920 年代には宇宙年齢が 20 億年であった。太陽系の年齢が 45 億年となったのは 1950 年代である。これは摂動論が収束しないことにより太陽系が不安定になること、未来が統計的であることに対する強力な反証である。太陽系を記述する運動方程式が非可積分であっても、 惑星達の運動が準周期的であるということは不安定性を妨げる障壁があるはずである。KAM 理論はこれに応えた。非可積分性が弱いときには、相空間のほとんどを障壁が占める。可積分系から遠ざかるにつれて障壁がまばらになる。こうして振り子はふたたび揺れた。大丈夫、未来はそれほど不確実ではない。

二つの問題が残った。ひとつは高次元の場合で、準周期運動の n 次元トーラスは $2n$ 次元の相空間を分離しない。従って、系が不安定になることを妨げる障壁にならない。準周期運動の間に狭まれていると思われた一般の運動は、次第に拡散していく。この現象はアーノルド拡散とよばれる (Arnold, 1964; Nekhoroshev, 1977)。この拡散の速度は如何 ?これが第一の問題。実際には拡散は非常に遅い。それは安定多様体と不安定多様体が織りなすネットワークに沿ってじわじわと進行する。ハミルトン関数を $H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$ として、適当に定数 a, b が取れて、タイムスケール $T = \frac{1}{\varepsilon} \exp(\frac{1}{\varepsilon^a})$ の間、作用変数は初期値から $|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b$だけ離れる。

準周期運動が滑らかな超曲面に閉じ込められなくなった時、それはどんな運動になるのか ?トーラスが壊れたとき、その破片はどうなるのか ?これが第二の問題である。この問題は Aubry & LeDaeron (1983) と Mather (1982) により、1980 年代の始めに解かれた。いわゆる KAM 曲面は、壊れると、きちんと編まれていたセーターの、横糸を失った縦糸のようにだらしなく緩んでしまう。横断面で見ると、連続曲線がカントール的な不連続集合、即ち Aubry–Mather 集合になる。ここから問題はカオスの領分に入る。

1.1.4 可積分性

ポアンカレやブルンスが三体問題の非可積分性を証明して以来、可積分であることは非常に稀なことであり、可積分系は特別なものであって、一般の力学系あるいは物理系を調べるのに役に立たないような印象が 20 世紀前半にはあったかもしれない。一般の系については摂動論的に攻

めるか、いっそ数値計算を使ってしまうかしかない。実際、その方向の研究はたくさん行われている。

1960 年代に、素朴な求積可能性から一歩進んで完全可積分性の概念が導入された。n 個の積分があって、どのふたつも Poisson 括弧を取ると 0 になる。これが Liouville の意味での求積可能性である。このとき相空間が n 次元トーラスによって層状に区分けされるとの幾何学的解釈がアーノルド (Arnold, 1978) によって行われ、完全可積分系と呼ばれるようになった。どうやって完全可積分な系を見つけるか、また、或る系が完全可積分でないとして、いくつ独立な積分を持つのか。進むべき道は ?行動方針が欲しい。これが問題となった。1983 年以前の研究に関しては Kozlov (1983) が詳しい。

一方、不安定周期解の安定多様体と不安定多様体が横断的交差を持つこと (馬蹄を持つこと) が非可積分と同値であることが示された (Moser, 1974)。これは微分方程式の解の多価性を意味する。従って、系が非可積分であることを示すには、どこかに馬蹄があること、どこかで解が (無限) 多価になることを示せば良い。パンルベ性 (一般解が複素 t 面で一価であること) が可積分研究分野で重要な概念であることがわかる。

1970 年代中盤、有限戸田格子の可積分性が示された (Hénon, 1974; Flaschka, 1974)。Yoshida (1983a, 1983b) は weight–homogeneous な微分方程式系が可積分であるための必要条件を求める具体的方法を提示した。ある特異な解を特徴付けるコワレフスカヤ指数のすべてが有理数でないと、代数積分は存在しない。コワレフスカヤ指数のこの性質は解の一価性と関係する (Ziglin, 1982)。

相空間の一点を取ったときにそこを通る解、およびその近傍を通る解がどのように幾何学的に配置されているのか。この配置のされ方が非可積分性と関係する。次元が高くなればなるほど、場合分けの数は増える。一方の極端は相空間が超曲面 (トーラス) によって単純に区分けされる完全可積分系、もう一方の極端は、どんな超曲面もなく、解曲線が全次元を移り動く系。この違いが解の関数表現の違いとなって現れる。

1.1.5 カオス理論

カオスは気象学の Lorenz (1963)、生態学の May (1976)、電気回路の Ueda (1973, 1979)、一次元写像の Li and Yorke (1975)、Feigenbaum (1978)、乱流の Ruelle & Takens (1971) らがそれぞれの分野で独自に、あるいは自然発生的に発見した現象である。マンデルブロのいわゆる「フラクタル」(Mandelbrot, 1977) が共通項として存在することが知れ、その概念は一気に世に出た感がある。もちろん後になってみると、ポアンカレ、バーコフやスメールなどが見ていた現象と同根のものであることがわかるのであるが。

最初の驚きは、ランダムと思える現象が自由度の低い系に見られたことである。流体力学のランダウ的な観点からすると、静的な流れから乱流への移行に於いて、力学系としての自由度がどんどん増えて行く。完全な乱流は自由度無限大であるが、カオスを示す系は、常微分方程式で言えばわずか三元の連立方程式系でよい。ハミルトン系なら自由度 2 からすぐにカオスが始まる。カオスの本質は引き伸ばしと折り畳みである。これを図示したのが Smale (1967) であり、具体的には馬蹄写像である。四角形を伸ばして折り曲げて馬蹄形にし、もとの四角形の上に乗せる。あまりにも簡単なモデルであるが、これがカオスの本質を見せた。多項式写像でこれを表現したのが Hénon (1976) である。

カオス系は指数関数的に不安定であるが (引き伸ばし)、同じような場所に戻って来る (折り畳み)。引き伸ばしと折り畳みが繰り返され、初期値の記憶がどんどん失われる。いわゆる初期値に対する敏感な依存性である。もはやラプラスの魔も困り果てる。無限の精度で無限の未来を正確

に予言することにどれほどの意味があるのか ?馬蹄が力学系の相空間の至る所に存在する。形の異なる馬蹄が近くに共存する。19 世紀の末にポアンカレを嘆かせた力学系のとてつもなく複雑な構造が、20 世紀の末に至って再び多くの研究者を悩ませている。この複雑性は宇宙のすべての階層にわたって普遍的に存在する。

J. Wisdom (Wisdom 1982, 1983, 1987a, 1987b) は小惑星や冥王星など太陽系天体の運動のカオスについて論じ、Hénon は制限三体問題でカオスを論じ、また Hénon 写像を作り出した。Lecar はリャプーノフ時間と大局的不安定性の不思議な関係 (大局不安定時間はリャプーノフ時間の 1.8 乗) を見つけ出した。理由は説明されていない。自由度 2 のハミルトン系に対応する二次元写像、特にねじれ写像を用いてカオスの始まり、カオスの発展、カオスの度合を調べる方向の研究もある (Tanikawa & Yamaguchi 1987, 1989, 1994, 1995, 2001; Yamaguchi & Tanikawa 2000, 2001)。

1.1.6 自転運動理論

惑星、特に地球の自転運動はタイムスケールによって全く研究分野が異なる。一日、更に一時間以下では弾性体としての地球が強調される。一年以下の時間スケールでは地球回転・自転速度変動として、20 世紀の四分の三の期間は恒星を用いた緯度観測や極運動観測が行われて来た。残り四分の一の期間は、地球回転が人工衛星レーザー測距、VLBI、GPS などの宇宙技術による高精度観測の対象となってきた。岩手県水沢市にあった緯度観測所の木村栄が極運動の z項 (木村項とも呼ばれる) を発見し (Kimura, 1902)、同じく緯度観測所の若生康次郎がこの z項を流体核の存在によって説明した (Wako, 1970)。数十年から数千年スケールの変動はデータとしては古代の天文現象 (日食、月食、星食) しかないので、古代史も関与する学際的な分野となる (Stephenson, 1997; 谷川, 相馬, 2001)。タイムスケールが数万年、数十万年となると、海洋のプランクトンの死骸、池に沈んだ巨木の年輪など、地質学的証拠が重要となる。ミランコビッチサイクルと呼ばれる地球軌道の長周期摂動とくに地軸の傾き変動に由来する日射量変化が気候変動に反映する (Milankovitch, 1941; Шараф and Будникова, 1969a; Шараф and Будникова, 1969b; Berger, 1976; Berger *et al.*, 1984; Berger, 1988; Berger, 1989)。数億年ともなると、月の軌道長半径の永年変化に対応する地球物理的な変動が観測されるはずである (Ito *et al.*, 1993)。地球自転が速いことが貝の模様に現れる (Abe *et al.*, 1992; 大野, 1993)。このタイムスケールの月運動論は Goldreich (1966) らに始まる。

より短い時間スケールの運動、すなわち剛体地球の歳差・章動の理論については、木下宙の功績が大である。国際天文学連合 (IAU) は長いこと 1950 年代に米国の Woolard が構築した理論 (Woolard, 1953) を正式に採用していた。が、VLBI を始めとする超精密観測時代に入ると Woolard の計算値は精度が不足し、なお且つ地球の形状軸ではなく瞬間自転軸の章動を計算しているという欠陥もあった。Kinoshita (1977) は剛体地球の章動理論構築にハミルトン力学を持ち込み、剛体地球の形状軸、瞬間自転軸、および角運動量軸の章動の精密な数値を計算し直した。Kinoshita (1977) で計算された章動の周期成分は 106 個であり、誤差精度は 1/10000 秒未満であった。この研究は更に Kinoshita (1990) で発展され、現在はフランスの J. Souchey らによって引き継がれている。なお、現在の観測値と理論値との差異は主として地球の非剛体部分が持つ不確定性が原因であるとされており、こちらに関しては笹尾哲夫の大いなる貢献があり (笹尾, 1979; Sasao *et al.*, 1980; 笹尾, 1993)、その後を白井俊道らが引き継いで精密な研究に取り組んでいる (Shirai and Fukushima, 2000; Shirai and Fukushima, 2001)。歳差・章動の理論は文字通りの超精密時代に入っており、自然科学研究というよりは高度技術開発という名称が当て嵌まるような段階に近付いている。真正の基礎天文学として、今後もしっかりと継承されて行くべき領域であろう。

1.1.7　相対論的天体力学

Hagihara (1931) は相対論的一体問題を解いた。観測精度が上がって、座標系の問題 (Fukushima *et al.*, 1986) が浮上した。最近はロシア学派の Brumberg (1995)、Kopeikin (1999, パルサータイミング)、Klioner (Klioner and Soffel, 1998) が活躍している。大質量星の重力崩壊があれば重力波が観測されると予測されている。

1.2　数値的研究

制限三体問題の数値積分は、20 世紀前半の手計算から後半の計算機による研究まで、切れ目なく続いている。一般三体問題も制限三体問題と同様、力学系そのものとしての興味や天文学の問題へのモデルとして、多くの研究者のターゲットとなった。理論的な取扱いのための正則化法は数値計算の時代には殊に有用となった。

1960 年代になると、重力多体問題を計算機で解くことが実用的になった。Aarseth (1985, 1988) に代表されるように、それ用の数値計算法やソースプログラムが次々と開発された。KAM 理論のチェックを数値的に行う研究も行われた (Hénon and Heiles, 1964)。数値計算法については、吉田春夫によるシンプレクティク数値積分法の理論、J. Wisdom らの手によるシンプレクティク数値積分法の実装、牧野淳一郎や福島登志夫らによる各種の多項式近似法、Levi-Civita や Kustaanheimo-Stiefel らによる正則化手法として花開いている。

杉本大一郎らによる重力多体問題専用計算機 GRAPE 類の成功は極めて大きい (Sugimoto *et al.*, 1990; Ebisuzaki *et al.*, 1993; Makino *et al.*, 1997; Makino and Taiji, 1998)。GRAPE 類を駆使して、井田茂・小久保英一郎らの東京工業大学グループが惑星集積過程の大規模直接計算に成功し、この分野に新時代を切り拓いた。ここ数年は惑星系力学の最盛期と言うこともでき、G. Wetherill, M. Holman, M. Duncan, H. Levison, J. Lissauer, J. Chambers らの活躍により次々と新しい成果が発表されている。惑星系のみならず、衛星・環系についても P. Goldreich や S. Tremaine ら以来研究の進展は著しい。特に天王星の楕円リングの起源や安定性維持の機構は、伝統的な解析的摂動論と新しい数値計算の融合領域の良い練習問題となっている。

計算機は理論の道具にもなっている。三体問題の理論の進展は、数値計算による相空間のサーベイによる。脳の延長として計算機を考えればよい。算盤や電卓の延長上にあるものである。

天体力学を代表する方向と言えば、ハミルトン力学一般、特殊な方程式としての N 体問題、特に三体問題であろう。20 世紀後半になぜ天体力学が亡びなかったのか ?なぜカオス研究はこれほど流行るのか ?答えは余りにも明らかである。計算機のおかげである。

1.2.1　制限三体問題

制限三体問題の数値積分は 20 世紀前半、細々と続けられた。手計算かそれともタイガー計算機か。コペンハーゲン学派の Strömgren (1935)、そして東北大学の松隈 (Matukuma, 1933)。大型計算機が導入されて、Hénon (1965) が系統的にコペンハーゲン派のシナリオに沿って周期解の探索を始めた。制限三体問題はその後、多くの人によって現実問題のモデルとして使われた。自転の起源 (Tanikawa *et al.*, 1989; Tanikawa *et al.*, 1991), 微惑星の集積 (Nakazawa *et al.*, 1989a; Nakazawa *et al.*, 1989b)、環の安定性 (Hénon and Petit, 1986; Petit and Hénon, 1987), 衛星の捕獲可能性 (Tanikawa, 1983) 等など。

Hénon (1965) は KAM 理論のチェックとして、一早く周期解の安定性を数値的に調べ始めた。正に計算機時代の申し子と言えよう。あるいはポアンカレ以来の伝統かしれない。その後、大型

計算機利用の恰好の題材として、制限三体問題は世界のあちこちで研究が行われた。主として周期軌道とその安定領域の数値的決定である。米国の Szebehely, Jefferys, 英国の Markellos などがこれに加わった。

1.2.2 一般三体問題

一般三体問題の数値計算も大型計算機の普及とともに本格的に開始された。薮下 (日本), Aarseth (ノルウエイ→英国), Anosova (ロシア), Broucke (ベルギー→米国), Mikkola (フィンランド), Heggie (英国), Zare (イラン→米国), Szebehely (ハンガリー→米国), Contopoulos (ギリシャ), 谷川 (日本)。世界中の研究者が参加した。三体問題には、直線問題、平面あるいは三次元二等辺問題、平面問題、階層問題、自由落下問題など、たくさんの変種がある。天文学的な応用のためには、単独星と連星の衝突、遭遇数値実験 (Heggie, Mikkola)、三体系が壊れるまでの時間 (Anosova) などが精力的に調べられている。S. Aarseth (http://www.ast.cam.ac.uk/~sverre/) は己の数値計算コードを一般に公開している。Harrington (1975) に始まる階層三体問題の安定性の研究は太陽系外惑星系の安定性の問題に繋がる可能性がある。

1.2.3 惑星系の起源と進化

林忠四郎や Safronov に始まる惑星系形成過程の定量的理論は、数値的研究の発展と共に急速な進展を遂げた典型的な分野である (Hayashi *et al.*, 1985)。これに天体力学が関与する部分は、原始太陽系星雲中の固体成分が凝縮して形成される微惑星の運動からである。林らのいわゆる「京都モデル」に於いては木星型惑星の形成時間が長くなり過ぎるということを研究の契機とし、1980 年代の後半には微惑星の成長が暴走的であることが Wetherill らの研究によって明らかにされて来た (Wetherill and Stewart, 1989)。この説を確定的にしたのが、東京大学教養学部および東京工業大学理学部のグループ (井田茂、小久保英一郎、牧野淳一郎、杉本大一郎、ら) が上述の重力多体問題専用計算機 GRAPE 類を使って行った一群の研究である (Kokubo and Ida, 1995; Kokubo and Ida, 1996; 小久保, 井田, 1997; Kokubo and Ida, 1998; 小久保, 1999; Kokubo and Ida, 2000; Kokubo and Ida, 2001)。Kokubo & Ida の一連の論文によれば、微惑星の暴走集積は必然であり、原始惑星と呼ばれる中間段階の天体へと寡占的に成長することがわかった。20 世紀の惑星形成過程理論が残した大きな課題のひとつはこの原始惑星から現在の惑星への成長の具体的描像であり、Chambers et al. (1996), Chambers & Wetherill (1998), Levison et al. (1998), Yoshinaga et al. (1999), Ito & Tanikawa (1999), Agnor et al. (1999), Chambers (2001) らによって幾つかの計算が行われ、今世紀への橋渡しが為された。

なお広い意味では惑星系の起源と同根だが、衛星–環系の起源と力学進化についての研究も Goldreich & Tremaine (1978, 1979) らに端を発して今や盛況である。衛星系には理論的にも興味深い共鳴現象が見られるし、惑星リングと相互作用して楕円リングを保持しているという説もあり、今後の発展が多いに待たれている。

1.2.4 太陽系惑星の長期数値積分と安定性

数値的研究の典型例のひとつが太陽系惑星の長期数値積分である。惑星系の安定性は Newton 以来の天体力学の大課題であり、現在でも研究が続けられている問題である。この問題に対する数値的アプローチは、世の中の計算機なるものが出現した 1950 年代から早速開始された。当時は計算機資源が極めて限られていたため、計算対象は専ら外五惑星であった。最初の有名な研究は Eckert

et al (1951) で、汎用大型計算機を用いて五外惑星の運動を 350 年間数値積分したというものであった。この後、Cohen & Hubbard (1965) による五外惑星運動の 12 万年数値積分、Cohen et al (1973) による五外惑星運動の 100 万年数値積分、Kinoshita & Nakai (1984) による五外惑星運動の 500 万年数値積分、Applegate et al (1986) の専用計算機による五外惑星運動の 217 万年数値積分などを経て、Roy et al (1988) に至って五外惑星運動の数値積分期間が一億年に到達し、五外惑星の数値積分に関しては太陽系年齢が視野に入る段階となった。この直後、Sussman & Wisdom (1988) が専用計算機 Digital Orrery を駆使して 8.45 億年の長期数値積分を実行し、外五惑星系の運動がカオス的であることを見い出した。外五惑星系については A. Milani らの LONGSTOP プロジェクトなどに於いても数値積分が継続され、Wisdom & Holman (1991) らの有名なシンプレクティク数値積分法の論文で発表された 11 億年間の数値積分、PC+i386 の組み合わせを用いて Kinoshita & Nakai (1996) が実行した±55 億年の数値積分を経て、積分期間は現在では Duncan & Lissauer (1998) や Ito et al. (1996) による 10^{11}年オーダーにまで到達した。この長期積分に於いてもやはり外五惑星系は安定であることが確認されている。

地球型四惑星も含めた数値積分では計算量が一気に 150 倍以上になる。現在でも標準とされる有名な研究は Quinn et al (1991) の 300 万年間の数値積分であり、月–地球系が受ける潮汐力や一般相対論的効果を慎重に扱った名論文と名高い。Sussman & Wisdom (1992) の一億年の数値積分により地球型惑星の Lyapunov 数が数百万年と非常に短いことが示された後には一時の数値積分ブームも去ったかに見えたが、安価な AT 互換機の跋扈と共に再び復活しつつあり、Duncan & Lissauer (1998) の約 10 億年の数値積分を経て、Ito & Tanikawa (2001) では±50 億年にわたる数値積分に於いて、カオスであるとは言いながらも大局的に安定である太陽系惑星の姿が明らかにされつつある。

付言しておくと、「太陽系は安定か？」という問いは極めて抽象的であり、その答を私達は既に知っているとも言えるし、知らないとも言える。これはひとつには、惑星の運動について「安定性」という用語が使われる場合にはその意味が非常に曖昧であることによる。実際のところ、太陽系惑星の運動に関して安定または不安定という厳密な定義を与えることは容易ではない。ここ数百年間に存在した研究者の数だけ安定性の定義があるとすら言えるかもしれない。そうした混乱の状況を A.M. Nobili は、自著 (Nobili *et al.*, 1989) の導入部分に於いて巧みな言い回しにより以下のように表現している。

> "... When the stability of our solar system is discussed, two objections often arise. Firstly, this problem has been around for too long, never getting to the point of stating clearly whether the system is stable or not; the few definite results refer to mathematical abstractions such as N-body models and do not really apply to the real solar system. Secondly, the solar system is macroscopically stable — at least for a few 10^9 years — since it is still there, and there is not much point in giving a rigorous argument for such an intuitive property. ..."

1.2.5 数値計算法

天体力学における数値計算で最も困難な部分は衝突の取り扱いである。これは理論の問題であると同時に数値計算法の問題でもある。ここでは 20 世紀の正則化の歴史をごく簡単にまとめる。

制限三体問題には二体衝突がある。Sundman (1912) は二体衝突に対応する微分方程式の特異性が真性でないこと、そして変数変換により取り除くことが可能であることを示した。二体衝突の正則化は Levi-Civita (1906), Birkhoff (1915), Thiele–Burrau (1906) らによって行われた。但

しこれらはすべて平面問題のための手法である。Levi-Civita は衝突点の周りに面を二枚用意し、軌道は衝突の度に面を移るとした。Birkhoff は第一天体および第二天体のどちらで衝突が起こっても良いように変数を選んだ。Thiele–Burrau は双曲線–楕円座標へと変数変換を行う。Lemaitre 変換 (Lemaitre, 1952) は Birkhoff 変換に似ているが、後者が元の変数と新変数の対応が 1 対 2 であるのに対し、前者は 1 対 4 である。Kustaanheimo & Stiefel (1965) は三次元問題の二体衝突の正則化に成功した。ここでは三次元の変数を四次元空間に埋め込んだ。

上記変換では時間変換はすべて $dt = rd\tau$の形 (τは新しい時間変数) である。ここで rは衝突する天体間の距離である。解は衝突を有限時間で通りすぎる。McGehee 変換では $dt = r^{3/2}d\tau$なる形が採用される。この場合には時間を引き延ばし過ぎて、質点の衝突までに無限時間かかる。

Szebehely & Peters (1967) はピタゴラス問題 (三天体を 3–4–5 の直角三角形の頂点に置いた配置) を数値的に解き、動画を作った。これにより、三体問題の最終運動予測の難しさが多くの人に理解された。R.H. Miller (1964) は少数多体系の数値積分を行い、時間を進めて戻ってきたときに、途中に近接衝突があると初期条件への戻りが悪いことを見た。ハミルトン系は指数関数的に不安定であるから、数値積分の信頼性に問題があることを指摘した。この時期、32 体問題による国際プログラム比較が行われた。計算機が異なると、逃げる天体も同じではない。

2. 21 世紀の天体力学を考える際の指針

2.1 天体力学とは何か ?

天体力学とは何か ?この命題に関する研究者の見解はばらばらである。これは不思議なことではないかもしれない。だが天文学の他の分野に比べて、天体力学に於いては個々の研究者の間に自分達の守備範囲に関して暗黙の了解がなされていないことも確かである。伝統的には太陽系の天体の運動を扱う学問分野と呼べば良いか ?けれども、伝統的という言葉は一体いつを指すのか ?何しろ天文学の対象は 20 世紀に入ってからとてつもなく広がってしまった。18 世紀や 19 世紀の考えを伝統的と呼ぶならば、私達が取るべき態度としては二つが考えられる。18 世紀であれば、太陽系がほぼ宇宙そのものであった。19 世紀には系外銀河という概念はなかった。わが銀河が宇宙のすべてであった。星のスペクトル研究は 19 世紀の終りに始まったばかりで、その頃には原子核反応も知られていない。太陽系外天体の天体物理学研究も緒についたばかりである。やはり天体力学が天文学の中心であったろう。そこで、第一の態度は以下のようなものが考えられる :天体力学は宇宙を扱っていた。だから現在以降もそうあるべきである。一方、第二の態度は以下である :天体力学は今までずっと太陽系を中心的対象と考えて来た。従って、天体力学はやはりこれからも太陽系を対象とすべきである。

ともあれ、20 世紀に出版された書籍や論文のタイトルに 「天体力学」のあるものを天体力学の守備範囲とするなら、極めて数学的なところから日常的なところまで範囲は非常に広い。19 世紀末のポアンカレの有名な教科書 “Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste” (Poincaré, 1892) は日本語に訳せば 「天体力学の新手法」となる。版を重ねた Whittaker の 「解析力学」(1952) (1904 年から 1952 年まで) の副題は 「三体問題への序付き」となっている。Siegel & Moser の教科書 (1971) は 「天体力学講義」、萩原雄祐の 「天体力学の基礎」(1950, 1976)、同じく 5 巻 9 冊の大著 「天体力学」。これらはきわめて数学的である。日本語の標準的教科書 「天体と軌道の力学」(木下, 1998)、 「岩波講座第一巻 力学」(大貫, 吉田, 1994)、歴史に詳しい 「古典力学の形成」(山本, 1997) が中間に位置し、 「天体力学入門」(長沢, 1983) などは入門編に属する。毛色の変わったところでは四元数を縦横に駆使した 「天体力学講義」(堀, 1988) があるが、非常に難解である。

具体的には、例えば新大学院生が初歩から天体力学を学ぶとすれば、以下のような道がひとつ提案できるかもしれない :長沢 (1983) や Danby (1992) で天体力学の初等的な部分の雰囲気を掴み、Brouwer & Clemence (1961) で古典的伝統芸能の全容を垣間見、木下 (1998) で Brouwer & Clemence (1961) の obsolete な部分を補う知識を得、Boccaletti & Pucacco (1996, 1998) でハミルトン力学やカオスに親しみ、Lichtenberg & Lieberman (1992) でカオス力学に更に深く触れ、惑星系の具体的な問題を扱う場合には Murray & Dermott (1999) ををを参考にして研究を行う。人工衛星など更に精密で実際的な問題を扱う場合には Battin (1987) などが良い道標になろう。

余談になるが、解析力学に関する古典的な名著である H. Goldstein の "Classical Mechanics" (1980) 内での正準摂動論の記載は他のどの物理学の教科書よりも天体力学に寄っており、歴史的意義に関する記述も詳細である。正準摂動論の始原的な応用として 「von Zeipel 法の第一版」とも言える 19 世紀の Delauney の仕事が紹介されており、Hori (1966) や Deprit (1970) の Lie 変換正準摂動論も紹介されている。筆者らが知る限り、正準変換の物理的意義についてこの Goldstein の教科書以上に執拗なる直感的説明を繰り返し続ける教科書は見当たらない。しかもその説明はどれも的を射ており、読むほどに味わい深い。この教科書が力学に関する名著中の名著との誉れを欲しい儘にする所以であろう。但し、数値積分の項で Cowell 法が 「Crowell 法」と誤称されている部分はいただけないが。

話を戻すと、兎に角 Brown et al. (1922) が米国に於いて 「天体力学」の活動報告を書いた時点で、既に天体力学とは何かについて迷いがあったと思われる。この報告の冒頭に 「天体力学を最も広く解釈すれば、天文学のあらゆる分野に関わっている。狭く解釈すれば、重力相互作用する天体同士の公転運動や自転運動を扱う」とある。Brown も筆者と同じ悩みを抱えていた。報告書は、太陽系、天体力学の星々への応用、三体および多体問題の理論の三部構成であった。

この場合、自分がどこに居るかが重要である。 「太陽系の天体の運動、それ以外でも宇宙の天体の運動に直接関わるような問題を相手にしない限り、天体力学とは呼べない」 「制限三体問題や一般三体問題そのものを研究する時、それは天体力学とは言えない」と考えることも可能である。

ひとつの態度は、具体的な天体あるいは天文現象を想定することである。例えば太陽系の起源。これを力学的に追求する態度を保つ。もうひとつの態度は、天文学に現れるカオスの本性を追求することである。いずれにせよ、今後の発展方向のひとつが他の学問分野との境界領域にあることだけは明らかである。近いところでは天体物理学や地球惑星科学、あるいは生命科学、または人文社会科学などである。

2.2 計算機の性能向上と天体力学

TOP500 (http://www.top500.org/) に蓄積されたハイエンドコンピュータの性能変遷を見るまでもなく、この十年間で計算機の平均的性能は三桁以上向上しており、performance/cost 比は更にそれより数桁向上していると言って良い。天体力学業界もその恩恵に預かっていることは言を待たない。また、天体力学の分野では杉本大一郎・牧野淳一郎グループの GRAPE プロジェクトが大成功を納め、重力 N 体問題の分野に革命的な進展を持たらしたことは前述した。最新の GRAPE–6 は一筐体で 1 TFlops 以上の演算能力を持っており、その辺りの汎用ベクトル並列型スーパーコンピュータが束になっても届かない超高性能を誇っている。この GRAPE シリーズを利用し、小久保英一郎や井田茂らのグループは微惑星集積に関する力学過程を完全に解明し尽くした。GRAPE シリーズの開発は今も続けられており、専用計算機を使った重力 N 体問題研究の将来は明るいと言える。

一方、汎用のベクトル並列型スーパーコンピュータについては、市場に於ける存在自体が危う

くなっている。ベクトル計算機を製造するメーカは既に日本電気 (NEC) 以外になく、NEC にしても米国市場の販売のために CRAY と手を組んだりして四苦八苦している。富士通や日立製作所は既にベクトル機の開発から手を引いてしまった。一方では近年、ベクトル計算機を使って天体数 N がいくら小さくてもベクトル化による十分な高速演算を可能にする算法が福島登志夫によって開発された (Fukushima, 1997c; Fukushima, 1997e; Fukushima, 1999)。この方法は、運動方程式の解を Chebyshev 多項式で展開し、Picard 反復により逐次解を求めて行くという方法である。この方法は摂動が小さな太陽系の惑星運動の求解などに非常に有効と思われている。だがベクトル計算機自身の将来が見えない現在、この有効な方法の活路の存在も怪しげな状態になっている。ベクトル並列計算機に変わる新時代のスカラ超並列機の天体力学的活用については Saha & Tremaine (1997) らの算法が発表されているが、その実用性については未だ不明瞭な部分が多い。

低迷する大型計算機の領域に対比し、肥沃な資本主義経済支えられて performance/cost 比を上げ続ける PC については大いなる展望が開けている。伝統的な天体力学は基本的に小さな N の問題を扱うので、専用計算機や大型計算機に頼るケースは例外的であり、机上の PC でしこしこと長時間の数値積分を行うというスタイルが普遍的である。しかしこれには非常に長い時間がかかる。例えば、Ito & Tanikawa (2001) で行った太陽系 9 惑星の 50 億年間数値積分 (ひとつの初期値に対して) に必要な時間は、ちょっと前までの最速 PC であった alpha 21264 600MHz を用いたとして 6 ヶ月近い時間を要する。すなわち一個の計算に 5000 時間以上の CPU time が必要ということである。カオス系である惑星運動の数値積分は一個の初期値で足りるはずはなく、少なくとも数個から数十個の初期値から出発して系の統計的な振舞いを検証する必要がある。こうなってしまうと、計算時間はあっと言う間に現実的な数字から遠ざかる値になる。PC の演算能力が現在の 1000 倍、すなわち太陽系 9 惑星の 50 億年間数値積分が 5 時間で終了する時代が訪れれば、この状況は質的に改善されるであろう (Tremaine, 1995)。けれども、汎用計算機の演算能力 (単一 CPU の高速化) はそろそろ原理的な上限—使用する素子中での電子運動の速度が律速になる段階—に到達しているという説もあり、従来のような 「10 年で 1000 倍」という伸び率が期待できるということはなかろう。

3. 21 世紀の天体力学

3.1 Lyapunov 時間と不安定時間の関係の解明

カオス系の特徴的時間を表すスケールは Lyapunov 時間である (Benettin *et al.*, 1976)。Lyapunov 時間は、近接する初期値から出発した軌道が e 倍離れるまでの平均的時間として意味付けられている。けれども、Lyapunov 時間が過ぎたからと言って系が不安定化して瓦解するというわけではないことが話を混乱させる。例えば Sussman & Wisdom (1992) らの計算によれば太陽系の地球型惑星の運動の Lyapunov 時間はわずか数百万年と言うが、地球型惑星は今日に至るまで 50 億年近い間安定な運動を続けている。要するに、Lyapunov 時間 T_L と現実の不安定が発生するまでの時間 T_I の対応関係は不明であるというのが実状である。

惑星運動は一般に不安定までの時間が非常に長いので、T_L と T_I の関係を知る数値実験を繰り返すことは容易ではない。けれども、木星の摂動下にある小惑星には数百年から数千年で不安定化するものもあり、T_L と T_I の関係を検証するには良い例である。Lecar & Franklin (1992a, 1992b) はこの点に目を付け、多数の数値実験の後に $T_I \propto T_L^{\gamma}$ という関係を経験的に見出した。指数 γ は小惑星帯の場合には 1.8 に近いであろうという結論である。現在のところこの関係の物理的意義は解明されていないし、$\gamma \sim 1.8$ が何を意味するのかもわかっていない。Morbidelli & Froeschlé

(1996) らが解析的な説明を試みたりしてはいるものの、成功しているとは言えない。けれども、T_I と T_L の関係を知ることはカオスと現実の間に橋を掛けることに相当する。一般に Lyapunov 時間 T_L は大局的な不安定時間 T_I に比べるとずっと短いので、$T_I \propto T_L^{\gamma}$ という関係が成立するとすれば、実際の数値計算を行わずして系の不安定の時間スケールを知ることができることになる。

これに関連して、系の力学的間隔と不安定時間とのスケーリング則も経験的に知られている。Chambers et al. (1996) で指摘された事実は、原始惑星系の平均間隔Δ (相互 Hill 半径で規格化したもの) と不安定までの時間 T_I の間に $\log T_I \propto \Delta$ という指数関数的な関係が成立することである。この関係は後に Yoshinaga et al. (1999) や Ito & Tanikawa (1999) によっても確認された。$\log T_I \propto \Delta$ という関係式の成立は、系の進化が或る種のカオス的な拡散に支配されているためと予想されているが、具体的な説明は未だ存在しない。T_I と T_L, あるいはΔの関係の意味を知り、カオスと現実の架け橋を掛けることは、21 世紀の天体力学がまず最初に取り組むべき重要な課題であろう。

3.2 惑星系

惑星系の力学は 20 世紀も天体力学の中心的課題であり続け、その事実は 21 世紀も変わることはない。太陽系外惑星系の発見に伴い、天体力学と惑星系の関わりは私達の太陽系の問題と太陽系外惑星系の問題との二方向で進化して行くであろう。以下では 21 世紀に於ける惑星系の天体力学に関する諸問題を羅列して行く。

3.2.1 惑星集積過程

私達の太陽系に限るものではないが、微惑星の集積過程についての数値計算は重力多体問題専用計算機 GRAPE の活用を中心として更に進行するであろう。GRAPE は重力多体問題に正攻法で挑む王道だが、その一方で Tanikawa et al. (1991) に代表されるような制限問題を重ね合わせる手法も完全に死に絶えたわけではない。試験天体の個々の軌道の性質に関してより厳密な情報を得られることは、制限三体問題の唯一の長所だからである。

3.2.2 衛星の力学と物理

月を例に挙げるまでもなく、衛星の運動は前世紀以前から天体力学に極めて興味深い課題を提出し続けて来た。現在に於いても、天王星の楕円リングの維持機構と羊飼衛星の関係 (Kozai, 1992; Kozai, 1993; Kozai, 1995; Yamanaka, 1997; 山中, 1997)、逆行衛星とその力学的起源、土星の衛星に見られる各種の共鳴現象 (Greenberg, 1977) など、解かれるべき問題は山ほどある。これらの課題は間接的に、Europa に関して噂されている海の存在と生命の起源の問題と関連しているかもしれない。

3.2.3 太陽系外縁部

太陽系外縁部の力学的研究は、他のどの領域よりも観測と密接に結び付いている。幸いにも現在はその最盛期を迎えていると言っても良い。カイパーベルト天体は 2001 年夏現在で 400 個近く発見されており、十分に統計的な議論を行える段階に至った。けれどもその長い公転周期が原因し、カイパーベルト天体の力学的な構造はよく分かっているとは言い難い。今後の観測による正確な軌道決定や安定性解析の進展が望まれている。そしてその先には、未だ誰も目にしたことのないオールト雲の発見という難関が控えている。オールト雲は確かに遠く、暗く、その発見は

かなりの困難であろう。けれども、ひとたびオールト雲天体が発見されれば、長い間の謎であった彗星の軌道分布や微惑星の空間分布 ・速度分布に関する決定的な情報を得ることができるであろう。もしかするとネメシス、いわゆる惑星 X の存在あるいは非存在について何かを知ることができるかもしれない。国立天文台のすばる望遠鏡のみならず、世界中の大望遠鏡がその観測時間の多くを太陽系外縁部に向ける所以のひとつである。

3.2.4 太陽系外惑星系

1995 年の初発見以来 (Mayor and Queloz, 1995)、惑星系の天体力学の中でも太陽系外惑星系は圧倒的に 21 世紀天体力学の中心である (Boss, 1996; 井田, 1997)。何と言っても地球外生命や地球外文明、あるいは SETI と言った自然科学の究極目標のひとつに直結する太陽系外惑星系研究は、既に 70 例以上の観測結果を踏まえて怒濤の黄金時代に突入した (Marcy and Butler, 2000; Butler *et al.*, 2001; Jones *et al.*, 2001)。

太陽系外惑星系の多くは太陽系とは大きく異なる様相を呈しており、惑星形成理論にしても安定性研究にしてもその拡張と一般化が急務である (阿部, 1997; 渡邊, 井田, 1997)。従来は考えられなかったような初期条件や境界条件下での理論構築が待たれている。一方では、幾つかが既に発見されつつある複数惑星の系 (υ Andromedae, Gliese 876, HD 168443 など) で発現している各種の共鳴現象は、そのメカニズムなどは太陽系での現象と共通であるものの、起源の解明は大きな課題である (Lissauer, 1999; Laughlin and Adams, 1999; Rivera and Lissauer, 2000; Stepinski *et al.*, 2000; Nakai and Kinoshita, 2000; Barnes and Quinn, 2001; Ito and Miyama, 2001)。

現在発見されている太陽系外惑星系はその殆どが単独星の周囲のものである。観測対象が単独星であるからこれは当然でる。だが、宇宙の天体の多くは連星を形成している。この意味で、連星系の周りの惑星系の起源と進化 ・安定性に関して天体力学的見地からの検証を行うことは重要である (Holman and Wiegert, 1999; Whitmire *et al.*, 1998; Bennett *et al.*, 1999; Nelson, 2000)。Innanen & Mikkola (1997) が提唱した力学的剛性 (dynamical rigidity) や軌道要素の連動と安定性に関する研究 (Pauwels, 1983; Ito and Tanikawa, 2001) などはその興味深い一例である。

現在発見されている太陽系外惑星は、観測限界によって大型のガス惑星ばかりであろうと思われている。いまから数年あるいは十数年の後、宇宙空間での光赤外干渉計観測などによって地球型の小型惑星が検出さることであろう。太陽系外惑星系に関する天体力学的研究の新たなる進展はそこから再び始まるはずである。

3.2.5 惑星探査の成果

天体力学の将来とは一見直接に結び付かないように聞こえるかもしれないが、将来の惑星探査ではロボット群が大活躍するであろう (発電ロボット、観測ロボット、送受信ロボット、工作ロボット、データ解析ロボット、...)。ロボットと言えば、何と言っても精密機械立国の日本が主導して行うべき方向である。上手く行けば惑星探査の実況放送が実現するかもしれない。惑星探査によって惑星系の起源に関して数多くの物質科学的情報が集まるという期待は言うに及ばず、天体力学に関係するデータも多く集まることが期待される。例えば族を成す小惑星や逆行衛星の組成を知ることで、これらに関する衝突起源説が真か否かを知る手掛りが得られる。最近流行の連星小惑星の起源についても同様である。物理探査との組み合わせで力学的性質を探るという手法は、将来の惑星探査に於いて明らかに重要である。

3.3　星団の現実的数値積分

多重恒星系 (三重連星、連星、惑星系) の多重度に関する情報は天体力学と言うよりも恒星系力学にとって重要であるが、今世紀に於ける大気圏外での観測により、その感度と分解能は共に向上する。これは恒星系の力学的進化 (星が星団として生まれ、その集団から次第に離れて行く過程) を知るための重要な鍵となる。理論的には、中心部に密な恒星系が出来上がった場合に、それらを取り込んだ部分系 (連星や三連星など) を含む超精密数値積分が必要となろう。また、星形成領域において集団として生まれた星の力学的進化の問題も大切な研究課題となる。

3.4　惑星の自転運動と公転運動の相互作用

言うまでもなく、天体力学は惑星の公転運動のみならず、自転運動をもカバーする。けれども、公転運動に比べて自転運動は一般に時間スケールが短く、精密かつ長期の議論をするには大きな困難が伴う。長い時間スケールの議論では公転運動と自転運動の相互作用 (spin–orbital coupling) の効果が大きくなり、自転と公転の運動方程式を組み合わせて解く必要が発生する (Goldreich and Peale, 1966; Laskar and Robutel, 1993; Laskar *et al.*, 1993b; Laskar *et al.*, 1993a)。また、自転運動の進化を追うためには惑星の内部構造モデルの確立が必須であり、伝統的な固体地球物理学の知識が必須となるため、天体力学の世界のみに閉じない話となる。

自転運動に関する問題と言えば、まずは惑星自転の起源と進化の解明が挙げられる。金星はどうして逆行自転しているのか、水星や月の自転はいつの段階で現在のように公転と同期するようになったのか、天王星の横倒し自転の起源は何かなど、解かれるべき問題は多い。これらについては 1960 年代から多くの研究が蓄積されているが、いずれの問題についても決定的な説は確立していない。

自転運動に関連する問題でおそらく私達がもっとも興味を持つべきものと言えば、やはり月–地球系の潮汐進化にとどめを刺す (Goldreich, 1966; Mignard, 1982; Abe *et al.*, 1992; 安部ほか, 1992; 安部, 1992; 安部, 大江, 1993)。大規模な天体衝突に始まった月の形成 (Lee *et al.*, 1997a; Ida *et al.*, 1997; 小久保, 1999; Kokubo *et al.*, 2000) 以降、地球の自転速度は低下して月は次第に遠ざかった。その様子は今まで極めて定性的にしか明らかではなかったが、昨今の地球内部物理学の研究成果を採り入れて、地球自転と月の公転運動の相互作用をすべて採り入れて数値的に解ける時代がそこまでやって来ている。もちろんこのためには、地球の海洋大陸分布の進化モデルのみならず、近い将来に行われるはずの月探査計画による月の内部物性に関する情報も必要である。月–地球系の進化を解明することは単に天体力学のみならず、地上の生命活動解明のための基礎的情報を私達に与えてくれるはずであり、誠に重要と言わざるを得ない (熊澤ほか, 2002)。

3.5　三体問題

「三体問題にだけは手を出すな」(古在由秀)、「相対論にだけは手を出すな」(海野和三郎) という戒めに代表されるように昔から危険視されて来た三体問題であるが、計算機の進歩によって数値計算に関しては身近な分野になるであろう。一般三体問題については「一部の人間の趣味として以外に生き残る道はあるのか？」と言う批判も強い。だが三体問題は、天体力学だけでなく、天文学や物理学に現れる微分方程式の中でも最も意味がはっきりしており、もっとも初等的な形を持ち、しかも解けない問題の代表である。その意味で、三体問題は一部の人間によって研究され続けるであろう。微分方程式あるいはハミルトン系、もっと広く見て一般の力学系に於いて開発された新しい数値的手法が有効であるかでどうかは、まずは三体問題に代表されるような性質を

良く知られた系で吟味されて来たし、これからも吟味されて行くことであろう。

三体問題はこれからも天文学に於ける数学モデルとして研究されるはずである。但し理論的研究はきわめて困難である。理論的研究も、数値計算による現象の発見と並行して行われると予測される。一方、宇宙には有限質量二天体の周りを動く無限小質量の天体の運動として近似できる現象がこれからも多く発見されるはずである。その意味で、制限三体問題はこれからも天体系のモデルとして愛用され続けると考えられる。

3.6 アーノルド拡散を数値的に見る

アーノルド拡散を見た者は未だ居ない (Morbidelli and Thomas, 1995; Morbidelli and Guzzo, 1996)。不変トーラス近傍の拡散速度はトーラスからの距離 d に依存する。もっと正確には、拡散はある閾値まで超指数関数的に遅く ($\sim 1/\exp[\exp(1/d)]$)、次の閾値までは指数関数的に遅く ($\sim 1/\exp(1/d)$)、最後の閾値までは二次的に遅い ($\sim d^2$)。最後の閾値は強いカオスへの移行の境界である。Xia (1992) は三体問題においてアーノルド拡散の存在を確認した。アーノルド拡散を見るには工夫が必要である。なんらかの方法で時間を縮めるか。あるいは、フラクタル図形の上を動く力学系を考えるのか。とにかくわからない。小惑星帯の安定性タイムスケールは短い。そこで、Morbidelli & Guzzo (1996) は、小惑星の大量の数値積分を行って、アーノルド拡散を観測しようではないかと提案している。

3.7 カオスの世界—KAM の崩壊を見る

カオス系の最終状態 ($t \to \infty$ の状態) は初期値に敏感に依存して変わる。初期値空間を最終状態に応じて分類して図示するとフラクタル図形が現れる。このフラクタル図形は、系の外部パラメータが変わると分岐する。しかもこの分岐自体がフラクタル的に生じる。KAM 曲線の生き残りはカントール集合であって、相点がこれを通り抜けるのに長い時間が必要である。自由度 2 のハミルトン系において、安定周期点のまわりの KAM 曲線が壊れて、それ以前には閉じ込められていた点が、外へと浸み出す。淀み層に捉えられる時間は長い。従って、何らかの次元解析により、やはり時間の短縮化が必要か。あるいは、特別なモデル力学系を考案するか。多倍長計算、誤差のない計算が必要とされるか。

3.8 解析的摂動論の精密化

伝統的な解析的摂動論の更なる精密化は天体力学の永遠の課題である。けれども現在の摂動論は解析的と言うよりも半解析的 (semi-analytic) あるいは半数値的 (semi-numerical) と言うべきほど、計算機の数式処理能力に頼っている。この路線を突き進んで行くと、或る将来には「天体力学用完全自動摂動展開プログラムパッケージ」なるものが完成され、人間は摂動展開のパラメータや次数を指定するだけで、ほしいだけの精度で解の展開を計算機が行ってくれる時代が来ないとも限らない。但しその場合には、天体力学用完全自動摂動展開プログラムパッケージの出力の意味を理解できる人間の存在が必要である。要するに、解析的摂動論の知識は天体力学業界の伝統芸能として、伝承して行く必要がある。それに携わる人数は多くある必要はないが、少なくとも世界のどこかの機関 (必ずしも日本である必要はない) では伝統芸能の継承が行われ続けることが、この業界の健全な将来へと繋がるであろう。但しこの伝統芸能は修得に夥しく長い時間が必要とされる割には地味な研究であり、現在の研究業界を支配する "Publish, or perish." の風潮

の下で大学院生が積極的に取り組む雰囲気を形成することは至難であるということも事実である (木下, 中井, 1994)。

太陽系外惑星の発見が相続く 21 世紀初頭、わが太陽系の長期安定性はほぼ示された。多種多様な系外惑星系の形態の雛形として、わが太陽系はいわば 「責任ある立場」に置かれている。わが惑星系に見られる惑星間の相互作用を長短タイムスケールすべてにわたって、数え上げ、分類することが 21 世紀初頭の研究テーマであり、この研究は太陽系外惑星系の力学的研究の基礎となるはずである。このための手法としても、解析的摂動論の精密化は重要である。

3.9 天体の衝突破壊過程

微惑星の集積過程の数値計算に於いて常に問題となるのは、天体同士が衝突した際に合体したり跳ね返ったりせず、破壊して破片化してしまう場合の扱いである。相対速度が脱出速度より小さな衝突であれば、破壊しても再び集積すると考えて問題ないが、相対速度が脱出速度より大きな衝突ではそうも行かなくなる。木星の強い重力摂動の下にある小惑星帯などではこうした衝突破壊による破片化が系の力学進化に大きな影響を及ぼしていると考えられている (Yoshida *et al.*, 2001)。けれども、破片化した天体をひとつひとつ扱うのは非常に大きな計算量の増加となる。天体の衝突破片化に関しては幾つかの実際的な物理モデルが提案されているが (Alexander and Agnor, 1998; Leinhardt *et al.*, 2000)、それらの洗練をはじめ、衝突破壊過程の扱いは今世紀の天体力学の重要な課題のひとつと言える。

3.10 数値計算法の発展

21 世紀の天体力学で使われる数値計算法は、シンプレクティク数値積分法とそれ以外の方法に大別できるであろう。シンプレクティク数値積分法の発展については本稿の前半部分にある吉田春夫と伊藤孝士の解説、あるいは関連する諸論文 (Yoshida, 1990; Gladman *et al.*, 1991; Wisdom and Holman, 1991; Kinoshita *et al.*, 1991; Wisdom and Holman, 1992; Yoshida, 1992; Yoshida, 1993; Sanz-Serna and Calvo, 1994; 吉田, 1995; Wisdom *et al.*, 1996; 吉田, 1997; Yoshida, 2001) を読んでもらうのが最適であろう。現在の課題は天体同士の近接遭遇をどのように乗り切るかにある。シンプレクティク数値積分法は可変刻み幅に原理的に馴染まないため、近接遭遇の扱いには困難が伴う。近年になり、Duncan et al. (1998), Chambers (1999), Levison & Duncan (2000)、その他の研究 (Skeel and Biesiadecki, 1994; Lee *et al.*, 1997b; Levison and Duncan, 2000) によって近接遭遇を扱い得るシンプレクティク数値積分法が開発されて来ているが、計算効率の面からはまだ進展の余地があろう。この領域では Rauch & Holman (1999) が良いレビューとなっている。実用的な意味では、Saha & Tremaine (1992, 1994) による独立刻み幅と warm start の実装、Mikkola による正則化に関する一連の研究 (Mikkola, 1997; Mikkola and Innanen, 1999; Mikkola, 1999; Mikkola and Tanikawa, 1999; Mikkola and Palmer, 2000) が実際的に有益と言える。

シンプレクティク数値積分法以外の方法については、Makino (1991a, 1991b) や Makino & Aarseth (1992) らにより開発された四次の Hermite スキームやその発展形 (Kokubo *et al.*, 1998)、あるいは Quinlan & Tremaine (1990) の線形対称多段法が決定版となりつつある。Hermite スキームは単段法で可変刻み幅の方法であり、精度と効率を高いレベルでバランスさせた極めて実際的で効果的な方法である。重力多体問題専用計算機 GRAPE 類上で実装されている数値積分法もこの Hermite スキームをベースとしたものである。線形対称多段法は 10 次以上の超高精度の方法であり、固定刻み幅ではあるが、惑星運動のように円軌道に近く準周期的を扱う場合には有効な方法である。今後は PC クラスタのようにスカラ計算機を多数並列して計算を実行するケー

ス増えて行くであろうが、そのようなシステムの上で如何にして上記の数値積分法を実装して行くかという具体的な問題が大きな課題になって行くであろう。

付言だが、惑星運動の数値積分には不可避なケプラー方程式の求解については福島登志夫の一連の研究が非常に有効である (福島, 1982; Fukushima, 1996; Fukushima, 1997d; Fukushima, 1997a; Fukushima, 1997b; Fukushima, 1998)。

3.11 新世紀の現実生活への応用的側面

天体力学の現実生活への適用については、大雑把に以下の二通りに分類できるであろう。

- 人工衛星の精密位置決定 — これは天文学のみならず、人類の宇宙進出の補佐手段として重要である。地球上に人間が棲息する余地が限られている以上、今世紀中に宇宙空間への人類の進出は必定である。そのためには、宇宙開発技術の基礎の基礎としての人工天体の精密な位置決定が今までにも増して必要となることは言を待たない。まさに天体力学の現実応用的な側面の典型的な一例である。この中には、いわゆるスペースデブリの監視という側面も含まれる。人工衛星が多くなればなるほどその塵芥とも言えるスペースデブリは増加する。既に岡山県美星町や通信総合研究所鹿嶋などでは本格的な業務観測が行われており、宇宙科学研究所の吉川真や通信総合研究所の梅原広明らが精力的に研究を推進している。
- 太陽系内小天体目録 (地球接近小天体) — 地質学的過去に関する最近の成果によると、地表は小天体の衝突の危険に晒されている。但し、タイムスケールは長い。大量に発見されるであろう地球接近小天体の軌道をモニターし、天体同士の衝突を観測し、地球への接近を予報する。これは自然界での衝突実験であり、同時に宇宙災害予報でもある。世界的規模での『宇宙災害予知連』が確立されるかもしれない。

4. 議論

21 世紀の天文学に於ける理論的研究の本質的課題は何か ?天体力学は変質するか ?力学系理論の一部を取り込むのか、それとも力学系理論に飲み込まれるのか ?

4.1 ハミルトン系の複雑さの程度の分類

ハミルトン系には沈点 (アトラクター) も湧点 (リペラー) もない。相点は一見あてどもなく相空間をうろつき回る。行く先々に構造がある。KAM 曲線に近づくと、淀み層があって、そこに捉えられる。なかなかそこから抜け出せない。相空間内の任意の場所での平均滞在時間を求めることはできそうにない。このような構造は、系が可積分系から遠ざかるにつれてますます複雑になる。そして複雑さの極限として、不思議なことにランダムな系が現れ、平均滞在時間は計算可能になる。その複雑さは何によるのか ?基本的には周期解の数であろう。大きな構造は短周期軌道に関係し、小さな構造は長周期軌道に関係する。分岐で生じた周期軌道はあるものは最初から不安定であり、別のものは安定であるがいずれ不安定になる。不安定な周期点から出る安定 ・不安定多様体は別の周期点の不安定 ・安定多様体と交差して相空間内に複雑な網目を作る。相点はこの網に沿って動く。

この網目は与えられた系毎に異なるはずである。太陽系の相空間の網目、三体問題の相空間の網目。この網目を力学系ごとに解明することが大きな目標となる。大局的につながった網目の部

分は系の不安定性へと導く。そして自由度が 3 以上になると、相空間のどの点もこの大局的な網目につながっている (アーノルド拡散の起源)。

4.2 大気圏外での観測によるデータの高精度化 ・新天体の発見

21 世紀には日本も独自に人工月衛星や人工惑星を打ち上げる。これにより、天体力学の基礎である天体の運動情報量が飛躍的に増大する。宇宙空間での位置天文学観測 (干渉計や三角視差)、物理観測 (視線測度や光度変化) により、データの精度が桁違いに向上する。銀河系内外にも新天体が続々発見されよう。太陽系内にもまだ未発見の種類の天体はいくつもあり得る。多くの天体力学者がみずからを太陽系内に閉じ込めてきたが、21 世紀には太陽系外惑星系も含めて、天体力学者の視野が銀河系スケールにまで広がるであろう。

4.3 過去へ

わが惑星系の形成シナリオはますます地球の起源に迫り、地球科学は一層のこと過去に遡りつつある。海洋の起源や生命の起源などが多くの研究者の対象となる。惑星形成の最終段階、小天体の重爆撃、クレーターの形成、オールト雲の形成などの諸問題は 21 世紀初頭の天体力学の重要な問題である。その上、多様な太陽系外惑星系の中に形成途上のものが発見されることにより、わが太陽系の初期の状態に拘束条件が課される可能性がある。

4.4 21 世紀の天文学

20 世紀前半、天文学は観測波長を光から電波、赤外、紫外、X 線、γ線へと広げた。20 世紀後半、天文学は観測地を宇宙空間へと広げた。系外銀河の発見、宇宙膨張、3K 背景輻射、クエーサー、中性子星 (パルサー) と発見が続く。ブラックホールの存在はほぼ確実、重力レンズ効果の発見、ダークマターの存在予想、γ線バーストの発見—これらの現象あるいは天体はどれひとつ取っても、宇宙の大局的な構造や進化の理解に欠かせない存在である。20 世紀は盛りだくさんであった。まだ重力波は見つかっていないが、人間の世界観は変わった。もしかすると、われわれは繰り返しのない世界に生きている。自分の周りからどんどん他の物質が遠ざかり、孤独になってしまうかもしれない。地球上では小天体の衝突によって恐竜絶滅も起こったらしい。惑星系が次々と発見され、惑星形成過程が普遍的なものであることがはっきりしてきた。生命はどうか ? 居住可能惑星の探索あるいは研究は 21 世紀天文学の最大の課題のひとつである。この世紀、人類は宇宙空間に自ら出向いて観測する。角分解能が干渉技術を用いて格段に上がり、現在の太陽系近傍を調べるように隣りの銀河を調べることができるであろう。もはや星間シンチレーションが問題になる水準である。

21 世紀も天文学は急発展する。しかし、宇宙における天文現象のエネルギー源は重力ポテンシャルである。エネルギーをいくらでも汲み出せる。そのためのもっとも簡単な機構が三体相互作用である。宇宙の中の部分系の構造変化、あるいは進化は、注入されるエネルギー変化に応じると考えることもできる。「注入される」エネルギーは部分系自身の中に存在する。新たに発見される天体、現象の基本的な構造は力学によって解明されるはずである。もしそれが力学で説明がつかないなら、その天体はエネルギーを外部からもらっている。たとえば、大局磁場に貫かれたプラズマ、星の周囲の質量のごく小さなガス雲、など。すべての現象が天体力学で解明されるはずがないことはわかっているが、多くの現象はその外郭を天体力学によって明らかにされ得る。

*

天体物理学という大波に翻弄され、飲み込まれ、沈没しかけながらも、天体力学は 21 世紀も淡々と、黙々と、瓢々と、且つ粛々と発展を続けることであろう。この激動の時代に生き、新世紀に於ける天体力学の発展の端緒を目撃することが出来る私達の僥倖に感謝したい。

謝辞

本稿執筆に至るまでには数多くの人々との膨大な量の議論を経た。とりわけ吉田春夫氏と福島登志夫氏からの示唆は有益であった。この場を借りて御礼申し上げる。

参考文献

Aarseth, S.J. (1985) Direct method for N-body simulations, in Blackbill, J.U. and Cohen, B.I. eds., *Multiple Time Scales*, Academic Press, New York, 377–418.

Aarseth, S.J. (1988) Integration methods for small N-body systems, in Valtonen, M.J. ed., *The Few Body Problem*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 287–307.

Abe, M., Mizutani, H., Tamura, Y., and Ooe, M. (1992) Tidal evolution of the lunar orbit and the obliquity of the earth, *Proc. ISAS Lunar Planet. Symp.*, **25**, 226–231.

Agnor, C.B., Canup, R.M., and Levison, H.F. (1999) On the character and consequences of large impacts in the late stage of terrestrial planet formation, *Icarus*, **142**, 219–237.

Alexander, S.G. and Agnor, C.B. (1998) N-body simulations of late stage planetary formation with a simple fragmentation model, *Icarus*, **132**, 113–124.

Alexeev, V.M. (1968a) Quasirandom dynamical systems, I., *JMath. USSR–Sb*, **5**, 73–128.

Alexeev, V.M. (1968b) Quasirandom dynamical systems, II., *JMath. USSR–Sb*, **6**, 505–560.

Alexeev, V.M. (1969) Quasirandom dynamical systems, III., *JMath. USSR–Sb*, **7**, 1–43.

Applegate, J.H., Douglas, M.R., Gürsel, Y., Sussman, G.J., and Wisdom, J. (1986) The outer solar system for 200 million years, *Astron. J.*, **92**, 176–94.

Arnold, V.I. (1963) Small denominators and the problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russ. Math. Surveys*, **16**, 85–191, (English translation from Report to the IVth All-Union Mathematical Congress, Leningrad, 85–191, 1961).

Arnold, V.I. (1964) Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Soviet Math. Dokl.*, **5**, 581–585, (English translation).

Arnold, V.I. (1978) *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.

Aubry, S. and LeDaeron, P.Y. (1983) The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions, *Physica D*, **8**, 381–422.

Barnes, R. and Quinn, T. (2001) A statistical examination of the short-term stability of the υ Andromedae planetary system, *Astrophys. J.*, **550**, 884–889.

Battin, R.H. (1987) *An Introduction to The Mathematics and Methods of ASTRODYNAMICS*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., New York.

Benettin, G., Galgani, L., and Strelcyn, J-.M. (1976) Kolmogorov entropy and numerical experiments, *Phys. Rev. A*, **14**, 2338–2345.

Bennett, D.P., Rhie, S.H., Becker, A.C., Butler, N., Dann, S., J. Kaspi, Leibowitz, E.M., Lipkin, Y., Maoz, D., Mendelson, H., Peterson, B.A., Quinn, J., Shemmer, O., Thomson, S., and Turner, S.E. (1999) Discovery of a planet orbiting a binary star system from gravitational microlensing, *nature*, **402**, 57–59.

Berger, A.L. (1976) Obliquity and precession for the last 5000000 years, *Astron. Astrophys.*, **51**, 127–135.

Berger, A.L. (1988) Milankovitch theory and climate, *Rev. Geophys.*, **26**, 624–657.

Berger, A.L. ed. (1989) *Climate and Geo-Science — A Challenge for Science and Society in the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Berger, A.L., Imbrie, J., Hays, J., Kukla, G., and Saltzman, B. eds. (1984) *Milankovitch and Climate* —Understanding the Response to Astronomical Forcing, D. Reidel, Norwell, Mass.

Birkhoff, G.D. (1915) The restricted problem of three bodies, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **39**, 265–334.

Boccaletti, D. and Pucacco, G. (1996) *Theory of Orbits. 1. Integrable systems and non-perturbative methods*, Springer-Verlag, Berlin.

Boccaletti, D. and Pucacco, G. (1998) *Theory of Orbits. 2. Perturbative and geometrical methods*, Springer-Verlag, Berlin.

Boss, A.P. (1996) Extrasolar planets, *Physics Today*, **49**, 32–38.

Bretagnon, P. (1974) Termes à longues périodes dans le système solaire, *Astron. Astrophys.*, **30**, 141–154.

Bretagnon, P. and Francou, G. (1992) General theory for the outer planets, in *Chaos, resonance and collective dynamical phenomena in the solar system*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, 37–42.

Brouwer, D. and Clemence, G.M. (1961) *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York.

Brouwer, D. and van Woerkom, A.J.J. (1950) The secular variations of the orbital elements of the principal planets, *Astron. Pap. Amer. Ephemeris. Naut. Alm.*, **13**, 2, 81–107.

Brown, E.W., Birkhoff, G.D., Leuschner, A.O., and Russell, H.N. (1922) Celestial Mechanics, *Bulletin of the National Research Counsil*, **4**, 1–22.

Brumberg, V.A. (1995) *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York.

Burrau, C. (1906) Uber einige in Aussicht genommene Berechnun, betreffend einen spezialfall des Dreikorperproblems, *Vierteljahrsschrift Astron. Ges.*, **41**, 261.

Butler, R.P., Marcy, G.W., Fischer, D.A., Vogt, S.S., Tinney, C.G., Jones, H.R.A., Penny, A.J., and Apps, K. (2001) Statistical properties of extrasolar planets, in Penny, A., Artymowicz, P., Lagrange, A.-M., and Russell, S. eds., *ASP Conf. Ser. for IAU Symp. 202: 'Planetary Systems in the Universe'*, Kluwer Academic Publishers, in press.

Chambers, J.E. (1999) A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **304**, 793–799.

Chambers, J.E. (2001) Making more terrestrial planets, *Icarus*, **152**, 205–224.

Chambers, J.E. and Wetherill, G.W. (1998) Making the terrestrial planets: N-body integrations of planetary embryos in three dimensions, *Icarus*, **136**, 304–327.

Chambers, J.E., Wetherill, G.W., and Boss, A.P. (1996) The stability of multi-planet systems, *Icarus*, **119**, 261–268.

Chazy, M.J. (1922) Sur l'allure de mouvement dans le problème de trois corp quand le temps croit indéfiniment, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **39**, 29–130.

Cohen, C.J. and Hubbard, E.C. (1965) Libration of the close approaches of Pluto to Neptune, *Astron. J.*, **70**, 10–13.

Cohen, C.J., Hubbard, E.C., and Oesterwinter, C. (1973) Planetary elements for 10000000 years, *Celes. Mech.*, **7**, 438–448.

Danby, J.M.A. (1992) *Fundamentals of Celestial Mechanics (second edition, third printing)*, Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia.

Deprit, A. (1969) Canonical transformations depending on a small parameter, *Celes. Mech.*, **1**, 12–30.

Duncan, M.J. and Lissauer, J.J. (1998) The effects of post-main-sequence solar mass loss on the stability of our planetary system, *Icarus*, **134**, 303–310.

Duncan, M.J., Levison, H.F., and Lee, M.H. (1998) A multiple time step symplectic algorithm for integrating close encounters, *Astron. J.*, **116**, 2067–2077.

Duriez, L. (1977) Théorie générale planétaire en variables elliptiques 1. Développement des equations, *Astron. Astrophys.*, **54**, 93–112.

Duriez, L. (1982) Théorie générale planétaire etendu au cas de la resonance et application au system des satellites Galileens de Jupiter (General planetary theory extended to the case of resonance and application to the Galilean satellite system of Jupiter), *Celes. Mech.*, **26**, 231–255.

Ebisuzaki, T., Makino, J., Fukushige, T., Taiji, M., Sugimoto, D., Ito, T., and Okumura, S.K. (1993) GRAPE project: an overview, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 269–278.

Eckert, W.J., Brouwer, D., and Clemence, G.M. (1951) Coordinates of the five outer planets, *Astron. Pap. Amer. Ephemeris. Naut. Alm.*, **12**.

Feigenbaum, M. (1978) Quantative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, **19**, 25–.

Flaschka, H. (1974) Toda lattice II: existence of integrals, *Phys. Rev. B*, **9**, 1924–1925.

Fukushima, T. (1996) A fast procedure solving Kepler's equation for elliptic case, *Astron. J.*, **112**, 2858–2861.

Fukushima, T. (1997a) A method solving Kepler's equation for hyperbolic case, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **68**, 121–137.

Fukushima, T. (1997b) A method solving Kepler's equation without transcendental function evaluations, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **66**, 309–319.

Fukushima, T. (1997c) Picard iteration method, Chebychev polynomial approximation, and global numerical integration of dynamical motions, *Astron. J.*, **113**, 1909–1914.

Fukushima, T. (1997d) A procedure solving the extended Kepler's equation for the hyperbolic case, *Astron. J.*, **113**, 1920–1924.

Fukushima, T. (1997e) Vector integration of dynamical motions by the Picard-Chebychev method, *Astron. J.*, **113**, 2325–2328.

Fukushima, T. (1998) A fast procedure solving Gauss' form of Kepler's equation, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **70**, 115–130.

Fukushima, T. (1999) Parallel/Vector integration methods for dynamical astronomy, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **73**, 231–241.

Fukushima, T., Fujimoto, M.-K., Kinoshita, H., and Aoki, S. (1986) A system of astronomical constants in the relativistic framework, *Celes. Mech.*, **38**, 215–230.

Gladman, B., Duncan, M., and Candy, J. (1991) Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **52**, 221–240.

Goldreich, P. (1966) History of the lunar orbit, *Rev. Geophys.*, **4**, 411–439.

Goldreich, P. and Peale, S.J. (1966) Spin-orbit coupling in the solar system, *Astron. J.*, **71**, 425–438.

Goldreich, P. and Tremaine, S. (1978) The excitation and evolution of density waves, *Astrophys. J.*, **222**, 850–858.

Goldreich, P. and Tremaine, S. (1979) The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential, *Astrophys. J.*, **233**, 857–871.

Goldstein, H. (1980) *Classical Mechanics* (2nd edition), Addison-Wesley, Massachusetts, 邦訳は瀬川富士・矢野忠・江沢康生 訳　新版古典力学 (上・下)』, 吉岡書店, 1984.

Greenberg, R. (1977) Orbit-orbit resonances in the solar system: varieties and similarities, *Vistas Astron.*, **21**, 209–239.

Hagihara, Y. (1931) Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild, *Annals of the Tokyo Astronomical Observatory*, **31**, 67–176.

Hagihara, Y. (1970) *Theories of Equilibrium Figures of a Rotating Homogeneous Fluid Mass*, NASA scientific and technical information office, Washington, D.C.

Hagihara, Y. (1971) Recent advances of celestial mechanics in the Soviet Union, *Vistas in Astronomy*, **13**, 15–47.

Hagihara, Y. (1972) *Celestial Mechanics II*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Hagihara, Y. (1974) *Celestial Mechanics*, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo.

Hagihara, Y. (1975) *Celestial Mechanics IV*, Japan Society for Promotion of Science, Tokyo.

Hagihara, Y. (1976) *Celestial Mechanics V*, Japan Society for Promotion of Science, Tokyo.

Harrington, R.S. (1975) Production of triple stars by the dynamical decay of stellar systems, *Astron. J.*, **80**, 1081–1086.

Hayashi, C., Nakazawa, K., and Nakagawa, Y. (1985) Formation of the solar system, in *Protostar & Planet II*, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, 1100–1153.

Hénon, M. (1965) Exploration numerique du probleme restreint I., *Annals Astrophysique*, **28**, 499–511.

Hénon, M. (1974) Integrals of the Toda lattice, *Phys. Rev. B*, **9**, 1921–1923.

Hénon, M. (1976) A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Commun. Math. Phys.*, **50**, 69–77.

Hénon, M. and Heiles, C. (1964) The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *Astron. J.*, **69**, 73–.

Hénon, M. and Petit, J.-M. (1986) Series expansion for encounter-type solutions of Hill's problem, *Celes. Mech.*, **38**, 67–100.

Hill, G.W. (1897) On the values of the eccentricities and longitudes of the perihelia of Jupiter and Saturn for distant epochs, *Astron. J.*, **17**, 81–87.

Hilmi, G.F. (1961) *Qualitative Methaods in the Many-Body Problem*, Gordon Breach, New York.

Hirayama, S. (1918) Groups of asteroids probably of common origin, *Astron. J.*, **31**, 185–188.

Holman, M. and Wiegert, P.A. (1999) Long-term stability of planets in binary systems, *Astron. J.*, **117**, 621–628.

Hori, G. (1966) Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18**, 287–296.

Hori, G. (1967) Non-linear coupling of two harmonic oscillations, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **19**, 229–241.

Hori, G. (1970) Comparison of two perturbation theories based on the canonical transformation, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **22**, 191–198.

Hori, G. (1971) Theory of general perturbations for non-canonical systems, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **23**, 567–587.

Ida, S., Canup, R.M., and Stewart, G.R. (1997) Lunar accretion from an impact-generated disk, *Nature*, **389**, 353–357.

Innanen, K.A., Zheng, J.Q., Mikkola, S., and Valtonen, M.J. (1997) The Kozai mechanism and the stability of planetary orbits in binary star systems, *Astron. J.*, **113**, 1915–1919.

Ito, T. and Miyama, S.M. (2001) An estimation of upper limit masses of υ Andromedae planets, *Astrophys. J.*, **552**, 372–379.

Ito, T. and Tanikawa, K. (1999) Stability and instability of the terrestrial protoplanet system and their possible roles in the final stage of planet formation, *Icarus*, **139**, 336–349.

Ito, T. and Tanikawa, K. (2001) Stability of terrestrial protoplanet systems and alignment of orbital elements, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **53**, 143–151.

Ito, T. and Tanikawa, K. (2002) Long-term integrations and stability of planetary orbits in our solar system, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, in press.

Ito, T., Kumazawa, M., Hamano, Y., Matsui, T., and Masuda, K. (1993) Long term evolution of the solar insolation variation over 4 Ga, *Proc. Jpn. Acad., Ser. B*, **69**, 233–237.

Ito, T., Kinoshita, H., Nakai, H., and Fukushima, T. (1996) Numerical experiments to inspect the long-term stability of the planetary motion -1, in *Proc. 28th Symp. Celes. Mech.*, National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo, 123–136.

Iwasaki, K., Tanaka, H., Nakazawa, K., and Emori, H. (2001) The gas-drag effect on the orbital instability of a protoplanet-system, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **53**, 321–329.

Jones, B.W., Sleep, P.N., and Chambers, J.E. (2001) The stability of the orbits of terrestrial planets in the habitable zones of known extraplanetary systems, *Astron. Astrophys.*, **366**, 254–262.

Kimura, H. (1902) A new annual term in the variation of latitude, independent of the components of the pole's motion, *Astron. J.*, **XXII**, 517, 107–108.

Kinoshita, H. (1977) Theory of the rotation of the rigid earth, *Celes. Mech.*, **15**, 277–326.

Kinoshita, H. and Nakai, H. (1984) Motions of the perihelions of Neptune and Pluto, *Celes. Mech.*, **34**, 203–217.

Kinoshita, H. and Nakai, H. (1995) The motion of Pluto over the age of the solar system, in Ferraz-Mello, S. *et al.* ed., *Dynamics, ephemerides and astrometry in the solar system*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, 61–70.

Kinoshita, H. and Nakai, H. (1996) Long-term behavior of the motion of Pluto over 5.5 billion years, *Earth, Moon, and Planets*, **72**, 165–173.

Kinoshita, H. and Souchay, J. (1990) The theory of the nutation of the rigid earth: Model at the second order, *Celes. Mech.*, **48**, 187–265.

Kinoshita, H., Yoshida, H., and Nakai, H. (1991) Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **50**, 59–71.

Klioner, S.A. and Soffel, M. (1998) Nonrotating astronomical relativistic reference frames, *Astron. Astrophys.*, **334**, 1123–1135.

Kokubo, E. and Ida, S. (1995) Orbital evolution of protoplanets embedded in a swarm of planetesimals, *Icarus*, **114**, 247–257.

Kokubo, E. and Ida, S. (1996) On runaway growth of planetesimals, *Icarus*, **123**, 180–191.

Kokubo, E. and Ida, S. (1998) Oligarchic growth of protoplanets, *Icarus*, **131**, 171–178.

Kokubo, E. and Ida, S. (2000) Formation of protoplanets from planetesimals in the solar nebula, *Icarus*, **143**, 15–27.

Kokubo, E. and Ida, S. (2001) Formation of protoplanet systems, in Penny, A., Artymowicz, P., Lagrange, A.-M., and Russell, S. eds., *ASP Conf. Ser. for IAU Symp. 202: 'Planetary Systems in the Universe'*, Kluwer Academic Publishers, in press.

Kokubo, E., Yoshinaga, K., and Makino, J. (1998) On a time-symmetric Hermite integrator for planetary N-body simulation, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **297**, 1067–1072.

Kokubo, E., Ida, S., and Makino, J. (2000) Evolution of a circumterrestrial disk and formation of a single moon, *Icarus*, **148**, 419–436.

Kolmogorov, A.N. (1954) Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamitonian function, *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, **98**, 527–531.

Kopeikin, S.M. (1999) Millisecond and binary pulsars as nature's frequency standards - II. The effects of low-frequency timing noise on residuals and measured, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **305**, 563–590.

Kozai, Y. (1962) Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity, *Astron. J.*, **67**, 591–598.

Kozai, Y. (1992) Shepherding satellites and dynamical structure of the rings of Uranus, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **44**, 135–139.

Kozai, Y. (1993) Shepherding satellites and dynamical structure of the rings of Uranus. II, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 263–267.

Kozai, Y. (1995) Dynamical structure of the Uranian rings, *J. Astrophys. Astron. Suppl.*, **16**, 373–375.

Kozlov, V.V. (1983) Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, *Russ. Math. Survey*, **38**, 1–76.

Kustaanheimo, P. and Stiefel, E. (1965) Perturbation theory of Keplarian motion based on Spinor regularization, *J. Math.*, **218**, 204–.

Laskar, J. (1985) Accurate methods in general planetary theory, *Astron. Astrophys.*, **144**, 133–146.

Laskar, J. (1986) Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory, *Astron. Astrophys.*, **157**, 59–70.

Laskar, J. (1988) Secular evolution of the solar system over 10 million years, *Astron. Astrophys.*, **198**, 341–362.

Laskar, J. (1990) The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, **88**, 266–291.

Laskar, J. and Robutel, P. (1993) The chaotic obliquity of the planets, *Nature*, **361**, 608–612.

Laskar, J., Joutel, F., and Boudin, F. (1993a) Orbital, precessional, and insolation quantities for the earth from −20Myr to +10Myr, *Astron. Astrophys.*, **270**, 522–533.

Laskar, J., Joutel, F., and Robutel, P. (1993b) Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon, *Nature*, **361**, 615–617.

Laughlin, G. and Adams, F.C. (1999) Stability and chaos in the υ Andromedae planetary system, *Astrophys. J.*, **526**, 881–889.

Lecar, M. and Franklin, F. (1992) On the original distribution of the asteroids IV. numerical experiments in the outer asteroid belt, *Icarus*, **96**, 234–250.

Lecar, M., Franklin, F., and Murison, M. (1992) On predicting long-term orbital instability: a relation between the Lyapunov time and sudden orbital transitions, *Astron. J.*, **104**, 1230–1236.

Lee, D.-C., Halliday, A.N., Snyder, G.A., and Taylor, L.A. (1997a) Age and origin of the moon, *Science*, **278**, 1098–1103.

Lee, M.H., Duncan, M.J., and Levison, H.F. (1997b) Variable time step integrators for long-term orbital integrations, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.*, **123**, 32–37.

Leinhardt, Z.M., Richardson, D.C., and Quinn, T. (2000) Direct N-body simulations of rubble pile collisions, *Icarus*, **146**, 133–151.

Lemaitre, G. (1952) Cordonnées symétriques dans le probléme des trois corps, *Bull. Classe. Sci. Acad. Roy. Belg.*, **38**, 582–.

Levi-Civita, T. (1906) Sur la résolution qualitative du probléme des trois corps, *Acta Math.*, **30**, 305–.

Levison, H.F. and Duncan, M.J. (2000) Symplectically integrating close encounters with the Sun, *Astron. J.*, **120**, 2117–2123.

Levison, H.F., Lissauer, J.J., and Duncan, M.J. (1998) Modeling the diversity of outer planetary systems, *Astron. J.*, **116**, 1998–2014.

Li, T.Y. and Yorke, J.A. (1975) Period three implies chaos, *Am. Math. Monthly*, **82**, 985–992.

Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A. (1992) *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, New York.

Lissauer, J.J. (1999) Three planets for Upsilon Andromedae, *nature*, **398**, 659.

Lorenz, E.N. (1963) Deterministic nonperiodic flow, *J. Atoms. Sci.*, **20**, 130–.

Lyapunov, A.M. (1892) *The General Problem of Stability of Motion*, Kharikov, (in Russian: English translation is published by Taylor & Francis, London, 1992).

Makino, J. (1991a) A modified Aarseth code for GRAPE and vector processors, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **43**, 859–876.

Makino, J. (1991b) Optimal order and time-step criterion for Aarseth-type N-body integrators, *Astron. J.*, **369**, 200–212.

Makino, J. and Aarseth, S.J. (1992) On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **44**, 141–151.

Makino, J. and Taiji, M. eds. (1998) *Scientific Simulations with Special-Purpose Computers — the GRAPE systems*, John Wiley & Sons, New York.

Makino, J., Taiji, M., Ebisuzaki, T., and Sugimoto, D. (1997) GRAPE-4: a massively parallel special-purpose computer for collisional N-body simulations, *Astrophys. J.*, **480**, 432–446.

Mandelbrot, B. (1977) *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, W.H. Freeman & Co, San Francisco.

Marcy, G.W. and Butler, R.P. (2000) Planets orbiting other suns, *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **112**, 137–140.

Marshal, C. (1990) *The Three-Body Problem*, Elsevier, Amsterdam.

Mather, J.N. (1982) Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, *Topology*, **21**, 457–467.

Matukuma, T. (1933) On the periodic orbits in Hill's case, *Proc. imp. Acad. Japan*, **9**, 364–.

May, R.M. (1976) Simple mathematical models with very complicated dynamics, *nature*, **261**, 459–.

Mayor, M. and Queloz, D. (1995) A Jupiter-mass companion to a solar type star, *Nature*, **378**, 355–359.

McGehee, R. (1974) Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.*, **27**, 191–227.

Merman, G.A. (1958) Qualitative investigations of the three-body problem, *Bull. Inst. Teoret. Astronom.*, **6**, 687–712, (in Russian).

Mignard, F. (1982) Long time integration of the Moon's orbit, in Brosche, P. and Sündermann, J. eds., *Tidal Friction and the Earth's Rotation II*, Springer, Berlin.

Mikkola, S. (1997) Practical symplectic methods with time transformation for the few-body problem, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **67**, 145–165.

Mikkola, S. (1999) Efficient symplectic integration of satellite orbits, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **74**, 275–285.

Mikkola, S. and Innanen, K. (1999) Symplectic tangent map for planetary motions, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **74**, 59–67.

Mikkola, S. and Palmer, P. (2000) Simple derivation of symplectic integrators with first order correctors, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **77**, 305–317.

Mikkola, S. and Tanikawa, K. (1999) Explicit symplectic algorithms for time-transformed Hamiltonians, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **74**, 287–295.

Milankovitch, M. (1920) *Théorie mathématique des phénomènes thermique produis par la radation solaire*, Gautier–Villars, Paris.

Milankovitch, M. (1930) *Mathematische Klimalehre und astronomische Theorie der Klimaschwankungen*, Springer-Verlag, in "Handbuch der Klimatologie" (Köppen and Geiger eds.), Band 1. Teil A.

Milankovitch, M. (1941) *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitproblem*, Vol. 133 of *Königlich Serbische Academie Publication*, Königlich Serbische Academie, 邦訳は 『ミランコビッチ気候変動の天文学理論と氷河時代』, 柏谷健二 ・山本淳之 ・大村誠 ・福山薫 ・安成哲三 訳, 古今書院, 1992.

Miller, R.H. (1964) Irreversibility in small stellar dynamical systems, *Astrophys. J.*, **140**, 250–585.

Morbidelli, A. and Froeschlé, C. (1996) On the relationship between Lyapunov times and macroscopic instability times, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **63**, 227–239.

Morbidelli, A. and Guzzo, M. (1996) The Nekhoroshev theorem and the asteroid belt dynamical system, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 107–136.

Morbidelli, A. and Thomas, F. (1995) The resonant structure of the Kuiper belt and the dynamics of the first five trans-Neptunian objects, *Icarus*, **118**, 322–340.

Moser, J. (1962) Oninvariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, II Math. Phys.*, **1**, 1–20.

Moser, J. (1974) *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press.

Murray, C.D. and Dermott, S.F. (1999) *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Nakai, H. and Kinoshita, H. (2000) Stability of the υ Andromedae planetary system, in *Proc. 32th Symp. Celes. Mech.*, National Astronomical Observatory, 206–215.

Nakazawa, K., Ida, S., and Nakagawa, Y. (1989a) Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field I. Basic formulation, *Astron. Astrophys.*, **220**, 293–300.

Nakazawa, K., Ida, S., and Nakagawa, Y. (1989b) Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field II. The validity of the two-body approximation, *Astron. Astrophys.*, **221**, 342–347.

Nekhoroshev, N.N. (1977) An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, *Russ. Math. Survey*, **32**, 1–65.

Nelson, A.F. (2000) Planet formation is unlikely in equal-mass binary systems with $a \sim 50$ AU, *Astrophys. J.*, **537**, L65–L68.

Newhall, X X., Standish, E.M., and Williams, J.G. (1983) DE102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, **125**, 150–167.

Nobili, A.M., Milani, A., and Carpino, M. (1989) Fundamental frequencies and small divisors in the orbits of the outer planets, *Astron. Astrophys.*, **210**, 313–336.

Painlevé, P. (1897) *Lecon sur la Theorie analytique des equation differentielle*, A. Hermann, Paris.

Pauwels, T. (1983) Secular orbit-orbit resonance between two satellites with nonzero masses, *Celes. Mech.*, **30**, 229–247.

Petit, J.-M. and Hénon, M. (1987) A numerical simulation of planetary rings. I—Binary encounters, *Astron. Astrophys.*, **173**, 389–404.

Poincaré, H. (1892) *Les Méthode nouvelles de la Méchanique céleste*, Gauthier–Villars, Tome 1, 2, 3.

Quinlan, G.D. and Tremaine, S. (1990) Symmetric multistep methods for the numerical integration of planetary orbits, *Astron. J.*, **100**, 1694–1700.

Quinn, T.R., Tremaine, S., and Duncan, M. (1991) A three million year integration of the earth's orbit, *Astron. J.*, **101**, 2287–2305.

Rauch, K.P. and Holman, M. (1999) Dynamical chaos in the Wisdom-Holman integrator: origins and solutions, *Astron. J.*, **117**, 1087–1102.

Richardson, D.L. and Walker, C.F. (1989) Numerical simulation of the nine-body planetary system spanning two million years, *J. Astronaut. Sci.*, **37**, 159–182.

Rivera, E.J. and Lissauer, J.J. (2000) Stability analysis of the planetary system orbiting υ Andromedae, *Astrophys. J.*, **530**, 454–463.

Roy, A.E., Walker, I.W., Macdonald, A.J., Williams, K., I.P. Fox, Murray, C.D., Milani, A., Nobili, A.M., Message, P.J., Sinclair, A.T., and Carpino, M. (1988) Project LONGSTOP, *Vistas Astron.*, **32**, 95–116.

Ruelle, D. and Takens, F. (1971) On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **23**, 343–.

Saari, D.G. (1971) Implications of the inverse-square model, *Astrophys. J.*, **165**, 399–1971.

Saha, P. and Tremaine, S. (1992) Symplectic integrators for solar system dynamics, *Astron. J.*, **104**, 1633–1640.

Saha, P. and Tremaine, S. (1994) Long-term planetary integrations with individual time steps, *Astron. J.*, **108**, 1962–1969.

Saha, P. and Tremaine, S. (1997) A parallel integration method for solar system dynamics, *Astron. J.*, **114**, 409–415.

Sanz-Serna, J.M. and Calvo, M.P. (1994) *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman & Hall, London.

Sasao, T., Okubo, S., and Saito, M. (1980) A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth, in Fedrov, E.P., Smith, M.L., and Bender, P.L. eds., *Nutation and the Earth's Rotation*, Reidel, Dordrecht, Netherlands, 165–183, International Astronomical Union Symposium No.78.

Щараф, Ш.Г. and Будникова, Н.А. (1969a) О вековых измененииеых элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прощлого, БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ, **11**, 231–261, English translation is in NASA TT F–12, *467*, 1–37.

Шараф, Ш.Г. and Будникова, Н.А. (1969b) ВЕКОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ЗЕМЛИ И АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ КЛИМАТА, ТРУДЫ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ, **14**, 48–84, Japanese translation is available from http://th.nao.ac.jp/~tanikawa/list08/list08.html.

Shirai, T. and Fukushima, T. (2000) Numerical convolution in the time domain and its application to the nonrigid-earth nutation theory, *Astron. J.*, **119**, 2475–2480.

Shirai, T. and Fukushima, T. (2001) Construction of a new forced nutation theory of the nonrigid earth, *Astron. J.*, **121**, 3270–3283.

Siegel, C. (1941) Der Dreierstoss, *Acta Math.*, **42**, 127–168.

Siegel, C. and Moser, J. (1971) *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.

Sitnikov, K. (1960) The existence of oscillatory motions in the three-body problem, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **133**, 303–306.

Skeel, R.D. and Biesiadecki, J.J. (1994) Symplectic integration with variable stepsize, *Ann. Numer. Math.*, **1**, 191–198.

Smale, S. (1967) Differential dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 747–817.

Stephenson, F.R. (1997) *Historical Eclipses and Earth's Rotation*, Cambridge University press.

Stepinski, T.F., Malhotra, R., and Black, D.C. (2000) The υ Andromedae system: models and stability, *Astrophys. J.*, **545**, 1044–1057.

Strömgren, E. (1935) Fortgesetzte untersuchungen uber asymptotische bahnen im probleme restreint, *Bulletine Astronomiques*, **9**, 87, (also in *Publ. Copenhague Obs.* no. 100).

Sugimoto, D., Chikada, Y., Makino, J., Ito, T., Ebisuzaki, T., and Umemura, M. (1990) A special-purpose computer for gravitational many-body problem, *Nature*, **345**, 33–35.

Sundman, K. (1912) Mémoire sur le probléme des trois corps, *Acta Math.*, **36**, 105–179.

Sussman, G.J. and Wisdom, J. (1988) Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic, *Science*, **241**, 433–437.

Sussman, G.J. and Wisdom, J. (1992) Chaotic evolution of the solar system, *Science*, **257**, 56–62.

Szebehely, V. and Peters, C.F. (1967) Complete solution of a general problem of three bodies, *Astron. J.*, **72**, 876–883.

Tanikawa, K. (1983) Impossibility of the capture of retrogarde satellites in the restricted three-body problem, *Celes. Mech.*, **29**, 367–402.

Tanikawa, K. (2000) A Search for collision orbits in the free-fall three-body problem II., *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **76**, 157–185.

Tanikawa, K. and Mikkola, S. (2000a) One-dimensional three-body problem via symbolic dynamics, *Chaos*, **10**, 649–657.

Tanikawa, K. and Mikkola, S. (2000b) Triple collision in the one-dimensional three-body problem, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **76**, 23–34.

Tanikawa, K. and Yamaguchi, Y. (1987) Coexistence of periodic points in reversible dynamical systems on a surface, *J. Math. Phys.*, **28**, 921–928.

Tanikawa, K. and Yamaguchi, Y. (1989) Coexistence of periodic points in the Standard Map, *J. Math. Phys.*, **30**, 608–616.

Tanikawa, K. and Yamaguchi, Y. (1994) Stable and unstable manifolds in a zone of instability, *J. Math. Phys.*, **35**, 2408–2412.

Tanikawa, K. and Yamaguchi, Y. (1995) Stable and unstable manifolds in a zone of instability II., *J. Math. Phys.*, **36**, 3608–3612.

Tanikawa, K. and Yamaguchi, Y. (2001) Forcing relation of symmetric non-Birkhoff periodic points in Standard-like mappings, *Chaos*, in press.

Tanikawa, K., Manabe, S., and Broucke, R. (1989) On the origin of the planetary spin angular momentum by accretion of planetesimals: property of collision orbits, *Icarus*, **79**, 208–222.

Tanikawa, K., Kikuchi, N., and Sato, I. (1991) On the origin of the planetary spin by accretion of planetesimals II. collisional orbits at the Hill surface, *Icarus*, **94**, 112–125.

Tanikawa, K., Umehara, H., and Abe, H. (1995) A search for collision orbits in the free-fall three-body problem I. Numerical procedure, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **62**, 335–362.

Tremaine, S. (1995) Is the solar system stable?, CITA–95–3, in *Proceedings of Rosseland Centenary Symposium of Astrophysics*, Oslo, June 16–17, 1994.

Ueda, Y. (1979) Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation, *J. Stat. Phys.*, **20**, 181–.

Ueda, Y., Hayashi, C., and Akamatsu, N. (1973) Computor simulation of nonlinear ordinary differential equations and nonperiodic oscillations, *Electron. Comm. Japan*, **56A**, 27–.

Umehara, H. (1997) *The free-fall three-body problem: escape and collisions*, PhD thesis, The Graduate University for Advanced Studies, Hayama, Kanagawa, Japan.

Umehara, H. and Tanikawa, K. (2000) Binary and triple collisions causing instability in the free-fall three-body problem, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **76**, 187–214.

Wako, Y. (1970) Interpretation of Kimura's annual Z-term, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **22**, 525–.

Wetherill, G.W. and Stewart, G.R. (1989) Accumulation of a swarm of small planetesimals, *Icarus*, **77**, 330–357.

Whitmire, D.P., Matese, J.J., Criswell, L., and Mikkola, S. (1998) Habitable planet formation in binary star systems, *Icarus*, **132**, 196–203.

Whittaker, E.T.. (1904) *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University press, (revised in 1952).

Williams, J.G. and Benson, G.S. (1971) Resonances in the Neptune-Pluto system, *Astron. J.*, **76**, 167–177.

Wisdom, J. (1982) The origin of the Kirkwood gaps: a mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability, *Astron. J.*, **87**, 577–593.

Wisdom, J. (1983) Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap, *Icarus*, **56**, 51–74.

Wisdom, J. (1987a) Chaotic behavior in the solar system, *Proc. R. Soc. London Ser.*, **413**, 109–129.

Wisdom, J. (1987b) Urey prize lecture: chaotic dynamics in the solar system, *Icarus*, **72**, 241–275.

Wisdom, J. (1992) Long term evolution of the solar system, in *Chaos, resonance and collective dynamical phenomena in the solar system*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, 17–24.

Wisdom, J. and Holman, M. (1991) Symplectic maps for the N-body problem, *Astron. J.*, **102**, 1528–1538.

Wisdom, J. and Holman, M. (1992) Symplectic maps for the n-body problem: stability analysis, *Astron. J.*, **104**, 2022–2029.

Wisdom, J., Holman, M., and Touma, J. (1996) Symplectic correctors, in Marsden, J.E., Patrick, G.W., and Shadwick, W.F. eds., *Integration Algorithms and Classical Mechanics*, Vol. 10 of Fields Institute Communications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 217–244.

Woolard, E.M. (1953) Theory of the rotation of the Earth around its center of mass, *Astron. Pap. Amer. Ephem. Naut. Alm.*, **15**, 3–165.

Xia, Z. (1992) The existence of noncollision singularities in newtonian systems, *Annals of Mathematics*, **135**, 411–468.

Xia, Z. (1994) Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem, *J. Differential Equations*, **110**, 289–321.

Yamaguchi, Y. and Tanikawa, K. (2000) Symmetrical non-Birkhoff period-3 orbits in the standard-like mappings, *Prog. Theor. Phys.*, **104**, 943–954.

Yamaguchi, Y. and Tanikawa, K. (2001) Geometrical approach to the splitting of separatrix for standard-like mappings, *Phys. Lett. A*, **280**, 33–36.

Yamanaka, Y. (1997) Stability of Uranian elliptical ring, in *Proc. 29th Symp. Celes. Mech.*, National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo, Japan, 290–305.

Yoshida, J. (1972) Improved criteria for hyperbolic-elliptic motion in the general three-body problem, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 391–408.

Yoshida, J. (1974) Improved criteria for hyperbolic-elliptic motion in the general three-body problem II., *Publ. Astron. Soc. Japan*, **26**, 367–377.

Yoshida, H. (1983a) Necessary conditions for the existence of algebraic first integrals I., *Celestial Mechanics*, **31**, 363–379.

Yoshida, H. (1983b) Necessary conditions for the existence of algebraic first integrals II., *Celestial Mechanics*, **31**, 383–399.

Yoshida, H. (1990) Construction of higher order symplectic integrators, *Phys. Lett. A*, **150**, 262–268.

Yoshida, H. (1992) Symplectic integration for Hamiltonian systems: basic theory, in *Chaos, resonance and collective dynamical phenomena in the solar system*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, 407–412.

Yoshida, H. (1993) Recent progress in the theory and application of symplectic integrators, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **56**, 27–43.

Yoshida, H. (2001) Non-existence of the modified first integral by symplectic integration method, *Phys. Lett. A*, **282**, 276–283.

Yoshida, F., Nakamura, T., Fuse, T., Komiyama, Y., Yagi, M., Miyazaki, S., Okamura, S., Ouchi, M., and Miyazaki, M. (2001) First Subaru observations of sub-km main belt asteroids, *Publ. Astron. Soc. Japan*, in press.

Yoshinaga, K., Kokubo, E., and Makino, J. (1999) The stability of protoplanet systems, *Icarus*, **139**, 328–335.

Zare, K. and Chesley, S. (1998) Order and chaos in the planar isosceles three-body problem, *Chaos*, **8**, 475–494.

Ziglin, S.L. (1982) Splitting of separatrices, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a solid body, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **41**, 283–298.

安部正真, 水谷仁, 大江昌嗣, 田村良明 (1992) 地球-月潮汐進化における太陽潮汐力の効果, 太陽系科学シンポジウム, **14**, 226–231.

安部正真 (1992) 地球月系潮汐進化に及ぼす海洋大陸配置の影響, 修士論文, 東京大学.

安部正真, 大江昌嗣 (1993) 地球–月系力学進化の問題点, 地球, **15**, 306–310.

阿部豊 (1997) 太陽系の起源, 松井孝典 (編), 比較惑星学, 岩波講座 地球惑星科学, No. 1, 岩波書店, 第 5 章, 219–280.

井田茂 (1997) 太陽系外惑星の発見 : 比較惑星系形成論の幕開け, 天文月報, **90**, 3, 116–121.

大貫義郎, 吉田春夫 (1994) 力学, 岩波講座 現代の物理学, No. 1, 岩波書店.

大野照文 (1993) Wells 以来—地球月力学系の歴史を記録した化石や堆積物の縞状構造解読 30 年の歩み, 地球, **16**, 53–59.

木下宙 (1993) ミランコヴィチ周期計算の基礎について, 地球, **15**, 314–315.

木下宙, 中井宏 (1994) 最果ての星 ・冥王星の奇妙な運動, 天文月報, **87**, 100–107.

木下宙 (1998) 天体と軌道の力学, 東京大学出版会.

熊澤峰夫, 吉田茂生, 伊藤孝士 (編) (2002) 全地球史解読, 東京大学出版会.

小久保英一郎, 井田茂 (1997) 惑星集積 —微惑星から惑星へ—, 日本物理学会誌, **52**, 77–82.

小久保英一郎 (1999) 名残の月 —巨大衝突により形成された周地球円盤から—, 天文月報, **92**, 6, 296–303.

笹尾哲夫 (1979) 流体核をもつ地球の運動, 現代天文学講座 1 地球回転, 恒星社, 109–167.

笹尾哲夫 (1993) 地球の章動, 地球, **16**, 4–7.

谷川清隆, 相馬充 (2001) 推古 36 年の皆既日食記事の信憑性, 天体力学 N体力学研究会集録, 国立天文台, 東京都三鷹市, *ibid.*, 2001 年 3 月 16 日–3 月 18 日, 草津セミナーハウス.

中井宏, 木下宙 (1995) 外惑星系の数値シミュレーション, 第 27 回天体力学研究会集録, 国立天文台, 三鷹, 東京, 1–9.

中島映至 (1980) 地球軌道要素の変動と気候, 気象研究ノート, **140**, 81–114.

長沢工 (1983) 天体力学入門 (上 ・下), 地人書館.

萩原雄祐 (1950) 天体力学の基礎 I (下), 河出書房, 東京.

福島登志夫 (1982) Newton 反復に対する安定な出発値とその Kepler 方程式への応用, 第 15 回天体力学研究会集録, 国立天文台, 33–36.

堀源一郎 (1988) 天体力学講義, 東京大学出版会.

山中右次 (1997) 天王星楕円リングの安定性, 修士論文, 日本大学理工学部.

山本義隆 (1997) 古典力学の形成 — ニュートンからラグランジュへ, 日本評論社, 東京.

吉田春夫 (1995) シンプレクティク数値解法, 数理科学, **384**, 37–46.

吉田春夫 (1997) ハミルトン力学系のためのシンプレクティク数値積分法, 共同研究 「非線型現象の数理科学」・湘南レクチャー 「非線型現象の数理」 論文集, 総合研究大学院大学, 68–83.

渡邊誠一郎, 井田茂 (1997) 比較惑星系形成論, 松井孝典 (編), 比較惑星学, 岩波講座 地球惑星科学, No. 12, 岩波書店, 第 3 章, 131–232.