

標準写像におけるファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道

山口喜博 (帝京平成大学, yy-chaos@jb3.so-net.ne.jp)

谷川清隆 (国立天文台, tanikawa@th.nao.ac.jp)

(2007年3月22日)

概要

標準写像においてパーコフ型サドルの安定多様体と不安定多様体の弧を利用して、これらで囲まれる共鳴領域を構成した。パーコフ型周期軌道の周期点の共鳴領域の和集合として共鳴チェーンを定義し、これを利用してファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道 (NBF) の概念を導入した。不動点の安定多様体と不安定多様体の構造、共鳴領域の構造ならびに系の可逆性を利用して NBF の存在を証明した。また FNB の出現順序関係も導いた。最後に我々の結果とポイランドの定理との関係を議論した。

1 序

円筒面のねじれ写像で出現するノンバーコフ型周期軌道 (NB) の性質はポイランドによって詳しく調べられた [1]。ノンバーコフ型周期軌道の性質は今日においても調べられている [2-7]。研究の中心となる動機は、ノンバーコフ型周期軌道の性質を利用すると位相的エントロピーの下界が決定できるということにある。それ故にノンバーコフ型周期軌道の出現順序は、パラメーターを変えたときの系の複雑さの発展を与える。これは 1 次元写像におけるカオスの発展とシャルコフスキーの順序関係 [8] に似ている。

我々はすでに標準写像ならびに単調ねじれ写像において、回転数 $1/q$ ($q \geq 3$) で特徴付けられる対称ノンバーコフ型周期軌道 (SNB) の出現順序関係を導いた [6,7]。次の問題は回転数の制限をはずして SNB の出現順序関係を導くことである。しかしながら回転数を一つに決めてもパラメーターを増加すると同じ回転数をもつ SNB がサドルノード分岐で次から次へと生じる。それ故に同じ回転数 p/q をもつ SNB を区別する性質を導入し軌道の特徴付ける必要がある。

この論文では、下記の方法で周期軌道の特徴付ける。有理数 p/q を 2 つの有理数 p_1/q_1 と p_2/q_2 に分割する。これらの 2 つの有理数は p/q のファレイ区間の端点 (§2.8) とする。ただし $p_1/q_1 < p_2/q_2$ である。円筒面において SNB は共鳴チェーン $\langle \mathcal{Z}_{p_1/q_1} \rangle$ の各領域に 1 つ軌道点をもち、共鳴チェーン $\langle \mathcal{Z}_{p_2/q_2} \rangle$ の各領域に 1 つ軌道点をもつと仮定する。第 2 節で共鳴領域と共鳴チェーンを定義する。これらの条件を満たす SNB をファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道 (NBF) と呼ぶ。NBF の出現順序関係から系の複雑さの発展が理解できるであろう。

系の複雑さを記述する位相的エントロピーの下界を計算する手法が 2 つある。一つが組みひもを利用する方法である。NB 軌道の順序に関する情報から組みひもを構成する。組みひもから線路算法 (Train track algorithm) を利用して遷移行列 M を構成する [9,10]。またブラウ (Brau) 行列 M_B を構成する [11,12]。 M または M_B の固有値の絶対値の最大値を λ_{\max} とすると、位相的エントロピー h_{top} は、 $h_{\text{top}} \geq \ln \lambda_{\max}$ と得られ

る. 第 2 の方法は不安定多様体と安定多様体の構造をもとに遷移行列を計算する方法であり, トレリス法と呼ばれている [13]. 2 つの方法はともにニールセン–サーストン理論 [14] を具体的に実践する手法である.

この論文の目的は, 標準写像において NBF の存在を証明することと, NBF の出現順序関係を確立することにある. これらの結果をまとめて定理 1 として提示する. 円筒面 $(x \in [0, 2\pi), y \in \mathbf{R})$ 上での標準写像 T は下記のように定義されている.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $f(x) = a \sin x$ であり, a は正のパラメーターである. 原点 $P = (0, 0)$ はサドルであり, もう一つの不動点 $Q = (\pi, 0)$ は $a > 4$ において楕円点であり, $0 < a < 4$ においては反転型のサドルである.

シュテルン–ブロコ木 [15] において $p/q \in (0, 1)$ の既約分数に制限した木である削除シュテルン–ブロコ木 (TSBT) を利用して定理 1 を述べる. 定理を述べる前に我々が設定している仮定について述べる.

仮定.

- (I) 各バーコフサドルの安定多様体と不安定多様体は横断的に交差している.
- (II) 各回転数に対してバーコフ周期点の個数は 2 個である.

(I) に関する注意.

バンガード (参考文献 [16] の定理 (5.8)) は, 隣同士にあるバーコフサドルはヘテロクリニック軌道で連結されていることを証明している. これは同じサドル軌道の隣同士の点はホモクリニック軌道で連結されているを意味する. この連結はスムーズな連結である可能性がある. しかし, サドルがバーコフの不安定領域にあるならば, または円筒面を分離する最後の KAM 曲線が存在しなければ, スムーズな連結は不可能である. この場合は, 安定多様体と不安定多様体は横断的に交差しているか非横断的に交差しているかのどちらかである. どちらの場合でも安定多様体と不安定多様体の弧で共鳴領域 (図 2 を見よ) と呼ばれる領域を構成できる. よって記述を簡単にするために仮定 (I) を置く.

(II) に関する注意.

一般にバーコフ周期軌道は $2n$ ($n \geq 1$) 存在する. 我々は対称バーコフサドルの安定多様体と不安定多様体で構成された共鳴領域の中の点の振る舞いを考える. 仮定 (I) より, 共鳴領域をこれらのサドルでの安定多様体と不安定多様体で構成できる. よって非対称なバーコフ周期軌道 (たとえ存在するとしても) の存在を忘れることができる. 記述を簡単にするために仮定 (II) を置く.

2 つの周期軌道の強制関係を記述する記号として \rightarrow を用いる. つまり $O_1 \rightarrow O_2$ は, 「周期軌道 O_1 の存在は周期軌道 O_2 の存在を導く」ことを意味する.

定理 1. 標準写像において下記の主張が成立する.

- (i) $p/q \in (0, 1)$ を削除シュテルン–ブロコ木の任意の要素とする. p/q を回転数として持つファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道が存在するパラメーター a が存在する.

(ii) $p/q \in (0, 1)$ を削除シュテルン–ブロコ木の要素とする. p/q の左の子を p_l/q_l とし, 右の子を p_r/q_r とする. このとき下記の順序関係が成立する.

$$p/q\text{-NBF} \rightarrow p_l/q_l\text{-NBF}, p_r/q_r\text{-NBF}.$$

(iii) $n \geq 2$, $q \geq 5$ と $p \neq 1$, $q - 1$ が満たされているとする. このとき下記の 2 つの順序関係が成立する.

$$1/n\text{-NBF} \rightarrow p/q\text{-NBF}$$

$$(n - 1)/n\text{-NBF} \rightarrow p/q\text{-NBF}.$$

(iv) h_{top}^B をポイランド型組みひも $\sigma_1^{-2}\rho_q^p$ ($q \geq 3$) を用いて得られた位相的エントロピーの下界とする. $p/q\text{-NBF}$ から計算される位相的エントロピーの下界は h_{top}^B 以上である.

第 2 節では証明で利用する数学的道具を準備する. 第 3 節では定理 1 の証明を行う. 第 4 節では定理 1 とポイランドの定理並びに KAM 曲線の崩壊との関係を議論する.

2 数学的道具

2.1 回転対称性と対称線

標準写像は 2 つの対合 H と G の積で記述される [17].

$$T = H \circ G, \quad (2)$$

$$G : (x, y) \mapsto (-x, y + f(x)), \quad (3)$$

$$H : (x, y) \mapsto (y - x, y). \quad (4)$$

証明等は円筒面 $S^1 \times \mathbf{R}$ の持ち上げである普遍被覆面 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ で行う. 写像 (1) を普遍被覆面に持ち上げる (これは $\text{mod } 2\pi$ を削除することに相当する). 同様に点と対称線も持ち上げる. 不動点 $P_{0,0}$ と $Q_{0,0}$ は, $P_{i,0} = (2i\pi, 0)$ と $Q_{i,0} = (\pi + 2i\pi, 0)$ に持ち上げられる. 同様の記号 $P_{i,j} = (2i\pi, 2j\pi)$ と $Q_{i,j} = (\pi + 2i\pi, 2j\pi)$ も用いる. 対合の不動点の集合を対称線という. 普遍被覆面での G と H 対称線の表記は下記ようになる.

$$S_G(k) : x = k\pi, \quad (5)$$

$$S_H(k) : y = 2(x - k\pi). \quad (6)$$

ここで $k \in \mathbf{Z}$. 対称線 $S_G(k)$ の $y > 0$ の部分を $S_G^+(k)$ と書き, $y < 0$ の部分を $S_G^-(k)$ と書く. 同様の表記として $S_H^\pm(k)$ も用いる.

標準写像は上下の対称性を記述する別の 2 つの対合の積でも記述できる. よって写像は 2 重対称である. この論文では式 (3) と (4) で記述される可逆性を主に利用する. 上下の対称性を記述する対合を利用する代わりに, 上下の対称性を記述する対合と左右の対称性を記述する対合の積として得られる下記の回転対称性を利用する.

$$R_{m\pi, n\pi} : (x, y) \mapsto (2m\pi - x, 2n\pi - y) \quad (7)$$

ここで m と n は整数. この性質を点 $(m\pi, n\pi)$ に関する次数 2 の回転対称性と呼ぶ.

2.2 周期軌道

この論文では普遍被覆面における軌道の2つの表現を考える。点 z の軌道は $O(z)$ は下記のようになる。

$$O(z) = \{\dots, T^{-1}z, z, Tz, \dots\}. \quad (8)$$

一方、点 z の拡張軌道 $EO(z)$ は下記のようになる。

$$EO(z) = \{T^k z + (2\pi l, 0) : k, l \in \mathbf{Z}\}. \quad (9)$$

点 z が下記の条件を満たすとき p/q -周期点と呼ばれる。

$$T^q z - (2\pi p, 0) = z. \quad (10)$$

p/q -周期点は p/q -周期軌道の点である。この p/q は回転数と呼ばれる。この論文では p は非負であるとし、 q は正の整数とする。つまり回転数がゼロ以上の周期軌道を考える。

p/q -周期軌道の点 z を考えよう。1周期の軌道 $T^i z$ ($i = 0, \dots, q-1$) のうち2点が対称線上にある場合、この軌道を対称周期軌道と呼ぶ。 $S_G^+(k)$ または $S_H^+(k)$ から出発する対称周期軌道を扱う。ただし $k \in \mathbf{Z}$ である。次に対称 p/q -周期軌道の定義を与える。これらを利用して対称周期軌道を探索することが可能になる。

定義 2.2.1

(i) z が $S_G^+(k_1)$ にあり、 $T^n z$ ($n \geq 1$) が $S_H(k_2)$ にあるとする。途中の点 $T^i z$ ($0 < i < n$) は対称線上にないとする。このとき周期は $q = 2n-1$ で回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n-1)$ である。次に z が $S_H^+(k_1)$ にあり、 $T^n z$ ($n \geq 1$) が $S_G(k_2)$ にあるとする。途中の点 $T^i z$ ($0 < i < n$) は対称線上にないとする。このとき周期は $q = 2n+1$ で回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n+1)$ である。

(ii) z が $S_G^+(k_1)$ にあり、 $T^n z$ ($n \geq 1$) が $S_G(k_2)$ にあるとする。途中の点 $T^i z$ ($0 < i < n$) は対称線上にないとする。このとき周期は $q = 2n$ で回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n)$ である。次に z が $S_H^+(k_1)$ にあり、 $T^n z$ ($n \geq 1$) が $S_H(k_2)$ にあるとする。途中の点 $T^i z$ ($0 < i < n$) は対称線上にないとする。このとき周期は $q = 2n$ で回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n)$ である。

次数2の回転対称性より性質 2.2.2 が得られる。

性質 2.2.2

- (i) p/q -周期軌道 ($0 < p/q < 1$) が点 $(0, y_0) \in S_G(0)$ ($0 < y_0 < 2\pi$) を持つならば、 $(q-p)/q$ -周期軌道 ($0 < p/q < 1$) が点 $(0, 2\pi - y_0) \in S_G(0)$ を持つ。
- (ii) p/q -周期軌道 ($0 < p/q < 1$) が点 $(x_0, 2x_0) \in S_H(0)$ ($0 < x_0 < \pi$) を持つならば、 $(q-p)/q$ -周期軌道 ($0 < p/q < 1$) が点 $(2\pi - x_0, 2\pi - 2x_0) \in S_H(1)$ を持つ。

2.3 バーコフ周期軌道とノンバーコフ周期軌道

拡張軌道 $EO(z)$ に含まれる任意の 2 点 r と s に対して下記の関係が成立するとき、 $EO(z)$ は単調軌道または順序保存軌道と呼ばれる。

$$\pi_x(r) < \pi_x(s) \rightarrow \pi_x(Tr) < \pi_x(Ts) \quad (11)$$

ここで $\pi_x(r)$ は r の x 座標を表す。以下では r の y 座標を $\pi_y(r)$ で表す。拡張軌道の中で式 (11) を満たさない 2 点 r と s が存在するならば $EO(z)$ は非単調軌道または順序非保存軌道と呼ばれる。軌道が周期軌道でかつ単調軌道である場合、バーコフ周期軌道と呼ぶ。軌道が周期軌道でかつ非単調軌道である場合、ノンバーコフ周期軌道と呼ぶ。

回転数が p/q のバーコフ周期軌道を p/q -バーコフ周期軌道と呼び、 p/q -B と略記する。標準写像を含む単調ねじれ写像ではそれぞれの回転数 p/q に対して少なくとも 2 個の p/q -B が存在することが知られている。これは有名なポアンカレ-バーコフの定理 [18,19] による。ポアンカレとバーコフは共に写像の単調性は仮定していないことに注意しておく。標準写像ではそれぞれの回転数に関して 2 つの対称 p/q -B が存在する。更に円筒面の $S_G(1)$ に周期点を持つ対称 p/q -B はミニマックス軌道である [20]。この軌道は楕円点であるか反転型のサドルである。周期 q が偶数の場合、このミニマックス軌道は円筒面の $S_G(0)$ にも点を持つ。つまり偶数周期の場合、 p/q -B は楕円型軌道である。周期が奇数の場合、円筒面の $S_G(0)$ に点を持つ周期軌道はサドル軌道である。

標準写像の相平面における軌道の振る舞いを図 1 に示した。 $S_G(1)$ 上に楕円点があり、その周りを島が取り囲んでいる様子が観測される。ミニマックス軌道のそれぞれの点は共鳴領域 (§2.4 と §2.6 で定義される) に内部に存在する。対称線または対称線の像が任意のミニマックス軌道の点を通過していることに注意しよう。回転数が同じバーコフ型サドルとバーコフ型楕円点はひとつのリプシッツ曲線上に整列している。

2.4 安定多様体と不安定多様体ならびに共鳴領域

サドル $P_{0,0} = (0,0)$ は、2 つの安定多様体のブランチと 2 つの不安定多様体のブランチを持つ。右上方に出ている不安定多様体のブランチを $W_u^1(P_{0,0})$ とし、左下方に出ている不安定多様体のブランチを $W_u^2(P_{0,0})$ とする。右下方からサドルに入る安定多様体のブランチを $W_s^2(P_{0,0})$ とし、左上方からサドルに入る安定多様体のブランチを $W_s^1(P_{0,0})$ とする。図 2 にこれらのブランチを描いてある。図ではサドルの名称を省いてある。つまり W_u^1 は $W_u^1(P_{0,0})$ を意味している。 $P_{0,0}$ から出発する不安定多様体 $W_u^1(P_{0,0})$ は $S_G^+(1)$ と u で交差し、次に $S_H^+(1)$ と v で交差する。一方、 $W_s^1(P_{1,0})$ は $W_u^1(P_{0,0})$ と v と u で交差する。両者の u における横断的交差は参考文献 [21] で証明されている。同様の交差が u' と v' でも生じている。

4 つの弧 $[P_{0,0}, v]_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[v, P_{1,0}]_{W_s^1(P_{1,0})}$, $[P_{1,0}, v']_{W_s^2(P_{1,0})}$ と $[v', P_{0,0}]_{W_s^2(P_{0,0})}$ で囲まれている開領域を $\mathcal{Z}_{0/1}(Q_{0,0})$ とする。この領域を $Q_{0,0}$ の共鳴領域と呼ぶ。

次に 2 つのホモクリニックローブ $U_{0,0}^u$ と $V_{0,0}^u$ を定義しよう。 $U_{0,0}^u$ は $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u^1(P_{0,0})}$ と $\Gamma_s = [v, Tu]_{W_s^1(P_{1,0})}$ で囲まれた開領域とする。次に $V_{0,0}^u$ は $\gamma_u =$

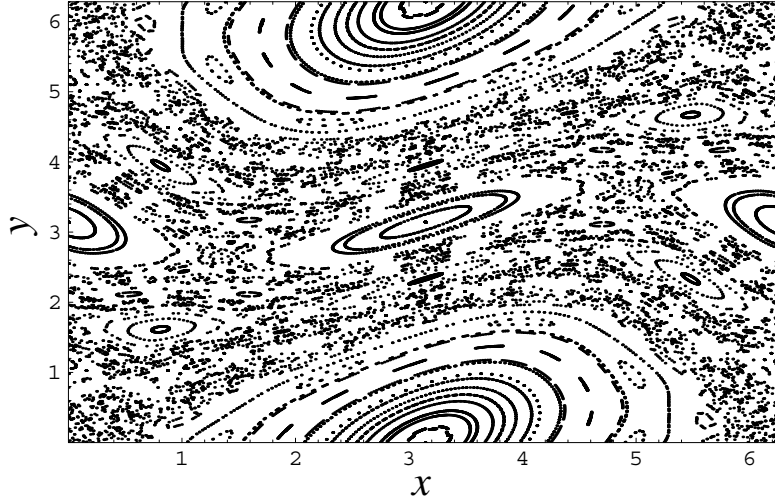


図1 $a = 1$ の場合の相平面における軌道. $x = \pi$ にあるバーコフ周期軌道の点はミニマックス軌道の点である.

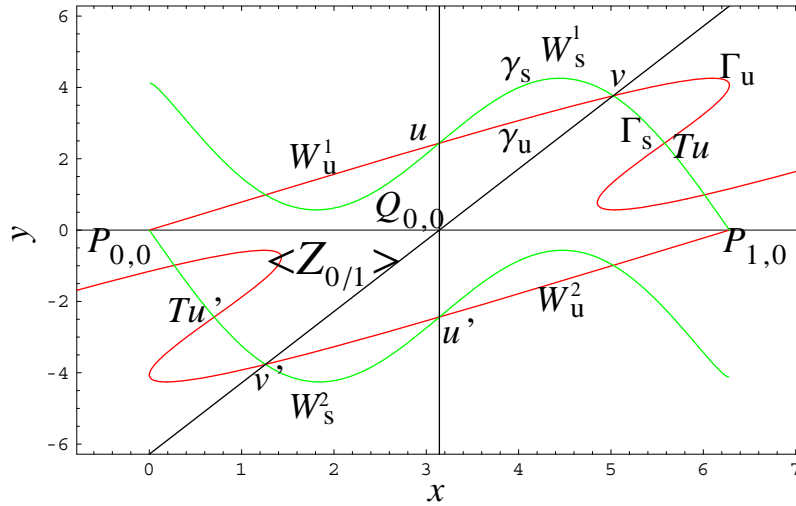


図2 共鳴領域 $\langle Z_{0/1} \rangle$ の定義. W_u^1 と W_s^2 はサドル $P_{0,0}$ の安定多様体と不安定多様体で, W_u^2 と W_s^1 はサドル $P_{1,0}$ の安定多様体と不安定多様体 ($a = 2.92$).

$[u, v]_{W_u^1(P_{0,0})}$ と $\gamma_s = [u, v]_{W_s^1(P_{1,0})}$ で囲まれた開領域とする. また $U_{0,0}^d = R_{\pi,0} U_{0,0}^u$ と $V_{0,0}^d = R_{\pi,0} V_{0,0}^u$ が $y < 0$ の領域に存在する.

これらのホモクリニックローブを普遍被覆面に持ち上げる. 相平面の構造は x 方向に $2\pi m$ (m : 整数) だけシフトしても不変である. また y 方向に $2\pi n$ (n : 整数) だけシフトしても不変である. 上下左右方向に移動した安定多様体と不安定多様体を $W_u^1(P_{i,j})$, $W_u^2(P_{i,j})$, $W_s^1(P_{i,j})$, $W_s^2(P_{i,j})$ と書くことにする. 同様に共鳴領域 $\langle Z_{0/1} \rangle(Q_{0,0})$ を上下左右に移動した領域を $\langle Z_{j/1} \rangle(Q_{i,j})$ と書く. ホモクリニックローブ $U_{0,0}^u, V_{0,0}^u, U_{0,0}^d, V_{0,0}^d$ を上下左右に移動したものを, $U_{i,j}^u, V_{i,j}^u, U_{i,j}^d, V_{i,j}^d$ とする.

最後に定理 1 で利用するヘテロクリニック接触状況を紹介します. この状況は図 3 に描かれている. 安定多様体の弧 γ_s と $W_u^2(P_{1,1})$ が接触している状況である. $S_H(1)$ に

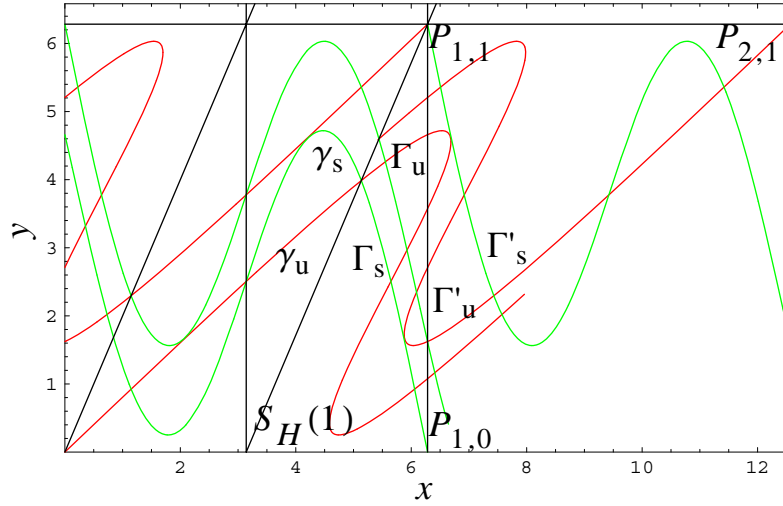


図3 定理1で利用するヘテロクリニック接触状況. この状況は $a = 3.36 \dots$ で出現する.

関する対称性より Γ_u と $W_s^2(P_{1,1})$ も接触している. $(2\pi, \pi)$ に関する回転対称性より, Γ'_u と $W_s^1(P_{1,0})$ が接触していることが分かる. 不安定多様体の弧 Γ_u と $S_G^+(2)$ が交差し, Γ'_u と $S_G^+(2)$ が交差していることにも注意しよう. この状況は $a = 3.36 \dots$ で出現する. このような図3の2次の接触状況があるパラメーターで生じることは参考文献 [6] の第II節で議論されている.

2.5 対称線上の区間の定義

定理1の証明で利用する対称線上の区間を定義する. ここで \mathcal{T} を x 方向に 2π だけ平行移動する変換とする.

区間 I_k^u と I_k^d の定義. $k \geq 1$ とする.

$$I_k^d = T^{-k} V_{0,0}^u \cap S_G^+(0), \quad (12)$$

$$I_k^u = \mathcal{T}^{-k+1} T^{k-1} U_{0,1}^d \cap S_G^+(0) = R_{0,\pi} I_k^d. \quad (13)$$

区間 J_k^u と J_k^d の定義. $k \geq 0$ とする.

$$J_k^d = T^{-k} V_{0,0}^u \cap S_H^+(0), \quad (14)$$

$$J_k^u = \mathcal{T}^k T^{-k} V_{0,1}^d \cap S_H^+(1) = R_{\pi,\pi} J_k^d. \quad (15)$$

I_k^d の存在は参考文献 [6] で示されている (§3.3.1. も見よ). 上記の区間の例を図4示してある.

2つの区間の強制関係を定義する. 区間 I の存在が別の区間 J の存在を導くとき, $I \rightarrow J$ と書く. 下記の関係が成立する.

$$J_k^{d,u} \rightarrow I_{k+1}^{d,u} \quad (k \geq 0), \quad (16)$$

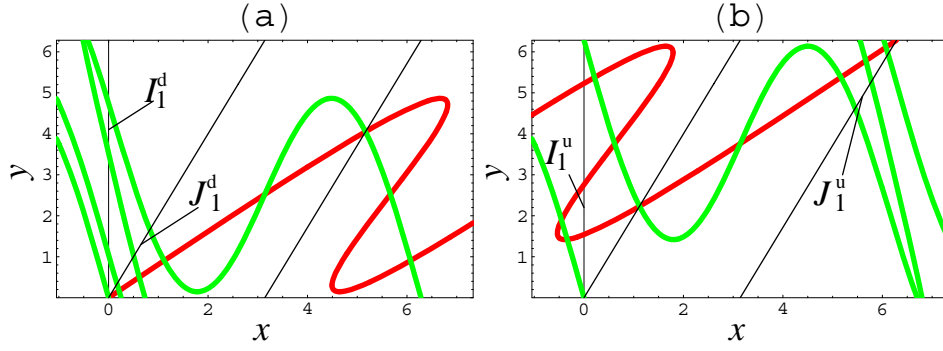


図4 対称線上の区間. (a) I_1^d と J_1^d の定義. (b) I_1^u と J_1^u の定義. $a = 3.5$.

$$I_k^{d,u} \rightarrow J_k^{d,u} \quad (k \geq 1), \quad (17)$$

$$I_k^{d,u} \rightarrow I_{k'}^{d,u} \quad (k' > k \geq 1), \quad (18)$$

$$J_k^{d,u} \rightarrow J_{k'}^{d,u} \quad (k' > k \geq 0). \quad (19)$$

式 (16) を導く. 関係 $T^{-1}J_k^d = GJ_k^d$ より, J_k^d の逆像は $x < 0$ の領域にある. これは $T^{-k-1}V_{0,0}^u$ が $S_G^+(0)$ と交差することを意味する. よって I_{k+1}^d の存在が示された. 次の関係 (17) は区間の構成から導かれる. 残りの関係 (18) と (19) はラムダ補題 [22] より導かれる.

2.6 共鳴チェーン

既約分数 p/q ($p \geq 0, q > 0$) が与えられているとする. ここでは p/q -バーコフサドルの安定多様体と不安定多様体で構成された p/q -Birkhoff 楕円軌道の共鳴領域の共鳴チェーン $\langle \mathcal{Z}_{p/q} \rangle$ を定義する. p/q -Birkhoff 楕円軌道を $O(z_0) = \{\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots\}$ とし, $O(z'_0) = \{\dots, z'_{-1}, z'_0, z'_1, \dots\}$ を p/q -バーコフサドル軌道とする. q の偶奇性によって z_0 と z'_0 の位置は後で決める. それぞれの点 z_i における共鳴領域 $\mathcal{Z}_{p/q}(z_i)$ を最初に決定する. 次にこれらを集めて共鳴チェーン

$$\langle \mathcal{Z}_{p/q} \rangle = \{\mathcal{Z}_{p/q}(z)\}_{z \in EO(z_0)}$$

を作る. §2.4 で共鳴領域 $\mathcal{Z}_{0/1}(Q_{0,0})$ は既に定義したので, $\mathcal{Z}_{j/1}(Q_{i,j})$ を集めて共鳴チェーン $\langle \mathcal{Z}_{0/1} \rangle = \{\mathcal{Z}_{0/1}(Q_{i,0})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が得られる. これを y 方向に 2π だけ平行移動すると $\langle \mathcal{Z}_{1/1} \rangle = \{\mathcal{Z}_{1/1}(Q_{i,1})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が得られる.

2.6.1 q が偶数の場合

$S_G(0)$ にある周期軌道点 z_0 をとる. z_0 の左右隣にある p/q -バーコフサドル z'_{-1} と z'_0 を選ぶ. ただし $\pi_x(z'_{-1}) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z'_0)$ が満たされているとする. z'_{-1} と z'_0 の安定多様体と不安定多様体を利用して $\mathcal{Z}_{p/q}(z_0)$ を構成する (図5を見よ. $p/q = 1/4$ の場合が描かれている). これは仮定 (I) より可能である. 領域 $\mathcal{Z}_{p/q}(z_0)$ は境界が曲線で構成された四辺形である. 四辺形で $S_G(0)$ を挟んだ反対側の頂点に z'_{-1} と z'_0 が

ある. 領域の構成方法より, この領域は G に関して対称であることが分かる. つまり $GZ_{p/q}(z_0) = Z_{p/q}(z_0)$ が成り立つ. 次に $Z_{p/q}(z_1) = HGZ_{p/q}(z_0) = HZ_{p/q}(z_0)$ が得られる. また $Z_{p/q}(z_{-1}) = T^{-1}Z_{p/q}(z_0) = GHZ_{p/q}(z_0) = GZ_{p/q}(z_1)$ が成立する. G と H の対称性を交互に利用して共鳴領域 $Z_{p/q}(z_{q/2})$ が得られるまで繰り返す. そうすると $Z_{p/q}(z_0)$ の右に $q/2$ 個の共鳴領域が得られ, 左側に $(q-1)/2$ 個の共鳴領域が得られる. 左から右へと共鳴領域 $Z_{p/q}(z_i)$ ($i = -q/2+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, q/2$) が並ぶ. これらを左右に $2\pi n$ ($n \neq 0$: 整数) 平行移動することで繋がった共鳴領域のチェーン $\langle Z_{p/q} \rangle$ ができる.

$\langle Z_{p/q} \rangle$ に関して重要な性質について述べる. $Z_{p/q}(z_{-q/2+1})$ 中の任意の点 r に対して, $T^k r \in Z_{p/q}(z_{-q/2+k+1})$ ($0 \leq k \leq q-1$) が成立する. これは共鳴領域の構成方法より明らかである.

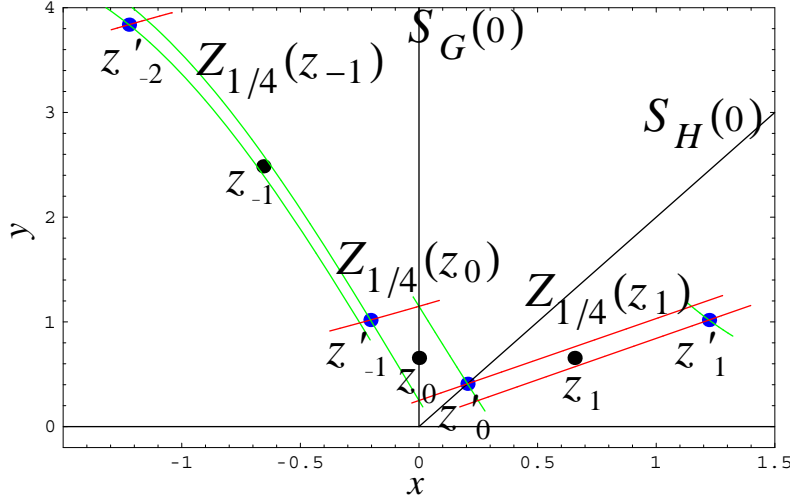


図 5 共鳴チェーン $\langle Z_{1/4} \rangle$ の構成方法. ここで z_{-1}, z_0, z_1 はバーコフ型楕円周期点で, $z'_{-2}, z'_{-1}, z'_0, z'_1$ はバーコフ型サドル周期点.

2.6.2 q が奇数の場合

対称線 $S_H(0)$ の上にバーコフ型楕円周期点 z_0 をとる. また $\pi_x(z'_0) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z'_1)$ を満たすように p/q -バーコフ型サドルの軌道点 z'_0 と z'_1 をとる. ただし z'_0 と z'_1 は, z_0 の左右にあり最近接の点とする. z'_0 と z'_1 の安定多様体と不安定多様体を利用して共鳴領域 $Z_{p/q}(z_0)$ を構成する (図 6 に $p/q = 1/3$ の場合を描いた). 領域 $Z_{p/q}(z_0)$ は $S_H(0)$ に 2 点をもつ四辺形である. これら 2 点は z_0 を挟んで反対側にある. また残りの 2 点は z'_0 と z'_1 である. この領域は H に関して対称である. つまり $Z_{p/q}(z_0) = HZ_{p/q}(z_0)$ である. $Z_{p/q}(z_{-1}) = GZ_{p/q}(z_0)$ より領域 $Z_{p/q}(z_{-1})$ が得られる. 次に $Z_{p/q}(z_1) = HZ_{p/q}(z_{-1})$ より領域 $Z_{p/q}(z_1)$ が得られる. この手順を繰り返し $Z_{p/q}(z_{-1}), Z_{p/q}(z_1), \dots, Z_{p/q}(z_{-(q-1)/2}), Z_{p/q}(z_{(q-1)/2})$ が順に得られる. 得られた領域を左右に平行移動することで, 拡張軌道 $EO(z_0)$ の属するそれぞれの点 r に対する $Z_{p/q}(r)$ が得られる. 最終的に $\langle Z_{p/q} \rangle = \{Z_{p/q}(r)\}_{r \in EO(z_0)}$ が得られる. 以上で $r' \in EO(z'_0)$ で繋がった共鳴チェーンが構成できた. 任意の点 $r \in Z_{p/q}(z_{-(q-1)/2})$ 対

して, $T^k r \in \mathcal{Z}_{p/q}(z_{-(q-1)/2+k})$ ($0 \leq k \leq q-1$) が成立することに注意する.

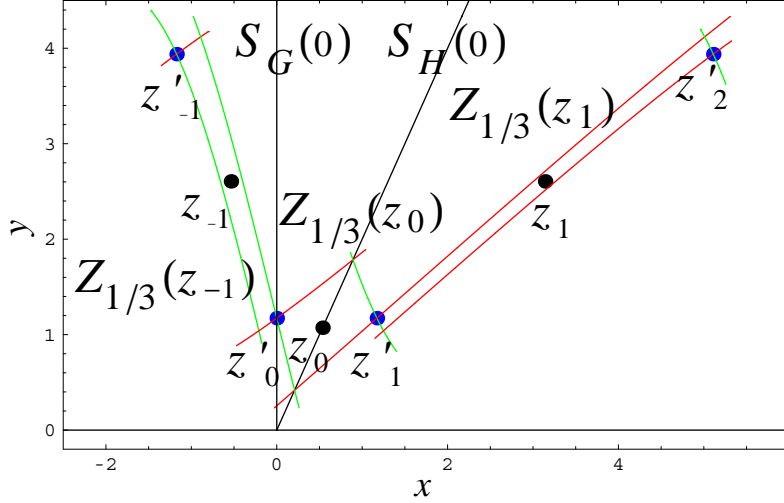


図 6 共鳴チェーン $\langle \mathcal{Z}_{1/3} \rangle$ の構成. ここで z_{-1}, z_0, z_1 はバーコフ型楕円周期点で $z_{-1}^{\prime}, z_0^{\prime}, z_1^{\prime}, z_2^{\prime}$ はバーコフ型サドル周期点.

2.7 バーコフ型周期軌道の点が存在しない領域

この節では、「バーコフ型周期軌道の点が存在しない領域がある」ことを証明する. 最初に安定多様体と不安定多様体の交差点と接触点を定義する (図 7 を見よ). 図 3 で描かれた状況を考える. この接触状況が出現する a の値を a^* とする. $W_u^1(P_{0,0})$ は点 δ で安定多様体 $W_s^2(P_{0,1})$ と接している. これは $S_G^+(1)$ と α で交差し (図 2 では u), $S_H^+(1)$ と ϵ で交差している (図 2 では v). また $W_u^1(P_{0,0})$ は $W_s^2(P_{1,1})$ と β' で接触し, $W_s^1(P_{1,0})$ と α' で交差している. 不安定多様体 $W_u^2(P_{2,1})$ は安定多様体 $W_s^1(P_{1,0})$ と β で接触し, かつ $W_s^2(P_{0,1})$ と γ で交差している. 不安定多様体 $W_u^2(P_{2,1})$ は $W_s^2(P_{1,1})$ と α'' で交差し, かつ $W_s^1(P_{1,0})$ と δ' で接している. また $W_s^2(P_{1,1})$ と γ' で交差している. 不安定多様体 $W_u^1(P_{1,0})$ は $W_s^2(P_{1,1})$ と δ'' で接している.

次にこれらの点を利用して 4 つの開領域 D_1, D_2, D_3, D_4 を定義する. $[\gamma, \delta]_{W_s^2(P_{0,1})}$, $[\delta, \alpha]_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[\alpha, \gamma]_{S_G^+(1)}$ で囲まれた開領域を D_1^l とする. また $[\alpha, \beta]_{W_s^1(P_{1,0})}$, $[\beta, \gamma]_{W_s^2(P_{1,1})}$, $[\gamma, \alpha]_{S_G^+(1)}$ で囲まれた開領域を D_1^r とする. $D_1^l \cup D_1^r$ を D_1 とする. 同じく $[\beta', \alpha']_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[\alpha', \gamma']_{TS_G^+(1)}$, $[\gamma', \beta']_{W_s^2(P_{1,1})}$ で囲まれた開領域を D_2^l とする. また $[\delta', \gamma']_{W_u^2(P_{2,1})}$, $[\gamma', \alpha']_{TS_G^+(1)}$, $[\alpha', \delta']_{W_s^1(P_{1,0})}$ で囲まれた開領域を D_2^r とする. $D_2^l \cup D_2^r$ を D_2 とする. $[P_{1,1}, \beta]_{W_u^2(P_{1,1})}$, $[\beta, \epsilon]_{W_s^1(P_{1,0})}$, $[\epsilon, P_{1,1}]_{S_H^+(1)}$ で囲まれた開領域を D_3^l とする. また $[\epsilon, \beta']_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[\beta', P_{1,1}]_{W_s^2(P_{1,1})}$, $[P_{1,1}, \epsilon]_{S_H^+(1)}$ で囲まれた開領域を D_3^r とする. ここで $D_3 = D_3^l \cup D_3^r$ を定義する. $[P_{1,0}, \alpha'']_{S_H^+(2)}$, $[\alpha'', \delta'']_{W_u^2(P_{2,1})}$, $[\delta'', P_{1,0}]_{W_s^1(P_{1,0})}$ で囲まれた開領域を D_4^l とする. $[P_{1,1}, \delta'']_{W_u^1(P_{1,0})}$, $[\delta'', \alpha'']_{W_s^2(P_{1,1})}$, $[\alpha'', P_{1,1}]_{S_H^+(2)}$ で囲まれた開領域を D_4^r とする. 最後に $D_4 = D_4^l \cup D_4^r$ を定義する.

これらの領域ならびに点の間には対称性が存在する. 重要な関係を示すことにする. 対称線 $S_H(1)$ に関して $D_2 = HD_1$ と $D_3 = HD_3$ が成立する. また $D_4 = R_{2\pi} D_3$ も成立する. 点に関して $\gamma = R_{\pi} \alpha$ と $\delta = R_{\pi} \beta$ が成立する. また $\alpha' = H\alpha$, $\beta' = H\beta$,

$\delta' = H\delta, \gamma' = H\gamma$ が成立する. $\gamma' = T\gamma$ と $\alpha' = T\alpha$ であることに注意する. $\alpha'' = R_{2\pi,\pi}\epsilon$ と $\delta'' = R_{2\pi,\pi}\beta$ が成立し, $\delta'' = \delta + (2\pi, 0)$ である.

$[P_{0,0}, \alpha]_{W_4^1(P_{0,0})}$ のグラフの傾きは正であり, 2階微分は負である [23]. $[P_{1,1}, \gamma]_{W_4^2(P_{1,1})} = R_{\pi,\pi}[P_{0,0}, \alpha]_{W_4^1(P_{0,0})}$ より, $[P_{1,1}, \gamma]_{W_4^2(P_{1,1})}$ のグラフの傾きは正で2階微分も正である. $[\alpha, P_{1,0}]_{W_3^1(P_{1,0})}$ のグラフの2階微分は負で, $[\gamma, P_{0,1}]_{W_3^2(P_{0,1})}$ のグラフの2階微分は正である. これらの事実より, D_1 の x 座標の最大値は $\pi_x(\beta)$ であり, 最小値は $\pi_x(\delta)$ である.

$a > a^*$ では, $\beta, \delta, \beta', \delta', \delta''$ の各点は2つに分かれる. β の場合, 分かれた2点を β^* と β^{**} としよう. ただし $\pi_x(\beta^*) < \pi_x(\beta^{**})$ であ. 同様に他の点に関しても2点を定義できる. $a > a^*$ では, 領域 D_1 の4つのコーナーは $\alpha, \beta^*, \gamma, \delta^{**}$ である. また領域 D_2 の4つのコーナーは $\alpha', \beta^{**}, \gamma', \delta^*$, 領域 D_3 の4つのコーナーは $P_{1,1}, \beta^{**}, \epsilon, \beta^*$ であり, 領域 D_4 の4つのコーナーは $P_{1,0}, \delta^{**}, \alpha'', \delta'^*$ である.

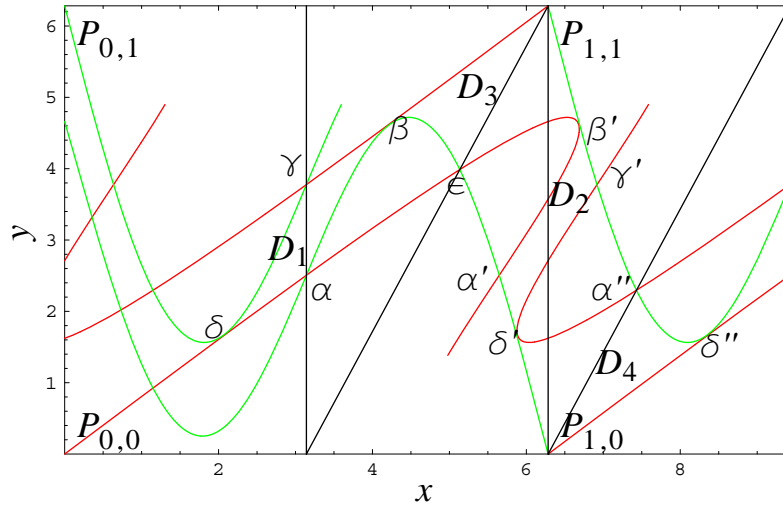


図7 4つの開領域 D_i ($i = 1, \dots, 4$) の定義.

以下の議論で軌道に関する下記の性質が必要になる.

命題 2.7 $\pi_x(z) < \pi_x(Gz)$ かつ $\pi_x(T^{-1}Gz) \leq \pi_x(T^{-1}z)$ が成立するならば, $EO(z)$ と $EO(Gz)$ は非単調軌道である.

証明は簡単である. 命題の仮定は, 2つの軌道のオーブリーグラフは何度も交差することを導く [16,24]. よって少なくとも一つの軌道は非単調軌道である. 対称性より $EO(Gz)$ が非単調軌道であるなら $EO(z)$ も非単調軌道である.

命題 2.7 の仮定を満たす点 z と Gz の集合を「(垂直) 非単調領域」と名づける. 仮定は下記のように表現できる.

$$2x + f(x) \geq 2\pi. \quad (20)$$

ここで $0 < x < \pi$ ($x = \pi_x(z)$) とする.

$a \geq 2\pi$ では $\{(x, y) | \pi/2 \leq x < \pi\}$ の任意の点は条件 (20) を満たす. $S_G(1)$ に関する対称性より領域 $\{(x, y) | \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, x \neq \pi\}$ は非単調領域に含まれる. 非単調領域はすべての非単調点の集合の部分集合であることに注意しておく.

$a \geq a^*$ では領域 $D_1 \cup D_2$ にはパーコフ型周期軌道は存在しない. ここで $a = 2\pi (> a^*)$ としよう. $y = -f(x)$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) のグラフは $y = 2\pi$ と $t = (3\pi/2, 2\pi)$ で接触する. 安定多様体 $W_s^1(P_{1,0})$ の弧 γ_s は, $\{(x, y) | \pi \leq x \leq 2\pi\}$ の $y = -f(x)$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) で分割される上方の成分にある (図 8 を見よ). $W_u^2(P_{1,1})$ の弧と $y = -f(x)$ は区間 $\pi \leq x \leq 2\pi$ において 2 点で交差する. s を左の交差点とする. 上記の事実より下記の関係が得られる.

$$\pi < \pi_x(\beta) < \pi_x(s) < 3\pi/2, \quad \pi > \pi_x(\delta) > \pi/2 \quad (21)$$

ここで $\pi_x(\beta) + \pi_x(\delta) = 2\pi$.

不等式 (21) より, $a \geq 2\pi$ では領域 D_1 は非単調領域に含まれることが分かる. パーコフ型周期軌道は出現することも消滅することもないことと, $a \geq a^*$ では領域 D_1 が定義可能であることより, 領域 D_1 は $a \geq a^*$ においてパーコフ型周期軌道点を含まないことが導かれる. $D_2 = TD_1$ より, D_2 も同様にパーコフ型周期軌道点を含まない.

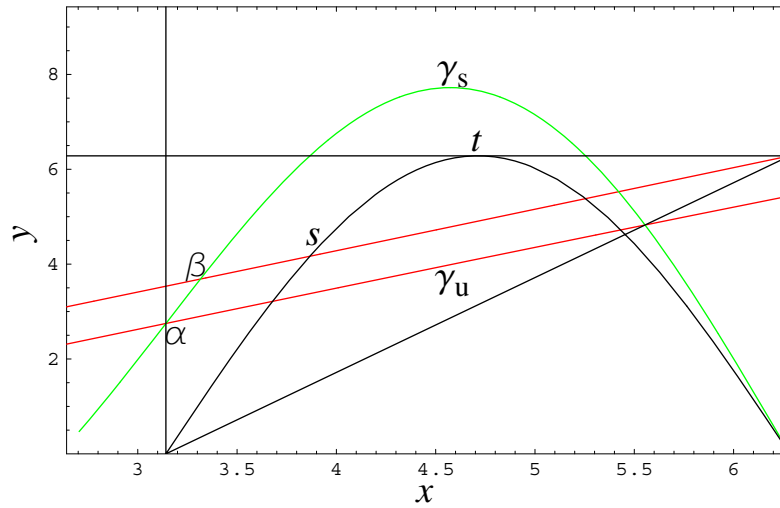


図 8 3つの点 s, β, α の関係. ここで s は $W_u(P_{1,1})$ と $y = -f(x)$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) のひだりの交差点. 曲線 $y = -f(x)$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) は $y = 2\pi$ と t で接している.

後の節ではたびたび $z \in (\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ に対する共鳴領域 $Z_{p/q}(z)$ を扱う. ただし $z \in (\alpha', \gamma')_{TS_G^+}$ でかつ $z \in D_2$ である. すべての p/q -パーコフ周期軌道 ($0 < p/q < 1$) は $\text{clos}(D_3)$ と $\text{clos}(D_4)$ に点をもつ. 当然 $\text{clos}(D_3)$ と $\text{clos}(D_4)$ の未来と過去の像の中にも点をもつ. z の右側の最近接サドルは $\text{clos}(D_4^l)$ にあり, 左側の最近接サドルは $\text{clos}(D_3^r)$ にある. よって $Z_{p/q}(z)$ は四角形の形状をとるがその短い2つの辺は D_3 と D_4 の中にある.

$a = a^*$ においてすべての既約分数 p/q に対する共鳴チェーン $\langle Z_{p/q} \rangle$ を構成しよう. 共鳴領域 $Z_{p'/q'}(\zeta)$ と $T^m Z_{p/q}(z_0)$ が図 9(a) のように交差していると仮定する. a の値を a^* より減少させる. $Z_{p'/q'}(\zeta)$ と $T^m Z_{p/q}(z_0)$ の交差は図 (b) で描いたように外れる. しかし図 (c) のように外れることはない. なぜならこのような外れ方をすると, あるパラメーターでサドルと別のサドルの不安定多様体が交差するという矛盾が生じるからである.

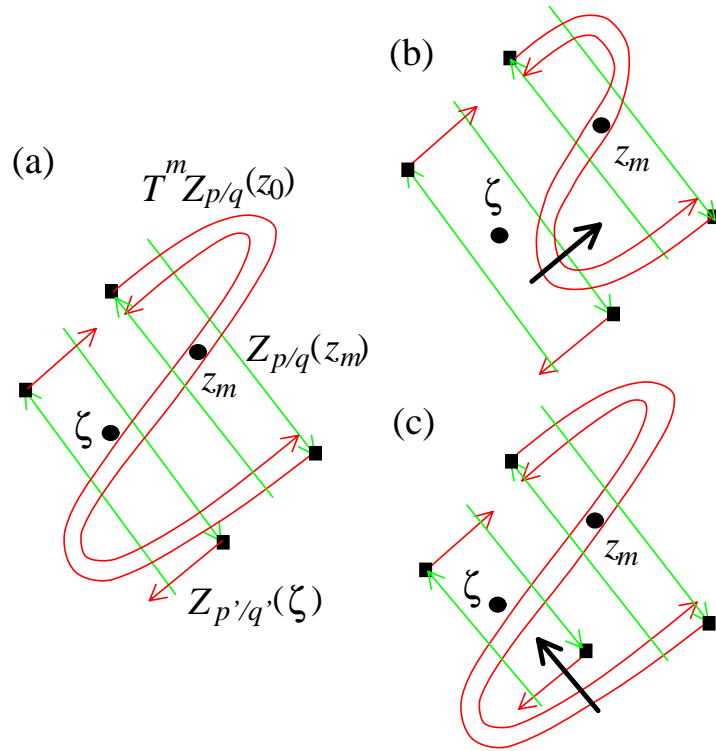


図9 $Z_{p'/q'}(\zeta)$ と $T^m Z_{p/q}(z_0)$ の分離は図 (b) ように生じる. 図 (c) のように生じることはない.

最後に, $\text{clos}(D_3 \cup D_4)$ で定義される領域についてコメントする. ここで記号 $\text{clos}(D)$ は集合 D の閉包を表す. $\text{clos}(D_3 \cup D_4)$ の面積はパラメーターを大きくするにつれてゼロに近づく. これは相平面のほとんどの領域がノンバーコフ軌道点で占められることを意味している.

2.8 シュテルン-ブロコ木, ファレイ分割とファレイ区間

シュテルン-ブロコ木 (SBT) (図 10 を見よ) は, ファレイ区間とか NNF の出現順序関係を記述するとき便利である. 区間 $(0, 1)$ の既約分数を考える. つまり SBT 中の $[0/1, 1/1]$ の部分を利用することになる. ここで両端の $0/1$ と $1/1$ を削除して削除シュテルン-ブロコ木 (TSBT) が得られる. TSBT は $1/2$ を根とする二分木である. 各親ノードは 2 つの枝に別れ, それぞれ子ノードも 2 つの枝に分かれる.

$1/2$ が存在する階を 1 階とする. 2 階には $1/3$ と $2/3$ が存在する. $n (\geq 1)$ -階には 2^{n-1} 個の既約分数が存在する. 「通りがけ順」にノードをなぞると, TSBT の既約分数は昇順にソートされている. 「通りがけ順」とは, ノードの左の部分木を先になぞり次に右の部分木をなぞる方法である. 図 10 においては, $0/1, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 3/8, 2/5, 3/7, 1/2, \dots, 1/1$ とソートされている. ただし $0/1$ と $1/1$ を追加した. SBT において既約分数の自然な順番が保存されている.

p_1/q_1 と p_2/q_2 ($p_1/q_1 < p_2/q_2$) から新しい分数 p/q は下記の作用で決まる.

$$p_1/q_1 \oplus p_2/q_2 = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2) = p/q \quad (22)$$

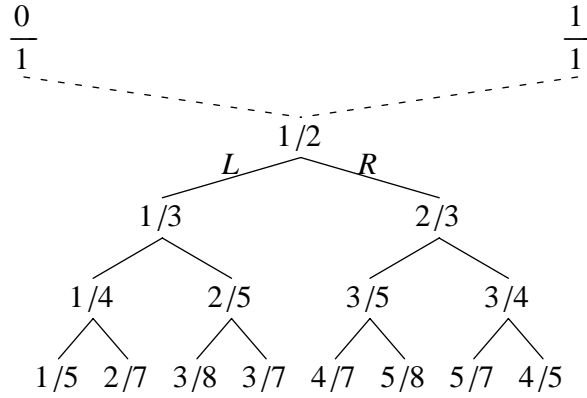


図 10 $[0/1, 1/1]$ におけるシュテルン–ブロコ木. L と R は部分木を指定する作用.

ここで SBT において p_1/q_1 は p/q 左上方にあり, p_2/q_2 は右上方にある. 親 $1/3$ は 2 つの子 $1/4$ と $2/5$ をもつ. ここで $1/4 = 0/1 \oplus 1/3$, $2/5 = 1/3 \oplus 1/2$ である. この手順ですべての既約分数は順に SBT に配置される. 次に p/q のファレイ区間 $\text{FI}[p/q]$ を下記のように定義する.

$$\text{FI}[p/q] = [p_1/q_1, p_2/q_2] \quad (p_1/q_1 < p_2/q_2) \quad (23)$$

ここで下記の関係が成立する.

$$p_2q_1 - p_1q_2 = 1. \quad (24)$$

既約分数 p/q をファレイ区間の端点にある 2 つの分数で分割する. これを p/q のファレイ分割と呼び下記のように記す.

$$\text{FP}[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}. \quad (25)$$

2.9 ファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道

§2.6 で構成された共鳴領域と §2.8 で導入された TSBT を利用して, 回転数 p/q のファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道 (NBF) を定義しよう.

ファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道の定義.

p/q のファレイ分割を $\text{FP}[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ とする. 普遍被覆面の軌道を円筒面に射影して考える. このとき対称 p/q -NB が $\langle \mathcal{Z}_{p_1/q_1} \rangle$ の各成分に 1 個の軌道点をもちかつ $\langle \mathcal{Z}_{p_2/q_2} \rangle$ の各成分に 1 個の軌道点をもつならば, この周期軌道を「ファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道」と呼ぶ. 簡単に p/q -NBF と記す.

NBF の数値計算による例を紹介する. 回転数 $2/5$ のファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道 $2/5$ -NBF を図 11 に示した. ここで $\eta_0 \in S_G^+(0)$, $\eta_3 \in S_H^+(2)$, $\eta_{3'} \in S_H^+(0)$ ならびに $\eta_{5'} \in S_G^+(2)$ であることに注意しよう. また $\pi_x(\eta_{4'}) < \pi_x(\eta_1)$ と $\pi_x(\eta_{5'}) > \pi_x(\eta_2)$ の関係より, この軌道がノンバーコフ周期軌道の条件を満たしていることが分かる. 円筒面で考えると $\langle \mathcal{Z}_{1/2} \rangle$ の各成分の中に軌道点が 1 点存在し, $\langle \mathcal{Z}_{1/3} \rangle$ の各成分の中に軌道点が 1 点存在する. 以上よりこの軌道が $2/5$ -NBF であることが示された.

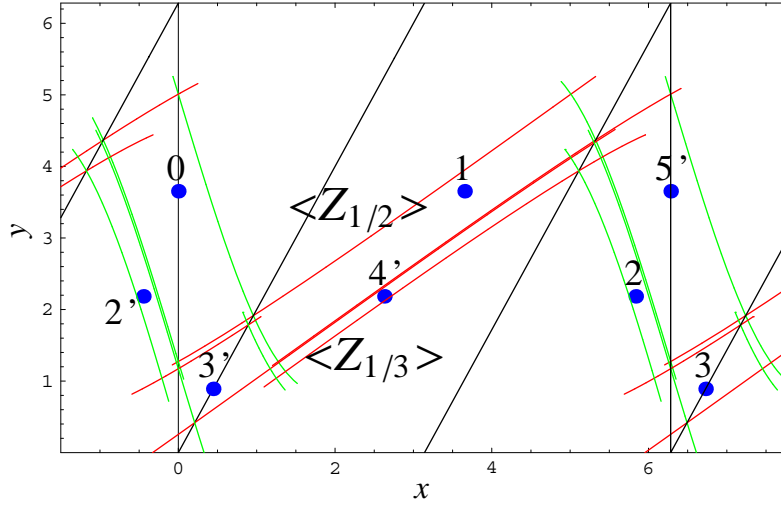


図 11 回転数 $2/5$ のファレイ型対称ノンバーコフ周期軌道 $2/5$ -NBF. 数字 i は軌道点 η_i を意味する. 円筒面では η_2 と η'_2 は同じ点である. 普遍被覆面では, $\dots \Rightarrow \eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \eta_2 \Rightarrow \eta_3 \Rightarrow \dots$ の軌道と $\dots \Rightarrow \eta'_2 \Rightarrow \eta'_3 \Rightarrow \eta'_4 \Rightarrow \eta'_5 \Rightarrow \dots$ の軌道は異なる.

3 定理 1 の証明

証明を行う前に, 証明をアウトラインを簡単に紹介する. そのために 2 節で説明した写像の重要な性質を再度あげておこう.

P-1. $\langle Z_{p/q} \rangle$ の任意の点は, 少なくとも $\langle Z_{p/q} \rangle$ の周期 q だけはそのチェーンの中に存在する.

P-2. 異なった回転数の共鳴領域は図 12 で描いたように配置されている. これらの共鳴領域の短い辺のひとつは D_3 にあり, もうひとつの辺は D_4 にある.

TSBT の任意の要素 p/q を選び, そのファレイ分割 $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ を考える. 最初に $Z_{p_2/q_2}(z_0)$ に含まれる対称線の区間 l と $Z_{p_1/q_1}(\zeta_0)$ に含まれる別の対称線の区間 l' を定義する. p_2/q_2 -バーコフ楕円軌道の初期点 z_0 は l の上にあり, p_1/q_1 -バーコフ楕円軌道の初期点 ζ_0 は l' の上にある. $T^m l$ と $T^{-n} l'$ の交点は図 7 の D_2, D_3 または D_4 にある. ここで写像回数である $m (> 0)$ と $n (> 0)$ は初期点 z_0 と ζ_0 の位置による. 写像回数 m と n より l と l' の位置が分かる. これより交点として得られた点の回転数が得られる. つまり定理 1(i) における p/q -NBF の存在が示される. TSBT における p/q の位置の情報と **P-2** を利用して, NBF 間の順序関係を決定できる. これが定理 1(ii) と 1(iii) である. 最後に p/q -NBF の組みひも $\beta(p/q - \text{NBF})$ を構成し, この組みひもがポイランド型組みひもであることを示す. ポイランドの公式を利用して位相的エントロピーの下界を求める (定理 1(iv)).

定理 1(i) と 1(ii) の証明を分けて行う. §3.1 では $p \neq 1$ と $p \neq q - 1$ の場合の証明を行い, §3.2 では $p = 1$ と $p = q - 1$ の場合の証明を行う. §3.3 では定理 1(iii) の証明を

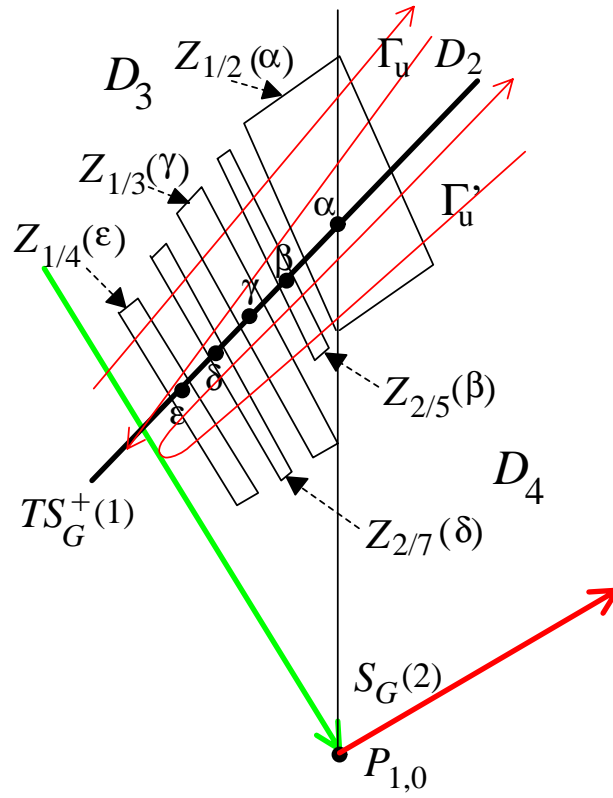


図 12 R 共鳴領域 $Z_{1/2}(\alpha)$, $Z_{2/5}(\beta)$, $Z_{1/3}(\gamma)$, $Z_{2/7}(\delta)$ ならびに $Z_{1/4}(\epsilon)$ の関係. ここで α は $1/2$ -パーコフ楕円点で, β は $2/5$ -パーコフ楕円点である. 以下同様である.

行い, §3.4 では定理 1(iv) の証明を行う.

3.1 $p \neq 1$ と $p \neq q - 1$ の場合における p/q -NBF の存在証明と順序関係の証明

図 3 の状況において $p \neq 1$ と $p \neq q - 1$ の場合における p/q -NBF の存在証明を行う.

性質 3.1 $a = a^*$ (図 3) において, Γ_u と Γ'_u は $(\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ (図 7) に対して縦方向に勢ぞろいしているすべての共鳴領域の中に進入している.

証明. $TS_G^+(1)$ の区間 $(\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ に対して縦方向に勢ぞろいしている共鳴領域の構造を確認する. p/q -パーコフ楕円点は $(\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ にある. ただし $0 < p/q < 1$ が成立しているとする (図 7 と図 12 を参照のこと). これらの楕円点に対する共鳴領域は四辺形の形をして互いにほぼ平行に勢ぞろいしている. 2.7 節で説明したように四辺形の上部の辺は D_3 にあり, 下の辺は D_4 にある. Γ_u はこれらの共鳴領域に侵入する. なぜなら Γ_u の弧 $[\epsilon, \beta']$ は D_3 の境界であり, Γ'_u の弧 $[\beta', \alpha']$ は D_2 の境界であるからである. 回転対称性から Γ'_u がこれらの共鳴領域に進入していることが得られる. (Q.E.D).

我々の証明方法を理解してもらうために, 最初に $2/5$ -NBF の存在証明を行う. この

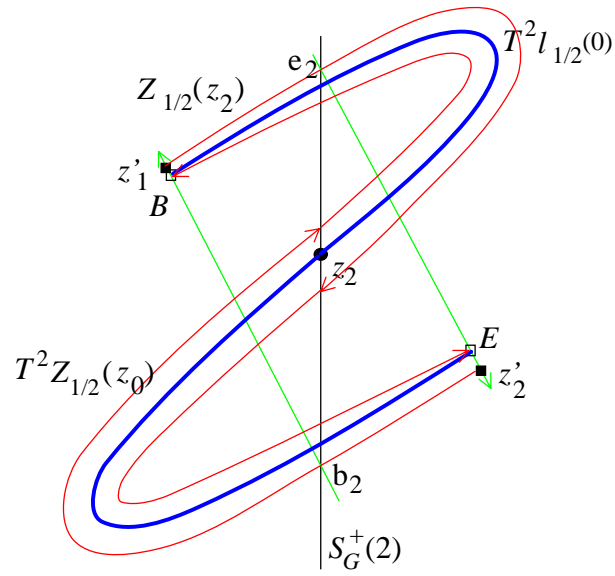


図 14 $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ と $Z_{1/2}(z_2)$ の関係. $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ の中に $T^2 l_{1/2}(z_0)$ (太い線) が存在している.

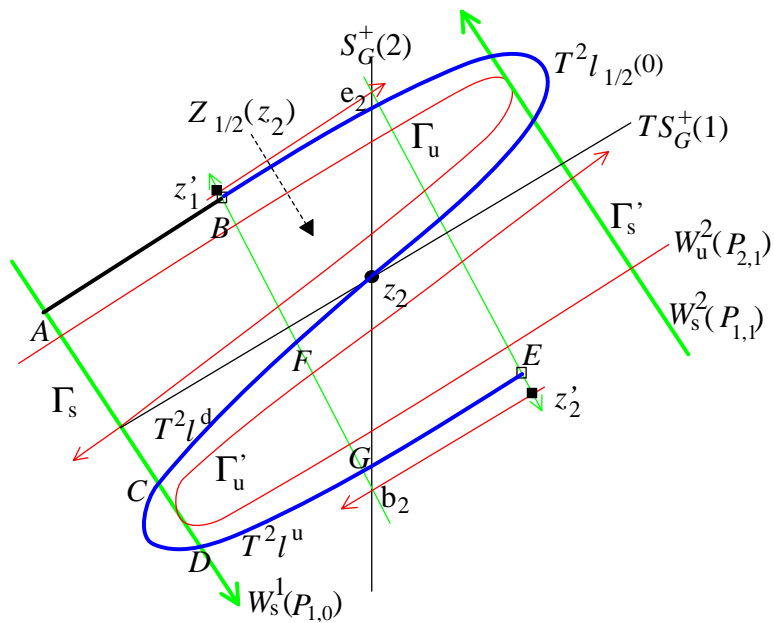


図 15 $T^2 l_{1/2}(0), \Gamma_u$ ならびに Γ'_u の関係.

たい。この条件を満たす点として z_0 以外の点が存在するかどうか知りたい。この目的のために $T^2\mathcal{Z}_{1/2}(z_0)$ と $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ の幾何学的な配置を調べる。 $z_2 = T^2z_0$ よりこれらの領域は重なっていることは明らかである。更に $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ のコーナーである z'_1 と z'_2 も両者が共有している。なぜなら z'_{-1} と z'_0 は $\mathcal{Z}_{1/2}(z_0)$ のコーナーにあり、そして $z'_1 = T^2z'_{-1}$ かつ $z'_2 = T^2z'_0$ が成り立つからである。弧 $[z'_{-1}, \mathbf{e}]_{W_u}$ は z'_{-1} の不安定多様体の弧である。 $T^2[z'_{-1}, \mathbf{e}]_{W_u}$ は弧 $[z'_1, \mathbf{e}_2]_{W_u}$ の \mathbf{e}_2 を越えて伸びる。ここで \mathbf{e}_2 は $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ の上部のコーナーにある。 \mathbf{e} は z'_0 の安定多様体の上の点でもあるから、 $E = T^2\mathbf{e}$ は z'_2 の近くの $[\mathbf{e}_2, z'_2]_{W_s}$ 上にある。以上より $T^2[z'_{-1}, \mathbf{e}]_{W_u}$ の全体像を得るために \mathbf{e}_2 と E を結ぶ。

$[\mathbf{e}_2, E]_{W_u}$ の振る舞いを正確に描くために、 $\Gamma_u \subset W_u^1(P_{0,0})$ の形状を考える。我々は既に Γ_u が $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ の左下方から右上方へと突き抜けていることを示している。これは $\Gamma'_u = R_{2\pi, \pi}\Gamma_u$ が $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ の右上方から左下方へと突き抜けていることを意味している。ここで Γ'_u は $W_u^2(P_{2,1})$ の弧である。つまり Γ_u と Γ'_u は $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ を5つの互いに重ならない領域に分割する。 Γ_u を境界とするホモクリニックローブ $U_{0,0}^u$ に含まれる領域と、ホモクリニックローブ $R_{2\pi, \pi}U_{0,0}^u$ に含まれる領域がある。これらは領域を上から順に数えたとき2番目と4番目の領域にあたる。ここで B は第1領域にあり、 z_2 と F は第3領域にあり、 G と E は第5領域にある。 $T^2\mathcal{Z}_{1/2}(z_0)$ が第2と第4の領域と交差できないことは簡単に導かれる。よって $[\mathbf{e}_2, E]_{W_u}$ は $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ の第3と第5領域を通過する。 $T^2[z'_{-1}, \mathbf{e}]_{W_u} = [z'_1, E]_{W_u}$ は文字の「Z」の形状をしていることが分かる(図14を見よ)。同様に $T^2[z'_0, \mathbf{b}]_{W_u} = R_{2\pi, \pi}[z'_1, E]_{W_u}$ もZ形をしている。つまり $T^2\mathcal{Z}_{1/2}(z_0)$ 自身が、厚みを持ったZ形であることが分かる。 $T^2l_{1/2}(0)$ は $T^2\mathcal{Z}_{1/2}(z_0)$ の内部にあり、 B と E を結ぶ曲線であることより、 $T^2l_{1/2}(0)$ もZ形をしていることが分かる。更に $T^2l_{1/2}(0)$ は $z_2 = T^2z_0$ を通っていることに注意する。

弧 $[B, E] (=T^2l_{1/2}(0))$ は Γ_u と Γ'_u とは交差しないが、安定多様体 $W_s^1(P_{1,0})$ とは $C = T^2\mathbf{c}$ と $D = T^2\mathbf{d}$ で交差する。弧 $[B, C] (=T^2l^d)$ は弧 $[z'_1, \mathbf{b}_2]$ と第3領域にある点 F と交差する。 \mathbf{b}_2 は $\mathcal{Z}_{1/2}(z_2)$ の下のコーナーにあることに注意する。 T^2l^d は $TS_G^+(1)$ と z_2 で交差する。弧 $[D, E] (=T^2l^u)$ は $[z'_1, \mathbf{b}_2]$ と第5領域の G と交差する。これらは図15にまとめて描かれている。

次に1/3-パーコフ楕円軌道 $O(\zeta_0)$ を考える。ここで ζ_0 は対称線 $S_H^+(2)$ 上にあるとする。1/3-パーコフサドル軌道 $O(\zeta'_0)$ も考える。ここで ζ'_0 は対称線 $S_G^+(2)$ にあるとする。 $\zeta_{-1} \in (\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ より、共鳴領域 $\mathcal{Z}_{1/3}(\zeta_{-1})$ を Γ_u と Γ'_u が突き抜けている。結果として $\mathcal{Z}_{1/3}(\zeta_{-1})$ を $T^2l_{1/2}(0)$ が突き抜けていることが分かる(図15を参照せよ)。ここで $l_{1/3}(2)$ を $l_{1/3}(2) = S_H^+(2) \cap \mathcal{Z}_{1/3}(\zeta_0)$ として定義する(図16を見よ)。そうすると $T^{-1}l_{1/3}(2)$ は $\mathcal{Z}_{1/3}(\zeta_{-1})$ の左上のコーナーと右下のコーナーを結ぶ曲線であることが分かる(図17を見よ)。明らかに $T^{-1}l_{1/3}(2)$ と $T^2l_{1/2}(0)$ は2点で交差する。図17では、 $T^2l_{1/2}(0)$ の2つの弧 $[C, F]$ と $[D, G]$ が $T^{-1}l_{1/3}(2)$ と交差している。

上記で見つけた交点が2/5-NBFの軌道点であることを示す。図17の黒四角の2つの点はサドル・ノード分岐で生じる。一つの交点がノンパーコフ型の軌道であれば、一方も同様である。上方にある黒四角が領域 D_2 にある。これよりこれらの交点の軌道がノンパーコフ型であることが示された。回転数が2/5であることは定義2.2.1(i)を利用して示される。以上で軌道が2/5-NBであることが示された。証明の過程より、2/5-NBの軌道点 η_i ($i = 0, 1$) が $\mathcal{Z}_{1/2}(z_i)$ の中にあり、 η_i ($i = 2, 3$) が $\mathcal{Z}_{1/3}(\zeta_{i-3})$ の中に

ケース (1) を簡単に証明する. ケース (2), ケース (3) も同様に証明できる.

対称線 $S_G(-p_2 + 1)$ 上にある p_2/q_2 -バーコフ楕円点 z_0 をとる. 前節と同じように p_2/q_2 -バーコフサドル軌道 $O(z'_0)$ を考える. ここで $\pi_x(z'_{-1}) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z'_0)$ であるとする. この軌道から共鳴チェーン $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ を構成する. 対称線の区間 $l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1) = S_G(-p_2 + 1) \cap Z_{p_2/q_2}(z_0)$ を定義する. この区間が図 13 の区間 $l_{1/2}(0)$ に対応している. $l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1)$ に対しても図 13 の表現 **b** と **e** を借りる. 同様に $B = T^m \mathbf{b}$ と $E = T^m \mathbf{e}$ も利用する. **b** と **e** は安定多様体上にもあるから, その像である B と E はよりサドルに近づく. $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1)$ は B と E を結ぶ曲線である. 前節と同じ理由で $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1)$ は Γ_u と Γ'_u をさけて Z 形になる (図 18 を見よ). また弧 $[B, E] (= T^m l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1))$ と $TS_G^+(1)$ は z_m で交差する.

一方 p_1/q_1 -バーコフ楕円軌道 $O(\zeta_0)$ を考える. ただし ζ_0 は対称線 $S_H^+(p_1 + 1)$ にあるとする. 対称線の区間 $l_{p_1/q_1}(p_1 + 1) = S_H^+(p_1 + 1) \cap Z_{p_1/q_1}(\zeta_0)$ を定義する. この区間の逆像 $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1 + 1)$ は $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-n})$ の中にある. $TS_G^+(1)$ と $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1 + 1)$ は ζ_{-n} で交差する. 図 3 の状況では弧 $[B, E]$ と $W_s^1(P_{1,0})$ は 2 点で交差している. 交差点を C と D とする (図 18 を見よ). 結果として, 交差点 $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1) \cap T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1 + 1)$ が $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-n})$ の内部に存在する. これらの交差点は p/q -NB 軌道の点である. この軌道の周期 q は $q = 2(m + n) - 1 = q_1 + q_2$ で, 1 周期の間に $2p\pi$ ($p = p_1 + p_2$) だけ移動する.

$O(\eta_0)$ を p/q -NB の軌道としよう. ただし η_0 は $S_G(-p_2 + 1)$ にあるとする. 上で述べた議論より各 η_i ($i = 0, \dots, q_2/2$) は $Z_{p_2/q_2}(z_i)$ の内部にあり, かつ各 η_i ($i = q_2/2 + 1, \dots, q_2/2 + (q_1 + 1)/2$) は $Z_{p_1/q_1}(\zeta_j)$ ($j = -n, \dots, 0$) の内部にある. $S_H(p_1 + 1)$ に関する対称性より各 η_i ($i = q_2/2 + (q_1 + 3)/2, \dots, q_2/2 + q_1$) は $Z_{p_1/q_1}(\zeta_i)$ の内部にある. よって円筒面に射影された軌道点は共鳴チェーン $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ の各要素に 1 個あり, もう一つの共鳴チェーン $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の各要素にも 1 個ある. 以上で p/q -NBF に対する条件が満たされていることが示され, 証明が終了する. (Q.E.D.)

3.1.3 $p \neq 1$ と $p \neq q - 1$ の場合の定理 1(ii) の証明

p/q のファレイ分割を $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ とする. ここで親 p/q の左の子を p_l/q_l とし, 右の子を p_r/q_r とする. 定義より $p_l = p + p_1, q_l = q + q_1, p_r = p + p_2, q_r = q + q_2$ の関係を得る. p/q -NBF が存在している状況で p_l/q_l -NBF と p_r/q_r -NBF が存在していることを証明する. 3 つの場合に分けて証明を行う.

ケース (1): q_1 が奇数で q_2 が偶数の場合.

p_2/q_2 -バーコフ楕円軌道 $O(z_0)$ を考える. ただし初期点 z_0 は対称線 $S_G(-p_2 + 1)$ 上にあるとする. 次に p_1/q_1 -バーコフ楕円軌道 $O(\zeta_0)$ を考える. ただし初期点 ζ_0 は対称線 $S_H(p_1 + 1)$ 上にあるとする. $TS_G(1)$ 上に回転数 $p_1/q_1, p/q, p_2/q_2$ をもつバーコフ楕円点と並んでいる. 回転数の小さい軌道点が下部に大きい軌道点が上部にある. これらの点の共鳴領域はほぼ平行に並んでいて, これらは $TS_G(1)$ に対して縦方向に並んでいる (図 12 を見よ). p/q -NBF が存在するという仮定より下記の関係が得られる.

$$T^{q_2/2+1} l_{p_2/q_2}(-p_2 + 1) \cap T^{-(q_1-1)/2} l_{p_1/q_1}(p_1 + 1) \neq \emptyset. \quad (26)$$

交差点は周期軌道の点である. その周期は $2[(q_1 - 1)/2 + q_2/2 + 1] - 1 = q_1 + q_2$ である. 1 周期 ($q_1 + q_2$) の間に軌道は $2p\pi$ ($p = p_1 + p_2$) 移動する. $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-(q_1-1)/2})$ の中

にある式 (26) の交差点は p/q -NBF の軌道点であることが確認できた。

p/q -バーコフ楕円軌道 $O(\xi_0)$ を考えよう. ただし初期点 ξ_0 は対称線 $S_H(p+1)$ にあるとする. 共鳴領域 $Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ は $Z_{p_1/q_1}(\xi_{-(q_1-1)/2})$ と $Z_{p_2/q_2}(z_{q_2/2+1})$ に挟まれている. この事実より $T^{q_2/2+1}l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ は $Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ の中を突き抜けていて, $T^{-(q-1)/2}l_{p/q}(p+1) \in Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ と交差していることが分かる. 交差点の軌道は $S_G(-p_2+1)$ から出発し $S_H(p+1)$ に軌道点をもつので, その軌道の周期は $2(q_2/2+1+(q-1)/2)-1 = q+q_2$ で, 1 周期の間に $2(p+p_2)\pi$ だけ移動する. よってこの軌道は p_r/q_r -NBF である. 順序関係 p/q -NBF \rightarrow p_r/q_r -NBF が証明された. 図 19 は $p_1/q_1 = 1/3$ かつ $p_2/q_2 = 1/2$ の場合の状況を示している. つまりこの図は順序関係 $2/5$ -NBF \rightarrow $3/7$ -NBF の証明を与えている.

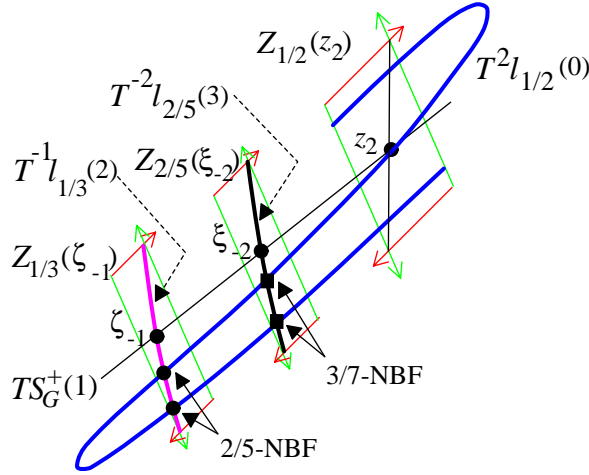


図 19 図は順序関係 $2/5$ -NBF \rightarrow $3/7$ -NBF の証明を与える. $2/5$ -NBF の存在を意味する 2 点 (黒丸) は $T^{-1}l_{1/3}^{(2)} \in Z_{1/3}(\xi_{-1})$ にある. $Z_{2/5}(\xi_{-2})$ の中の黒四角は $3/7$ -NBF の軌道点である.

p/q -NBF が存在するという仮定より下記の関係が得られる.

$$T^{(q_1+1)/2}l_{p_1/q_1}(-p_1+1) \cap T^{-(q_2/2-1)}l_{p_2/q_2}(p_2+1) \neq \emptyset$$

p_1/q_1 -バーコフ楕円軌道 $O(\zeta_0)$ を考える. ただし初期点 ζ_0 は対称線 $S_H(-p_1+1)$ にあるとする. 次に p_2/q_2 -バーコフ楕円軌道 $O(z_0)$ を考える. ただし初期点 z_0 は対称線 $S_G(p_2+1)$ にあるとする. 交差点の周期は $2((q_1+1)/2+q_2/2-1)+1 = q_1+q_2$ で, 1 周期の間に $2(p_1+p_2)\pi$ だけ移動する. $Z_{p_2/q_2}(z_{-q_2/2+1})$ の中の交差点は p/q -NBF の軌道点である.

p/q -バーコフ楕円軌道 $O(\xi_0)$ を考える. ただし初期点 ξ_0 は対称線 $S_H(p+1)$ にあるとする. この状況で $Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ の中の $T^{-(q-1)/2}l_{p/q}(p+1)$ は $T^{(q_1+1)/2}l_{p_1/q_1}(-p_1+1)$ と交差する. 交差点の軌道の初期点は $S_H(-p_1+1)$ にあり, $S_H(p+1)$ に点をもつ. よってこの軌道の周期は $2((q-1)/2+(q_1+1)/2) = q+q_1$ であり, 1 周期の間に $2(p+p_1)\pi$ だけ移動する. つまり交差点は p_l/q_l -NBF の軌道点である. 以上より順序関係 p/q -NBF \rightarrow p_l/q_l -NBF が証明された. 図 20 は $p_1/q_1 = 1/3$ かつ $p_2/q_2 = 1/2$ の

状況を示している. この図は順序関係 $2/5\text{-NBF} \rightarrow 3/8\text{-NBF}$ の証明を与えている.

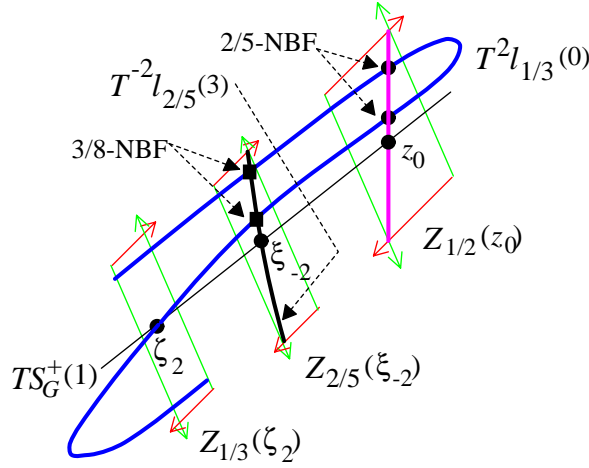


図 20 図は $2/5\text{-NBF} \rightarrow 3/8\text{-NBF}$ の証明を与える. $2/5\text{-NBF}$ の存在を意味する 2 点 (黒丸) は $l_{1/2}(2) \in \mathcal{Z}_{1/2}(z_0)$ にある. $\mathcal{Z}_{2/5}(\xi_{-2})$ の中の黒四角は $3/8\text{-NBF}$ の軌道点である.

ケース (2): q_1 が偶数で q_2 が奇数の場合.

$p/q\text{-NBF}$ が存在するという仮定より得られる関係

$$T^{(q_2+1)/2}l_{p_2/q_2}(-p_2+1) \cap T^{-(q_1/2-1)}l_{p_1/q_1}(p_1+1) \neq \emptyset$$

より, 順序関係 $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_r/q_r\text{-NBF}$ が導かれる. 同様に関係

$$T^{q_1/2+1}l_{p_1/q_1}(-p_1+1) \cap T^{-(q_2-1)/2}l_{p_2/q_2}(p_2+1) \neq \emptyset$$

より, 順序関係 $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_l/q_l\text{-NBF}$ が導かれる.

ケース (3): q_1 と q_2 が共に奇数の場合.

2 つの関係

$$T^{(q_2+1)/2}l_{p_2/q_2}(-p_2+1) \cap T^{-(q_1-1)/2}l_{p_1/q_1}(p_1+1) \neq \emptyset$$

$$T^{(q_1+1)/2}l_{p_1/q_1}(-p_1+1) \cap T^{-(q_2-1)/2}l_{p_2/q_2}(p_2+1) \neq \emptyset$$

より, 順序関係 $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_r/q_r\text{-NBF}$ と $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_l/q_l\text{-NBF}$ が導かれる. (Q.E.D.)

3.2 $p = 1$ と $p = q - 1$ の場合の証明

ここでは $p = 1$ と $p = q - 1$ の場合の定理 1(i) と 1(ii) の証明を行う. §3.2.1 では証明で利用するいくつかの関係について紹介する. §3.2.2 では順序関係 $1/q\text{-NBF} \rightarrow 1/(q +$

1)-NBF ($q \geq 2$) を証明する. 性質 2.2.2(ii) より, 順序関係 $(q-1)/q$ -NBF $\rightarrow q/(q+1)$ -NBF ($q \geq 2$) が得られる. §3.2.3 では, 順序関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 2/(2q-1)$ -NBF ($q \geq 3$) が証明される. 性質 2.2.2(ii) より, 順序関係 $(q-1)/q$ -NBF $\rightarrow (2q-3)/(2q-1)$ -NBF ($q \geq 3$) が導かれる.

$1/q$ -NBF の存在ならびに順序関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 1/(q+1)$ -NBF ($q \geq 2$) は既に参考文献 [6,7] で証明されている. §3.2.2 では, 完全を期すためにこれらに対する簡単な証明を行った.

3.2.1 いくつかの関係

回転数 $1/q$ -パーコフ楕円点に対する共鳴チェーン $\langle Z_{1/k} \rangle$ ($k \geq 0$) を導入する. 区間に対する下記の関係はほぼ自明である.

$$I_k^d \subset l_{1/(2k)}(0) \quad (k \geq 1), \quad (27)$$

$$I_k^u = R_{0,\pi} I_k^d \subset l_{(2k-1)/(2k)}(0) \quad (k \geq 1), \quad (28)$$

$$J_k^d \subset l_{1/(2k+1)}(0) \quad (k \geq 0), \quad (29)$$

$$J_k^u = R_{\pi,\pi} J_k^d \subset l_{(2k)/(2k+1)}(0) \quad (k \geq 0). \quad (30)$$

これらの関係に対していくつかの注意を述べる. γ_s が $S_H^+(0)$ と交差している状況を考える. γ_s は領域 $\pi < x < 2\pi$ にあり, 一方 $y = 2x$ は $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ の中を抜けていることより, 交差点は $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ にある. この事より関係 $J_0^d \subset l_{1/1}(0) [= Z_{1/1}(Q_{0,1}) \cap S_H(0)]$ を得る.

$k \geq 1$ に対して, 区間 $l_{1/(2k)}(0) = \langle Z_{1/(2k)} \rangle \cap S_G^+(0)$ を定義しよう. 同様に $k \geq 0$ に対して, 区間 $l_{1/(2k+1)}(0) = \langle Z_{1/(2k+1)} \rangle \cap S_H^+(0)$ を定義する. 図 3 の状況では, γ_s はすべての共鳴領域 $Z_{p/q}(\alpha)$ ($0 < p/q < 1$) を貫いている. ここで α は p/q -パーコフ楕円点で $S_G^+(1)$ 上にある. よって関係 $I_k^d \subset l_{1/(2k)}(0)$ ($k \geq 1$) と $J_k^d \subset l_{1/(2k+1)}(0)$ ($k \geq 1$) が得られる. 他の関係は回転対称性より導かれる.

3.2.2 順序関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 1/(q+1)$ -NBF ($q \geq 2$) の証明

γ_s はグラフ $y = -a \sin x$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) の上部にあることに注意しよう. $a = 4\pi$ ではグラフ $y = -a \sin x$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) と $S_H^+(0)$ は交差している. この状況で γ_s は $S_H^+(0)$ と交差している. これは $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ の中に J_0^d が存在することを意味している. 図 21(a) では J_0^d は $V_{0,0}$ の中にあるように描かれている. この状況では $T^{-1}J_0^d$ は領域 $x < 0$ にあるので, I_1^d が存在し I_k^d ($k \geq 2$) も存在する. $I_k^d \rightarrow J_k^d$ ($k \geq 1$) が成立することに注意しよう. I_k^d, J_k^d ならびに I_{k+1}^d の像が図 21(a) に描かれている T による 4 つの区間の像が図 21(b) に描かれている. TJ_0^d が $S_H^-(1)$ と交差していれば, 交差点は $1/2$ -NBF の軌道点である. 実際初期点 ζ_0 は $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ にあり, ζ_1 は $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ にある. よってこの軌道が NBF の条件を満たしていることが分かる.

TJ_0^d が $S_H^-(1)$ と交差していれば, $T^{k+1}I_k^d$ は必ず $S_H^-(1)$ と交差している. $k = 1$ として $1/3$ -NB の存在が示された. §3.2.1 で述べた性質より この軌道が NBF の条件を満たしているが分かる. つまり $1/2$ -NBF $\rightarrow 1/3$ -NBF が導かれた. $T^2I_1^d$ が $S_H^-(1)$ と交差していれば, $T^2J_1^d$ は必ず $S_H^-(1)$ と交差している. これは $1/3$ -NBF $\rightarrow 1/4$ -NBF を

導く. $T^2 J_1^d$ が $S_H^-(1)$ と交差していれば, $T^3 I_2^d$ は $S_H^-(1)$ と交差している. これは $1/4$ -NBF $\rightarrow 1/5$ -NBF を導く. この手順を繰り返すことで順序関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 1/(q+1)$ -NBF ($q \geq 2$) が導かれる. (Q.E.D.)

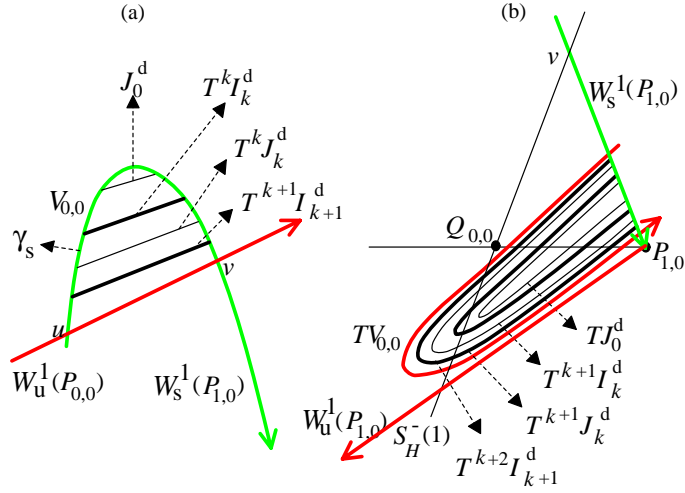


図 21 (a) ホモクリニックローブ $V_{0,0}$ 中の $J_0^d, T^k I_k^d, T^k J_k^d$, ならびに $T^{k+1} I_{k+1}^d$ の位置関係. (b) $TV_{0,0}$ 中における $T J_0^d, T^{k+1} I_k^d, T^{k+1} J_k^d$, ならびに $T^{k+2} I_{k+1}^d$ の位置関係.

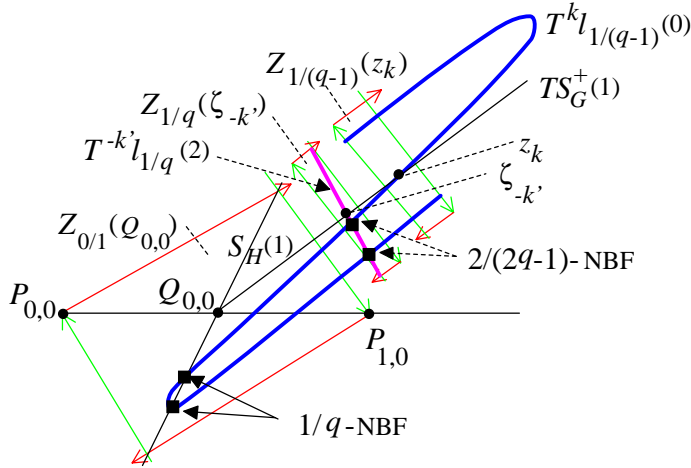


図 22 順序関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 2/(2q-1)$ -NBF を証明するための図.

3.2.3 順序関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 2/(2q-1)$ -NBF ($q \geq 3$) の証明

図 22 に $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ と $Z_{1/(q-1)}(z_k)$ の相対的な位置関係を示した. 弧 $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ を太い線で描いてある. $q (= 2k - 1)$ が奇数の場合を考える. $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ と $S_H^-(1)$ が交差しているならば, 交差点は $1/q$ -NBF の軌道点である. $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ は $Z_{1/(q-1)}(z_k)$ と $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ で挟まれている $Z_{1/q}(\zeta_{-k'})$ を通り抜けている. これは $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ と

$T^{-k'} l_{1/q}(2)$ ($k' = (q-1)/2$) との交差を導く. 交差点は $2/(2q-1)$ -NBF の軌道点である. 実際, 初期点 η_0 は $S_G^+(0)$ にあり, $\eta_{k+k'}$ は $S_H^+(2)$ にある. これより周期は $2((q+1)/2 + (q-1)/2) - 1 = 2q - 1$ である. 1 周期の間に軌道は 4π だけ移動する. §3.1.2 の議論を利用すれば, この軌道が NBF の性質を満たすことは確認できる. また q が偶数の場合, $k = q/2$ かつ $k' = q/2 - 1$ が成立する. 周期が $2(k+k') + 1 = 2q - 1$ で, 回転数が $2/(2q-1)$ であることが得られる. 詳細は省く. (Q.E.D.)

注意 3.2. $1/2$ -NBF が存在すれば, TSBT に含まれる既約分数 p/q ($\neq 1/2$) を回転数としてもつ p/q -NBF が存在する. 標準写像では $1/2$ -NBF が出現する臨界値は $a_c(1/2 - \text{NBF}) = 11.88 \dots$ である.

3.3 定理 1(iii) の証明

最初に証明の方針を述べる. §3.3.1 では, $1/n$ -NBF ($n \geq 2$) が存在すれば区間 I_1^d が存在することを証明する. §3.3.2 では, この事実から順序関係 $1/n$ -NBF $\rightarrow p/q$ -NBF を証明する. 同様の方法で順序関係 $(n-1)/n$ -NBF $\rightarrow p/q$ -NBF は証明できるので, 証明を省略する.

3.3.1 区間 I_1^d の証明

命題 3.3.1. $1/n$ -NBF ($n \geq 2$) が存在すれば, 区間 I_1^d は存在する.

証明. $1/n$ -NBF ($n = 2k - 1, k \geq 2$) が存在すると仮定する. n が偶数の場合の証明は, 同様の方法で行えるので証明を省く.

$1/n$ -NBF の初期点 z_0 を $l_{1/(n-1)}(0) \subset S_G^+(0)$ にとる. $O(z_0)$ は対称軌道であり回転数が $1/(2k-1)$ であるので, z_{k-1} は $V_{0,0}^u$ の中にあり, z_k は $S_H^-(1)$ 上にあり, そして z_{k+1} は $U_{0,0}^u$ の中にある. このような軌道は $a > 4$ でのみ可能である. なぜなら $0 < a \leq 4$ では, $TS_H^-(1) \cap S_H^+ = \emptyset$ が成立し, $TS_H^-(1)$ は $S_H(1)$ の左側に位置するためである.

一方, I_1^d が生じる臨界値が 4 より小さいことを証明する. そのために点 s_0 の 3 つの軌道点 $\{s_0 = (t, 0), s_1 = Ts_0 = (\pi/2, f(t)), s_2 = T^2s_0 = (2\pi, f(t) + a)\}$ を考える. ただし $0 < t < \pi$ である. $s_0 \in \mathcal{Z}_{0/1}(Q_{0,0})$ と $s_2 \notin \mathcal{Z}_{0/1}(Q_{0,0})$ が成立することは明らかである. よって $s_2 \in U_{0,0}^u$ が得られる. これは $\Gamma_u \cap S_G^+(2) \neq \emptyset$ を意味し, ひいては $T^{-1}V_{0,0}^u \cap S_G^+(0) \neq \emptyset$ を意味する. よって I_1^d の存在が証明される. この状況が生じるパラメーター値を計算する. 軌道の 3 点の情報より下記の 2 つの式が得られる.

$$t + f(t) = \pi/2, \quad a + f(t) = 3\pi/2. \quad (31)$$

これらの式より a を決める式が得られる.

$$F(a) = a - a \sin a - 3\pi/2 = 0. \quad (32)$$

$F(\pi) = -\pi/2 < 0$ かつ $F(5\pi/4) = (\pi/8)(5\sqrt{2} - 2) > 0$ が成立することより, 解は $\pi < a < 5\pi/4$ の区間にある. (Q.E.D.)

3.3.2 順序関係 $1/n$ -NBF $\rightarrow p/q$ -NBF の証明

命題 3.3.1 より, $1/n$ -NBF ($n \geq 2$) が存在する場合, 区間 I_1^d が存在する. よって I_1^d が存在するならば, $k \geq 3$ に対して $2/(2k-1)$ -NBF が存在することを証明すれば十分で

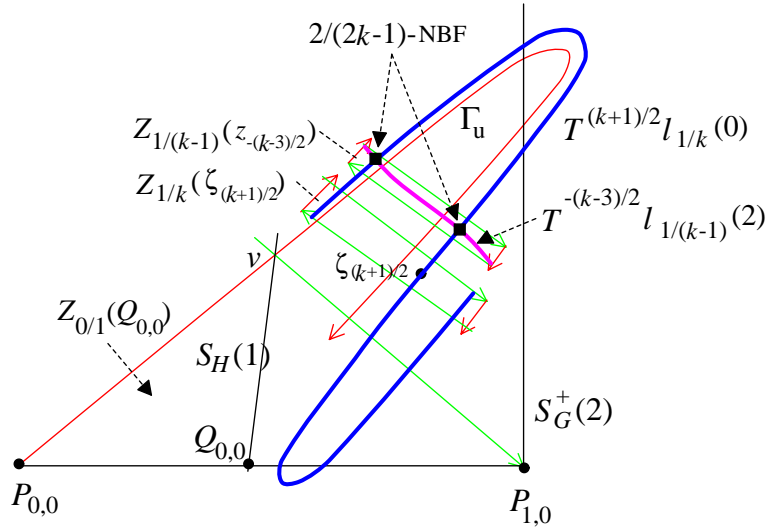


図 23 区間 I_1^d が存在しているので、 Γ_u は $S_G^+(2)$ と交差している。これより $\mathcal{Z}_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ の中で $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ と $T^{-(k-3)/2}l_{1/(k-1)}(2)$ が交差することが導かれる。

ある。定理 1(ii) より、 $2/(2k-1)$ -NBF が存在すればそのすべての子も存在する。それ故に、順序関係 $1/n$ -NBF $\rightarrow p/q$ -NBF が得られる。

n が奇数の場合を証明する。偶数の場合の証明も同様の方法で行えるので省く。 I_1^d が存在しているので、 Γ_u は $S_G^+(2)$ と交差している (図 23 を見よ)。これは $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ が $S_G^+(2)$ と交差していることを意味する。 $\mathcal{Z}_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ は $\mathcal{Z}_{1/k}(\zeta_{(k+1)/2})$ の上部にありかつ $\langle \mathcal{Z}_{1/2}(z) \rangle$ の下部にあるので、 $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ は $\mathcal{Z}_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ を通り抜けている。 $\mathcal{Z}_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ の中で $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ と $T^{-(k-3)/2}l_{1/(k-1)}(2)$ が交差している。 $l_{1/k}(0) \subset S_H^+(0)$ かつ $l_{1/(k-1)}(2) \subset S_G^+(2)$ であることより、交差点の周期は $2((k+1)/2 + (k-3)/2) + 1 = 2k-1$ で、1 周期の間に軌道は 4π 移動する。よって交差点は $2/(2k-1)$ -NBF の軌道点である。定理 1(i) と 1(ii) の証明より、この軌道は NBF 条件を満たす。 (Q.E.D.)

3.4 定理 1(iv) の証明

この節では組みひも型の表現が必要になる。 p/q -B の組みひも型は $\beta(p/q-B) = \rho_q^p$ である。ここで $\rho_q = \sigma_{q-1}\sigma_{q-2} \cdots \sigma_2\sigma_1$ 。 σ_i は生成元と呼ばれる。 p/q -NB の組みひも型が $\beta(p/q-NB) = \sigma_1^{-2}\beta(p/q-B)$ であるならば、この組みひも型をポイランド型組みひもと呼ぶ。^{*1}

^{*1} 参考文献 (1) の図 9.3 によると、ポイランド型組みひも型は $\beta(p/q-NB) = \sigma_1^2\beta(p/q-B)$ である。 $2/5$ -NBF に対しては、 $\sigma_1^{-2}\beta(p/q-B)$ も $\sigma_1^2\beta(p/q-B)$ も同じ固有値 $\lambda_{\max} = 1.722$ を与える。しかし $1/6$ -NBF に対しては $\sigma_1^{-2}\beta(p/q-B)$ は $\lambda_{\max} = 2.081$ を与え、 $\sigma_1^2\beta(p/q-B)$ は $\lambda_{\max} = 1.883$ を与える。固有値の計算には線路

NBF がポイランド型組みひもをもつことを示せば十分である. 参考文献 [7] より $1/q$ -NBF の組みひもは $\sigma_1^{-2} \rho_{1/q}$ であることが分かっている. これはポイランド型組みひもである. 以下ではこれら以外の p/q -NBF ($q \geq 3, 0 < p/q < 1/2$) に対する組みひもを調べる.

$O(\eta_0)$ と $O(\eta'_0)$ を $2/5$ -NBF の 2 つの軌道とする (図 11 を見よ) $\eta_{4'}$ から $\eta_{5'}$ への飛びは, η_1 から η_2 への飛びに比べて大きい. また前者の飛びの中に後者の飛びが含まれている. $\eta_{4'}$ から $\eta_{5'}$ への飛びでは軌道の y 座標の値が増加しているが, η_1 から η_2 への飛びでは減少している. この現象は一般の NBF に関しても成立する. すなわち p/q -NBF の 2 つの軌道 $O(\eta_0)$ と $O(\eta'_0)$ における, $\eta_{k'}$ から $\eta_{k'+1}$ への飛びと η_k から η_{k+1} への飛びに対して成立する (図 24 を見よ). η_k から η_{k+1} への飛びを表す太い矢印の線は, $\eta_{k'}$ から $\eta_{k'+1}$ への飛びを表す太い矢印の線は交差する. これらは $\langle Z_{p/q} \rangle$ にあるパーコフ型の周期軌道の飛びを表す細い矢印の線とも交差する. $\pi_y(\eta_k) > \pi_y(\eta_{k+1})$ と $\pi_y(\eta_{k'}) < \pi_y(\eta_{k'+1})$ より, η_k は $f(x) < 0$ を満たす領域 $\pi < x < 2\pi$ にあり, 一方 $\eta_{k'}$ は $f(x) > 0$ を満たす領域 $0 < x < \pi$ にあることが得られる. NBF の 1 周期での共鳴チェーン $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ から $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ への飛びは 1 回だけ生じる. $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ から $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ への飛びに関しても同様である. これは 2.6 節で述べた共鳴チェーンの性質から明らかである.

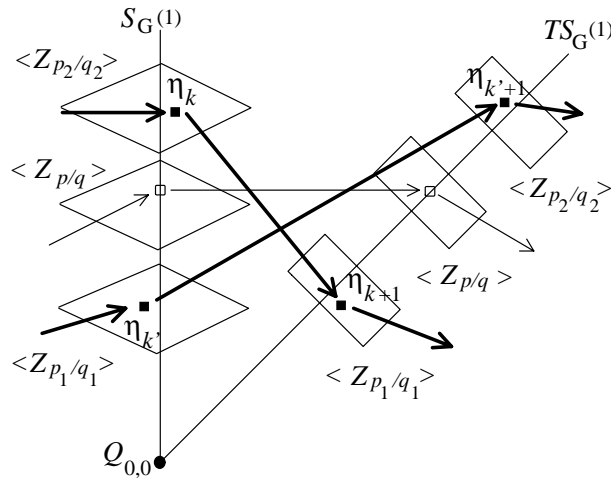


図 24 普遍被覆面における p/q -NBF ($p/q = p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$) の 2 つの軌道 $\dots \Rightarrow \eta_k \Rightarrow \eta_{k+1} \Rightarrow \dots$ と $\dots \Rightarrow \eta_{k'} \Rightarrow \eta_{k'+1} \Rightarrow \dots$ が描かれている. 円筒面では両者は同じ軌道である. $\langle Z_{p/q} \rangle$ の軌道は p/q -パーコフ楕円軌道で細い矢印の線で結ばれている.

ここで $2/5$ -NBF の軌道の情報より組みひもを構成する方法を説明する. 最初に, 普遍被覆面で組みひもを構成する. これは図 25 に左側の図で描かれている. η_1 から η_2 へのひもが上のチェーンから下のチェーンへの飛び降りを表している. 一方 η_4 から η_5 へのひもが逆の飛び上がりを表している. 右の図における生成元 σ_3^{-1} はこれらの

算法 (Train track 法) を利用した. ポイランドの公式 (33) は前者の結果を与える.

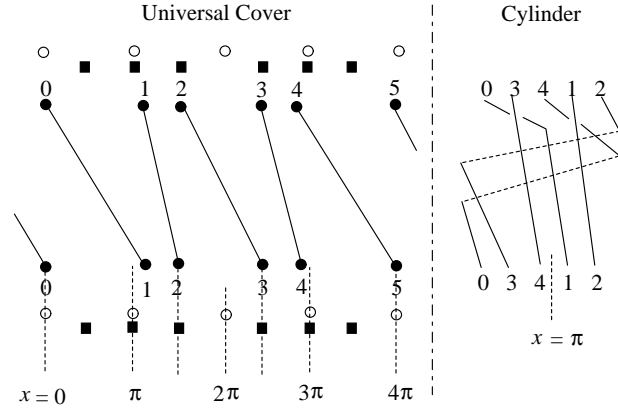


図 25 普遍被覆面における $2/5$ -NBF の組みひも (左図) と円筒面における組みひも (右図). $1/2$ -B は円で, $1/3$ -B は黒四角で描いてある. 記号 i は η_i を意味する.

ひもの交差 (軌道の交差) を表現している. η_1 は $x = \pi$ の右にあり, η_4 は $x = \pi$ の左にある. そのため η_0 から η_1 への飛びは, η_3 から η_4 の飛びより広くかつ η_3 から η_4 の飛びを含んでいる. 生成元 σ_1^{-1} はこれらのひもの交差を表現している. 我々の目的は位相的エントロピーの下界を求めることにある. よってより簡単な組みひもを構成すればよい. そのために $\langle \mathcal{Z}_{p/q} \rangle$ における p/q -NBF の運動は p/q -B の運動と同じであるとす. 更に p/q -B の運動は回転数が p/q の一定な回転であるとす. これを利用して残りのひもを描いた. η_1 は $x = \pi$ の右にあり, η_4 は 3π の左にあることに注意しよう. この事実より, 円筒面で η_1 と η_4 が重なることを避けられる. 普遍被覆面の組みひもを円筒面に射影して, 図 25 の右図の組みひもが得られる. これより組みひも型 $\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\rho_5^2 (\sim \sigma_1^{-2}\rho_5^2)$ が得られる.

一般の p/q -NBF に対する組みひもを考える. η_{k-1} から η_k の間に, $\langle \mathcal{Z}_{p_2/q_2} \rangle$ の中の軌道点が $p_2 - 1$ 個あり, $\langle \mathcal{Z}_{p_1/q_1} \rangle$ の中の軌道点が $p_1 + 1$ 個ある. この事実はファレイ分割 $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ において不等式 $1/q_i > p_2/q_2 - p_1/q_1$ ($i = 1, 2$) が成立することに由来している. よって軌道の交差を表す $\sigma_j^{-1}\sigma_{j+p}^{-1}$ を得る. ここで η_{k-1} と η_k の間には $p (= p_1 + p_2)$ の点が存在する. 残りの組みひもは ρ_q^p と表現される. まとめて p/q -NBF の組みひも型が $\sigma_j^{-1}\sigma_{j+p}^{-1}\rho_q^p$ ($1 \leq j \leq q - p - 1$) ($\sim \sigma_1^{-2}\rho_q^p$) と得られる. (Q.E.D.)

$\beta(p/q\text{-NBF})$ ($0 < p/q < 1/2$) に対する位相的エントロピーの下界 $h_{\text{top}}^B = \ln \lambda_{\text{max}}$ は下記のポイランドの公式の解の最大値 λ_{max} として得られる.

$$(\lambda^{q_1} - 2)(\lambda^{q_2} - 2) = 3. \quad (33)$$

p/q -NBF から得られる位相的エントロピーの下界は $(q-p)/q$ -NBF から得られる位相的エントロピーの下界と同じである. なぜなら $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ ならば $FP[(q-p)/q] = \{(q_2 - p_2)/q_2, (q_1 - p_1)/q_1\}$ が成り立つからである.

4 議論

この節では定理 1 とポイランド [1] が証明した定理 A との関係を議論する. 次に NBF の物理的な意味を議論する.

記号 \geq で, 2 つの組みひも型間に成立する半順序関係を表現する. $\beta(p/q\text{-NB}) \geq \beta(p'/q'\text{-NB})$ は, 「 $\beta(p/q\text{-NB})$ は $\beta(p'/q'\text{-NB})$ を強制する」と読む. これは我々が考えている系に組みひも型 $\beta(p/q\text{-NB})$ を持つ軌道が存在すれば, 組みひも型 $\beta(p'/q'\text{-NB})$ を持つ軌道が存在するという意味である.

定理 A (ポイランド). p/q と p'/q' を $0 < p/q, p'/q' < 1$ を満たす既約分数とする. $\beta(p/q\text{-NB})$ と $\beta(p'/q'\text{-NB})$ をポイランド型組みひもとする. $\beta(p/q\text{-NB}) \geq \beta(p'/q'\text{-NB})$ が成立するならば $\text{FI}[p/q] \supset \text{FI}[p'/q']$ が成立し, 逆も成立する.

定理 1 と定理 A には 3 つのタイプの関係が存在する. 第 1 のタイプはノンバーコフ周期軌道に対する力学的順序関係である. 第 2 のタイプはファレイ区間の包含関係である. 最後の関係はノンバーコフ周期軌道の組みひもに関する半順序関係である. 定理 1(ii) では NBF 間の順序関係が得られて, ファレイ区間の包含関係も自動的に満たされている. 定理 A は 2 つの組みひも型に対する順序関係と, 2 つ NB 軌道のファレイ区間に対する包含関係が与えられている.

ファレイ区間の扱いの違いを明らかにする. 定理 A では $\text{FI}[p/q]$ の端点の有理数 p_1/q_1 と p_2/q_2 は $p/q\text{-NB}$ の局所的な回転率の下限ならびに上限である. 定理 1 ではこれらの有理数で共鳴チェーンを特徴付けている. $p/q\text{-NBF}$ の y -方向の運動幅は 2 つのチェーン $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の y -方向の距離で測られる. $p/q\text{-NBF}$ の子である $p_1/q_1\text{-NBF}$ と $p_2/q_2\text{-NBF}$ の幅は $p/q\text{-NBF}$ の幅より狭い.

次に NBF の軌道とバーコフ軌道を比較しよう. 図 17 の 2 つの交差点 (黒丸) の初期点は l^u にある. つまり z_0 の上部にある. $2/5\text{-NBF}$ は $S_G(0)$ にある $1/2\text{-B}$ より速い回転をする. 図 16 の 2 つの交差点は図 17 $l_{1/3}(2)$ に写像される. 写像された位置は ζ_0 の下部にある. $2/5\text{-NBF}$ は $S_H^+(2)$ にある $1/3\text{-B}$ より遅く回転する. これらの事実は, $2/5\text{-NBF}$ のオーブリーグラフが $1/2\text{-B}$ と $1/3\text{-B}$ のオーブリーグラフと交差することを導く. これらの事実が $\text{FI}[p/q] = [p_1/q_1, p_2/q_2]$ の定義と関係している.

TSBT において無理数に向かう経路を考えよう. 例として $1/2$ を出発点として $(RL)^\infty$ で定義される経路 $\{p_n/q_n\} = \{1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, \dots\}$ は $1/\nu_G$ (ν_G は黄金比) に向かう. ここで $p_n/q_n\text{-NBF}$ が最初に生じる臨界値を $a_c(p_n/q_n\text{-NBF})$ とする. $a_c(p_n/q_n\text{-NBF}) > a_c(p_{n+1}/q_{n+1}\text{-NBF})$ が成立する. $p/q\text{-NBF}$ が存在するならば回転数 ν ($p_1/q_1 < \nu < p_2/q_2$) をもった KAM 曲線は存在しない. ただし $\text{FI}[p/q] = [p_1/q_1, p_2/q_2]$ である. これらをもとにすると下記の予想が得られる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(p_n/q_n\text{-NBF}) = a_c(\nu). \quad (34)$$

ここで $a_c(\nu)$ は回転数 ν をもつ KAM 曲線が崩壊する臨界値である. 式 (34) の左辺の臨界値は $a_c(\nu)$ に上から漸近する. これは NBF の存在が KAM 曲線の非存在に対する十分条件になっていることを意味する. この予想に関する詳細な証明は別の論文で報告する. 式 (34) を利用して任意の無理数 ν をもつ KAM 曲線の崩壊する臨界値

$a_c(v)$ を計算することが可能である. 実際の計算が行われることを期待する.

p/q -NBF を見つけたらボイランドの公式 (33) を利用して系の位相的エントロピーの下界を求められる. それゆえに p/q -NBF は系の複雑さの目安となる. TSBT において無理数に向かう経路では, その極限の位相的エントロピーの下界はゼロである. 一方, 有理数に向かう経路では, その極限の位相的エントロピーの下界は有限値にとどまる. これらの結果はボイランドの公式より得られる. 我々の定理とボイランドの定理 A を一緒にすることで, 系の複雑さをより理解することが可能となる.

参考文献

- [1] P. Boyland, *Topology Appl.* **58** (1994), 223.
- [2] I. Leage and R. S. Mackay, *Phys. Lett. A* **118** (1986), 274.
- [3] P. Boyland and G. R. Hall, *Topology* **26** (1987), 21.
- [4] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **104** (2000), 943.
- [5] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **106** (2001), 691.
- [6] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, *Chaos* **12** (2002), 33.
- [7] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002), 1117.
- [8] A. Sharkovskii, *Ukrain. Mat. Z.* **16**(1964), 61.
- [9] M. Bestvina and M. Handel, *Topology* **34** (1995), 109.
- [10] T. Hall, *Trains3*. 下記のホームページよりダウンロードできます.
http://www.liv.ac.uk/math/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html
- [11] T. Matsuoka, *Comtemp. Math.* **152** (1993), 21.
- [12] T. Matsuoka, *物性研究* **67-1** (1996), 1.
- [13] P. Collins, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **12** (2002), 605.
- [14] W. Thurston, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **19** (1988), 417.
- [15] A. Bogomolny, <http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml>
- [16] V. Bangart, *Dynamics Reported* **1** (1988), 1.
- [17] R. de Vogelaere, in *Contribution to the theory of nonlinear oscillation*, Vol. IV, ed. S. Lefschetz (Princeton University Press, 1958), 53.
- [18] H. Poincaré, *Rend. del. Circ. Math. Palermo*, **33** (1912), 375.
- [19] G. D. Birkhoff, *Tans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14: *Acta. Math.* **47** (1925), 297.
- [20] R. S. Mackay and J. D. Meiss, *Phys. Let.* **98A** (1983), 92.
- [21] V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannskii and M. B. Tabanov, *Physica* **D40** (1989), 235.
- [22] J. Palis, *Topology* **8** (1969), 385.
- [23] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000), 1136.
- [24] S. Aubry and P. Y. LeDaeron, *Physica* **7D** (1983), 381.

補足 この論文の英語版は下記の雑誌に掲載されます.

Progress of Theoretical Physics Vol.117, No.4 (2007 年 4 月).

翻訳 山口喜博