記号力学による1次元三体問題*

谷川清隆[1], **Seppo Mikkola**[1,2]
[1]National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo 181, Japan
[2]Tuorla Observatory, University of Turku, 21500 Piikkiö, Finland

Abstract

記号力学を 1 次元三体問題に応用する. 軌道に沿っての衝突の系列を 2 つの記号からなる記号列で表わす. 初期値面の構造の詳細な解析に基づいて, 実現不可能な衝突列を系統的に求める. 無限個の周期記号列が存在する. このことから無限個の周期軌道の存在が示唆される. 実現不可能な記号列に関するもっともな仮定の下で, 実現可能な記号列の集合がカントール集合を形作ることを証明する.

キーワード: 1 次元三体問題 – 記号力学 – カオス

微分方程式で与えられる力学系を調べるとき, しばしば時間あるいは空間を離散化する. 典型的には, ポアンカレ写像は時間を離散化し, 記号力学は空間を離散化する. 1 次元三体問題で, われわれは時間と空間を同時に離散化する手法を見つけた. 発想は記号力学を適用することであるが, 通常の取り扱いと違って, 空間ではなく時間を離散化するのである. 実際, この問題では二体衝突が必然的に繰り返される. 3 個の質点 m_1, m_0, m_2 をこの順序で直線上に置く. 質量 m_1 と m_0 の二体衝突に'1' を割り当て, m_0 と m_2 の二体衝突に'2' を割り当てる. 軌道に沿って記号'1' と'2' からなる記号列を構成する. こうして, 記号は相空間の場所に対応せず, 時間の区切り (二体衝突) に対応する. この手法とポアンカレ写像を使って, 1 次元三体問題の力学の重要な定性的問題をエレガントに解く.

I. 序

一般の初期値から出発する 1 次元三体問題は Mikkola & Hietarinta[1,2,3] が広いパラメータ範囲にわたって調べた. Tanikawa & Mikkola (Ref.4; 以後 論文 I と呼ぶ) は記号列を導入し, 三体衝突軌道が, 異なる記号列を持つ軌道の境界として得られることを発見した. (三体問題への記号力学の別の応用については参考文献 5 参照のこと.) 彼らは, いままでカオス領域と考えられてきた場所が無数の三体衝突曲線, すなわち, 三体衝突の初期条件が形作る曲線, によって層状に分割されることを見つけた.

この論文は論文 I の拡張である. 目的は 1 次元三体問題の相空間の構造をもっと詳細に理解することであり, それによってこの力学に関してさらに深い洞察を得ることである. 軌道そのものを考える代わりに, 記号列の集合を考える. ここ

* *Chaos* **10**, 649-657(2000)

で, 記号列は相空間を分割してではなく, 軌道に沿っての二体衝突の列から作られる. 主結果は以下のとおりである. 横断面は異なる型の記号列によって大きく 5 つの領域に分割される. そこで横断面の対称性から, 非許容 (実現不可能) 衝突列を見つける. 次に記号列を 10 進数と考えて記号列が増大または減少するように対応する点が帯をなして横断面を分割していることを見る. ポアンカレ写像の下での各種領域の間の点の遷移を表すグラフを作成し, それを使って周期記号列および振動記号列, 対応して周期軌道および振動軌道の存在を導出する. 最後に, 数値結果に基づいて, 記号列全部の集合の中で, 許容な記号列の集合がカントール集合をなすことを証明する.

II 節では問題を定義し, ハミルトン関数および使用変数を示す. 数値計算の精度を保つために正則化変数を導入する. 横断面あるいは初期値面も定義する. III 節では, 記号列を導入し, 記号列と横断面の関係を議論する. IV 節で結果を述べる. IV.A 節で横断面の全体の様子を示す. IV.B 節では非許容 (実現不可能) 記号列を問題の対称性を使って決定する. IV.C 節では異なる記号列に関してもっと詳しい横断面の構造を解析する. IV.D 節では横断面のさまざまな領域間の点の遷移を表すグラフを作り, 周期記号列その他を見つける. IV.E 節では IV.A ー D 節の数値結果を踏まえて許容記号列の性質を調べる. 最終 V 節で結果をまとめる.

II. 問題の定式化

3 質点 m_1, m_0 および $m_2 (m_0 = m_1 = m_2)$ をこの順序で直線上に並べる. 質量の値および重力定数を 1 に固定する. するとハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} w_i^2 - \sum_{i<j} \frac{1}{|x_i - x_j|}. \tag{1}$$

となる (1, Mikkola & Hietarinta, 1989). ここで w_i は直線上の座標 x_i に共役な運動量である. $x_1 \le x_0 \le x_2$ である. 新しい座標を

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0 - x_1, \\ q_2 &= x_2 - x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

で導入すると, 対応して新しいハミルトン関数

$$H = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1 + q_2}. \tag{3}$$

が得られる.

全エネルギーを -1 に固定し, 軌道のふるまいを $q_1(0) = q_2(0) = R$ から追いかける. つまり, 外側の 2 質点は中央の質点から等距離にあるところから運動が始まる. 三体大接近の前後には必ずこの状態を通過するので, ほとんどの軌道がいずれかの時点でこの状態に入る. このとき, ポテンシャルの値は $2.5/R$ と決まる. 運動エネルギー T は

$$T = 2.5/R - 1. \tag{4}$$

で与えられる.

次のようなパラメータを導入しよう.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(p_1 - p_2) &= \ \ 2\sqrt{T}\sin\theta, \\ (p_1 + p_2) &= \ \ 2\sqrt{T}\cos\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

すると (θ, R) は初期値を指定する. 速度は θ と R によって

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 2p_1 - p_2 = 2\sqrt{T}\cos(\theta - \pi/3) \\ \dot{q}_2 &= 2p_2 - p_1 = 2\sqrt{T}\cos(\theta + \pi/3). \end{aligned} \tag{6}$$

と表される.

関数 $S = p_1Q_1^2 + p_2Q_2^2$ はさらに別の正準変換を生成する. 新しい座標は $Q_1 = \sqrt{q_1}$, $Q_2 = \sqrt{q_2}$ で新しい運動量は $P_i = 2Q_ip_i$ である. これに時間変換 $t' = q_1q_2$ も加えると, 新しいハミルトン関数

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1^2Q_2^2 + P_2^2Q_1^2 - P_1P_2Q_1Q_2) - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_1^2Q_2^2/(Q_1^2 + Q_2^2) - Q_1^2Q_2^2E, \tag{7}$$

が得られる. ここで E はハミルトン関数の (初期) 数値である. このハミルトン関数から得られる運動方程式は Bulirsch-Stoer 積分子 [6] のような普通の方法で数値的に積分できる.

III. 記号列と横断面

軌道に沿って 3 つの型の衝突があり得る : m_1 と m_0 の間の二体衝突, m_0 と m_2 の間の二体衝突, および三体衝突である. m_1 と m_0 の間の二体衝突を'1' で表し, m_2 と m_0 の間の二体衝突を'2' で表し, 三体衝突を'0' で表そう. 記号列は次のように作る. m_1 と m_0 が衝突したときには記号'1' を列に加え, m_0 と m_2 が衝突したときには記号'2' を加える. さらに, 三体衝突が生じたときには列に'0' をつなぐ.

三体衝突から出発したり三体衝突に終る軌道を直接求めることは非常に難しい. というのは, 三体衝突は一般に真性特異点だからである. しかし論文 I で示したように, '0' を含む記号列を持つ軌道は'0' を含まない記号列を持つ軌道の境界として得ることができる. だから, 三体衝突に'0' を割り当てることは単なる形式的な手続きではない. 一般に, 三体衝突を経験する軌道はその先に接続することができない. そこで, 未来に (あるいは過去に)'0' が生じたときにはそのうしろに (あるいは前に)'0' が無限に続くものとする.

さて, 軌道を $0, 1$ および 2 の列として次のように表現する.

$$(\ldots n_{-2}n_{-1}.n_0n_1n_2\ldots)$$

ここで $n_i, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0$ は $0, 1,$ または 2 のどれかである. II 節で定義した初期条件から出発して未来および過去に向かって軌道を追いかける. すると, n_0 は最初の衝突を表す. n_1 と n_2 は第二, 第三の衝突を表す. 以下同様である. 同様に, $n_{-1}, n_{-2}, \ldots$ は過去の衝突に対応する記号である.

Σ は 3 つの記号からなる両無限の列 $s = (\ldots n_{-2}n_{-1}.n_0n_1n_2\ldots)$ すべての集合とする. Σ 上の距離を $\mathrm{d}(s, s) = 0$ および $s^1 \neq s^2$ のときに $\mathrm{d}(s^1, s^2) = 3^{-|m|}$ と置いて定義する. ただし $|m|$ は $s_m^1 \neq s_m^2$ を満たす最小の整数である [8]. すると Σ はコンパクト距離空間となる. 次を定義する.

$$\Sigma_2 = \{s \in \Sigma \mid s_i = 1 \text{ or } 2\}. \tag{8}$$

このとき, Σ_2 がカントール集合であることが知られている [9]. 言い換えると, 二体衝突を繰り返す軌道に対応する記号列は記号列空間 Σ の中でカントール集合をなす. 以下では主として空間 Σ_2 を考える.

Σ 上の推移オペレーター σ は

$$\sigma(\ldots n_{-2}n_{-1}.n_0n_1n_2\ldots) = (\ldots n_{-2}n_{-1}n_0.n_1n_2\ldots) \tag{9}$$

で定義される.

II 節で述べたように, $q_1 = q_2$ の状態から積分を始める. はじめに決めたエネルギーの値より, 初期状態は横断面 H:

$$H = \{(\theta, R) \mid 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq R \leq 2.5\}. \tag{10}$$

上に表現できる. $0 < \theta < \pi$ の場合, (q_1, q_2) 面の軌跡は同形線$(q_1 = q_2)$ を $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$ で横断的に横切る. $\pi < \theta < 2\pi$ の場合, (q_1, q_2) 面の軌跡は同形線を $\dot{q}_1 < \dot{q}_2$ で横断的に横切る.

3 つの粒子が同じ質量を持つので, 横断面は 2 つの対称性を持つ. 次を導入しよう.

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(\theta, R) : 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq R \leq 2.5\}, \\ H_2 &= \{(\theta, R) : \pi \leq \theta < 2\pi, 0 \leq R \leq 2.5\}, \\ H_1^t &= \{(\theta, R) : (\pi - \theta, R) \in H_1\}. \end{aligned} \tag{11}$$

第一の対称性は, H_2(または H_1) を出発する軌道の未来が, H_1(または H_2) を出発する軌道の過去に対応することである. 記号列の言葉でいうと, $(\ldots m_{-2}m_{-1}.n_0n_1\ldots)$ が点 $(\theta, R) \in H_1$ の記号列であれば, $(\ldots n_1n_0.m_{-1}m_{-2}\ldots)$ は点 $(2\pi - \theta, R) \in H_2$ の記号列である.

第二の対称性は, H_1^t を出発する軌道の未来が H_1 を出発する軌道の過去であることである. 記号列の言葉で言えば, $(.n_1n_2n_3\cdots)$ が $(\theta, R) \in H_1$ を出発する軌道に対応する 未来 記号列であって, $(.m_1m_2m_3\cdots)$ が $(\theta, R) \in H_1^t$ を出発する軌道に対応する未来記号列であると, $(\cdots m_3^t m_2^t m_1^t.n_1n_2n_3\cdots) \in \Sigma$ は H_1 を出発する軌道全体に対応する両無限記号列である. ただし, $m_i = 1$ なら $m_i^t = 2$ であり, $m_i = 2$ なら $m_i^t = 1$ である.

まとめると, 全横断面 H の構造を調べるためには, H_1 の点の未来軌道を積分すればよい. なぜなら, 過去軌道は第二の対称性から得られ, H_2 の点の軌道は第一対称性, つまり時間反転, によって得られるからである.

記号列内の記号と横断面の点の対応は 1 対 1 ではない. 以下の命題からわかるとおり, 軌道がふたたび面 H_1 に現れるなら, それに先行する二体衝突は m_1 と m_0 の間に起こり, それに続く二体衝突は m_2 と m_0 の間に起こる. 言い換えると, 現在 (小数点) は相続く'1' と'2' の間にのみ入れることができる. 同じペアの二体衝突が続く限り, 軌道は H_1 上に現れない.

命題 **3.1.** (q_1, q_2) 面の軌跡は同形線 $(q_1 = q_2)$ を横切るなら, 点 $(\theta, R) = (0, 0)$ の場合を除いて横断的に横切る.

証明. $q_1 = q_2$ かつ $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$ なら, 解は同形であってつねに同形線上にある. だから, 初期に同形線の外にある軌跡は三体衝突を除いて, 同形線に接することはできない. □

命題 **3.2.** (q_1, q_2) 面で軌跡が同形線を横切れば, ふたたび同形線を横切る前に二体衝突を起こす.

Figure 1: Stratified structure of the surface of section. A reproduction of Fig.5 in Paper I. Shown are the Schubart region(black), triple collision curves, and immediate escape reions(blank).

証明. 軌跡が同形線を $t = t_0$ に, $(q_1 < q_2)$ 側から $(q_1 > q_2)$ 側に, つまり $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$ で横切ったとする. すると, 小さな $\varepsilon > 0$ があって, $t = t_0 + \varepsilon$ に $q_1 > q_2$ かつ $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$ である. つまり, ふたたび同形線を横切るためにはゼロでない有限な時間が必要である. (t_0, t^*) の間に二体衝突を経験することなく, 同形線を $t = t^* > t_0$ に横切ったとしてみる. この場合連続性の議論が使える. 命題 3.1 より, 時刻 $t = t^*$ に, $q_1 = q_2$ かつ $\dot{q}_1 < \dot{q}_2$ が成り立つ. これが成り立つためには, ある時刻 $t^{**}, t_0 < t^{**} < t^*$ に, $q_1 > q_2$ かつ $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$ が成り立つはずである. すると, t_0 と t^{**} の間のある時刻に $\ddot{q}_2 > \ddot{q}_1$ が成り立つはずである. これは, その時刻に $q_2 < q_1$ であることを意味する. これは矛盾である. □

最後に, 大局的構造を得るために, 横断面 H_1 を格子サイズ $(\Delta R, \Delta\theta) = (0.002, 0.^\circ 1)$ の網目で覆い, 各格子点から出発して 66 回目の二体衝突が得られるまで軌道を積分する. 積分した軌道の数は 2.25×10^6 個である. 特定の局所的構造を見るために, それ以外にももっと細かい網目で軌道を積分した.

IV. 軌道と記号列

A. 横断面の大局的構造

論文 I で, 横断面が異なる記号列を持つ点によって小さな部分に分割されることを見た. 事実, 面 H_1 は未来記号列 $1.22\ldots$ と $1.21\ldots$ を持つ点によって 2 分された. 面は未来記号列 $1.222\ldots$, $1.221\ldots$, $1.211\ldots$, および $1.212\ldots$ によって 4 分割された. 面は $1.2222\ldots$, $1.2221\ldots$, $1.2212\ldots$, $1.2122\ldots$, $1.2121\ldots$, $1.2112\ldots$, および $1.2111\ldots$ によって 7 分割される. 等々. 異なる記号列を持つ領域間の境界は

曲線をなし, これらの曲線は三体衝突に終る軌道の初期値であることがわかった. われわれは, この曲線を 三体衝突曲線 と呼んだ. こうして, 記号列の桁数を上げるにつれて横断面はより多くの小さな領域に分割され, それら領域は三体衝突曲線によって限られる. 1 図は結果のひとつを示す. これは論文 I の 5 図を再録したものである. 図には, 10, 11 および 12 桁の記号列から得られる三体衝突曲線を描いた. もっと短い桁数の記号列から得られるものはこれらの間に分布するが, それらは省略した. 三体衝突曲線に加えて, 2 種類の領域が示されている. ひとつはシューバート領域 (黒) である. これはシューバート軌道 [10] と呼ばれる安定な周期軌道のまわりの安定領域である. もうひとつは 4 個の空白領域である. ここから出発する軌道はただちにエスケープする, つまり 1 体と連星に分裂する.

論文 I では, 異なる記号列を持つさまざまな領域の配置や分布に関しては考察しなかった. 今回の論文では, 横断面の詳細な構造を解析し, 1 次元三体問題の力学に関し洞察を得ることが目標である. 最初の大事な観察は, H_1 内に大きな構造のあることである. 4 本の曲線がシューバート領域の角 (かど) から出て, 横断面の下の境界に達しているように見える. 1 図では, この曲線はシューバート領域の直外から出発したあちこち飛びまわる軌道の一部として得られた. シューバート領域では, 記号列は $(21)^\infty.(21)^\infty$ なる形を持つ. ただし指数 ∞ は 21 が無限回繰り返されることを意味する. (この約束は有限回の繰り返しの場合にも使うことにする.)

これが本当に曲線であることを確認するために, この曲線候補を横切る多くの短い線分上を初期値として軌道を積分した. 格子のサイズは水平方向の場合は $0°.001$, 鉛直方向の場合は 0.0001 とした. 点が曲線上にあるための条件は, 対応する記号列が, $n \geq 36$ として $1.(21)^n$ なる形をしているときであるとした. シューバート領域の境界の近くでは, もっと長い桁数が必要であった. その上, 条件を満たす格子点が複数の場合には位置を補間した.

結果を 2(a) 図に示した. 4 本の曲線は滑らかにシューバート領域の境界につながっているように見える. これらの曲線によって分離される領域を $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ と記そう. 意味はシューバート領域 (S), および左 (L), 中 (C), 右 (R), 上 (T) 領域である. 対応する記号列は I 表に記載した.

Table I. Symbol sequences in the surface of section H_1.

Region	Sequence($n \geq 0$)
$\mathcal{S}$	$(21)^\infty.(21)^\infty$
$\mathcal{L}$	$\ldots 1.(21)^{2n}22\cdots$
$\mathcal{C}$	$\ldots 1.(21)^{2n+1}1\cdots$
$\mathcal{R}$	$\ldots 1.(21)^{2n+1}22\cdots$
$\mathcal{T}$	$\ldots 1.(21)^{2n+2}1\cdots$

注意. 2(a) 図の分割は $\mathcal{S}$ の境界近くでは正確でない可能性があることに注意すべきである. シューバート領域のまわりには 2 周期点が 2 組ある. (これらは配位空間では 1 本の軌道に対応するが.) これらの点は シューバート領域の角にあって, シューバート領域の最外側 KAM 曲線とは離れているはずである. シューバート領域の近くでは $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ は複雑な仕方でからみ合っている可能性がある. この論文では, このあたりの場所に関しては何も結論を出さないようにする.

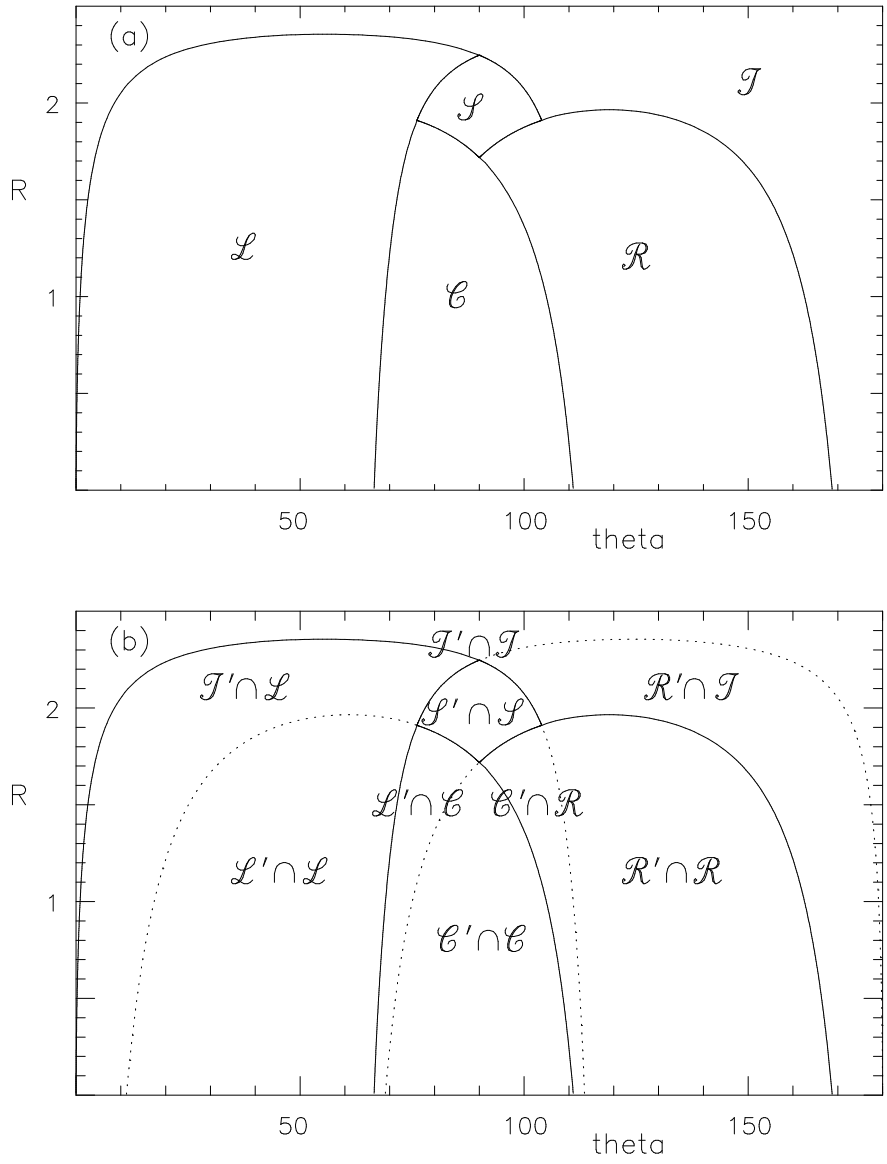

Figure 2: (a) Division of the surface of section. (b) Overlapping regions of the surface of section and its reverse.

B. 非許容記号列

III 節で指摘したように, 横断面は対称性を持つ. (θ, R) から出発する軌道の過去の歴史は $(\pi-\theta, R)$ を出発する軌道の未来として実現される. 逆も成り立つ. だから, (θ, R) を出発する軌道に対応する両無限記号列を得るためには, (i) (θ, R) を出発する軌道の未来を計算してその未来記号列 $1.2c_2c_3\ldots$ を記録する. (ii) $(\pi-\theta, R)$ を出発する未来軌道を計算してその未来記号列 $1.2s_2s_3\ldots$ を記録する. (iii) 過去 記号列 $\ldots\bar{s}_3\bar{s}_2 1.2$ を作る. ここで $s=2$ または 1 に応じて $\bar{s}=1$ または 2 である. (iv) 2 つの記号列をつないで $\ldots\bar{s}_3\bar{s}_2 1.2c_2c_3\ldots$ を得る.

この手続きから, 与えられた記号列が 許容(すなわち, 衝突列として実現可能) かどうかチェックする仕方が示唆される. 任意の未来記号列を任意の過去記号列

とつなげることができれば, 任意の両無限記号列が許容である.

反転横断面 H_1^t を考えよう. H_1 の領域 $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, および $\mathcal{T}$ を反転して得られる H_1^t の領域を. それぞれ $\mathcal{L}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{R}'$ および $\mathcal{T}'$ と記そう. たとえば, $\mathcal{L}'$ はもとの $\mathcal{R}$ を反転したものである. 対応する (過去) 記号列で'1' と '2' を入れ替えたものを II 表に示した.

ダッシュつきとダッシュなしの領域が重なれば, 2 つの片側無限記号列をつないだ記号列は許容である. そうでないとき非許容である. 全部で 17 個の組合せが可能である. すなわち, $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{T}$ のどれかと $\mathcal{L}', \mathcal{C}', \mathcal{R}', \mathcal{T}'$ のどれかの組合せが 16, $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ の組合せがひとつ. 問題の対称性より, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ である. 重なりが空でない組合せを 2(b) 図に示した. IV.A 節の注意で指摘したように, $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$ の境界近くでは, 領域の重なりは複雑な形をしている可能性がある. いまはそれを無視する.

Table II. Symbol sequences in the reversed surface of section H_1^t.

Region	symbol sequence($n \geq 0$)
$\mathcal{L}'$	$\ldots 11(21)^{2n+1}.2\cdots$
$\mathcal{C}'$	$\ldots 2(21)^{2n+1}.2\cdots$
$\mathcal{R}'$	$\ldots 11(21)^{2n}.2\cdots$
$\mathcal{T}'$	$\ldots 2(21)^{2n+2}.2\cdots$

重ならない領域の組合せを III 表の第一, 第二欄に記載した. 同時に, 対応する記号列 (第三欄) と非許容 ワード(第四欄) も載せた. ただしここでワードとは記号の有限列のことである.

III 節で記述したように, H_2 内の記号列は H_1 内の記号列から未来と過去を入れ替えて得ることができる. III 表の第五欄には, 第四欄のワードを反転して得られた H_2 内の非許容ワードを記載した.

III 表の非許容ワードを部分列として含む任意の記号列は非許容である. というのは, わが横断面 H_1(または H_2) は $q_1 = q_2$ 線を現在 $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$(または $\dot{q}_1 < \dot{q}_2$) で横切る軌道のすべての可能な状態を尽くしているからである. 非許容ワードを未来または過去に含む記号列があれば, 推移オペレーターをそれにほどこして, ワードを現在に移動させることにより, この記号列が非許容であることが言える.

Table III. Pairs of non-overlapping regions and unallowable words. The words in the fifth column obtained by reversing the future and past of those in the fourth column are also unallowable.

H_1^t	H_1	Form of symbol sequence in $H_1(m, n \geq 0)$	Unallowable word $H_1(k \geq 0)$	Unallowable word $H_2(k \geq 0)$
$\mathcal{C}'$	$\mathcal{L}$	$\ldots 2(21)^{2m+1}.(21)^{2n}22\ldots$	$2(21)^{2k+1}22$	$22(12)^{2k+1}2$
$\mathcal{R}'$	$\mathcal{L}$	$\ldots 11(21)^{2m}.(21)^{2n}22\ldots$	$11(21)^{2k}22$	$22(12)^{2k}11$
$\mathcal{R}'$	$\mathcal{C}$	$\ldots 11(21)^{2m}.(21)^{2n+1}1\ldots$	$11(21)^{2k+1}1$	$1(12)^{2k+1}11$
$\mathcal{T}'$	$\mathcal{C}$	$\ldots 2(21)^{2m+2}.(21)^{2n+1}1\ldots$	$2(21)^{2k+3}1$	$1(12)^{2k+3}2$
$\mathcal{L}'$	$\mathcal{R}$	$\ldots 11(21)^{2m+1}.(21)^{2n+1}22\ldots$	$11(21)^{2k+2}22$	$22(12)^{2k+2}11$
$\mathcal{T}'$	$\mathcal{R}$	$\ldots 2(21)^{2m+2}.(21)^{2n+1}22\ldots$	$2(21)^{2k+3}22$	$22(12)^{2k+3}2$
$\mathcal{L}'$	$\mathcal{T}$	$\ldots 11(21)^{2m+1}.(21)^{2n+2}1\ldots$	$11(21)^{2k+3}1$	$1(12)^{2k+3}11$
$\mathcal{C}'$	$\mathcal{T}$	$\ldots 2(21)^{2m+1}.(21)^{2n+2}1\ldots$	$2(21)^{2k+3}1$	$1(12)^{2k+3}2$

非許容ワードは他にはない. 事実, 領域 $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ は横断面内の境界にほぼ平行に走る三体衝突曲線によって層状に分割されているからである. 加えて, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ 内のこれらの層状領域は横断面の下端にある三体衝突点に収斂している. 一方, もとの横断面と反転横断面の三体衝突曲線は横断的に交わる. これは 1 図および 2(b) 図で確認できる. 実際, 2(b) 図の点線, すなわち H^t の領域の境界, は 1 図の三体衝突曲線に横断的である. したがって, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ のどれかひとつが $\mathcal{L}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{R}'$, および $\mathcal{T}'$ のどれかひとつと共通部分を持てば, 前者の任意の過去記号列 $(\ldots s_{-2}s_{-1}.)$ の領域と後者の任意の未来記号列 $(.t_0t_1\ldots)$ の領域は共通部分を持ち, これらをつなげた両無限列 $(\ldots s_{-2}s_{-1}.t_0t_1\ldots)$ は許容である. こうして次の結果を得る.

命題 4.1. 非許容ワードは, $0 \le k \le k_0$ として次の形をしている: $2(21)^{2k+1}22$, $11(21)^{2k}22$, $11(21)^{2k+1}1$, および $2(21)^{2k+1}1$. ここで k_0 はある大きな正整数である. 非許容ワードの長さは $4(k+1)$ または $4(k+1)+1$ である.

最初のいくつかの非許容ワードを例として IV 表に載せておいた. これらが実現されないことは数値的にも確認した. ただ, 残念ながら, 最短ワード '1122' や '2211' がなぜ実現されないか, その解析的な説明はできなかった.

Table IV. Unallowable words of length ≤ 13.

4	5	8	9	12	13
2211	22122	22121211	221212122	221212121211	2212121212122
1122	11211	11212122	112121211	112121212122	1121212121211

注意. IV.A 節の注意を考慮して, 命題 4.1 に制限 $k \le k_0$ を付け加えた.

C. 横断面の詳細構造

横断面内での記号列の詳細な分布を見るために, 直線 $\theta = 30°$, $90°$, および $150°$ に沿って細かい網目で軌道を積分した. 直線 $\theta = 30°$ は $\mathcal{L}$ 内の構造に横断的であり, この直線に沿っては, (未来) 記号列を 10 進数とみなしたときに, R の増加とともに $1.(2)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで減少しながら分布することがわかった. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.(2)^\infty$, $1.(2)^n1\ldots$, および $1.(21)^{2k}22\ldots$. ただし $n \ge 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_9, I_5, および I_1 と書く. I_1 内の記号列に奇数指数がない理由は以下で導入する I_3 の記号列を見れば納得する.

直線 $\theta = 90°$ に沿って $\mathcal{C}$ 内では, 記号列を 10 進数とみなしたときに, R の増加とともに $1.2(1)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで増加しながら分布する. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.2(1)^\infty$, $1.2(1)^n2\ldots$, and $1.(21)^{2k+1}1\ldots$. ただし $n \ge 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_{10}, I_6, および I_2 と書く. I_1 の場合と同様, I_3 内の記号列に偶数指数がない理由は以下で導入する I_4 の記号列を見れば納得する.

直線 $\theta = 150°$ に沿って $\mathcal{R}$ 内では, 記号列は R の増加とともに $1.21(2)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで減少する. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.21(2)^\infty$, $1.21(2)^n1\ldots$, および $1.(21)^{2k+1}22\ldots$. ただし $n \ge 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_{11}, I_7, および I_3 と書く.

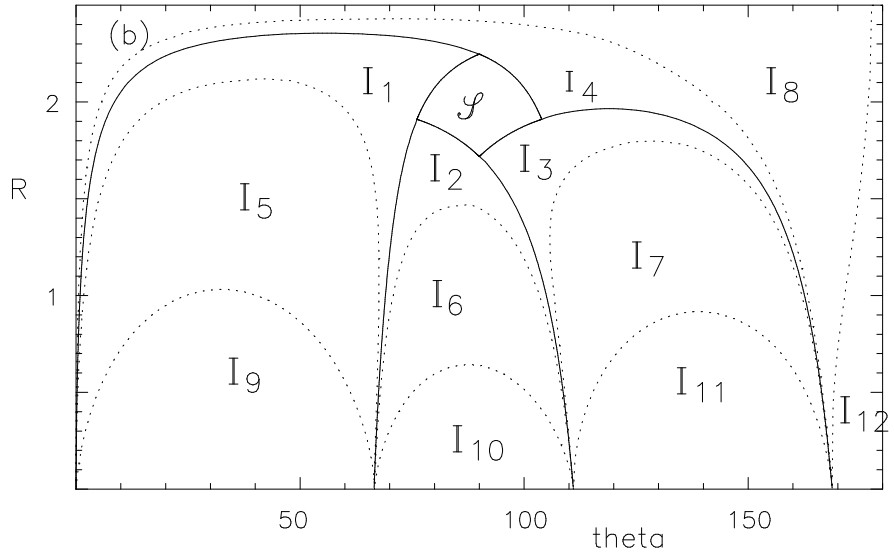

Figure 3: A finer structure of the surface of section.

最後に直線 $\theta = 30°, 90°$, または $150°$ のどれかに沿って $\mathcal{T}$ 内では, 記号列は R の減少とともに $1.212(1)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで増加する. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.212(1)^\infty$, $1.212(1)^n2\ldots$, および $1.(21)^{2k}1\ldots$. ただし $n \geq 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_{12}, I_8, および I_4 と書く.

こうして $\mathcal{S}$ 以外に全部で 12 個の領域 $I_i, i = 1, 2, \ldots, 12$ がある (3 図参照). I_1 と I_5 の間の境界は, 記号列 $(\ldots 1.20)$ を持つ三体衝突曲線である. 同様に, I_2 と I_6 の間, I_3 と I_7 の間, および I_4 と I_8 の間の境界は, それぞれ記号列 $(\ldots 1.210)$, $(\ldots 1.2120)$, および $(\ldots 1.21210)$ を持つ三体衝突曲線である. 領域 I_9, I_{10}, I_{11}, および I_{12} を即時エスケープ領域と呼ぶことにする (論文 I では正則領域と呼んだ). これらはそれぞれ記号列 $(\ldots 1.(2)^\infty)$, $(\ldots 1.2(1)^\infty)$, $(\ldots 1.21(2)^\infty)$, および $(\ldots 1.212(1)^\infty)$ を持つ.

$I_i, i = 1, 2, \ldots, 8$ をさらに細かく分割することも可能ではある. しかし, ここではそれをする代わりに, I_5, I_6, I_7 および I_8 の少し細かい構造を見ることにする. 周期記号列を見つける (これは IV.C 節で行なう) にはこれで十分である.

I_5 を考えよう. 上で記述したように, I_5 内の記号列は, $n \geq 2$ として $1.(2)^n1\ldots$ なる形をしており, 直線 $\theta = 30°$ に沿って R を増加させると, 10 進数とみなしたこの記号列は減少する. だから n の大きな記号列 $1.(2)^n1\ldots$ は n の小さなものより下にある. $n \geq 2$ を固定して記号列 $1.(2)^n1\ldots$ を持つ点集合の構造を見てみよう. (10 進数として) 最大の記号列は $1.(2)^n1(2)^\infty$ である. ところが非許容ワード '22122' を含んでいるのでこの記号列は非許容である. だから最大の許容記号列は $1.(2)^n121(2)^\infty$ となる. そして次のような不等式列が得られる. $1.(2)^n121(2)^\infty > 1.(2)^n121(2)^m1\ldots > 1.(2)^n1(21)^{2m'}22\ldots > 1.(2)^n1(21)^\infty > 1.(2)^n1(21)^{2k}211\ldots > 1.(2)^n1211\ldots > 1.(2)^n12(1)^\infty$. ここで $m \geq 2$, $m' \geq 1$, および $k \geq 1$ である. この不等式列を得るにあたって, 命題 4.1 を利用した. たと

Figure 4: Mapping of regions in $\mathcal{L}$. Four bands in $\mathcal{L}$ with symbol sequences $1.(2)^3 1\ldots$, $1.(2)^5 1\ldots$, $1.(2)^7 1\ldots$, and $1.(2)^9 1\ldots$, are mapped to four bands in $\mathcal{C}'$. Corresponding regions have the same color.

えば, 列 $1.(2)^n 1(21)^{2m'+1}22\ldots$ は含まれていてもよさそうだが, これは非許容である. というのは, これは非許容ワード'$221(21)^{2m'+1}22$' を含むからである. 不等式列の各記号列に σ^n を作用させて次を得る. $1.21(2)^\infty \in I_{11}$, $1.21(2)^m 1\ldots \in I_7$, $1.(21)^{2m'}22\ldots \in I_3$, $1.(21)^{2k}211\ldots \in I_2$, $1.211\ldots \in I_6$, および $1.2(1)^\infty \in I_{10}$. 残った記号列 $1.(21)^\infty$ はシューバート領域の角のひとつへ向かう安定多様体上にある. こうして, $1.(2)^n 1\ldots$ の形の記号列を持つ点の軌道は, 次に横断面を横切るときには $I_{11}, I_7, I_3, I_2, I_6, I_{10}$ のどれか, あるいは $\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の間の境界上で横切ると言える.

上の考察を軌道の数値積分によって確認しよう. 領域 $\mathcal{L}$ 内で, 記号列 $1.(2)^3 1\ldots$, $1.(2)^5 1\ldots$, $1.(2)^7 1\ldots$, および $1.(2)^9 1\ldots$ を持つ点を取り, 次に横断面を横切るまでその軌道を積分する. 結果を 4 図に示した. 初期の 4 本の帯の像が, やはり帯の形で $\mathcal{C}'$ に入っている. これらはたしかに $I_{11}, I_7, I_3, I_2, I_6$, および I_{10} を通る. いまや $1.(2)^n 1(21)^\infty$ の像 $1.(21)^\infty$ が $\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の間の境界にあることが明瞭に見てとれる.

I_6, I_7, および I_8 に関しても同じことができる. 細かく分割する手順は省略して, 数値結果のみを 5 図に示す. 5(a), (b), および (c) 図を見ると, それぞれ $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ 内の 4 本の帯が $\mathcal{R}'$, $\mathcal{L}$, および $\mathcal{C}\backslash\mathcal{C}'$ 内の 4 本の帯に写されていることがわかる.

Table V. Subregions and symbol sequences

Name	Sequence $n \geq 2, k > 0, m > 0$	next
I_1	$1.(21)^{2k}22\cdots$	I_3orI_7
I_3	$1.(21)^{2k+1}22\cdots$	I_1
I_5	$1.(2)^n12(1)^\infty$	I_{10}
	$1.(2)^n1211\ldots$	I_6
	$1.(2)^n1(21)^{2m}211\ldots$	I_2
	$1.(2)^n1(21)^{2m}2122..$	I_3
	$1.(2)^n121(2)^{2m}1\ldots$	I_7
	$1.(2)^n121(2)^\infty$	I_{11}
I_7	$1.21(2)^n1\ldots$	I_5
I_9	$1.(2)^\infty$	escape
I_{11}	$1.21(2)^\infty$	I_9

Name	Sequence $n \geq 2, k > 0, m > 0$	next
I_2	$1.(21)^{2k+1}1\cdots$	I_4orI_8
I_4	$1.(21)^{2k+2}1\cdots$	I_2
I_6	$1.2(1)^n21(2)^\infty$	I_{11}
	$1.2(1)^n21(2)^{2m}1\ldots$	I_7
	$1.2(1)^n(21)^{2m}2122\ldots$	I_3
	$1.2(1)^n(21)^{2m}21211..$	I_4
	$1.2(1)^n212(1)^m1\ldots$	I_8
	$1.2(1)^n212(1)^\infty$	I_{12}
I_8	$1.212(1)^n2\ldots$	I_6
I_{10}	$1.2(1)^\infty$	escape
I_{12}	$1.212(1)^\infty$	I_{10}

I_1 と I_3 内の点は互いに領域を移り合う. すなわち, $I_1 \to I_3 \to I_1 \to I_3 \to \ldots$ と動いて, 最後に $I_1 \to I_7$ の遷移を行ない, I_7 から I_5 に入り込む. 同様に, I_2 と I_4 の点は互いに領域を移り合う. すなわち, $I_2 \to I_4 \to I_2 \to I_4 \to \ldots$ と動いて, 最後に $I_2 \to I_8$ の遷移を行ない, I_8 から I_6 に入り込む. 初期のふるまいはシューバート領域の境界近くの 2 周期軌道のふるまいに似ている. 運動はほぼ正則であって, シューバート領域のまわりを規則正しく往復する. 次第に境界から離れて, 「カオス」領域 I_5 または I_6 の境界に近づく. これは数値計算で確認できる. 6(a) 図を見ると, I_1 内で $1.(21)^222\ldots$, $1.(21)^422\ldots$, および $1.(21)^622\ldots$ の形の記号列を持つ 3 本の帯が $\mathcal{R}\backslash(\mathcal{C}' \cup \mathcal{R}')$ 内の 3 本の帯に写されている. 6(b) 図では, I_2 内の記号列 $1.(21)^31\ldots$, $1.(21)^51\ldots$, および $1.(21)^71\ldots$ に対応する 3 本の帯が $\mathcal{T}\backslash\mathcal{R}'$ 内の 3 本の帯に写されている. 6(c) 図では, I_3 内の記号列 $1.(21)^322\ldots$, $1.(21)^522\ldots$, および $1.(21)^722\ldots$ に対応する 3 本の帯が I_1 内の 3 本の帯に写されている. 6(d) 図では, I_4 内の記号列 $1.(21)^41\ldots$, $1.(21)^61\ldots$, および $1.(21)^81\ldots$ に対応する帯が $I_2\backslash\mathcal{C}'$ 内の 3 本の帯に写されている.

I_7 と I_8 はそれぞれ I_5 と I_6 に写される. I_{11} と I_{12} はそれぞれ I_9 と I_{10} に写される. 最後に, I_9 と I_{10} はエスケープ軌道に対応する. そこで I_9, I_{10}, I_{11} および I_{12} を即時エスケープ領域と呼ぶ.

V 表には領域 $I_i, i = 1, 2, \ldots, 12$ とそれに対応する記号列, 加えて横断面との次の交点を記載した. すでに指摘したとおり, I_5 と I_6 の場合には異なる n の記号列が上下におり重なっていることに注意しよう.

Figure 5: Mapping of regions in $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, and $\mathcal{T}$. (a) Four bands in $\mathcal{C}$ with symbol sequences $1.2(1)^31\ldots$, $1.2(1)^51\ldots$, $1.2(1)^71\ldots$, and $1.2(1)^91\ldots$, are mapped to four bands in $\mathcal{R}'$. (b) Four bands in $\mathcal{R}$ with symbol sequences $1.21(2)^31\ldots$, $1.21(2)^51\ldots$, $1.21(2)^71\ldots$, and $1.21(2)^91\ldots$, are mapped to four bands in $\mathcal{L}$. (c) Four bands in $\mathcal{T}$ with symbol sequences $1.212(1)^31\ldots$, $1.212(1)^51\ldots$, $1.212(1)^71\ldots$, and $1.212(1)^91\ldots$, are mapped to four bands in $\mathcal{C}\backslash\mathcal{C}'$. Corresponding regions have the same color.

D. 周期記号列および周期軌道

周期記号列を求めるために, V 表のデータを使って I_i の間の点の遷移グラフを作り 5 図に示す. 記号列が周期的であるための必要条件は, ある I_i から出発し

Figure 6: Mapping of regions in I_1, I_2, I_3, and I_4. (a) Three bands in I_1 with symbol sequences $1.(21)^2 22\ldots$, $1.(21)^4 22\ldots$, and $1.(21)^6 22\ldots$, are mapped to three bands in $\mathcal{R}\backslash(\mathcal{C}' \cup \mathcal{R}')$. (b) Three bands in I_2 with symbol sequences $1.(21)^3 1\ldots$, $1.(21)^5 1\ldots$, and $1.(21)^7 1\ldots$, are mapped to three bands in $\mathcal{T}\backslash\mathcal{R}'$. (c) Three bands in I_3 with symbol sequences $1.(21)^3 22\ldots$, $1.(21)^5 22\ldots$, and $1.(21)^7 22\ldots$, are mapped to three bands in I_1. (d) Three bands in I_4 with symbol sequences $1.(21)^4 1\ldots$, $1.(21)^6 1\ldots$, and $1.(21)^8 1\ldots$, are mapped to three bands in $I_2\backslash\mathcal{C}'$. Corresponding regions have the same color.

て同じ I_i に戻ることである. 図には最短のルートが 4 つある. すなわち $I_1 \rightleftharpoons I_3$, $I_2 \rightleftharpoons I_4$, $I_5 \rightleftharpoons I_7$, および $I_6 \rightleftharpoons I_8$ である. しかし, 最初の 2 つは除くべきである. IV.C 節で記述したとおり, この 2 つの遷移はそれぞれの領域での一方的な移動に対応しており, 周期記号列は期待できない.

遷移 $I_5 \rightleftharpoons I_7$ を考える. I_5 内の記号列の形は $1.(2)^n 1\ldots$, $n \geq 2$, I_7 内の記号列

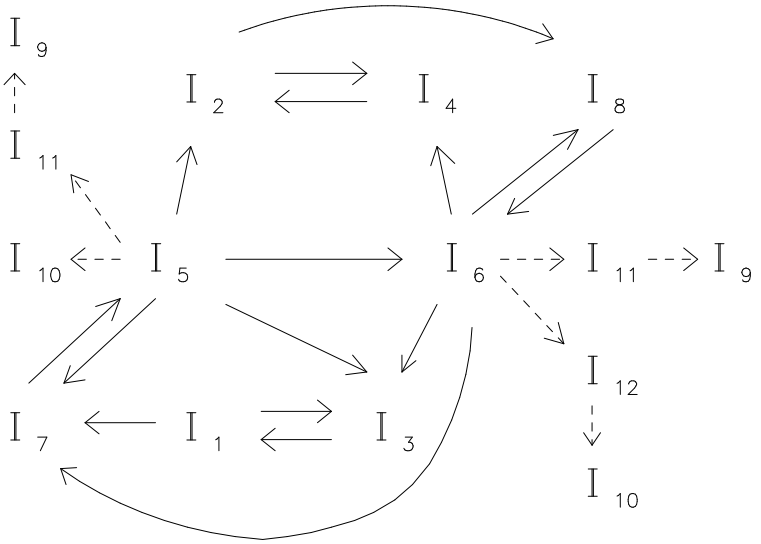

Figure 7: Graph for transitions among I_i.

の形は $1.21(2)^m \ldots$, $m \geq 2$ である. すると, 周期列はワード $1(2)^n12, n \geq 2$ を含むはずである. 同様に $I_6 \rightleftharpoons I_8$ の遷移からワード $12(1)^n2$ を得る. 最初のいくつかのワード例を VI 表に記載した.

Table VI. Possible periodic symbol words.

5	6	7	8
12212	122212	1222212	12222212
12112	121112	1211112	12111112

幾何学的には周期記号列は曲線または帯の交点として求めることができる. ワード $1c_2c_3 \ldots c_{n-1}2$ が周期記号列の最小単位であるとする. 対応する周期記号列は $(2c_2c_3 \ldots c_{n-1}1)^\infty.(2c_2c_3 \ldots c_{n-1}1)^\infty$ の形をしているはずである. このとき $1.(2c_2c_3 \ldots c_{n-1}1)^\infty$ は I_i のどれかに入っており, 列 $1.(2\bar{c}_{n-1} \ldots \bar{c}_3\bar{c}_2 1)^\infty$ は別の I_j に入っている. 対応する周期記号列は, 未来記号列 $1.(2c_2c_3 \ldots c_{n-1}1)^\infty$ を持つ点の帯と未来記号列 $1.(2\bar{c}_{n-1} \ldots \bar{c}_3\bar{c}_2 1)^\infty$ を持つ点の帯の共通部分である. 前者を $I(1.(2c_2c_3 \ldots c_{n-1}1)^\infty$ と書き, 後者を $I^t(1.(2\bar{c}_{n-1} \ldots \bar{c}_3\bar{c}_2 1)^\infty)$ と書こう. ここで $I^t(1.(2\bar{c}_{n-1} \ldots \bar{c}_3\bar{c}_2 1)^\infty)$ は $I(1.(2\bar{c}_{n-1} \ldots \bar{c}_3\bar{c}_2 1)^\infty)$ を $(\theta, R) \to (\pi - \theta, R)$ によって変換したものである. 5 図に, 周期記号列 $(22121)^\infty.(22121)^\infty$, $(222121)^\infty.(222121)^\infty$, および $(2222121)^\infty.$ $(2222121)^\infty$ の場合を示した. 共通部分 (または共通点) は小さな箱内に見える. $(\theta, R) = (25.20951, 1.8645681)$ が $(22121)^\infty.(22121)^\infty$ の近似位置である. 図で, 曲線あるいは帯が不連続に見えるのは, 軌道積分の網目の粗さのためである.

元に戻るもっと長いルートがある. VII 表には可能なすべてのルートを記載した (H_2 を出発する軌道から, VII 表のワードを前後反転した周期ワードが得られることに注意しよう). 周期ワードを同様にして求めることができる. 表には 4 番

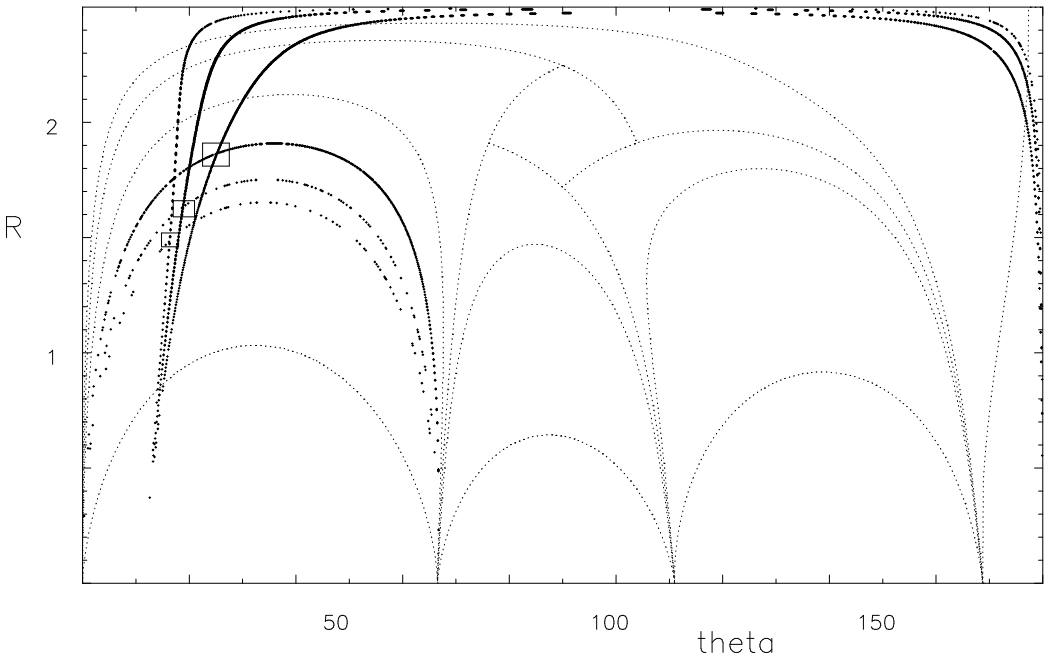

Figure 8: Procedure to obtain periodic sequences. The cases of $(22121)^{\infty}.(22121)^{\infty}$, $(222121)^{\infty}.(222121)^{\infty}$, and $(2222121)^{\infty}.(2222121)^{\infty}$. The crosspoints of the curves shown in small boxes correspond to the periodic sequences.

目, 五番目, 六番目, 七番目, および八番目のルートに $I_3 \rightleftharpoons I_1$ や $I_4 \rightleftharpoons I_2$ がある. これは対応する軌道が, これらの領域を記号列内の'21' の数だけ往復することを意味する.

Table VII. Periodic paths and periodic words.

Path	Periodic word $(n, m \geq 2, k, k' > 0)$
$I_5 \rightleftharpoons I_7$	$1(2)^n12$
$I_6 \rightleftharpoons I_8$	$12(1)^n2$
$I_5 \to I_6 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n12(1)^m22$
$I_5 \to I_3 \rightleftharpoons I_1 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n1(21)^{2k+1}22$
$I_5 \to I_6 \to I_3 \rightleftharpoons I_1 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n12(1)^m(21)^{2k}22$
$I_5 \to I_2 \to I_8 \to I_6 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n1(21)^{2k}2(1)^m22$
$I_5 \to I_2 \to I_8 \to I_6 \to I_3 \rightleftharpoons I_1 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n1(21)^{2k}2(1)^m(21)^{2k'}22$
$I_6 \to I_4 \rightleftharpoons I_2 \to I_8 \to I_6$	$12(1)^n(21)^{2k}2$

未来周期列と過去周期列に対応する点集合が横断面上で帯になっていれば, 共通部分は一点ではなく面積を持つ. この場合, この領域は円盤に同相であろうから、不動点定理より, その中に周期点が含まれるはずである. これはその円盤を安定領域とする安定周期点である. 一方, 両者が曲線の場合には, 共通部分は一点である. この点は不安定な周期点のはずである. だから, いずれにしても, 1 次元

三体問題には無数の周期記号列に対応して無限個の周期軌道があることが期待される.

上で考察したものより長い周期の周期軌道が存在し得ることに注意しよう. VII 表に記載した周期ワードは周期記号列には一意に対応するが, 周期軌道にはそうではない. VII 表の基本ルートを複数回まわって閉じる周期軌道もあり得る.

最後に, 振動記号列を求めることができる. 振動記号列は直接, 振動軌道を指定する (平面三体問題の振動軌道に関しては Ref.11 参照). 遷移 $I_5 \rightleftharpoons I_7$ を考えよう. 対応する周期ワードは $1(2)^n12, n \geq 2$ である. ルートをひと回りするたびに n が変わらなければ, 前と同様周期記号列が得られる. 正整数の列 $\{n_i\}_i$, $n_i \geq 2$ で $\lim n_i \to \infty$ を満たすものを取り, 記号列 $1.(2)^{n_1}121(2)^{n_2}12\ldots1(2)^{n_i}12\ldots$ を考える. この記号列は許容である. これは振動記号列であり, 振動軌道を与える. 同様にして, VII 表の他の周期ワードから別の振動記号列を構成できる.

E. 許容記号列の集合の性質

この小節では, 数値計算結果を踏まえて, 許容記号列がカントール集合をなすことを示す. 与えられたワードをある桁範囲に含む記号列の集合を シリンダー と呼ぶ[9]. たとえば, III 表の第三欄の記号列集合は第四欄のワードを含むシリンダーである.

Theorem 4.2. 許容記号列の集合 Ω は Σ_2 内で, したがって Σ 内でカントール集合をなす.

証明. 非許容シリンダーは命題 4.1 の非許容ワードから得られるから, その数は可算である. したがって $\Omega = \Sigma_2 \backslash \{$ 非許容シリンダー $\}$ はコンパクトである.

任意の許容記号列 $s = (\ldots s_{-2}1.2s_1s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ を取る. $i \to \infty$ のとき整数列 $1 < k_1 < k_2 < \ldots (i \to \infty$ のとき $k_i \to \infty)$ があって $s_{k_i} = 1$ かつ $s_{k_i+1} = 2$ を満たすとする. このとき s は孤立 (isolated) していない. というのは, $\sigma^{k_i}s = (\ldots 1.2s_{k_i+2}s_{k_i+3}\ldots)$ であり, この形の許容記号列は無限にあるからである. つまり, s の任意の近傍に許容記号列がある. $N > 0$ があって, $n > N$ に対して $s_n = 1$ または $s_n = 2$ ならば s は孤立していない. というのは, 任意の $n \geq 2$ に対して $.(2)^n121\ldots$ または $.(1)^n212\ldots$ なる形の記号列が存在するからである.

Ω が完全不連結であることを示すには, Ω 内の記号列の任意の近傍に Ω に属さない記号列が存在することを言えば十分である. 任意に高い桁数の場所に固定ワードを持つ非許容シリンダーを考えれば, 与えられた許容記号列の任意の近くに Ω に属さない記号列を構成することができる. □

帰結として次を得る.

系 **4.3.** シューバート領域の軌道以外に, 非可算個の非エスケープ軌道が存在する.

$(21)^\infty.(21)^\infty$ 以外に非可算個の記号列があること, およびひとつの記号列が 1 つ以上の軌道に対応することからこれは明らかである. その上, 非エスケープ軌道の初期条件曲線が非可算個あり得る.

系 **4.4.** 繰り返しのない記号列の初期位置の面積はゼロである.

対応する軌道が横断面上の異なる場所に無限回現れるから, これも明らかである.

V. まとめ

記号力学が 1 次元三体問題の研究に有効であることが示された. 主結果は以下のとおりである.

(i) 初期値空間 (横断面) は大きく 5 個の領域に分割される (2(a) 図). シューバート領域を除く各領域は異なる記号列を持つ小さな領域に系統的に細分される (V 表). これらの領域の間には, 比較的簡単な遷移則がある (7 図).

(ii) 二体衝突の列として非許容 (実現不可能) な列がある. 2211 と 1122 を含む列がもっとも単純な例である (命題 4.1).

(iii) 周期記号列を系統的に見つけた. いくつかの周期軌道の位置を決めた. もっとも簡単な例は $(22121)^{\infty}.(22121)^{\infty}$ である (VII 表). 振動軌道を導き出した.

(iv) 記号列および推移オペレーターを使って横断面上の一般軌道の定性的性質をある程度理解した (定理 4.2).

謝辞

著者のひとり (K.T.) は記号力学に関する有用な示唆に対して宇敷重広氏 (京都大学) に感謝の意を表す.

References

[1]S. Mikkola and J. Hietarinta, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **46**, 1-18(1989).

[2]S. Mikkola and J. Hietarinta, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **47**, 321-331(1990).

[3]S. Mikkola and J. Hietarinta, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **51**, 379-394(1991).

[4]K. Tanikawa and S. Mikkola, (Paper I), *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*(submitted), 1999.

[5]K. Zare and S. Chesley, *Chaos* **8**, 475-494(1998).

[6]R. Bulirsch and J. Stoer, *Numerical Treatment of Differential Equations by Extrapolation Methods.* Num. Math., **8**, 1-13(1966).

[7]C.L. Siegel and J.K. Moser, *Lectures on celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8]L.S. Block and W.A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1513, Springer-Verlag, 1992.

[9]C. Robinson, *Dynamical Systems*, CRC Press, Boca Rayton, USA, 1995.

[10]J. Schubart, *Astron. Nachr.* **283**, 17-22(1956).

[11]K. Tanikawa and H. Umehara, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **70**, 167-180(1998).