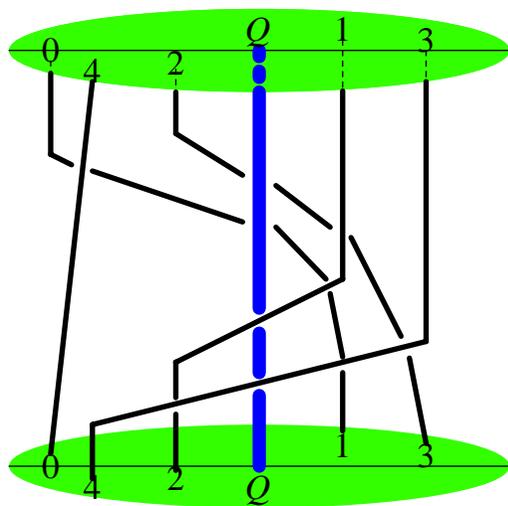


2次元写像における複雑さの進化



山口喜博 (帝京平成大学) 谷川清隆 (国立天文台)

この本の案内

この本の目的は平面における面積ならびに方向保存写像の性質を調べることにある。主として扱うテーマは下記の3つである。

- [1] サドルノード分岐で生じる対称周期軌道の出現順序関係 (第 1,2,4 章).
- [2] ホモクリニック軌道の生じる順序関係 (第 3 章).
- [3] 位相的エントロピーの下界値の計算 (第 1,2,3,4,5 章).

我々が調べる写像は平面上で定義されたシンプレクティック形式の写像である。

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + y_{n+1}.$$

$f(x) = a(x - x^2)$ とおくとエノン写像になる。 $f(x) = a(x - x^3)$ または $f(x) = -a(x - x^3)$ とおくと3次関数写像になる。ここで a は正のパラメーターである。 $a = 0$ では可積分写像である。

第 1 章から第 3 章まではエノン写像を扱い、第 4 章と第 5 章は 3 次関数写像を扱う。第 5 章では円筒面で定義された標準写像 ($f(x) = a \sin x$) も扱う。

謝辞

本稿を作成するにあたって三波篤朗教授 (北見工業大学) ならびに松岡隆教授 (鳴門教育大学) と議論をしていただいたことに感謝いたします。

第 1 章は下記の論文を翻訳し、一部修正を加えた内容である。

著者：Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

題名：Dynamical ordering of symmetric periodic orbits for the area preserving Hénon map

掲載雑誌：Progress Theoretical Physics Volume 113, Number 5, pp.935-951

掲載年月：2005 年 5 月

第 2 章は下記の論文を翻訳し、一部修正を加えた内容である。

著者：Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

題名：Generalized dynamical ordering and topological entropy in the Hénon map

掲載雑誌：Progress Theoretical Physics Volume 114, Number 4, pp.763-791.

掲載年月：2005 年 10 月

第 3 章は下記の論文を翻訳し、一部修正を加えた内容である。

著者：Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

題名：Appearance order for homoclinic points in the Hénon map

掲載雑誌：Progress Theoretical Physics Volume 116, Number 6, pp.1029-1049.

掲載年月：2006 年 12 月

第 4 章は下記の論文を翻訳し、一部修正を加えた内容である。

著者：Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

題名：Symmetric periodic orbits and topological entropy
in the two-dimensional cubic map

掲載雑誌：Progress Theoretical Physics, Volume 114, Number 6, pp.1163-1177.

掲載年月：2005 年 12 月

第 5 章は下記の論文を翻訳し、一部修正を加えた内容である。

著者：Yoshihiro Yamaguchi and Kiyotaka Tanikawa

題名：Increase of topological entropy until the three-fold horseshoe is completed

掲載雑誌：Progress Theoretical Physics, Volume 116, Number 5, pp.803-817.

掲載年月：2006 年 11 月

各章毎に参考文献をつけてある。各章は独立している。

目次

この本の案内	i
第 1 章 面積保存エノン写像における対称周期軌道の出現順序	1
1.1 序	1
1.2 基本的道具	2
1.3 力学的順序と擬アノソフ性質	9
第 2 章 エノン写像における一般化力学的順序と位相的エントロピー	23
2.1 序	23
2.2 基本的道具	25
2.3 力学的順序	29
2.4 馬蹄完成直前	37
2.5 最大の平坦区間とその族	52
2.6 いくつかの注意	56
第 3 章 エノン写像におけるホモクリニック軌道の出現順序	61
3.1 序	61
3.2 基本的道具	62
3.3 ホモクリニック軌道の符号化	64
3.4 対称核をもつホモクリニック軌道の出現順序	66
3.5 局所的順序関係	77
第 4 章 3つ折れ馬蹄が完成するまでの位相的エントロピーの増加 I	89
4.1 序	89
4.2 基本的道具	91
4.3 周期軌道の出現順序関係	99
4.4 位相的エントロピー	103
第 5 章 3つ折れ馬蹄が完成するまでの位相的エントロピーの増加 II	109

5.1	序	109
5.2	対称周期軌道と3つ折れ馬蹄	110
5.3	位相的エントロピーの増加	112
5.4	自然な空間の分割	118
5.5	補足	122
付録 A	プログラム	127
A.1	対称周期軌道を求めるプログラム	127
A.2	Burau 行列の構成と固有値を求めるプログラム	128
A.3	木の構造	131
	終わりに	135

第 1 章

面積保存エノン写像における対称周期軌道の出現順序

面積保存エノン写像のあるパラメーター領域において成立する対称周期軌道の力学的順序を導いた。ここでは写像のもつ可逆性とサドル不動点の安定多様体と不安定多様体の構造を利用した。また系の擬アノソフ性も議論した。

1.1 序

スメール¹⁾が導入した馬蹄は面積保存エノン写像において簡単に観察することができる。²⁾馬蹄が存在するための十分条件はデバネイとニテキによって導かれた。³⁾馬蹄の中に存在する周期軌道については多くの研究がなされている。⁴⁾⁻⁷⁾馬蹄の中にある周期軌道の共存の問題と力学的順序についても研究されている。⁸⁾一度馬蹄が完成するとエノン写像は双曲的な系となる。その結果、パラメーターを更に増加しても周期軌道は生じない。この状態の系の位相的エントロピーは $\ln 2$ である。それゆえに馬蹄が完成する前の周期軌道の出現順序が重要な問題となる。この問題を扱うために馬蹄写像に対する枝刈り理論が開発されている。^{9),10)}枝刈り理論がエノン写像で有効であるかは分かっていない。エノン写像のある特殊なパラメーター値では空間の自然な分割が存在し、その力学的性質は記号力学で特徴づけられることが分かっている。⁷⁾

周期軌道の出現順序に関して、その全体的な強制関係を導くことは非常に難しい。2つの周期軌道の間強制関係は、周期軌道から決まる組み紐タイプの分類から決定することは可能である。^{8),11)}しかしながら、馬蹄写像とかエノン写像においてサドルノード分岐で生じる周期軌道に対する力学的順序はまだ決定されていない。

我々は既に可逆写像における周期軌道の力学的順序を決定する手法を開発した。¹²⁾この方法は、サドル不動点の安定多様体と不安定多様体の構造と、系の持つパーコフの意味での可逆性を利用する。この方法を用いて標準写像ならびに他の系に対して特殊な性質をもつ

周期軌道の力学的順序を導いた.¹³⁾⁻¹⁵⁾ エノン写像においても同様な周期軌道の力学的順序が導けるであろうか. この問いに関する部分的な回答は第1.3節で与える. 我々の得た結果はある特殊性をもつ無限に多くの周期軌道の順序関係を与える. 我々の結果は馬蹄における枝刈り理論に対して有用な情報を与えると考えている.

(x, y) 平面におけるシンプレクティック形式のエノン写像 T は次のように定義される.

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad (1.1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, \quad (1.2)$$

ここで $f(x) = a(x - x^2)$, $a (\geq 0)$ はパラメーターである. この写像は2つ不動点をもつ. $P = (0, 0)$ はサドルである. 一方の不動点 $Q = (1, 0)$ は $0 < a < 4$ のときは楕円点であり, $a > 4$ では反転型サドルである. $a = 4$ で, Q は周期倍分岐を起こす.

もともとのエノン写像²⁾ に対して座標変換とスケール変換を行うと上記のシンプレクティック形式の写像が得られる. シンプレクティック形式の写像には, 安定多様体と不安定多様体の関係が分かりやすく, 対称線の構造も把握しやすいという利点がある.

この論文の目的は, エノン写像における周期軌道に対する力学的順序を導くことである. 写像は可逆であることより, 周期軌道は2つに分類できる. つまり対称線上に2つの点をもつ対称周期軌道と, 対称線上に点をもたない非対称周期軌道である. この論文では前者の力学的順序を導く.

Q の周りにおいて「回転分岐」が生じ, Q より回転数 $p/q \leq 1/2$ の周期軌道がパラメーター区間 $0 < a \leq 4$ で生じる. これらの軌道に対して $(p/q)_Q$ ($GCM(p, q) = 1$) の名称を与える. $(p/q)_Q$ は1周期つまり q 回写像される間に Q の周りを p 回だけ回転する周期軌道を意味している. このような軌道が存在することは命題1.3で保証されている. 可逆な系では, これらの軌道の存在はほぼ自明であり, 出現の順序も明らかである. 我々はサドルノード分岐で生じる周期軌道に興味がある. これらを $(p/q)_{SN}$ と書くことにする. p/q は1周期 q の間に Q の周りを $p (\geq 2)$ 回だけ回転することを意味している.

§1.2において, この論文で使用する記号といくつかの定義を導入する. §1.3では力学的順序を導出し, 系の擬アノソフ性質も議論する.

1.2 基本的道具

1.2.1 対称線とホモクリニックローブ

エノン写像 T はバーコフの意味で可逆である. これはこの写像が2つの対合 h と g の積で書けることを意味している.

$$T = h \circ g, \quad (1.3)$$

ここで対合 h と g は次のように定義される.

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -y \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y-f(x) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

$\det \nabla h = \det \nabla g = -1$ が成立していることに注意する.

対合 h と g の不動点の集合は対称線と呼ばれる. h の対称線を S_1 と, g の対称線を S_2 とする. これらは次のように得られる.

$$S_1 : y = 0, \quad (1.5)$$

$$S_2 : y = -f(x)/2. \quad (1.6)$$

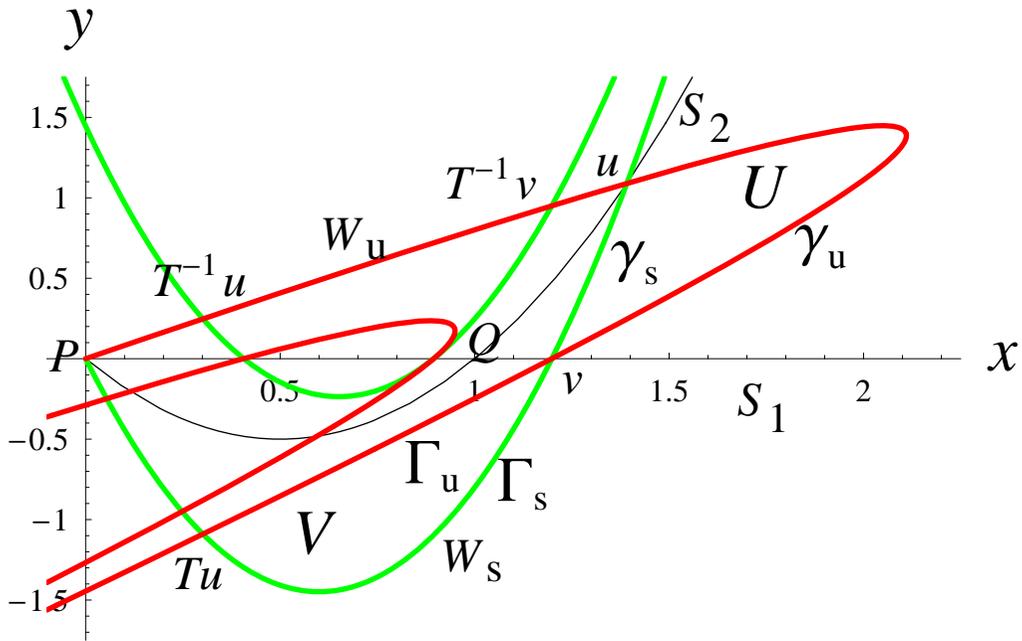


図 1.1 不動点 P の安定多様体 W_s と不安定多様体 W_u , 2つのホモクリニックロープ U と V , 2つのホモクリニック交差点 u と v , 2つの対称線 S_1 (x 軸) と S_2 が描かれている. $a = 4$.

$W_u = W_u(P)$ をサドル不動点の不安定多様体で P から右上方に出ている枝とする. また $W_s = W_s(P)$ を P の安定多様体で P の右下方から P に入る枝とする. 以下ではこれらの多様体の方向を自然な方向として選ぶ. 線形解析より W_u と W_s の P における傾きは簡単に決定できる. W_s を P から見ていくと最初に対称線 S_1 と v で横断的交差をし, 次に対称線 S_2 と u で横断的交差をする. 不安定多様体 W_u は S_2 と u で横断的交差をし, 次に S_1 と v で横断的交差をする. ホモクリニック点 u と v における横断的交差の証明は文献 [16-18] でなされた.

1次元多様体 A の開弧を $(\alpha, \beta)_A$ と記す. ただし A の自然な方向に関して α が β より上流にあるとする. 閉弧を $[\alpha, \beta]_A$, 半開弧を $(\alpha, \beta]_A$ と書くことにする. ここで4つの弧 $\gamma_u = [u, v]_{W_u}$, $\gamma_s = [u, v]_{W_s}$, $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u}$, $\Gamma_s = [v, Tu]_{W_s}$ を定義する. 次にホモクリニックローブ U は γ_u と γ_s で囲まれた開領域とする. また, ホモクリニックローブ V は Γ_u と Γ_s で囲まれた開領域とする. 可逆性より, $hW_u = W_s$ と $gW_u = W_s$ の関係が成立する. 特に $h\Gamma_u = \gamma_s$ と $g\Gamma_u = T^{-1}\gamma_s$ の関係はこれから利用される. $T^{-1}\gamma_s$ と Γ_u が接触すれば, γ_s と $T\Gamma_u$ も接触する. この状況は馬蹄の完成である. 最後に, $[P, u]_{W_u}$, γ_s , Γ_u , $[Tu, P]_{W_s}$ で囲まれた閉領域を Z と, 開領域を $\text{int}(Z)$ と定義する. 上で述べた安定多様体と不安定多様体の構造は図 1.1 に描かれている.

$\text{int}(Z)$ に含まれる対称線を2つの部分に分けて以下のように名前を付ける.

$$S_{11}: y = 0 \quad (0 < x < 1), \quad (1.7)$$

$$S_{12}: y = 0 \quad (1 < x < \pi_1(v)), \quad (1.8)$$

$$S_{21}: y = -f(x)/2 \quad (0 < x < 1), \quad (1.9)$$

$$S_{22}: y = -f(x)/2 \quad (1 < x < \pi_1(u)). \quad (1.10)$$

ここで $\pi_1(z)$ は点 z の x 座標を与える. また $\pi_2(z)$ は z の y 座標を与える.

最初に良く知られた簡単な事実を確かめよう.

命題 1.1. Z の中にすべての周期点が存在する.

証明. $T^k U$ ($k \geq 1$) は $y < 0$ の領域にある. これは U の未来の像は U に戻らないことを意味する. よって U は周期点を含まない. 対称性 $V = hU$ より V も周期点を含まない.

$s \in \mathbf{R}^2 \setminus Z$ とする. ある k (> 0) で $T^k s \in \text{int}(Z)$ が成立するとしよう. そうすると s は周期点ではない. なぜなら $T^{k'} s$ が V に入る k' ($0 \leq k' < k$) が存在するからである.

ここで $\mathbf{R}^2 \setminus Z$ をいくつかの領域に分割し, それぞれを個別に調べることにする.

領域の分割

$$[1] D_1: \{(x, y) | x \leq 0, y \leq 0\}.$$

$$[2] D_2: \{(x, y) | x \leq 0, 0 < y \leq -f(x)\}.$$

$$[3] D_3: \{(x, y) | x \leq 0, y > -f(x)\}.$$

$$[4] D_4: \{(x, y) | x > 0, y > -f(x)/2\}.$$

$$[5] D_5: \{(x, y) | x > 0, y < -f(x)/2\}.$$

$s \in D_1$ の場合, 式 (1.1), (1.2) より $\pi_1(T^n s)$ は $-\infty$ に発散する. よって D_1 には周期点はない. 次に $s \in D_2$ の場合, Ts が D_1 に入る. よって D_2 にも周期点はない. $s \in D_3$ の場合, $gs \in D_1$ または $gs \in D_2$ が成立するので, D_3 にも周期点はない.

$s \in D_4 \setminus Z$ の場合, $gs \in D_5 \setminus Z$ である. よって $D_5 \setminus Z$ 中の点について調べる. $s \in D_5 \setminus Z$ とする. Ts は x 軸の下部にある. よって $\pi_1(Ts) < \pi_1(s)$ が得られる. 仮定より Ts は Z にも V にも含まれない. $(P, T^{-1}v)_{W_s}$ は $y = -f(x)$ の下部にある. よって Ts は $y = -f(x)$ の下部

にあり, T^2s は x 軸の下部にある. 次に $\pi_2(T^2s) < 0$ と $\pi_1(T^2p) < \pi_1(Tp)$ の関係に注意すると, s の軌道は決して元の位置に戻らないことが分かる. 以上で D_5 に周期点が無いことが得られ, 証明は終了する. (Q.E.D.)

最後に, T において馬蹄が存在する十分条件を記しておく. この値は数値計算値である $a_{\text{hs}} = 5.17661$ に比べて大きい.

命題 1.2 (デバネイ-ニテキ). 面積方向保存エノン写像 T では $a \geq 6$ において馬蹄が存在する.

1.2.2 フランクスの結果の応用

フランクス¹⁹⁾ は, 平面上で定義された方向保存微分同相写像の楕円不動点の周りを回転する軌道に対して回転数を導入した. 我々が考えている状況でフランクスの結果を適用することは簡単で有用な結果が得られる. よってフランクスの結果をエノン写像の楕円点 Q に適用した結果を簡単に述べる.

領域 $\text{int}(Z)$ にあり Q の周りを回転する周期軌道を見つけよう. フランクスにしたがって Q を平面より取り去り, そこに円を埋め込む. 円上の点まで拡張された微分同相写像で円上の点の運動は記述される. もとの空間である平面 \mathbf{R}^2 は, Q を中心とした円筒 $\mathbf{T}^1 \times [0, \infty)$ と解釈できる. 新しい変換 (θ, r) では $r = 0$ は定義されない. しかしながら上記の膨らましの手順で, フランクスは $r = 0$ に対しても角度を導入した. この方法をエノン写像に適用すると命題 1.3 が得られる.

命題 1.3 (フランクス). Q の回転数を p/q とする. このとき Z には $0 < p'/q' < p/q$ を満たす回転数 p'/q' の周期軌道の点が存在する.

初期点 z_0 から出発する周期 q の周期軌道を $O_q(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{q-1}\}$ と記す. ここで $z_n = (x_n, y_n) = (\theta_n, r_n)$ ($0 \leq n \leq q-1$) であり, $z_n = T^n z_0$ である. ここで新しい位相空間 $\mathbf{T}^1 \times [0, \infty)$ の普遍被覆面 $\mathbf{R} \times [0, \infty)$ を用意する. 普遍被覆面での点を $\hat{z}_n = (\hat{\theta}_n, r_n)$ と書く. ただし $\hat{\theta}_n \in \mathbf{R}$ である. 次に対称線 S_{11} は, 普遍被覆面では無限に多くの対称線となる. これらを区別するためにこれらを $S_{11}^{(k)}$ と書くことにする. 位置は $\hat{\theta} = 2k\pi$ である. ただし k は整数とする. 他の対称線についても同様に表す. T は可逆であるので, ド・ボジュラエーの定理²⁰⁾ を適用して下記の命題 1.4 を得る.

命題 1.4. $\text{int}(Z)$ の中で, Q を除いた周期軌道の各点は Q を時計方向に回転する. 周期軌道は回転数 p/q ($0 < p/q \leq 1/2, p \geq 1, q \geq 2$) で特徴付けられる. 各軌道の周期に関して次の事実が成立する.

(a) $\hat{z}_0 \in S_{11}^{(0)}$ と $T^m \hat{z}_0 \in S_{21}^{(k)}$ ($k \geq 0$ かつ $m \geq 1$) が成立し, 途中の軌道点 $T^j \hat{z}_0$ ($1 \leq j < m$) が

どの対称線上にもないならば、 \hat{z}_0 は回転数 $(2k+2)/(2m+1)$ の対称周期軌道の点である。

(b) $\hat{z}_0 \in S_{11}^{(0)}$ と $T^m \hat{z}_0 \in S_{11}^{(k)}$ ($k \geq 0$ かつ $m \geq 1$) が成立し、途中の軌道点 $T^j \hat{z}_0$ ($1 \leq j < m$) がどの対称線上にもないとならば、 \hat{z}_0 は回転数 $(2k)/(2m)$ の対称周期軌道の点である。

(c) $\hat{z}_0 \in S_{11}^{(0)}$ と $T^m \hat{z}_0 \in S_{22}^{(k)}$ ($k \geq 0$ かつ $m \geq 1$) が成立し、途中の軌道点 $T^j \hat{z}_0$ ($1 \leq j < m$) がどの対称線上にもないならば、 \hat{z}_0 は回転数 $(2k+1)/(2m+1)$ の対称周期軌道の点である。

(d) $\hat{z}_0 \in S_{11}^{(0)}$ と $T^m \hat{z}_0 \in S_{12}^{(k)}$ ($k \geq 0$ かつ $m \geq 1$) が成立し、途中の軌道点 $T^j \hat{z}_0$ ($1 \leq j < m$) がどの対称線上にもないならば、 \hat{z}_0 は回転数 $(2k+1)/(2m)$ の対称周期軌道の点である。

\hat{z}_0 が対称線 $S_{12}^{(0)}, S_{21}^{(0)}, S_{22}^{(0)}$ の上にあった場合にも同様の性質が成立する。

1.2.3 対称線における区間の定義

この小節で対称線 S_{11} と S_{21} の中に区間を定義し、その性質を述べる。これらは次の節の議論で利用される。これらの区間は次のように定義される。

$$I_i^l = T^{-i}U \cap S_{11} = (A_i^l, B_i^l), \quad (1.11)$$

$$L_i^l = (B_{i+1}^l, A_i^l), \quad (1.12)$$

$$J_i^l = T^{-i}U \cap S_{21} = (C_i^l, D_i^l), \quad (1.13)$$

$$M_i^l = (D_{i+1}^l, C_i^l). \quad (1.14)$$

ここで $i \geq 1$ として $\pi_1(A_i^l) < \pi_1(B_i^l)$ と $\pi_1(C_i^l) < \pi_1(D_i^l)$ が成立する。これらの区間の存在条件は命題 1.5 で得られる。

同様に S_{12} と S_{22} に区間を定義する。

$$I_i^r = T^{-i}U \cap S_{12} = (A_i^r, B_i^r), \quad (1.15)$$

$$L_i^r = (B_{i+1}^r, A_i^r), \quad (1.16)$$

$$J_i^r = T^{-i}U \cap S_{22} = (C_i^r, D_i^r), \quad (1.17)$$

$$M_i^r = (D_{i+1}^r, C_i^r). \quad (1.18)$$

ただし $i \geq 2$ として $\pi_1(A_i^r) < \pi_1(B_i^r)$ と $\pi_1(C_i^r) < \pi_1(D_i^r)$ が成立する。

式 (1.15) から (1.18) までの条件 $i \geq 2$ について説明しよう。区間 I_1^l と J_1^l は存在しないことを示す。 $[T^{-1}u, T^{-1}v]_{W_s}$ ($= g(\Gamma_u \setminus v)$) が S_{22} と交差していれば、対称性より $\Gamma_u \setminus v$ は S_{22} と交差する。しかし、これは不可能である。なぜなら交差点の y 座標は正でなければならないが、 $\Gamma_u \setminus v$ は $y < 0$ の領域にあるからである。よって I_1^l と J_1^l に対する条件 $i \geq 2$ が得られた。次に I_2^l と J_2^l が存在するパラメーター領域があることを示す。パラメーターを増加し、馬蹄が完成した状況を考えよう。すなわち $[T^{-1}v, T^{-1}u]_{W_s}$ は Γ_u と接触し、 $[T^{-2}v, T^{-2}u]_{W_s}$ は $[T^{-1}v, u]_{W_u}$ ($= T^{-1}\Gamma_u$) と接触している。この状況で $[T^{-2}v, T^{-2}u]_{W_s}$ は対称線 S_{12} と S_{22} に交差している。これは I_2^l と J_2^l が存在していることを意味する。

ここで $a_c(L_i^l)$ を L_i^l が対称線 S_{11} の中に生じる臨界値とする。これは定義より I_i^l が S_{11} に生じる臨界値 $a_c(I_i^l)$ に等しい。同様の表現 $a_c(M_i^l)$, $a_c(L_i^r)$, $a_c(M_i^r)$ を用いる。馬蹄が完成

する臨界値を a_{hs} とする. これは $a_c(M_1^l)$ でもある. これらの臨界値に関して命題 1.5 が成立する.

命題 1.5. $a \geq 4$ では, 区間 L_i^l ($i \geq 1$), M_i^l ($i \geq 2$), L_i^r ($i \geq 3$), M_i^r ($i \geq 3$) は存在する. $\pi_1(A_1^l) < 1/2$ が成立する. また $4 < a_c(L_2^r) < a_c(M_2^r) < a_{\text{hs}}$ が成立する.

証明. $a \geq 4$ において, I_1^l が存在することを証明する. これより L_i^l ($i \geq 1$) が存在することが導かれる. t を P から出た不定多様体の最初の引き返し点とする. ここで引き返し点とは不安定多様体の傾きが発散する点である. 弧 $[P, t]_{W_u}$ は x に関するグラフである. g に関する対称性より, 弧 $(t^*, P]_{W_s}$ ($t^* = g t$) も同様である. これらを $y = F_u(x)$ と $y = F_s(x)$ と書く. $W_s = gW_u$ であることより次の関係が得られる.

$$F_s(x) = -F_u(x) - f(x). \quad (1.19)$$

$F_u(x)$ に関する関数方程式は式 (1.1) と (1.2) より導かれる.

$$F_u(x + F_u(x) + f(x)) = F_u(x) + f(x). \quad (1.20)$$

$F_u(x)$ の x に関する非線形部分を $G(x)$ としよう.

$$F_u(x) = c_1 x + G(x), \quad (1.21)$$

ここで $c_1 = (\sqrt{a^2 + 4a} - a)/2$, $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$ である.

ブラウン¹⁷⁾ は, $0 \leq x \leq \pi_1(t)$ において $F_u''(x) < 0$ と $F_s''(x) > 0$ が成立することを証明した. これより $0 < x \leq \pi_1(t)$ において $G''(x) < 0$ と $G(x) < 0$ が成立する. 方程式 $2F_u(x) = -f(x)$ ($x > 0$) の解が点 u の x 座標を決める. 一方 $F_s(x) = 0$ ($x > 0$) が点 v の x 座標を決める. ブラウンの証明より, $a > 0$ では 2 点 u, v で安定多様体と不安定多様体は横断的に交差していることが分かっている. これより u が最初の引き返し点ではないことが分かるので, $\pi_1(u) < \pi_1(t)$ が得られる. $F_s''(x) > 0$ より, $\pi_1(v) < \pi_1(u)$ が導かれる. 以上をまとめて γ_s は領域 $\pi_1(v) \leq x \leq \pi_1(u)$ に位置することが得られた.

S_{11} の点 $r = (1/2, 0)$ とその像 $Tr = (1/2 + a/4, a/4)$ を考える. ここで関係 $1/2 + a/4 > \pi_1(u)$ が成立しているとする. これより S_{11} の像が γ_s と交差することが分かる. これは I_1^l の存在を意味する. 以下で関係 $1/2 + a/4 > \pi_1(u)$ を証明する.

$y = -f(x)$ と $y = 2c_1 x$ の交点で原点でない交点を u^* とする. 直接計算より $\pi_1(u^*) = \sqrt{1 + 4/a}$ が得られる. $a \geq 4$ では, $1/2 + a/4 > \sqrt{1 + 4/a} = \pi_1(u^*) > \pi_1(u)$ が成立する. 最後の不等式を導く際に, $F_u''(x) < 0$ を利用した. 以上で証明は終わる.

TA_1^l は弧 $T[P, r]$ にあるので, $\pi_1(A_1^l) < 1/2$ が得られる. $r \in T^{-1}U$ であることより, $T^{-1}r = (1/2, -1)$ は S_{21} の下部にあることが分かり, $T^{-2}U$ は S_{21} と交差することが分かる. よって J_2^l と M_i^l ($i \geq 2$) の存在は保証される. 次に $T^{-2}r = (3/2, 2)$ は S_{22} の上部にあることより, $T^{-3}U$ は S_{12} ならびに S_{22} と交差することが分かる. 以上より I_3^r, J_3^r, L_i^r ($i \geq 3$),

M_i^r ($i \geq 3$) の存在が示された. 馬蹄が完成する前に区間 L_2^r が先に S_{22} の中に生じる. 次に M_2^r が生じる. これより最後の不等式が導かれる. (Q.E.D.)

数値計算で $a_c(L_2^r) \simeq 4.47$ と $a_c(M_2^r) \simeq 4.77$ が得られる. これらは a_{hs} と比べ確かに小さい.

ラムダ補題を利用して次の命題 1.6 は証明できる.

命題 1.6. $i \rightarrow \infty$ では, 区間 $T^{i+1}L_i^{l,r}$ は単調に Γ_u に漸近する. 同様の事実は $T^{i+1}M_i^{l,r}$ についても成立する.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+1}L_i^{l,r} = \Gamma_u = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+1}M_i^{l,r}. \quad (1.22)$$

$a = 4$ で, Q は周期倍分岐を起こす. 分岐が生じた結果 TS_{21} は S_{22} と交差し, TS_{22} は S_{21} と交差する. これらの交差点は周期 2 の周期点である. これらを $\{r^+, r^-\}$ と記す. r^+ は S_{22} にあり, r^- は S_{21} にあるとする. 命題 1.7 で S_2 と TS_2 の関係をまとめておこう. これらは直接計算より導かれる.

命題 1.7. $a > 4$ では, $T(Q, r^+)_{S_{22}}$ は $[Z \cup V \cup U]$ が S_2 で 2 分される上部の成分にある. 一方, $T(r^+, u)_{S_{22}}$ は下部の成分にある. 同様に $T(Q, r^-)_{S_{21}}$ は下部の成分にあり, $T(P, r^-)_{S_{21}}$ は上部の成分にある.

安定多様体と不安定多様体は P と Q の間の x 軸と無限に交差を繰り返す, そのためにこの区間は無限に多くの区間 I_i^l と L_i^l で分割されることになる. Q から「回転分岐」で生じた周期軌道の点で x 軸にある点は L_i^l に存在する. なぜなら, 区間 I_i^l には周期点が無いからである. ここで周期軌道の表現に関して記号を導入する. 表現 $(p/q)_Q \in L_i^l$ は Q より分岐した対称周期軌道で回転数は p/q で区間 L_i^l に軌道点を 1 つもつ. 区間の出現と周期軌道の出現の関係を意味する表現 $L_i^l > [(p/q)_Q \in L_i^l]$ を用いる. これは「区間 L_i^l の存在は周期軌道 $(p/q)_Q \in L_i^l$ の存在を導く」と読む. 命題 1.8 で区間 L_i^l と周期軌道 $(p/q)_Q \in L_i^l$ の関係を述べる.

命題 1.8. $i \geq 1$ に対して下記の関係が成立する.

$$\begin{aligned} L_i^l &> [(1/(2i+1))_Q \in L_i^l], \\ L_i^l &> [(1/(2i+2))_Q \in L_i^l], \\ M_i^l &> [(1/(2i))_Q \in M_i^l], \\ M_i^l &> [(1/(2i+1))_Q \in M_i^l]. \end{aligned}$$

次に $i \geq 2$ に対して下記の関係が成立する.

$$L_i^r > [(2/(2i+1))_Q \in L_i^r],$$

$$\begin{aligned} L_i^l &> [(1/(i+1))_Q \in L_i^l], \\ M_i^l &> [(1/i)_Q \in M_i^l], \\ M_i^r &> [(3/(2i+1))_Q \in M_i^r]. \end{aligned}$$

証明. Z の内点は写像 T によって Q の周りを時計回りに回転する. $T^j L_i^l$ ($1 \leq j \leq i$) は x 軸の上部に存在する. 区間の端点の像 $T^i B_{i+1}^l$ は $T^{-1}\gamma_s$ 上にあり, S_2 の上部にある. 一方の端点の像 $T^i A_i^l$ は γ_s の上にあり, S_{22} の下部にある. これより $T^i L_i^l$ は S_{22} と交差する. $T^i B_{i+1}^l$ と $T^i A_i^l$ は S_{22} の反対側にある. よって交差点の個数は奇数である. ただし, 接触点は 2 個と数える. この事実より交差点の中には Q から分岐した点がある. 命題 1.4(c) で $k=0$, $m=i$ と置くと, この点は $(1/(2i+1))_Q \in L_i^l$ の点であることが分かる.

点 $T^{i+1} B_{i+1}^l$ は γ_s 上にあり x 軸の上部にある. 一方の点 $T^{i+1} A_i^l$ は $T^{-1}\gamma_s$ 上にあり x 軸の下部にある. よって $T^{i+1} L_i^l$ は S_{12} と交差する. 命題 1.4(d) で $k=0$, $m=i+1$ と置くことで, この点は $(1/(2i+2))_Q \in L_i^l$ の点であることが導かれる. その他の関係式も同様にして導くことができる. (Q.E.D.)

1.3 力学的順序と擬アノソフ性質

この節では力学的順序を導く. 順序関係を表現するために下記の記号を導入する.

$$\left(\frac{p}{q}\right)_{\text{SN}} \in N_i^\alpha \rightarrow \left(\frac{p'}{q'}\right)_{\text{SN}} \in N_j^\beta. \quad (1.23)$$

ここで p, q, p', q' は正の整数である. $(p/q)_{\text{SN}}$ と $(p'/q')_{\text{SN}}$ は, 両方ともサドルノード分岐で生じた対称周期軌道を表す. N_i^α, N_j^β は式 (1.12), (1.14), (1.16), (1.18) で定義された区間の一つである. 添え字 α と β は r または l を表し, N は区間名 L または M を表す.

式 (1.23) は, 「 $(p/q)_{\text{SN}} \in N_i^\alpha$ は $(p'/q')_{\text{SN}} \in N_j^\beta$ を強制する」と読む. 周期軌道 $(p/q)_{\text{SN}}$ の点が N_i^α にあれば, 周期軌道 $(p'/q')_{\text{SN}}$ の点が N_j^β にあることを意味する. 同様の強制関係を “ \uparrow ” または “ \downarrow ” で表現する. 記号 “ \Rightarrow ” で区間の間の順序関係を表す. $N_i^\alpha \Rightarrow N_j^\beta$ は, N_i^α が存在すれば N_j^β が存在することを表す. 以下では簡単のために $(p/q)_{\text{SN}}$ を p/q と書くこともある.

1.3.1 力学的順序

定理 1.1. 表 1.1 (a)–(d) の力学的順序が成立する.

表 1.1.

(a)

L_1^l	$\frac{2}{5}$	\rightarrow	$\frac{3}{7}$	\rightarrow	$\frac{4}{9}$	\rightarrow	$\frac{5}{11}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_2^l	$\frac{2}{7}$	\rightarrow	$\frac{3}{9}$	\rightarrow	$\frac{4}{11}$	\rightarrow	$\frac{5}{13}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_3^l	$\frac{2}{9}$	\rightarrow	$\frac{3}{11}$	\rightarrow	$\frac{4}{13}$	\rightarrow	$\frac{5}{15}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

(b)

M_2^l	$\frac{2}{6}$	\rightarrow	$\frac{3}{8}$	\rightarrow	$\frac{4}{10}$	\rightarrow	$\frac{5}{12}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
M_3^l	$\frac{2}{8}$	\rightarrow	$\frac{3}{10}$	\rightarrow	$\frac{4}{12}$	\rightarrow	$\frac{5}{14}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
M_4^l	$\frac{2}{10}$	\rightarrow	$\frac{3}{12}$	\rightarrow	$\frac{4}{14}$	\rightarrow	$\frac{5}{16}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

(c)

L_2^r	$\frac{3}{7}$	\rightarrow	$\frac{4}{9}$	\rightarrow	$\frac{5}{11}$	\rightarrow	$\frac{6}{13}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_3^r	$\frac{3}{9}$	\rightarrow	$\frac{4}{11}$	\rightarrow	$\frac{5}{13}$	\rightarrow	$\frac{6}{15}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_4^r	$\frac{3}{11}$	\rightarrow	$\frac{4}{13}$	\rightarrow	$\frac{5}{15}$	\rightarrow	$\frac{6}{17}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

(d)

M_3^r	$\frac{3}{8}$	\rightarrow	$\frac{4}{10}$	\rightarrow	$\frac{5}{12}$	\rightarrow	$\frac{6}{14}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
M_4^r	$\frac{3}{10}$	\rightarrow	$\frac{4}{12}$	\rightarrow	$\frac{5}{14}$	\rightarrow	$\frac{6}{16}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
M_5^r	$\frac{3}{12}$	\rightarrow	$\frac{4}{14}$	\rightarrow	$\frac{5}{16}$	\rightarrow	$\frac{6}{18}$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

注意. 区間 M_1^l が生じる臨界値は, 馬蹄が完成する臨界値に一致する. 我々の興味は馬蹄が完成する前の力学にある. よって M_1^l における周期軌道は考えない. 次に, M_2^r で生じる周期軌道を見つける方法がないため, M_2^r における周期軌道も考えない. 以下では表 1.1(a) の順序関係のみ証明する. 同様の手法で, 他の順序関係も証明できるので省略する.

表 1.1(a) の証明. 命題 1.6 から, 弧 $T^2L_1^l, T^3L_2^l, \dots, T\Gamma_u$ は左上から右下へとこの順に並んでいる. これらの弧のうち $S_{21}, T^2L_1^l, T^3L_2^l$ の配置を図 1.2 に描いた. $i \geq 1$ に対して, $T^{i+2}L_{i+1}^l \cap S_{21} \neq \emptyset$ は $T^{i+1}L_i^l \cap S_{21} \neq \emptyset$ を導く, そして $\Gamma_u \cap S_{21} \neq \emptyset$ は $T^{i+1}L_i^l \cap S_{21} \neq \emptyset$ を導く. この関係は表の第 1 列を意味する. 他の列に関しても同様にして証明できる.

次に第 1 行の順序関係を証明しよう. $z_n = (x_n, y_n)$ を $(2/5)_{SN} \in L_1^l$ の軌道点とする. ただし $z_0 \in L_1^l$ であるとする. 命題 1.4(a) で $k=0, m=2$ とすると, z_2 が S_{21} 上にあることが分かる. $(2/5)_{SN} \in L_1^l$ が生じたときを考えよう. つまり $T^2L_1^l$ と S_{21} は接触点 z_2 をもつ. 可逆

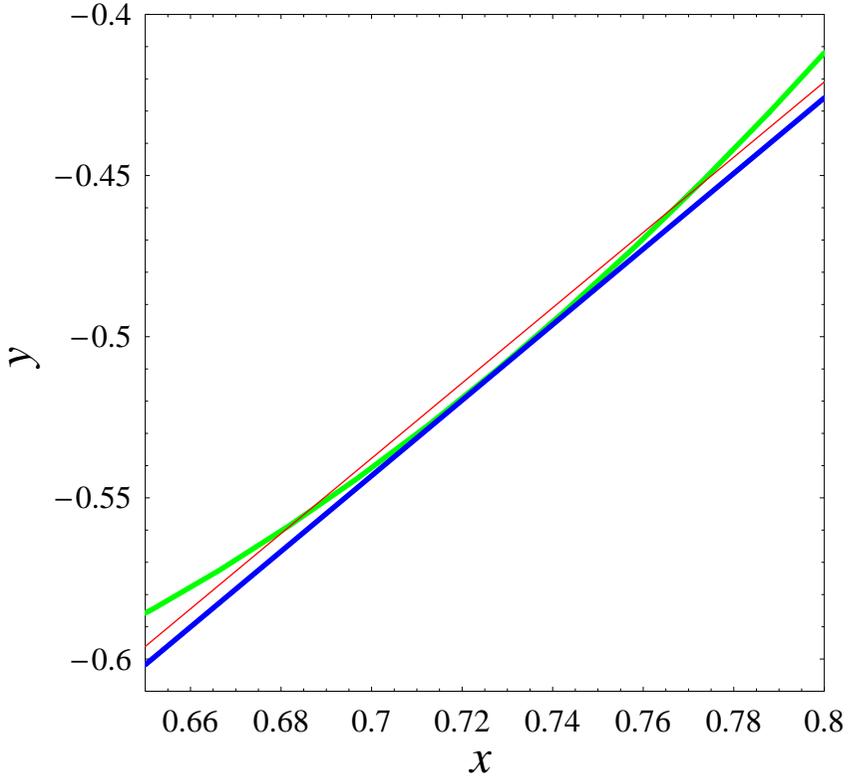


図 1.2 $(2/7)_{\text{SN}} \in L_2^I \rightarrow (2/5)_{\text{SN}} \in L_1^I$ の証明. $T^2 L_1^I$ (細線: 赤線) は S_{21} (太い曲線: 緑線) と交差している. $T^3 L_2^I$ (まっすぐな太い線: 青線) は S_{21} に接している.

性より $z_3 = gz_1$ と $z_3 = hz_2$ が得られる. $y_2 < 0$ と後者の関係より, $y_3 > 0$ が得られる.

z_3 は S_{22} の下部に, z_1 は S_{22} の上部あることを示そう. h に関する対称性と 2 つの関係 $x_0 = x_4, x_1 = x_3$ を利用して次の式が得られる.

$$y_3 - y_1 = (x_3 - x_2) - (x_1 - x_4) = x_0 - x_2. \quad (1.24)$$

$y_3 < y_1$ ならば $z_3 = gz_1$ より, z_3 は S_{22} の下部に, z_1 は S_{22} の上部にあることが分かる. このことは, $x_0 < x_2$ が成立しておれば Eq. (1.24) より簡単に導かれる. 以下では $x_0 \geq x_2$ を仮定して矛盾を導く.

$x_2 \leq x_0 < 1/2$ より $f(x_2) < f(x_0)$ が得られる. $y_2 < 0$ であることに注意すると下記の関係が得られる.

$$x_1 - x_3 = (x_0 + f(x_0)) - (x_2 + y_2 + f(x_2)) > 0. \quad (1.25)$$

一方 $z_3 = gz_1$ より $x_1 = x_3$ が得られる. よって式 (1.25) は矛盾である.

上で得た結果と命題 1.7 より, z_2 は $(Q, r^-)_{S_{21}}$ にあることが得られる. z_3 は S_{22} の下部にある. また $T^3L_1^l$ の 2 つの端点は S_{21} の下部にある. 弧 $T^3L_1^l$ は, これらの 2 つの端点をつなぐ連続曲線で途中に z_3 を含む. よって $T^3L_1^l$ は S_{21}, S_{11}, S_{22} とこの順番で交差する. 交差点 $T^3L_1^l \cap S_{22}$ は $(3/7)_{SN} \in L_1^l$ の軌道点の 1 つである. 第 1 行の最初の順序関係は証明された.

第 2 の順序関係を証明する. $z'_n = (x'_n, y'_n)$ を $(3/7)_{SN} \in L_1^l$ の軌道点とする. 弧 $(Q, r^-)_{S_{21}}$ に対して Q から r^- への向きで方向を与える, $(Q, r^-)_{S_{21}}$ の像に対しても同様に方向を与える. z'_3 は $(Q, r^+)_{S_{22}} \subset S_{22}$ にあることを証明する.

実際, $T^3L_1^l$ は z_3 に来て, $T(Q, r^-)_{S_{21}}$ に左から近づく. ここでは $T(Q, r^-)_{S_{21}}$ の方向を自然な方向としている. なぜなら $T^2L_1^l$ は z_2 に来て, $(Q, r^-)_{S_{21}}$ に左から近づくからである. ここでは $(Q, r^-)_{S_{21}}$ の方向を自然な方向としている. よって $T^3L_1^l$ は必ず $(Q, r^+)_{S_{22}}$ と交差し, その一つが z'_3 である.

次に命題 1.7 より z'_4 は S_{21} の上部にある. これは $T^4L_1^l$ が $(Q, r^-)_{S_{21}}$ と交差していることを意味している. 交差点は周期軌道 $(4/9)_{SN} \in L_1^l$ の点である. よって $(3/7)_{SN} \in L_1^l \rightarrow (4/9)_{SN} \in L_1^l$ が得られた.

一般に $\{z_n^{(k)}\}$ を $((2k)/(4k+1))_{SN} \in L_1^l$ の点, $\{z_n^{(k+1)}\}$ を $((2k+1)/(4k+3))_{SN} \in L_1^l$ の点とする. そうすると z_{2k} は $(Q, r^-)_{S_{21}}$ にあり, z_{2k+1} は $(Q, r^+)_{S_{22}}$ にあることが分かる. この事実より第 1 行は証明される. 残りの行の証明も同様である. (Q.E.D.)

1.3.2 周期軌道の生じる臨界値の関係

いくつかの臨界値を導入し, これらの間の関係を議論する. 表 1.1(a),(b) の周期軌道の位置を決めるために行列表示を用いる. 表 1.1(a) の (i, j) 要素は $((j+1)/(2(i+j)+1))_{SN} \in L_i^l$ を意味する. 例として表 1.1(a) の $(2, 3)$ 要素は $(4/11)_{SN} \in L_2^l$ である. $a_c^{1(a)}(i, j)$ を表 1.1(a) の (i, j) 要素がサドルノード分岐で生じる臨界値とする. 次に極限で定義された臨界値を考える.

$$a^*(i) := \lim_{j \rightarrow \infty} a_c^{1(a)}(i, j), \quad (1.26)$$

$$a_g(j) := \lim_{i \rightarrow \infty} a_c^{1(a)}(i, j), \quad (1.27)$$

$$a^* := \lim_{j \rightarrow \infty} (\lim_{i \rightarrow \infty} a_c^{1(a)}(i, j)). \quad (1.28)$$

これらの関係について説明する. このために Q の不安定多様体と安定多様体の構造を考える. Q が周期倍分岐をした後, Q は反射を伴うサドルとなる. よって Q の不安定多様体と安定多様体が定義できる.

$W_u^+ = W_u^+(Q)$ ($W_s^+ = W_s^+(Q)$) を Q より右方向に伸びている不安定多様体 (安定多様体) とする. 次に $W_u^- = W_u^-(Q)$ ($W_s^- = W_s^-(Q)$) を Q より左方向に伸びている不安定多様体 (安

定多様体)とする. W_u^+ (W_s^+) が S_{22} と最初に交差する点を z^+ とし, W_u^- (W_s^-) が S_{21}^- と最初に交差する点を z^- とする. $(Q, z^+)_{W_u^+}$ と $(Q, z^+)_{W_s^+}$ で囲まれた開領域を D^+ とする. また $(Q, z^-)_{W_u^-}$ と $(Q, z^-)_{W_s^-}$ で囲まれた開領域を D^- とする. 詳細は参考文献 [21] を見よ.

r と s は W_s^- と $T^2L_1^l$ の交点で, 互いに隣にあるとする. ここで δ を $(r, s)_{T^2L_1^l}$ と $(r, s)_{W_s^-}$ で囲まれた開領域で, D^- に含まれているとする. 2つの点の未来への像は Q へと漸近する. 面積保存性より $T^{n_0+2}L_1^l$ が $(Q, r^-)_{S_{21}}$ と交差する整数 n_0 (≥ 0) が, 必ず存在する. 交差点は $((n_0 + 2)/(2n_0 + 5))_{SN} \in L_1^l$ の点である. $T^2L_1^l$ が W_s^- と 2点で交差する限り, 表 1.1(a) の第 1 行の周期軌道は存在する. 同様に $T^{i+1}L_i^l$ が W_s^- と 2点で交差する限り, 表 1.1(a) の第 i 行の周期軌道は存在する. よって $a^*(i)$ は弧 $T^{i+1}L_i^l$ が W_s^- と最初に接触する臨界値である. Γ_u が S_{21} に接触すると, すべての $T^{i+1}L_i^l$ ($i \geq 1$) は S_{21} と交差する. 同様に $T^{j-1}\Gamma_u$ が S_{21} と接触すると, すべての $T^{i+j}L_i^l$ ($i \geq 1$) は S_{21} と交差する. よって $a_g(j)$ ($j \geq 1$) は $T^{j-1}\Gamma_u$ が S_{21} と最初に接触するパラメータ値であることが分かる. Γ_u が W_s^- と接触すると, すべての $T^{i+1}L_i^l$ ($i \geq 1$) は W_s^- と交差する. よって a^* は Γ_u が W_s^- と接触するパラメータ値である.

数値的にいくつかのパラメータ値を計算する. 例として $a^*(1) = 4.55$, $a^* = 4.59$, $a_g(1) = 5.17661$ ($= a_{hs}$), $a_g(2) = 4.77$. これより定理 1.1 が適用できるパラメータ領域は $4.55 < a < 5.17661$ であることが分かる.

定理 1.1 に含まれない無数の対称周期軌道が存在する. 我々は, これらに対する力学的順序を決める方法を知らない. 今後の課題である.

1.3.3 擬アノソフ性質

この小節では, エノン写像で表 1.1(a),(b) の対称周期軌道が生じる臨界値に対して相対的エントロピーの下限を計算する. 計算方法として 2つの方法を利用する. 一つの方法は, 我々が他の系¹³⁾⁻¹⁵⁾ で利用した組み紐を利用する方法である. 二つ目の方法は馬蹄の中の軌道に対する記号列を用いる方法で, ホール²³⁾ によって利用された方法である.

Z から Z への組み紐を構成しよう. 表 1.1(a)-(d) の (i, j) 要素の周期軌道の組み紐を $\beta_{i,j}^{1(z)}$ と表す. z は $a - d$ を表す. 図 1.3 に表 1.1(a) の $(1, 1)$ 要素である $(2/5)_{SN} \in L_1^l$ の組み紐の構成の仕方を描いてある. 上面の Z から下面の Z までの間に組み紐がどのように絡むのかを見るために, Q から Q への組み紐を追加してある. 最後にこの紐は取り除く. そして組み紐を生成元 σ_i^{-1} で表示する. 得られた結果を次に示す.

$$\beta_{1,1}^{1(a)} = \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sim \rho_3^{-1} \rho_5^{-1}. \quad (1.29)$$

ここで $\rho_k^{-1} = \sigma_{k-1}^{-1} \sigma_{k-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}$.

ライデマイスター移動とマルコフ移動を行うと, 式 (1.29) の最後の関係を得られる. 式 (1.29) の記号 \sim は 2つの組み紐がマルコフ同値であることを意味している.²²⁾

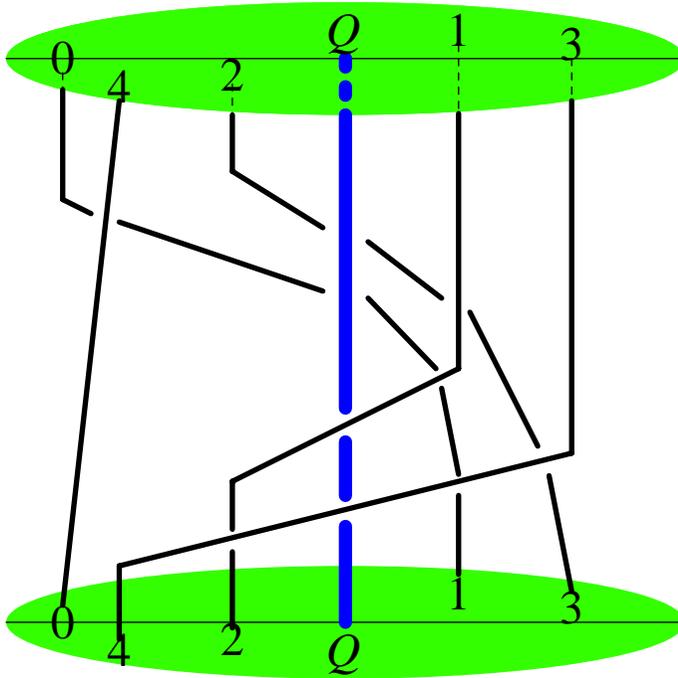


図 1.3 $(2/5)_{SN} \in L_1^i$ に対する組み紐 $\beta_{1,1} = \sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$. $i (= 0, 1, \dots, 4)$ は軌道点 z_i を表す. 上下の楕円面は Z を表している. 中央の太い線は Q から Q への組み紐を表す.

ホールの方法を適用するためには馬蹄を完成させる必要がある. 図 1.4 に馬蹄が完成したときの安定多様体と不安定多様体を描いてある. 臨界値は $a_{hs} = 5.17661$ である. ここで軌道の記号を次のようにして決める. Z の過去への像と Z の共通部分は 2 つある. P を含む部分に軌道があれば記号 0 を与え, Q を含む部分にあれば 1 を与える. 馬蹄が完成後の Z の中の最大の不变集合を Ω とする. この Ω が馬蹄の本体である. Ω はコントロール集合である. 定理 1.1 で得られたすべての対称周期軌道は Ω 中にある.

馬蹄の中の任意の点は記号 0 と 1 の両側無限列で表現される. 周期軌道の場合は特殊な語の繰り返しとなる. ここで表 1.1(a) の (i, j) 要素の記号列を $s_{i,j}^{1(z)}$ と記す. 他の表 (b)-(d) についても同様の表現を用いる. 例として $(2/5)_{SN} \in L_1^i$ は, 実際は 2 つの軌道を表している. 下記の下記の 2 つの表現を持つ.

$$s_{1,1}^{1a} = 1^3 0^2, 1010^2 \tag{1.30}$$

ここで省略形 $1^3 = 111, 0^2 = 00$ を用いた. 2 つの軌道の違いは図 1.5 を見ることで理解できるであろう. 図 1.5 の上図で描かれた軌道がサドル軌道であり, その記号列は $1^3 0^2$ である. 下図は反射を伴うサドル軌道であり, その記号列は 1010^2 である.

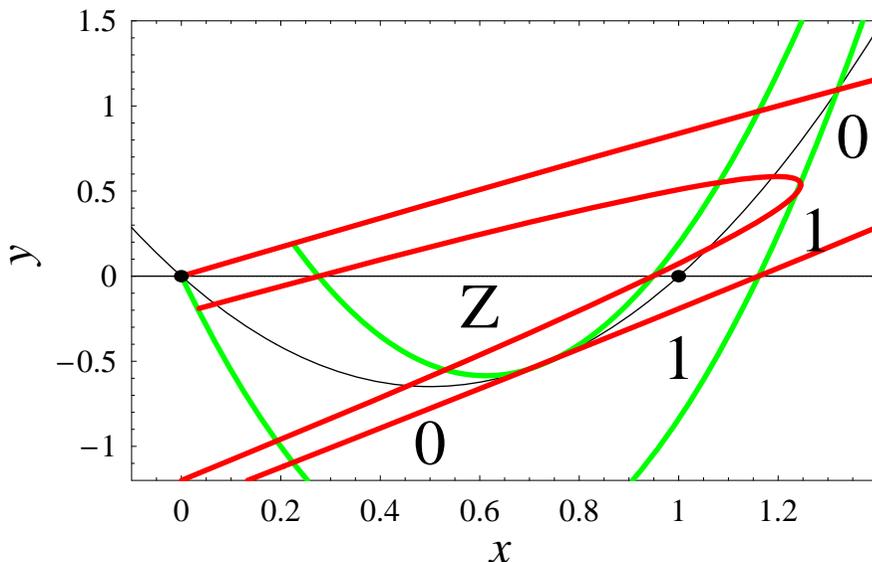


図 1.4 周期軌道の符号化法. 2つの対称線は細い線で表現されている. 2つの不動点 P と Q は小さな黒い円盤で示されている.

表 1.1(a),(b) の各要素に対する組み組 $\beta_{i,j}^{1(a)}, \beta_{i,j}^{1(b)}$ ならびに記号列 $s_{i,j}^{1(a)}, s_{i,j}^{1(b)}$ を決定することができる. 結果は表 1.2 に載せてある. ここでは上付きの添え字は省略した.

表 1.2.

	(a) ($i, j \geq 1$)	(b) ($i \geq 2, j \geq 1$)
$\beta_{i,j}$	$\rho_{2j+1}^{-j} \rho_{2i+2j+1}^{-1}$	$\rho_{2j+1}^{-j} \rho_{2i+2j}^{-1}$
$s_{i,j}$	$1^{2j+1} 0^{2i}$ $1010^{2i} (j = 1)$ $101^{2j-3} 010^{2i} (j \geq 2)$	$1^{2j+1} 0^{2i-1}$ $1010^{2i-1} (j = 1)$ $101^{2j-3} 010^{2i-1} (j \geq 2)$

表 1.1(a),(b) における (i, j) 要素の対称周期軌道の生じる臨界値を数値計算する. 更に, ホール²³⁾ の開発したソフトウェアを利用して位相的エントロピーの下限を計算する. このとき記号列を利用する. 上記で得られた組み組のビューロー (Burau) 行列表示を利用して位相的エントロピーの下限を計算した. 2つの方法で得られた値は同じであることを

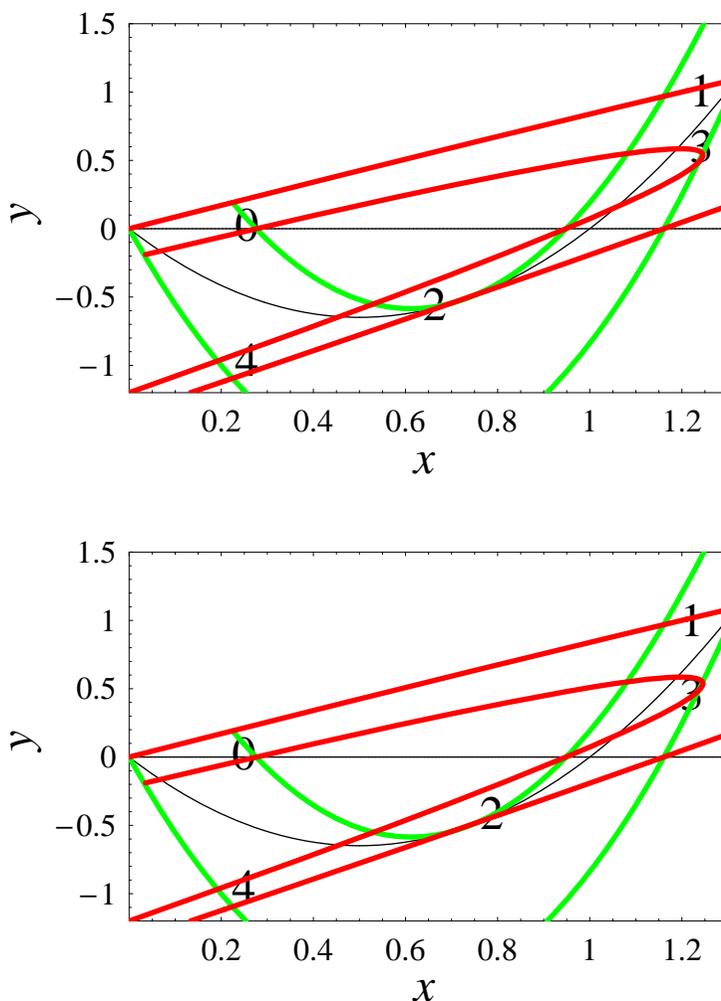


図 1.5 $(2/5)_{\text{SN}} \in L_1^I$ の 2 つの軌道. これらは馬蹄の中にある. 数字 i は軌道点 z_i を意味する. 上の軌道の記号列は 01110 で, 下の軌道の記号列は 01010 である.

確認した.

表 1.3 に, 周期が 5 から 14 までの対称周期軌道の最大固有値 λ_{\max} と臨界値を記載した. 位相的エントロピーの下限は $\ln \lambda_{\max}$ である. 式 (1.27) から期待されていたように $\ln \lambda_{\max}$ は急速に $\ln 2$ に収束している,

周期軌道の「高さ」という概念はホールによって導入された.⁸⁾ $(p/q)_{\text{SN}}$ を表 1.1(a),(b) の軌道とする. $(p/q)_{\text{SN}}$ の高さは組み紐型の不変量で, 値は $(0, 1/2]$ である. 力学的な意味は $(p/q)_{\text{SN}}$ に対する回転数区間の左端点の値である. 表 1.3 に軌道の高さを記載した. こ

の値は $(p/q)_{\text{SN}} \in L_i^l$ ($i \geq 1$) に対しては $1/(2i+1)$ であり, $(p/q)_{\text{SN}} \in M_i^l$ ($i \geq 2$) に対しては $1/(2i)$ である. 高さは命題 1.8 で得られた周期軌道の回転数に等しいことが分かる.

表 1.3 より 2 つの周期軌道 η と η' を選ぶ. η から計算される位相的エントロピーの下限を $h_{\text{op}}(\eta)$ とし, $H(\eta)$ をその高さとする. η' に対しても同様な量を定義する. ホール^{8),10)} が証明した定理は, $h_{\text{op}}(\eta) > h_{\text{op}}(\eta')$ ならば, $H(\eta) \leq H(\eta')$ が成立することを述べている. この事実は表 1.3 より確認できる.

表 1.3.

軌道	高さ	λ_{max}	臨界値	軌道	高さ	λ_{max}	臨界値
$2/5 \in L_1^l$	1/3	1.722	5.119	$2/6 \in M_2^l$	1/4	1.883	5.169
$2/7 \in L_2^l$	1/5	1.946	5.1755	$2/8 \in M_3^l$	1/6	1.974	5.176
$3/7 \in L_1^l$	1/3	1.610	4.735	$3/8 \in M_2^l$	1/4	1.765	4.771
$2/9 \in L_3^l$	1/7	1.987	5.1765	$2/10 \in M_4^l$	1/8	1.994	5.1766
$3/9 \in L_2^l$	1/5	1.831	4.776	$3/10 \in M_3^l$	1/6	1.861	4.777
$4/9 \in L_1^l$	1/3	1.562	4.602	$4/10 \in M_2^l$	1/4	1.722	4.637
$2/11 \in L_4^l$	1/9	1.997	5.17660	$2/12 \in M_5^l$	1/10	1.998	5.176605
$3/11 \in L_3^l$	1/7	1.875	4.7775	$3/12 \in M_4^l$	1/8	1.883	4.7776
$4/11 \in L_2^l$	1/5	1.790	4.642	$4/12 \in M_3^l$	1/6	1.822	4.643
$5/11 \in L_1^l$	1/3	1.540	4.562	$5/12 \in M_2^l$	1/4	1.705	4.600
$2/13 \in L_5^l$	1/11	1.9992	5.176605	$2/14 \in M_6^l$	1/12	1.9996	5.1766052
$3/13 \in L_4^l$	1/9	1.886	4.77761	$3/14 \in M_5^l$	1/10	1.888	4.77762
$4/13 \in L_3^l$	1/7	1.838	4.6436	$4/14 \in M_4^l$	1/8	1.846	4.6436
$5/13 \in L_2^l$	1/5	1.776	4.6051	$5/14 \in M_3^l$	1/6	1.809	4.605
$6/13 \in L_1^l$	1/3	1.530	4.552	$6/14 \in M_2^l$	1/4	1.699	4.590

1.3.4 応用

定理 1.1 の証明では, 関数 $f(x)$ そのものを利用していない. 平面の写像として下記のような写像を考えよう.

$$y_{n+1} = y_n + a\Psi(x_n), \quad (1.31)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, \quad (1.32)$$

ここで次のような条件が成立しているとする.

[1] $a > 0$.

[2] $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$, $\Psi(x) > 0$ ($0 < x < 1$), $\Psi(x) < 0$ ($x > 1$), $\Psi'(0) > 1$, $\Psi'(1) < 0$.

[3] $\Psi(x)$ は $0 < x < 1$ において極大を一つもつ.

以上の性質より, この写像は可逆であり, $y = 0$ と $y = -a\Psi(x)/2$ を対称線としてもつ. これらの性質はエノン写像と同じである. よって不動点 $(1, 0)$ の周りにおける対称線の写像による振る舞いも同じである. 例としてロジ写像 ($\Psi_L(x) = x$ ($0 \leq x \leq 1/2$), $1-x$ ($1/2 < x$)) とか 3 次関数写像 ($\Psi_c(x) = x - x^3$) はこれらの条件を満たす. よってあるパラメータ領域で定理 1.1 は成立し, 擬アノソフ性質も成立する.

参考文献

- [1] S. Smale, Bull Am. Math. Soc. **73** (1967), 747.
- [2] M. Hénon, Commun. Math. Phys. **50** (1976), 69.
- [3] R. Devaney and Z. Nitecki, Commun. Math. Phys. **67** (1979), 137.
- [4] A. Sannami, J. J. Appl. Math. **6** (1989), 291.
- [5] O. Biham and W. Wenzel, Phys. Rev. Lett. **63** (1989), 819.
- [6] O. Biham and W. Wenzel, Phys. Rev. A **42** (1990), 4639.
- [7] M. J. Dabis, R. S. Mackay and A. Sannami, Physica D **52** (1991), 171.
- [8] T. Hall, Nonlinearity **7** (1994), 861.
- [9] A. de Carvalho, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **19** (1999), 851.
- [10] A. de Carvalho and T. Hall, Exper. Math. **11** (2002), 271.
- [11] P. Boyland, Topology and its Appl. **58** (1994), 223.
- [12] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, Chaos **12** (2002), 33.
- [13] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 1117.
- [14] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **108** (2002), 231.
- [15] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **110** (2003), 861.
- [16] R. Devaney, J. Diff. Eq. **51** (1984), 254.
- [17] R. Brown, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15** (1995), 1045.
- [18] A. Tovbis, M. Tsuchiya and C. Jaffe, Chaos **8** (1998), 665.
- [19] J. Franks, Publ. Math. IHES **71** (1990), 105.
- [20] R. de Vogelaere, in *Contributions to the Theory of Oscillations*, Vol. IV, Ann. Math. Studies No. 41 (Princeton University Press, 1958).
- [21] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, Prog. Theor. Phys. **109** (2003), 187.
- [22] K. Murasugi, *Knot Theory & Its Applications* (Birkhäuser, 1996).
- [23] T. Hall, *Trains*³
http://www.liv.ac.uk/math/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html

第 2 章

エノン写像における一般化力学的順序と位相的エントロピー

面積保存かつ方向保存写像では, 対称線の像はサドル不動点 P の不安定多様体に漸近する. 一方過去への像は P の安定多様体に漸近する. 安定多様体と不安定多様体の接触の前後で 4 つの一般化力学的順序が導かれる. これらは対称周期軌道の出現順序を決定する. 面積保存かつ方向保存エノン写像に対してこれらの力学的順序を導いた. これらに含まれる対称周期軌道の記号列またはトレリス法を用いて位相的エントロピーの下界を計算した.

2.1 序

サドル不動点またはサドル周期点の安定多様体と不安定多様体の接触は非常に興味ある現象を引き起こす.¹⁾ つまり安定多様体と不安定多様体の接触から交差への過程で系の複雑さが増大する. そのために多くの研究がなされている. 写像が 2 つの対合の積で記述される時, 系は可逆であると言われる.²⁾ この系は対称線を持つ.³⁾ 対称線の未来への像はサドル不動点の不安定多様体に漸近し, 過去への像は安定多様体に漸近する. その結果, 安定多様体と不安定多様体の接触の前後で無限個の対称周期軌道がサドルノード分岐または同周期分岐で生じる. これらの周期軌道に対する力学的順序 (DO) が決定できる. この DO は 2 次元の順序関係として表現される.^{4),5)} DO に含まれる周期軌道の情報を利用して位相的エントロピーの下界 h_{top} を決めることができる.^{6),7)} つまり DO は安定多様体と不安定多様体の接触の前後における系の複雑さに関する情報を与えてくれる. 以下では DO を利用して系の複雑さを解析する方法を力学的順序法 (DOM) と呼ぶ.

コリンズによって開発されたトレリス法は位相的エントロピーの下界 h_{top} を決める有効な手法である. この方法はトレリスを用いる. トレリスとはサドル不動点の安定多様体と不安定多様体の絡まりの有限部分である. h_{top} を計算するにあたっては, 安定多様体と不安

定多様体の交差の状況より接触の状況が、より簡単にトレリスに対応する適正グラフを構成できる。そのため以下では接触の状況のみを考える。また別の方法として DO に含まれる周期軌道の組み紐または記号列を構成し位相的エントロピーを計算する方法もある。これらの方法を利用する場合は、ホール⁹⁾によって開発されたソフトウェア *Trains3* を利用すると便利である。

上で述べた方法はニールセン・サーストン理論 (NT)¹⁰⁻¹²⁾ をベースとしている。線路算法 (Train track method: TTM) は NT のアルゴリズム的な証明である。¹³⁾ トレリス法の有効性の証明も TTM を利用して行われた。我々は適正グラフまたは組み紐 (記号列) を構成した後に遷移行列 M を決定する。行列 M の最大固有値 λ_{\max} が得られると、位相的エントロピーの下界は $h_{\text{top}} \geq \ln \lambda_{\max}$ と決まる。^{7),13)}

この論文では面積保存かつ方向保存エノン写像の力学的順序の族を導く。¹⁴⁾ 我々は h_{top} を求めるためにトレリス法と DOM を利用する。 (x, y) 平面における面積保存かつ方向保存エノン写像 T_H のオリジナルな表現を以下に示す。

$$y_{n+1} = x_n + 1 - \tilde{a}y_n^2, \quad (2.1)$$

$$x_{n+1} = -y_n. \quad (2.2)$$

ここで $\tilde{a} > 0$ はパラメーターである。座標変換とスケール変換を行うと T_H は次のようなシンプレクティック形式の写像 T として書ける。

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad (2.3)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (2.4)$$

ここで $f(x) = a(x - x^2)$ ($a > 0$)。 T は $P = (0, 0)$ と $Q = (1, 0)$ の2つ不動点をもつ。 P はサドルであり、一方 Q は $0 < a < 4$ では楕円点、 $a > 4$ では反転型サドルである。 $a = 4$ で、 Q は周期倍分岐を起こす。シンプレクティック形式の写像 T は P の安定多様体と不安定多様体の構造また対称線の構造を理解する際に便利である。以下では T を用いてエノン写像の解析を行う。

ビーハム・ウェンツェル^{15),16)} によって開発された巧妙な数値計算法を用いるとエノン写像の周期点の個数を調べることができる。^{17),18)} ここでパラメーター a を固定し、 q_{\max} を最大の周期数とする。この最大周期数までの周期軌道の総数を $N_{q_{\max}}(a)$ とする。文献 17) では q_{\max} は 20、文献 18) では 24 である。 $N_{q_{\max}}(a)$ のグラフにはいくつかの興味ある性質がある。まず $N_{q_{\max}}(a)$ は a に関して単調増大関数である。 $N_{q_{\max}}(a)$ のグラフには多くの平坦区間が存在している。これより h_{top} は a に関して単調増大関数であり、その値が一定である区間があることが分かる。これらを説明するために枝刈り理論をはじめとしていくつかのアルゴリズムが開発されている。¹⁹⁾

$N_{q_{\max}}(a)$ のグラフの平坦区間の2つの端点は P の安定多様体と不安定多様体の接触と関係している。よって h_{top} を計算するためにトレリス法を平坦区間の両端の状況に対して用いる。また両端の近傍においては DOM を利用する。

これから a_{hs} を写像 T において馬蹄が完成する臨界値とする. 臨界値の数値計算による値は $5.1766\dots$ である. この臨界値より少し小さいパラメーター領域において, h_{top} と $N_{q_{max}}(a)$ の振る舞いは非常に詳しく調べられている.¹⁷⁻¹⁹⁾ 我々もこのパラメーター領域について §4 で詳しく調べる. 最大の平坦区間は $3.242 < a < 4.045$ にある.¹⁸⁾ この領域については §5 で調べる.

§2 では以下で使用する基本的な概念と道具について説明する. 4つのタイプの力学的順序を §3 で導く. 位相的エントロピーの下界の計算は §4 と §5 で行う. 最後の §6 で, 平坦区間と双曲性の関係等を議論する.

2.2 基本的道具

2.2.1 対称線とホモクリニックローブ

エノン写像 T は可逆 (パークフの意味での) である. すなわち T は2つの対合 h と g の積で以下のように表現される.

$$T = h \circ g. \quad (2.5)$$

ここで対合 h と g は下記のように定義される.

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - f(x) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -y \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

$\det \nabla h = \det \nabla g = -1$ であることに注意する. h と g の不動点の集合は対称線と呼ばれる.³⁾ h に関する対称線を S_1 と, g に関する対称線を S_2 とする.

$$S_1 = \{(x, y) : y = 0\}, \quad (2.8)$$

$$S_2 = \{(x, y) : y = -f(x)/2\}. \quad (2.9)$$

$W_u = W_u(P)$ を P から右上方向に出ている不安定多様体とする. また $W_s = W_s(P)$ を右下方向から P に入る安定多様体とする. これらの構造と対称線の関係を説明する. 安定多様体 W_s は最初に S_1 と v で横断的に交差し, 次に S_2 と u で交差する. 不安定多様体 W_u は最初に S_2 と u で交差し, 次に S_1 と v で交差する. W_s と W_u が u と v で横断的に交差することはすでに証明されている.²⁰⁾ u と v はプライマリーホモクリニック交差点である.

1次元多様体 A の開弧を $(\alpha, \beta)_A$ と記す. 多様体 A の方向を自然な方向にとる. 左の端点 α が右の端点 β に比べ上流にあるとする. 閉弧は $[\alpha, \beta]_A$ と, 半開弧は $(\alpha, \beta]_A$ と記す. ここで4つの開弧 $\gamma_u = [u, v]_{W_u}$, $\gamma_s = [u, v]_{W_s}$, $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u}$, $\Gamma_s = [v, Tu]_{W_s}$ を用意する. γ_u と γ_s で囲まれた開領域をホモクリニックローブ U とする. また Γ_u と Γ_s で囲まれた開領域

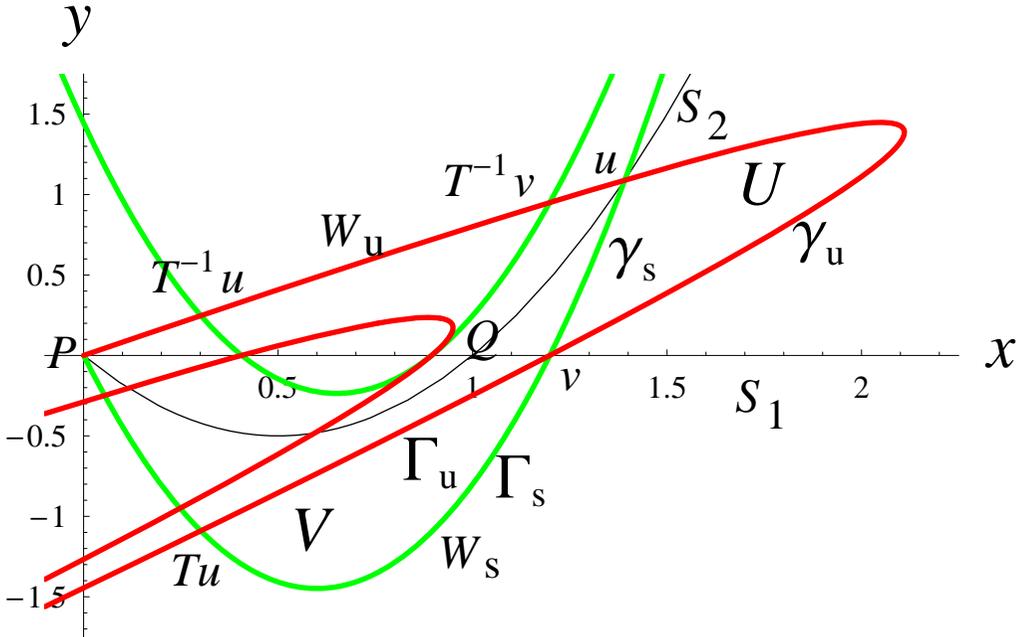


図 2.1 サドル不動点 P の安定多様体を W_s , 不安定多様体を W_u とする. U と V はホモクリニックローブ, u と v は横断的ホモクリニック交差点である. 2つの対称線は S_1 (x 軸) と S_2 で表されている. $a = 4$.

をホモクリニックローブ V とする. 4つの弧 $[P, u]_{W_u}$, $[u, v]_{W_s}$, $[v, Tu]_{W_u}$, $[Tu, P]_{W_s}$ で囲まれた閉領域を Z とする. これらは図 2.1 に描かれている.

次に馬蹄が丁度完成した状況 ($a = a_{hs}$) を考えよう. 記号 $\text{int}\{A\}$ は集合 A の内点を表す. 図 2.2 では $\text{int}\{TZ \cap T^{-1}Z\}$ は4つの領域に分かれている. サドル P は領域 $V_0 \cap H_0$ に含まれている. もう一つの不動点 Q は $V_1 \cap H_1$ に含まれている. $a \geq a_{hs}$ において, 位相的エントロピーの下界は $h_{\text{top}} = \ln 2$ である. もし軌道点が V_0 にあるならば, その点の記号は 0 とする. また V_1 にあるならば記号は 1 とする. この規則にしたがって周期軌道の記号列を決めることができる.

次の命題 2.1 は $N_{q_{\text{max}}}(a)$ のグラフの平坦部分の起源を考えるときに必要になる. 証明は文献 5) にある.

命題 2.1. ホモクリニックローブ U と V の中に周期点は存在しない.

2.2.2 対称線上の区間

以下で使用する対称線の4つの部分に名前を付けておく.

$$S_{11} \equiv \{(x, y) : y = 0, 0 < x < 1\}, \quad (2.10)$$

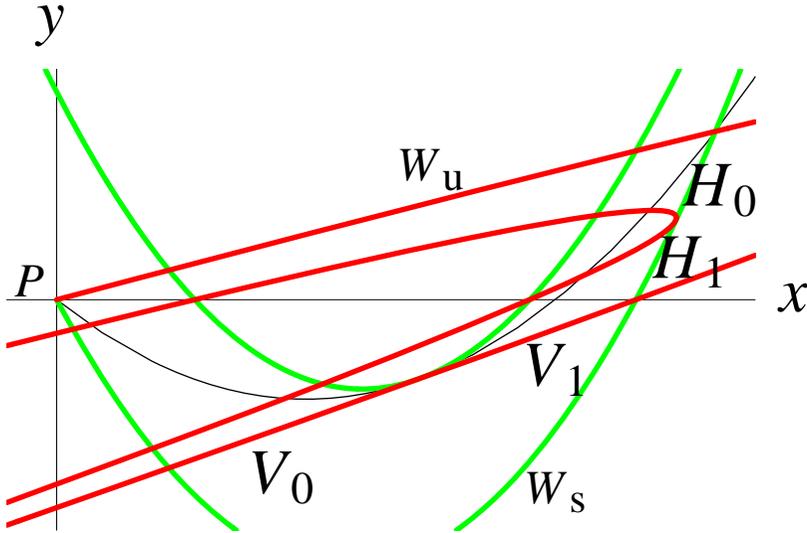


図 2.2 馬蹄が丁度完成したときの W_s と W_u の構造. 縦の 2 つのベルト ($Z \cap T^{-1}Z$) を V_0 と V_1 とする. 一方横の 2 つのベルト ($Z \cap TZ$) を H_0 と H_1 とする.

$$S_{12} \equiv \{(x, y) : y = 0, 1 < x < \pi_1(v)\}, \quad (2.11)$$

$$S_{21} \equiv \{(x, y) : y = -f(x)/2, 0 < x < 1\}, \quad (2.12)$$

$$S_{22} \equiv \{(x, y) : y = -f(x)/2, 1 < x < \pi_1(u)\}. \quad (2.13)$$

ここで $\pi_1(z)$ は点 z の x 座標を表し, $\pi_2(z)$ は y 座標を表すものとする.

次に S_{11} と S_{21} 上に区間を定義する.

$$I_i \equiv T^{-i}U \cap S_{11} = (A_i, B_i), \quad (2.14)$$

$$L_i \equiv (B_{i+1}, A_i), \quad (2.15)$$

$$J_i \equiv T^{-i}U \cap S_{21} = (C_i, D_i), \quad (2.16)$$

$$M_i \equiv (D_{i+1}, C_i). \quad (2.17)$$

ここで $i \geq 1$ に対して関係 $\pi_1(A_i) < \pi_1(B_i)$ と $\pi_1(C_i) < \pi_1(D_i)$ が成立する.

点 z_0 の軌道を $O(z_0) = \{\dots, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots\}$ で表す. もし z_0 が周期 q の周期点の一つであるとするなら, その軌道を $O(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{q-1}\}$ と書く. 対称周期軌道 $O(z_0)$ の場合, $z_0 \in L_i, z_k \in M_j$ が成立する. ただし, これらの間の軌道点 $z_m (0 < m < k)$ はいかなる対称線上にもないとする. この周期軌道の周期は $q = 2k + 1$ であることがド・ヴォジュラエ³⁾ の定理より分かる. これらの周期軌道の出現順序を §3 で導く.

次の命題 2.2 は対称線の未来の像が不安定多様体に漸近し, 過去への像が安定多様体に漸近することを意味している. これらの関係はラムダ補題より証明できる.²¹⁾

命題 2.2.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+1} L_i = \Gamma_u = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+2} M_{i+1}, \quad (2.18)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{-(i+1)} L_i = \gamma_s = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{-(i+1)} M_{i+1}. \quad (2.19)$$

2つの関係式 $hT^{i+1}L_i = T^{-(i+1)}hL_i = T^{-(i+1)}L_i$ と $hT^{i+2}M_{i+1} = gT^{i+1}M_{i+1} = T^{-(i+1)}gM_{i+1} = T^{-(i+1)}M_{i+1}$ を利用すると, 式 (2.19) は式 (2.18) より導出できる. Γ_u の方向を自然な方向としてとると, 式 (2.18) の L_i と M_{i+1} の像は Γ_u の右側にある. 式 (2.19) の L_i と M_{i+1} の過去への像は γ_s の右側にある.

2.2.3 トレリス法と DOM の解説

トレリス法と DOM 法について簡単に説明する.

トレリス法のアルゴリズム⁸⁾

- [1] 安定多様体と不安定多様体の部分でトレリスを構成する.
- [2] トレリスの安定多様体部分に制御辺 (c-辺) を描く.
- [3] 隣接する 2 つの制御辺を 1 本の拡張辺 (e-辺) で結ぶ. c-辺と e-辺の集合を適正グラフ \mathcal{G} と呼ぶ.
- [4] c-辺の像を確定する.
- [5] c-辺を含んでいない \mathcal{G} の辺の不変集合があれば, これらの辺は点につぶす.
- [6] 遷移行列に寄与しない拡張辺を消去する. こうして得られた単純化されたグラフを $\widehat{\mathcal{G}}$ とする.
- [7] 遷移行列 M を構成し, その固有値を計算する. 最大固有値を λ_{\max} とすると位相的エントロピーの下界は $\ln \lambda_{\max}$ と得られる.

DOM の手順

- [1] 安定多様体と不安定多様体の接触状況を考える.
- [2] 接触の前後でサドルノード分岐で生じる対称周期軌道の出現順序 (DO) を構成する.
- [3] DO に含まれる周期軌道の記号列を決定する.
- [4] この記号列とホルルの開発した *Trains3* を用いて遷移行列の最大の固有値 $\hat{\lambda}_{\max}$ を計算する. 位相的エントロピーの下界は $\ln \hat{\lambda}_{\max}$ で与えられる.

2.3 力学的順序

2.3.1 定理

定理 2.1. $k \geq 0$ と $k' \geq 0$ を整数とするが、同時に 0 にならないとする. $T^k \Gamma_u$ と $T^{-k'} \gamma_s$ が $a = a_c(k'')$ で 2 次接触すると仮定する. ここで $k'' = k + k'$ である. 更に $a > a_c(k'')$ で両者は横断的交差をすると仮定する. $a = a_c(k'')$ で $T^k \Gamma_u$ と $T^{-k'} \gamma_s$ が接触しているときに存在している区間 L_i の添字 i を $i_c(k'')$ (i_c と略記) とする. そうすると下記のタイプ I から IV までの力学的順序が成立する.

表 2.1(a) タイプ II 力学的順序.

	M_{i_c+1}	\Rightarrow	M_{i_c+2}	\Rightarrow	M_{i_c+3}	\Rightarrow
L_{i_c}	$2(k+k') + 4i_c + 5$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\leftarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{i_c+1}	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\leftarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{i_c+2}	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\leftarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{i_c+3}	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 15$	\leftarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	

表 2.1(b) タイプ II 力学的順序.

	M_{i_c+1}	\Rightarrow	M_{i_c+2}	\Rightarrow	M_{i_c+3}	\Rightarrow
L_{i_c}	$2(k+k') + 4i_c + 5$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\leftarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{i_c+1}	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\leftarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{i_c+2}	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\leftarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{i_c+3}	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\leftarrow	$2(k+k') + 4i_c + 15$	\leftarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	

表 2.1(c) タイプ III 力学的順序.

	M_{i_c+1}	\Rightarrow	M_{i_c+2}	\Rightarrow	M_{i_c+3}	\Rightarrow
L_{i_c}	$2(k+k') + 4i_c + 5$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\rightarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{i_c+1}	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\rightarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{i_c+2}	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\rightarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{i_c+3}	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 15$	\rightarrow
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow	

表 2.1(d) タイプ IV 力学的順序.

	M_{i_c+1}	\Rightarrow	M_{i_c+2}	\Rightarrow	M_{i_c+3}	\Rightarrow
L_{i_c}	$2(k+k') + 4i_c + 5$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\rightarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{i_c+1}	$2(k+k') + 4i_c + 7$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\rightarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{i_c+2}	$2(k+k') + 4i_c + 9$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\rightarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{i_c+3}	$2(k+k') + 4i_c + 11$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 13$	\rightarrow	$2(k+k') + 4i_c + 15$	\rightarrow
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow	

注意事項. 表 2.1(a)–(d) の読み方等について説明する.

- 1) 左と上部の箱の中に記載されている L_i ならびに M_i は §2.2 で定義された対称線上の区間の名称である. 右矢印 (\Rightarrow) は区間の出現順序を表している. 例として $M_{i_c+1} \Rightarrow M_{i_c+2}$ は区間 M_{i_c+1} 存在すれば必ず M_{i_c+2} が存在することを意味している. 下矢印 (\Downarrow) も同様の関係を表している.
- 2) メインの箱の中の数字はサドルノード分岐で生じる周期軌道の周期を表している. 数字の列の上部の箱に M_{i_c+1} があれば, この周期軌道は M_{i_c+1} に点をもつことを意味している. 同様に数字の行の箱 (左の箱) に L_{i_c} があれば, この軌道は L_{i_c} に点をもつ. よってこの軌道は, 2 点が対称線上にあるので対称周期軌道である.
- 3) 行が L_{i_c+m} で列が M_{i_c+l} ならば, その周期は $2(k+k') + 4i_c + 2(l+m) + 3$ である. この軌道の初期点 z_0 は L_{i_c+m} にあり, $z_{k+k'+2i_c+l+m+1}$ は M_{i_c+l} にある.
- 4) 左矢印記号 (\Leftarrow) は 2 つの周期軌道の出現順序を表している. 例として

$$q' \Leftarrow q \quad (2.20)$$

は、「 q は q' を強制する」と読む。これは「周期 q の周期軌道点があれば周期 q' の軌道点がある」を意味する。他の記号 ($\rightarrow, \uparrow, \downarrow$) も同様の意味で使用する。

証明. 2つの弧 γ_s と Γ_u は v 以外に共通点を持たない。よって定理 2.1 より $k = k' = 0$ の場合を排除できる。

任意の $m (\geq 0)$ に対して区間 L_{i_c+m} が存在すれば、区間 M_{i_c+m+1} は必ず存在する。実際、 $T^{-1}A_{i_c+m} (= g \circ hA_{i_c+m} = gA_{i_c+m})$ は対称線 S_{21} の下部にある。なぜなら A_{i_c+m} は S_{21} の上部にあるからである。更に、任意の $m (\geq 1)$ に対して $L_m \Rightarrow L_{m+1}$ と $M_m \Rightarrow M_{m+1}$ が成立する。よって区間に関する順序は証明された。

区間 TM_{i_c+m+1} は L_{i_c+m} と $T^{-i_c-m-1}\Gamma_u$ の間に位置している。 $m = 0$ の場合の、これらの区間の関係は図 2.3 に示してある。

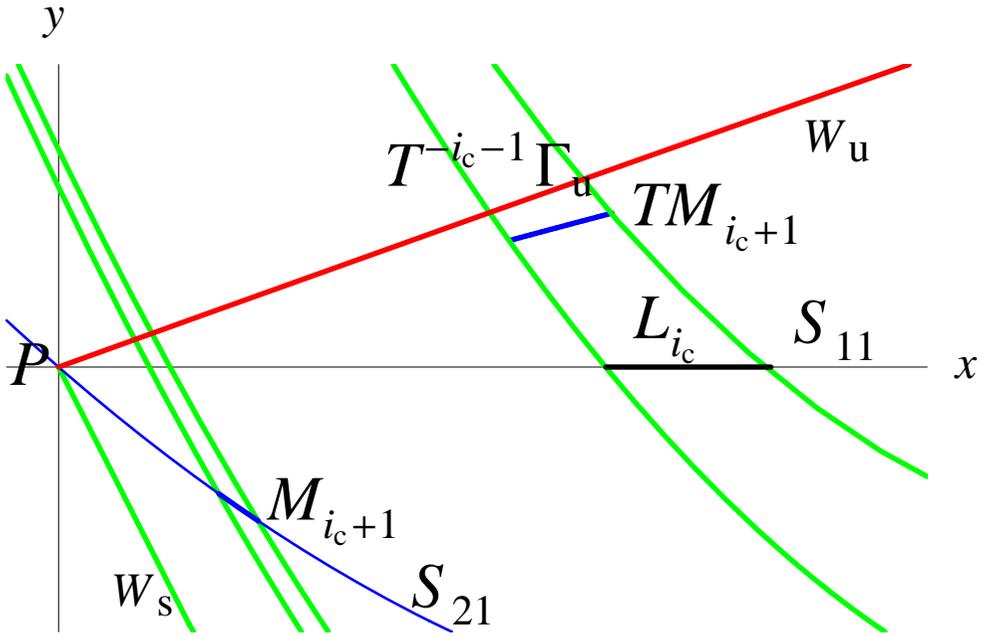


図 2.3 3つの区間 $T^{-i_c-1}\Gamma_u, TM_{i_c+1}, L_{i_c}$ の配置.

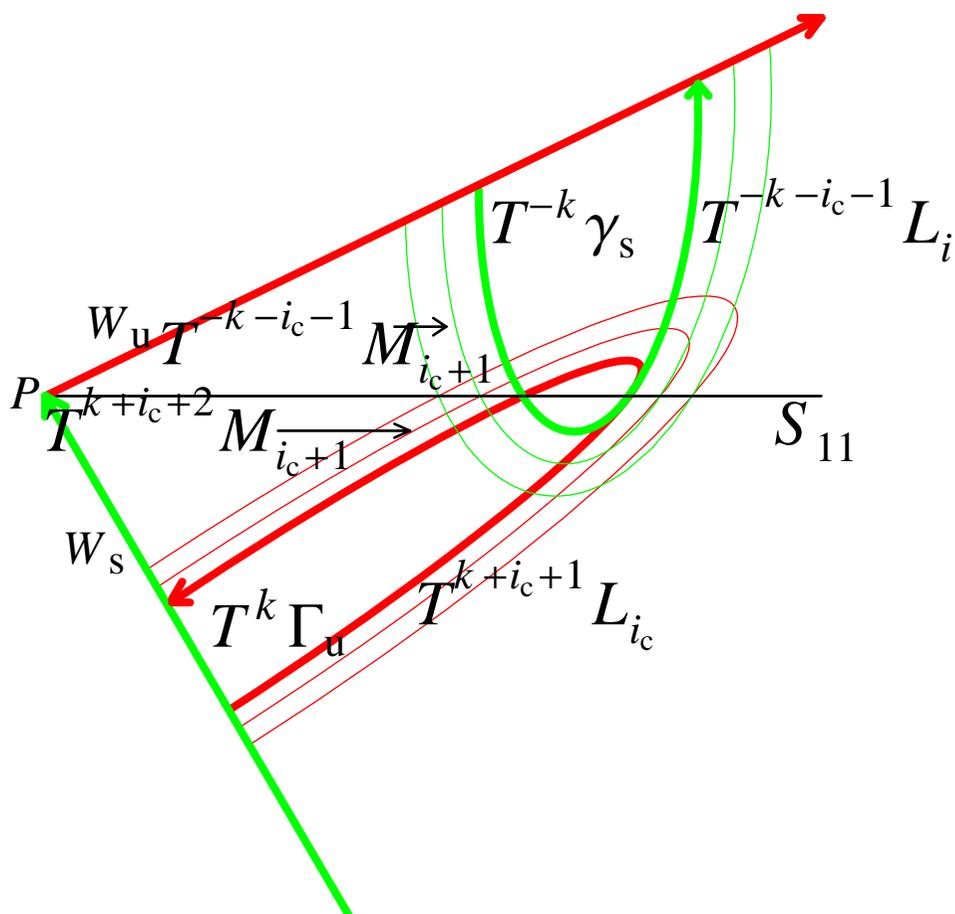


図 2.4 $T^k \Gamma_u$ と $T^{-k} \gamma_s$ の位置関係, $T^{k+i_c+1} L_{i_c}$ と $T^{-k-i_c-1} L_{i_c}$ の位置関係, $T^{k+i_c+2} M_{i_c+1}$ と $T^{-k-i_c-1} M_{i_c+1}$ の位置関係が表示されている.

$T^k \Gamma_u$ と $T^{-k} \gamma_s (= hT^k \Gamma_u)$ が互いに交差していると仮定する (図 2.4 を見よ). この状況で弧 $T^{k+i_c+2} M_{i_c+1}$ は $T^{k+i_c+1} L_{i_c}$ と $T^k \Gamma_u$ の間にある. よって可逆性より $T^{-k-i_c-1} M_{i_c+1}$ は $T^{-k-i_c-1} L_{i_c}$ と $T^{-k} \gamma_s$ の間にある. これは $hT^{k+i_c+2} M_{i_c+1} = gT^{k+i_c+1} M_{i_c+1} = T^{-k-i_c-1} gM_{i_c+1} = T^{-k-i_c-1} M_{i_c+1}$, $hT^{k+i_c+1} L_{i_c} = T^{-k-i_c-1} hL_{i_c} = T^{-k-i_c-1} L_{i_c}$, $hT^k \Gamma_u = T^{-k} h\Gamma_u = T^{-k} \gamma_s$ を利用することで示せる. 次に $T^{-k'+k}$ を最後の 3 つの弧に作用すると $T^{-k'-i_c-1} M_{i_c+1}$, $T^{-k'} \gamma_s$, $T^{-k'+i_c+1} L_{i_c}$ が得られる. これらの 3 つの弧の $T^k \Gamma_u$ に対する位置関係を図 2.5(a)-(d) に描いてある. $j \geq 0$ として, 弧 $T^{k+i_c+j+2} L_{i_c+j+1}$ は $T^{k+i_c+j+1} L_{i_c+j}$ と $T^k \Gamma_u$ の間にある. 一方 $m \geq 1$ に対して, 弧 $T^{-k'-i_c-m-1} M_{i_c+m+1}$ は $T^{-k'-i_c-m} M_{i_c+m}$ と $T^{-k'} \gamma_s$ の間にある. $i \geq i_c$ に対して, 命題 2.2 は次の関係を与える.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{k+i+1} L_i = T^k \Gamma_u, \quad (2.21)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{-(k'+i+1)} M_{i+1} = T^{-k'} \gamma_s. \quad (2.22)$$

4つのタイプの接触状況がある. 第1の接触状況は図 2.5(a) に描かれている. これをタイプ I 接触と呼ぶ. これ以外の3つの接触状況は図 2.5(b)-(d) に描かれていて, 同様にタイプ II, III, IV と呼ぶことにする. 図 2.5(a) と (b) において, パラメーターを単調に増大すると弧 $T^{-k'} \gamma_s$ は上方に伸びて $T^k \Gamma_u$ と2次接触する. 図 2.5(c) と (d) では, $T^k \Gamma_u$ が上方に伸びて $T^{-k'} \gamma_s$ と2次接触する. 証明で必要なことは接触の回数ではなく, パラメーターを増加したときに2つの多様体が離れている状況から接触を経て交差する過程が存在することである.

これからタイプ I の場合を考える. $T^{-k'} \gamma_s$ と $T^k \Gamma_u$ が接触する前に, 表 2.1(a) の中のすべての対称周期軌道はサドルノード分岐で生じる. 実際, $T^{k+i_c+1} L_{i_c}$ と M_{i_c+m} ($m \geq 1$) の像がどのような順で接触していくのかを見ることにしよう.

$T^{-k'} \gamma_s$ と $T^k \Gamma_u$ が接触する前に, $T^{-k'-i_c-1} M_{i_c+1}$ と $T^{k+i_c+1} L_{i_c}$ が接触する. 次に $T^{-k'-i_c-2} M_{i_c+2}$ と $T^{k+i_c+1} L_{i_c}$ が接触する. 以下同様に接触が繰り返され, 次の順序が得られる.

$$L_{i_c} : 2(k+k') + 4i_c + 5 \leftarrow 2(k+k') + 4i_c + 7 \leftarrow 2(k+k') + 4i_c + 9 \leftarrow \dots \quad (2.23)$$

周期 $2(k+k') + 4i_c + 5$ の軌道は M_{i_c+1} に点を持つ. 同様の接触状況が他の周期軌道に関しても成立する. $T^{k+i_c+1} L_{i_c+l}$ ($l \geq 1$) から M_{i_c+m} ($m \geq 1$) の像を見ることで, 左矢印の順序が得られる.

次に $T^{-k'-i_c-1} M_{i_c+1}$ から接触の状況を見ることにする. パラメータ a を増加するにつれて, この弧は最初に $T^{k+i_c+1} L_{i_c}$ と接触し, 次に $T^{k+i_c+2} L_{i_c+1}$ と順番に接触していく. この過程から第1行の順序が得られる. 同様にして $T^{-k'-i_c-m} M_{i_c+m}$ ($m \geq 2$) から接触状況を見ることで, 上矢印の順序を得られる. 以上でタイプ I の場合の証明を終了する.

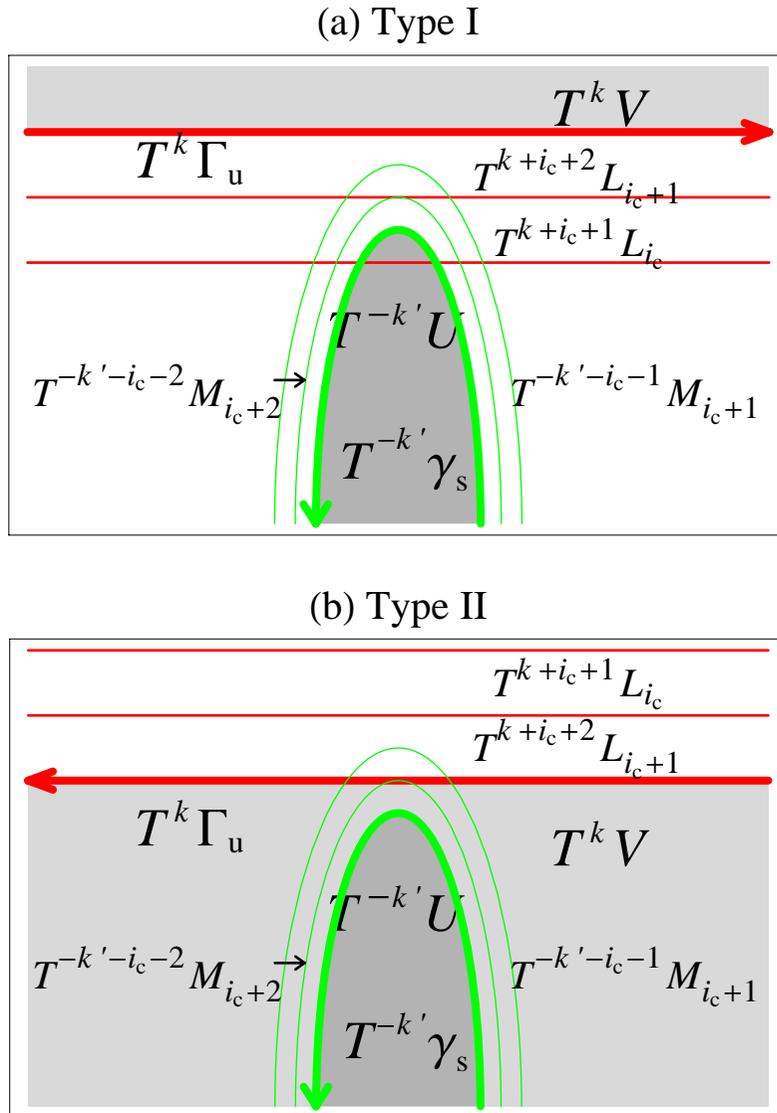
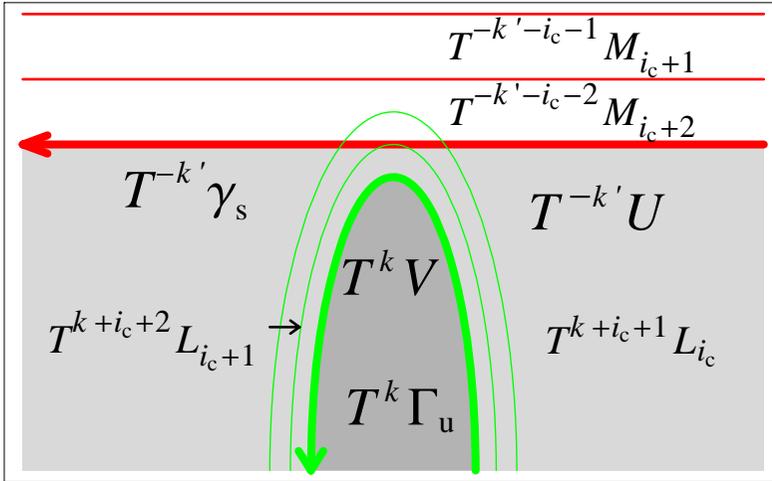


図 2.5 $T^k \Gamma_u$ と $T^{-k'} \gamma_s$ の 4 つの異なったタイプの接触の概念図. (a) と (b) では, $T^{-k'} \gamma_s$ は上方に伸びて $T^k \Gamma_u$ と 2 次接触する. (a) では, $T^k \Gamma_u$ の上方の灰色領域は $T^k V$ に含まれ, $T^{-k'} \gamma_s$ の下方の濃い灰色領域は $T^{-k'} U$ に含まれる. (b) においても同様である.

(c) Type III



(d) Type IV

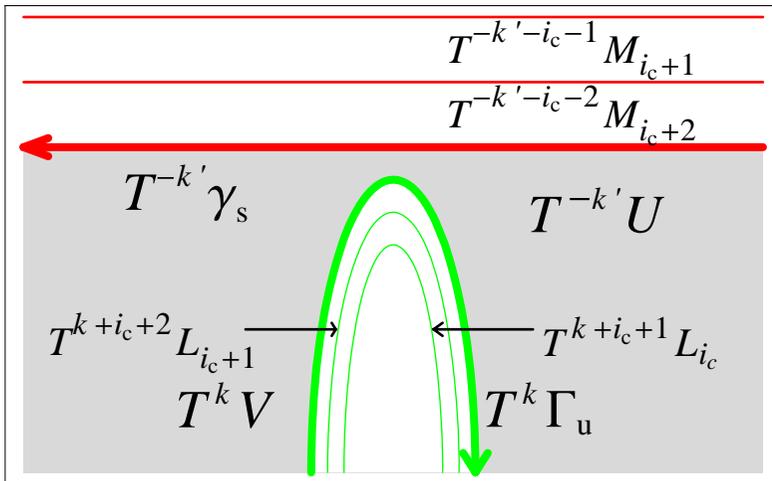


図 2.5 (続き) (c) と (d) では, $T^k\Gamma_u$ は上方向に伸びて $T^{-k'}\gamma_s$ と 2 次接触する. (c) において, $T^{-k'}\gamma_s$ の下方の灰色領域は $T^{-k'}U$ に含まれ, $T^k\Gamma_u$ の下方の濃い灰色領域は T^kV に含まれる. (d) において, 灰色領域は T^kV と $T^{-k'}U$ に含まれる.

次に図 2.5(b) を用いてタイプ II の順序を証明する. 弧 $T^{-k'}\gamma_s$ の上部はパラメーターの増大につれて上方に伸びていって $T^k\Gamma_u$ と 2 次接触するとしよう. この接触の前に $T^{-k'-i_c-1}M_{i_c+1}$ と $T^k\Gamma_u$ の接触が生じる. この接触の後で $T^{-k'-i_c-1}M_{i_c+1}$ は L_{i_c} の像と接触し交差する. この過程は次の順序で表現される.

$$M_{i_c+1} : 2(k+k') + 4i_c + 5 \rightarrow 2(k+k') + 4i_c + 7 \rightarrow 2(k+k') + 4i_c + 9 \rightarrow \cdots \quad (2.24)$$

これは表 2.1(b) の第 1 列の順序である. 残りの列の順序も同様にして証明できるので詳細は省く.

$T^{k+i_c+1}L_{i_c}$ から接触の過程を見ることにする. 最初に, $T^{-k'-i_c-1}M_{i_c+1}$ が $T^{k+i_c+1}L_{i_c}$ と接触し交差する. 次に $T^{-k'-i_c-2}M_{i_c+2}$ が $T^{k+i_c+1}L_{i_c}$ と接触し交差する. これより第 1 行の順序が得られる. 同様にして他の行の順序も得られる.

図 2.5(c) と (d) にタイプ III と IV の接触状況を描いてある. このような状況が生じることを注意しておく. 実際, Γ_u を何度も写像を繰り返すと自分自身に漸近する. そのため Γ_u の像が $T^k\Gamma_u$ に漸近する. よってある像 $T^m\Gamma_u$ ($m > k$) があって, それらは $T^k\Gamma_u$ の下部にあって $T^k\Gamma_u$ にほぼ平行に存在する. しかし図 2.5(a) とは逆の向きになっていることに注意する. この場合 L_{i_c+j} ($j \gg 1$) を何度も写像した像は $T^m\Gamma_u$ の上部にあり, これにほぼ平行に存在する. 同様に図 2.5(d) も同様に存在することが分かる. これらのタイプに関する証明はタイプ I, II の証明と同じであるので省略する. 以上で証明を終了する.

2.3.2 定理 2.1 に関するコメント

表 2.1(a)-(d) の周期軌道を指定するために行列表現 (i, j) を用いる. ここで i は区間 L_i の添え字であり, j は M_j の添え字である. $a_c^{I(a)}(i, j)$ を表 2.1(a) の (i, j) 要素がサドルノード分岐で生じる臨界値とする. 同様に臨界値 $a_c^{I(b)}(i, j)$, $a_c^{I(c)}(i, j)$, $a_c^{I(d)}(i, j)$ を定義する. これらに対して下記の関係が成り立つ.

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_c^{I(a)}(i, j) = a_c^{I(a)}(k''), \quad (2.25)$$

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_c^{I(b)}(i, j) = a_c^{I(b)}(k''), \quad (2.26)$$

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_c^{I(c)}(i, j) = a_c^{I(c)}(k''), \quad (2.27)$$

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_c^{I(d)}(i, j) = a_c^{I(d)}(k''). \quad (2.28)$$

表 2.1(a) のすべての周期軌道は $T^k\Gamma_u$ と $T^{-k'}\gamma_s$ の接触前に出現する. 一方, 表 2.1(d) のすべての周期軌道は $T^k\Gamma_u$ と $T^{-k'}\gamma_s$ の接触後に出現する表 2.1(b) と (c) の周期軌道の一部は接触の前に生じ, 残りは接触の後に生じる.

異なったタイプの接触の出現順序について簡単に述べる. 領域 $T^k V$ は過去への写像によって Z の外に出る. このことより領域 $T^k V$ を Z の外部とみなす事ができる. $T^{-k'} \gamma_s$ が最初の接触から交差の状況になったときに, $T^{-k'} \gamma_s$ の一部は Z から出る. しかし, 外に出た一部は 2 回目の接触を経て再度 Z の内部に戻る. このことよりタイプ I の接触が最初に生じ, 次にタイプ II の接触が生じることが分かる. 次に $k = 0, k' = 1, i_c = 1$ の場合を考えよう. この状況は馬蹄の完成であることが分かる. 馬蹄が完成する前に, タイプ I の順序が成立する. しかしタイプ II の関係は成立しない. これは, Z から出た $T^{-1} \gamma_s$ の部分は二度と Z に戻らないことより分かる. この場合については §4.7 で詳細に検討する.

2.4 馬蹄完成直前

2.4.1 第 n ステージの定義

馬蹄が完成する直前でまだ $T^{-1} \gamma_s$ と S_{21} が接触していない状況を考える. ただし $T^{-1} \gamma_s$ はすでに S_{11} と交差しているとする. この場合, $T^{-2} \gamma_s$ は S_{21} と交差していることが分かる. よって $T^{-2} \gamma_s$ が S_{21}, S_{12}, S_{22} と順次交差し, $T^2 \Gamma_u$ と接触している状況を考えよう. この配置は図 2. 6 に描かれている. この状況が生じる臨界値を $a_l^{(1)}$ と表すと $a_l^{(1)} < a_{hs}$ の関係が成立することは明らかである. 更に a を増やすと, $T^{-2} \gamma_s$ は上方向に伸びて $T^2 \Gamma_u$ と接する. この臨界値を $a_r^{(1)} (< a_{hs})$ と書く. そうするとパラメーターの区間 $[a_l^{(1)}, a_r^{(1)}]$ が定義できる. この区間を第 1 ステージと呼ぶことにする. 第 1 ステージの開始と終了のパラメーターにおける安定多様体と不安定多様体の構造の詳細は図 2. 6 を見ていただきたい.

第 1 ステージの始まる前の状況の概念図を図 2. 7 に示した. パラメーターの増加につれて弧 $T^{-2} \gamma_s$ は上方に伸びて $T^2 \Gamma_u$ の下方のブランチに接触し 2 つ交差点を生じる. 更にパラメーターを増加すると $T^2 \Gamma_u$ の上方のブランチに接触し 2 つ交差点を生じる. 次に同じことが $T^3 \Gamma_u$ の下方と上方のブランチに対しても生じる. これが第 2 ステージの開始と終了に相当する. このパラメーター区間を $[a_l^{(2)}, a_r^{(2)}]$ を書く. この手順を続けると第 n ステージを定義できる. つまり $T^{-2} \gamma_s$ が $T^{n+1} \Gamma_u$ の右側で接する状況が第 n ステージの開始で, 次に左側で接する状況が終了である. この区間を $[a_l^{(n)}, a_r^{(n)}]$ と書く.

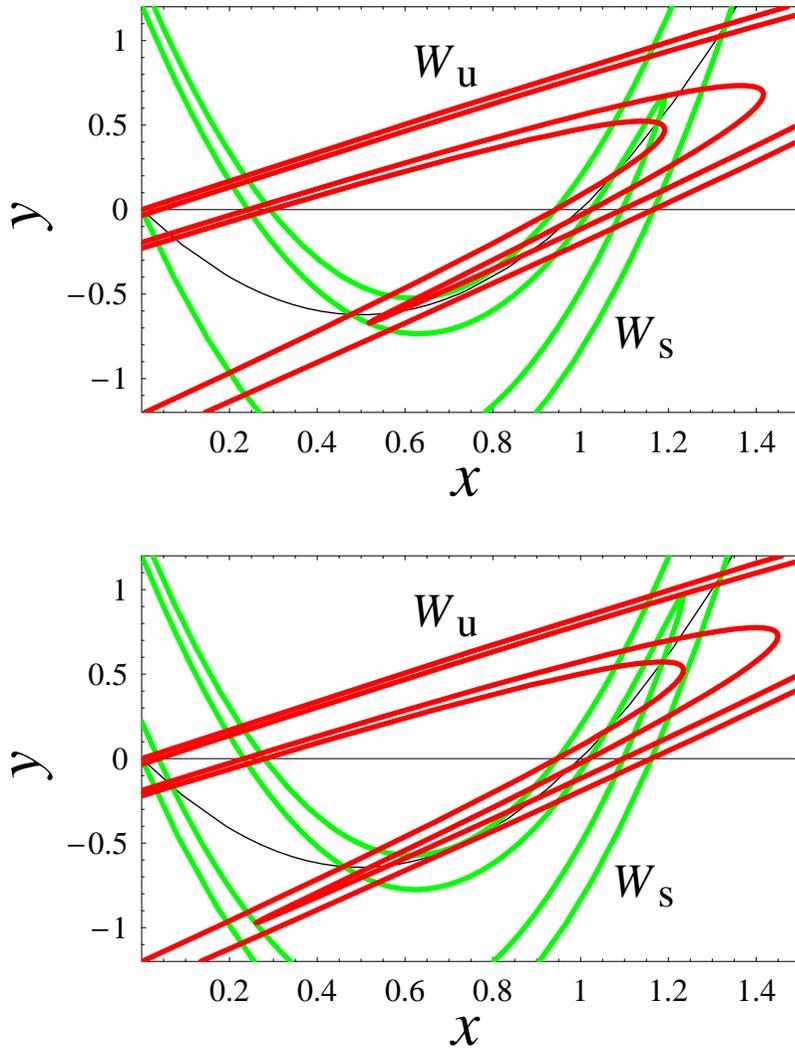


図 2.6 上図は第1ステージの開始 ($a = 4.975$) を, 下図は第1ステージの終了 ($a = 5.145$) を表している.

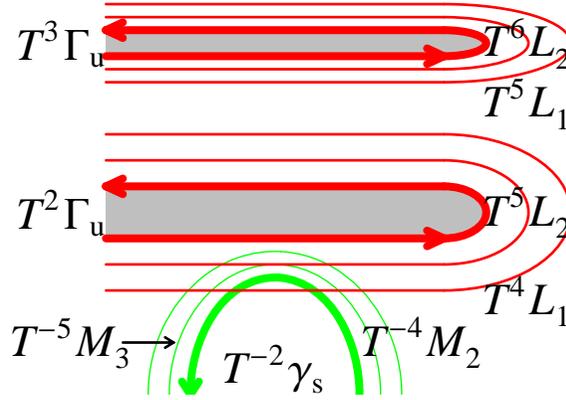


図 2.7 第 1 ステージの始まる前の状況の概念図. 下の灰色領域は T^2V に含まれ, 上の灰色領域は T^3V に含まれる.

2.4.2 第 1 ステージ

図 2. 6 の上図で示した W_u と W_s の構造をもとにトレリスを構成する. 得られたトレリスを図 2. 8 の上図に示した. このトレリスに対応する適正グラフは下図に描いてある. 制御辺 A, B, \dots, G の像を調べる. ここで $\beta = T\alpha$ と $\gamma = T\beta$ の関係があることに注意する. 最終的に得られる遷移行列 M_1 を次に示す.⁸⁾

$$M_1 = \begin{pmatrix} & B & C & E & F & D & A & G \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ E & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

C から D へ, また C から G への遷移を表す数値が 2 であることは, C の像が D と G を 2 回被覆していることを意味する. 特性方程式

$$\lambda^7 - 2\lambda^6 + 2\lambda^2 - 2 \sum_{k=0}^1 \lambda^k = 0 \quad (2.30)$$

を解いて最大固有値 λ_{\max} を求めることができる. 数値計算より $\lambda_{\max} = 1.9688$ が得られる. この値はデービス, マックイ, 三波 (DMS)¹⁷⁾ が構成したマルコフ分割より得られた遷移行列の最大固有値と一致する. 力学的順序は定理 2.1 で $k = k' = 2$ ならびに $i_c = 1$ とおいて得られる. 表 2.2(a) と 2.2(b) に順序を示す.

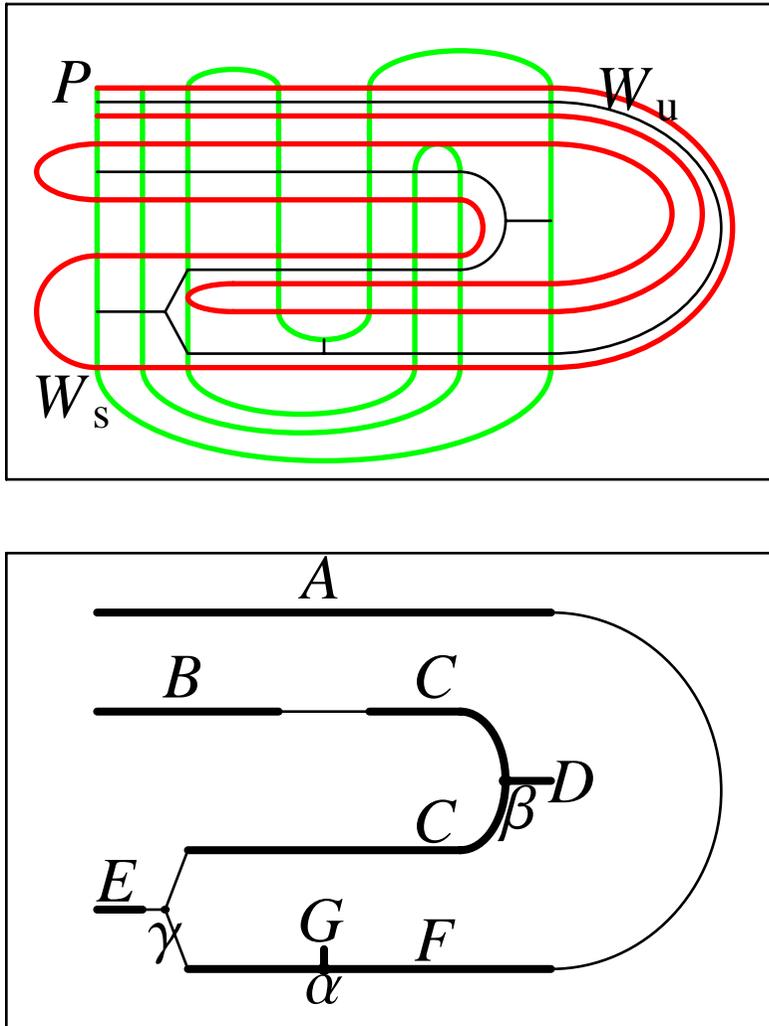


図 2.8 上図は第1ステージのトレリスを表している。トレリスに対する適正グラフ \widehat{G} は細線で描かれている。その詳細は下図に描かれている。 \widehat{G} の制御辺は A, B, \dots, G と名づけられている。ここで $\beta = T\alpha$ と $\gamma = T\beta$ の関係が成り立つ。

表 2.2(a) 力学的順序.

	$M_2 \Rightarrow$	$M_3 \Rightarrow$	$M_4 \Rightarrow$	$M_5 \Rightarrow \dots$
L_1	17 ←	19 ←	21 ←	23 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
L_2	19 ←	21 ←	23 ←	25 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
L_3	21 ←	23 ←	25 ←	27 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
L_4	23 ←	25 ←	27 ←	29 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
…	…	…	…	…

表 2.2(b) 力学的順序.

	$M_2 \Rightarrow$	$M_3 \Rightarrow$	$M_4 \Rightarrow$	$M_5 \Rightarrow \dots$
L_1	17 ←	19 ←	21 ←	23 ← …
↓	↓	↓	↓	↓
L_2	19 ←	21 ←	23 ←	25 ← …
↓	↓	↓	↓	↓
L_3	21 ←	23 ←	25 ←	27 ← …
↓	↓	↓	↓	↓
L_4	23 ←	25 ←	27 ←	29 ← …
↓	↓	↓	↓	↓
…	…	…	…	…

馬蹄の完成は $T^{-2}\gamma_s$ と $T^{-1}\Gamma_u$ が接触する状況である. この状況で $T^{-2}\gamma_s$ と $T^2\Gamma_u$ は交差している. つまり表 2.2(a)-(b) に含まれるの周期軌道はすべて存在している. これらはすべてサドルノード分岐で生じた周期軌道である. つまり一つの要素に対して 2 つの記号列がある.

$$s_{\text{II(a)}}^1(i, j) = \{0^i(110111)0^{2j-1}(111011)0^i, 0^i(110101)0^{2j-1}(101011)0^i\}, \quad (2.31)$$

$$s_{\text{II(b)}}^1(i, j) = \{0^i(100111)0^{2j-1}(111001)0^i, 0^i(100101)0^{2j-1}(101001)0^i\}. \quad (2.32)$$

記号列の決め方について説明する. 対称性よりほとんどの記号を決定できる. 一部数値計算で軌道を調べる必要もある. 例として周期 17 の周期軌道 $O(z_0)$ の記号列を決める. これは表 2.2(a) の (1, 2) 要素である. 初期点は区間 L_1 にあり, z_8 は区間 M_2 にある. これらの区間 L_1 と M_2 は領域 V_0 (図 2.2 を参照) にあることより記号は 0 である. 軌道点 z_1 と z_4

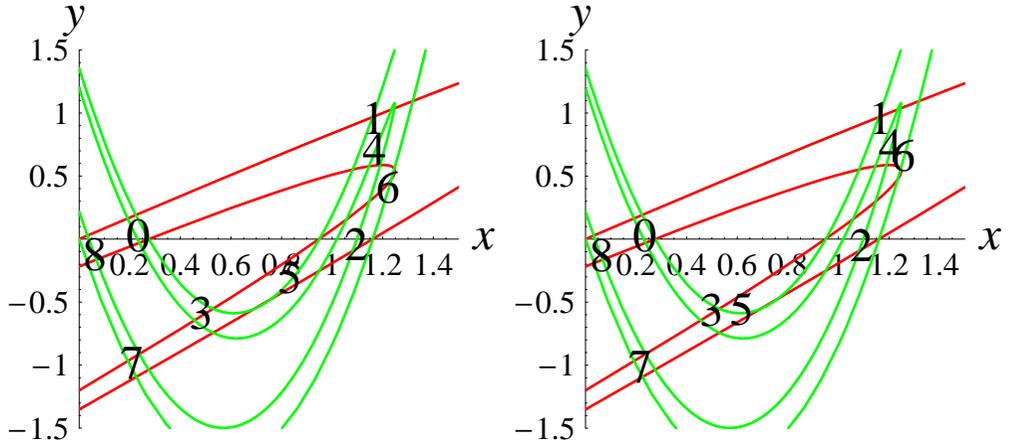


図 2.9 z_0 から z_8 までの軌道が描かれている。ここで数字 0, 1 等は軌道点 z_0, z_1 等々を表している。これらは表 2.2(a) の (1, 2) 要素の 2 つの軌道である。 z_2 は領域 V_1 にある。左の軌道の記号列は 011011100 で、右の軌道の記号列は 011010100 である。

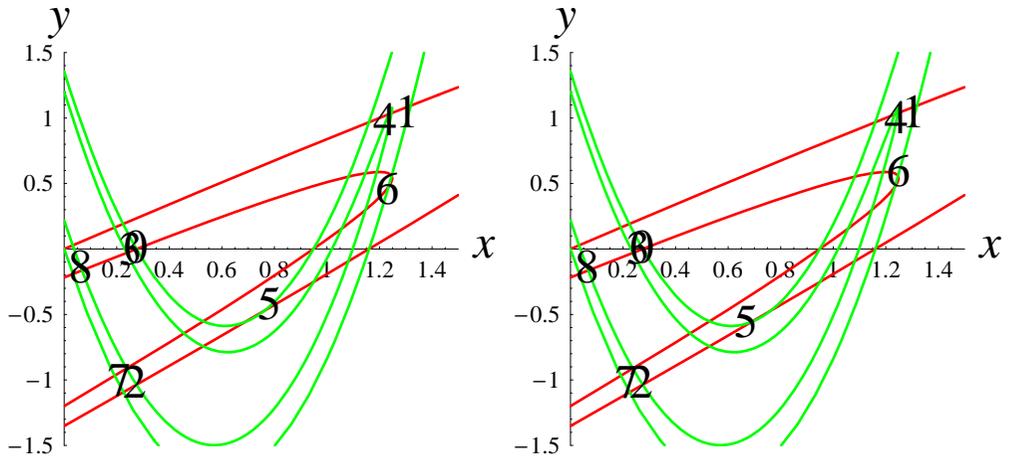


図 2.10 z_0 から z_8 までの軌道が描かれている。これらは表 2.2(b) の (1, 2) 要素の 2 つの軌道である。 z_2 は領域 V_0 にある。左の軌道の記号列は 010011100 で、右の軌道の記号列は 010010100 である。

は領域 $V_1 \cap H_0$ にある. 関係 $\pi_2(z_4) < \pi_2(x_1)$ より, 点 z_3 は $V_0 \cap H_1$ にある. これらより z_1 の記号は 1 で, z_3 の記号は 0 になる. TM_2 と L_1 の位置を比較すると, z_9 の記号が 0 であることがわかる. よって z_7 の記号も 0 である. z_2 については軌道を数値的に調べる必要がある. 図 2.9 より, z_2 の記号が 1 であることが分かる. z_5 に関しては記号 1 と 0 の 2 つの可能性がある. 図 2.9 より, z_5 は接触点 (交差点) の近くにあることが分かる. これより z_6 は γ_s の近くの $V_1 \cap H_0$ または $V_1 \cap H_1$ であることが分かり, これより z_6 の記号は 1 と決まる.

図 2.9 の左図に描かれた z_0 から z_8 までの軌道は記号列 011011100 で表現できる. 右の軌道の記号列は 011010100. 両者の違いは z_5 が V_1 にあるか V_0 にあるかである. 対称性より後半の z_9 から z_{16} までの軌道の記号列は 01110110 と 01010110 と表現できる.

表 2.1(a) の周期軌道の記号列を与える一般の表現を決定する方法について説明する. 軌道の初期点 z_0 が L_2 にあり, z_9 が M_2 にあるとする. z_1 は初期点のすこし上にある. 周期は 17 である. よって (2, 2) 要素の記号列は 2 つの 0 の間に $s(1, 2)$ の記号列を置く事で, 0011011100011101100 と得られる. 次に初期点 z_0 が L_1 にあり, z_9 が M_3 にある軌道を考える. M_3 は M_2 より P に近い位置にある. T^2M_3, TM_2, L_1 の 3 つの弧の位置を比較して, z_{10} の記号が 0 であることが分かる. これより z_8 の記号は 0 である. $s(1, 2)$ は中央部分に 3 つの 0 を含むが, これに 2 つ 0 を追加して $s(1, 3)$ の記号列が 0110111000001110110 と得られる. この方法を繰り返して式 (2.31) が導かれる.

表 2.2(b) の記号列を調べるために例として (1, 2) 要素の軌道を描いてみる (図 2.10 参照). 図 2.9 と 2.10 の違いは z_2 の位置のみである. 図 2.10 では z_2 は V_0 にある. このことより式 (2.32) が得られる.

2.4.3 第 2 ステージ

$T^{-2}\gamma_s$ と $T^3\Gamma_u$ が接触する第 2 ステージに対するトレリスは図 2.11 に描かれている. 図 2.11 の下図はこのトレリスに対する適正グラフである. 制御辺 A, B, \dots, I の像を調べて行列 M_2 が決まる.

$$M_2 = \begin{pmatrix} & B & C & D & E & G & H & F & A & I \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

M_2 の特性方程式は以下のように得られる.

$$\lambda^9 - 2\lambda^8 + 2\lambda^3 - 2 \sum_{k=0}^2 \lambda^k = 0 \quad (2.34)$$

最大固有値は $\lambda_{\max} = 1.9923$ である. この値は DMS が導いた遷移行列の最大固有値に一致する.

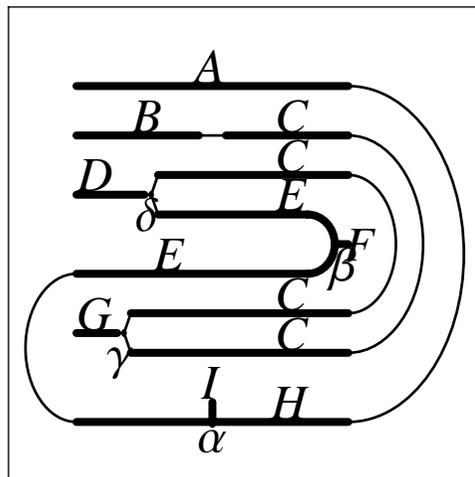
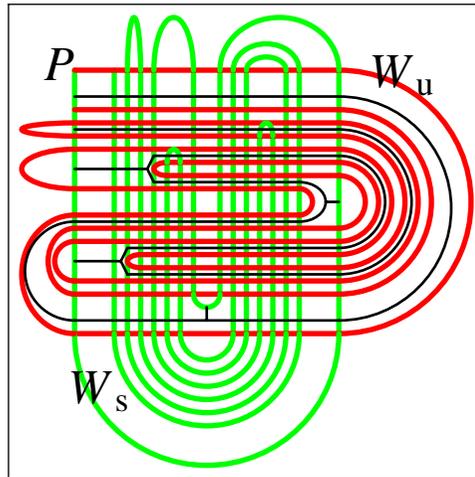


図 2.11 上図は第 2 ステージのトレリスで下図はその適正グラフ $\widehat{\mathcal{G}}$ である. 制御辺は A, B, \dots, I と名前が付けられている. この場合には $\beta = T\alpha, \gamma = T\beta, \delta = T\gamma$ が成立する.

第2ステージに対する2つのタイプの順序は定理2.1で $k = 3$, $k' = 2$, $i_c = 1$ とおいて得られる.

表 2.3(a) 力学的順序.

	M_2	\Rightarrow	M_3	\Rightarrow	M_4	\Rightarrow	M_5	\Rightarrow	\dots
L_1	19	\leftarrow	21	\leftarrow	23	\leftarrow	25	\leftarrow	\dots
\downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		
L_2	21	\leftarrow	23	\leftarrow	25	\leftarrow	27	\leftarrow	\dots
\downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		
L_3	23	\leftarrow	25	\leftarrow	27	\leftarrow	29	\leftarrow	\dots
\downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		
L_4	25	\leftarrow	27	\leftarrow	29	\leftarrow	31	\leftarrow	\dots
\downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots		\dots

表 2.3(b) 力学的順序.

	M_2	\Rightarrow	M_3	\Rightarrow	M_4	\Rightarrow	M_5	\Rightarrow	\dots
L_1	19	\leftarrow	21	\leftarrow	23	\leftarrow	25	\leftarrow	\dots
\downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow		
L_2	21	\leftarrow	23	\leftarrow	25	\leftarrow	27	\leftarrow	\dots
\downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow		
L_3	23	\leftarrow	25	\leftarrow	27	\leftarrow	29	\leftarrow	\dots
\downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow		
L_4	25	\leftarrow	27	\leftarrow	29	\leftarrow	31	\leftarrow	\dots
\downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow		
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots		\dots

表 2.3(a)-(b) に含まれる周期軌道の記号列は次のように得られる.

$$s_{2.3(a)}^2(i, j) = \{ 0^i (1100111)0^{2j-1}(1110011)0^i, 0^i(1100101)0^{2j-1}(1010011)0^i, \quad (2.35)$$

$$s_{2.3(b)}^2(i, j) = \{ 0^i (1000111)0^{2j-1}(1110001)0^i, 0^i(1000101)0^{2j-1}(1010001)0^i. \quad (2.36)$$

記号列の導出に関して簡単な説明を加える. $T^{-2}\gamma_s$ と $T^3\Gamma_u$ の接点は $T^{-2}\gamma_s$ と $T^2\Gamma_u$ の接点に比べ $T^{-1}\Gamma_u$ により近い. このことは表 2.3(a) の (1,2) 要素の軌道 $O(z_0)$ の z_5 が, 表 2.2(a) の (1,2) 要素の軌道 $O(z'_0)$ の z'_4 に比べ $T^{-1}\Gamma_u$ により近くに存在していることを意味してい

る. 式 (2.35) より, $z'_3 = T^{-1}z'_4$ の記号は 0 である. z_4 は z'_3 の左にあるのでその記号は 0 である. z_0 から z_5 までの軌道は, z'_0 から z'_4 までの軌道に比べてより P の近くを通る. これより z_0 から z_5 までの軌道は 010001 と記号化される. これは z'_0 から z'_4 までの軌道 01001 に比べ, 0 が一つ追加された記号列になっていることが分かる. 以上より全軌道の記号列は 01100111000111001110 と 01100101000101001110 である. 他の記号列も同様にして導くことができるので詳細は省略する.

2.4.4 第3ステージ

第3ステージのトレリスとその適正グラフを図 2.12 に描いてある. 第1, 2ステージと同様にして遷移行列 M_3 と特性方程式が求まる.

$$M_3 = \begin{pmatrix} & B & C & D & E & F & G & I & J & H & A & K \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\lambda^{11} - 2\lambda^{10} + 2\lambda^4 - 2 \sum_{k=0}^3 \lambda^k = 0. \quad (2.38)$$

最大固有値は $\lambda_{\max} = 1.99808$ である.

第3ステージの力学的順序 (2.4(a) と (b)) は定理 2.1 において $k = 4$, $k' = 2$, $i_c = 1$ において得られる. また記号列も決められる.

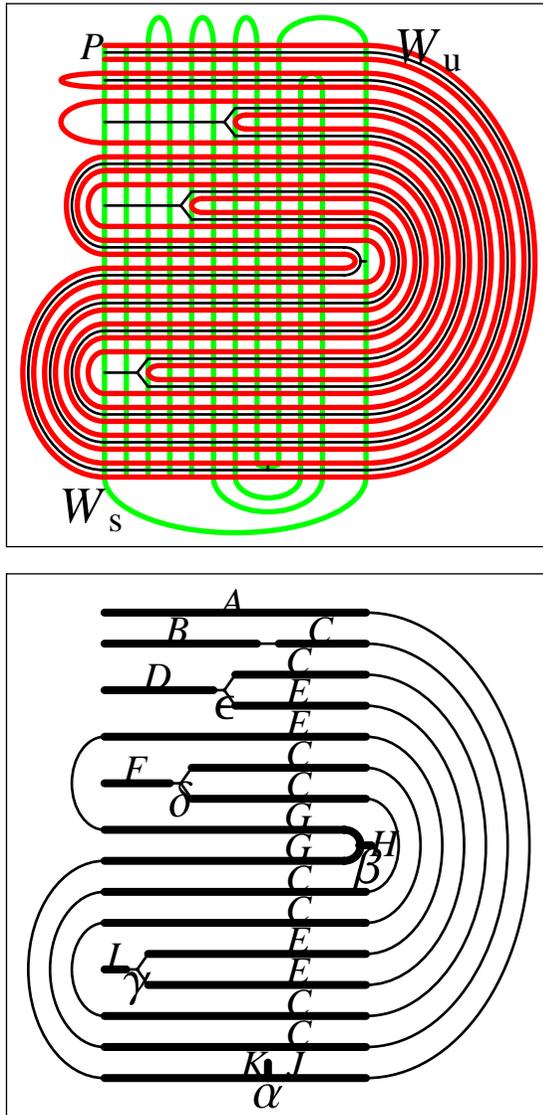


図 2.12 上図は第 3 ステージのトレリスで下図はその適正グラフ $\widehat{\mathcal{G}}$ である. 制御辺は A, B, \dots, K と名前が付けられている. この場合には $\beta = T\alpha, \gamma = T\beta, \delta = T\gamma, \epsilon = T\delta$ が成立する.

表 2.4(a) 力学的順序.

	$M_2 \Rightarrow$	$M_3 \Rightarrow$	$M_4 \Rightarrow$	$M_5 \Rightarrow$	\dots
L_1	21 ←	23 ←	25 ←	27 ←	\dots
↓	↑	↑	↑	↑	
L_2	23 ←	25 ←	27 ←	29 ←	\dots
↓	↑	↑	↑	↑	
L_3	25 ←	27 ←	29 ←	31 ←	\dots
↓	↑	↑	↑	↑	
L_4	27 ←	29 ←	31 ←	33 ←	\dots
↓	↑	↑	↑	↑	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	

表 2.4(b) 力学的順序.

	$M_2 \Rightarrow$	$M_3 \Rightarrow$	$M_4 \Rightarrow$	$M_5 \Rightarrow$	\dots
L_1	21 ←	23 ←	25 ←	27 ←	\dots
↓	↓	↓	↓	↓	
L_2	23 ←	25 ←	27 ←	29 ←	\dots
↓	↓	↓	↓	↓	
L_3	25 ←	27 ←	29 ←	31 ←	\dots
↓	↓	↓	↓	↓	
L_4	27 ←	29 ←	31 ←	33 ←	\dots
↓	↓	↓	↓	↓	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	

$$s_{2.4(a)}^3(i, j) = \{0^i (11000111)0^{2j-1} (11100011)0^i, 0^i (11000101)0^{2j-1} (10100011)0^i, \quad (2.39)$$

$$s_{2.4(b)}^3(i, j) = \{0^i (10000111)0^{2j-1} (11100001)0^i, 0^i (10000101)0^{2j-1} (10100001)0^i. \quad (2.40)$$

2.4.5 第 n ステージ

第 1 - 3 ステージと同様にして遷移行列 M_n を構成する. ここでは M_n の詳細は省略する. その特性方程式は以下のように得られる.

$$\lambda^{2n+5} - 2\lambda^{2n+4} + 2\lambda^{n+1} - 2 \sum_{k=0}^n \lambda^k = 0. \quad (2.41)$$

n を決めれば式 (2.41) を解いて λ_{\max} が求まる. n の値が大きい場合は, h_{top} は近似的に $h_{\text{top}} = \ln \lambda_{\max} \simeq \ln 2 - 1/(4(2^n + 4^{n+1}))$ と得られる.

力学的順序は定理 2.1 で $k = n + 1$, $k' = 2$, $i_c = 1$ とおいて得られる. また記号列も決定できる.

表 2.5(a)– n 力学的順序.

	M_2	\Rightarrow	M_3	\Rightarrow	M_4	\Rightarrow	M_5	$\Rightarrow \dots$
L_1	$2n + 15$	\leftarrow	$2n + 17$	\leftarrow	$2n + 19$	\leftarrow	$2n + 21$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_2	$2n + 17$	\leftarrow	$2n + 19$	\leftarrow	$2n + 21$	\leftarrow	$2n + 23$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_3	$2n + 19$	\leftarrow	$2n + 21$	\leftarrow	$2n + 23$	\leftarrow	$2n + 25$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_4	$2n + 21$	\leftarrow	$2n + 23$	\leftarrow	$2n + 25$	\leftarrow	$2n + 27$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

表 2.5(b)– n 力学的順序.

	M_2	\Rightarrow	M_3	\Rightarrow	M_4	\Rightarrow	M_5	$\Rightarrow \dots$
L_1	$2n + 15$	\leftarrow	$2n + 17$	\leftarrow	$2n + 19$	\leftarrow	$2n + 21$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_2	$2n + 17$	\leftarrow	$2n + 19$	\leftarrow	$2n + 21$	\leftarrow	$2n + 23$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_3	$2n + 19$	\leftarrow	$2n + 21$	\leftarrow	$2n + 23$	\leftarrow	$2n + 25$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_4	$2n + 21$	\leftarrow	$2n + 23$	\leftarrow	$2n + 25$	\leftarrow	$2n + 27$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

$$s_{2.5(a)}^n(i, j) = \{ 0^i (110^n 111) 0^{2j-1} (1110^n 11) 0^j, 0^i (110^n 101) 0^{2j-1} (1010^n 11) 0^j, \quad (2.42)$$

$$s_{2.5(b)}^n(i, j) = \{ 0^i (100^n 111) 0^{2j-1} (1110^n 01) 0^j, 0^i (100^n 101) 0^{2j-1} (1010^n 01) 0^j. \quad (2.43)$$

2.4.6 DOM を利用した位相的エントロピーの計算

記号列とホールが開発したソフトウェア *Trains3* を利用して, 位相的エントロピーの下界を計算する. この方法による最大固有値を $\hat{\lambda}_{max}$ と表す.

表 2.5(a) と (b) の $(i, i + 1)$ 要素の $\hat{\lambda}_{max}$ に特に興味がある. なぜなら $i \rightarrow \infty$ の極限は $T^{n+1}\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ の接触状況に対応するからである. 表 2.6 において計算した $\hat{\lambda}_{max}$ の値を示してある. 各 n における表 2.5(a)- n と 2.5(b)- n の列の極限值は同じであることに注意する. これは第 n ステージにおいて h_{top} が一定であることを意味している. そしてここで得られた極限值はトレリス法で得られた値 λ_{max} に一致する.

表 2.6 最大固有値.

i	2.5(a)-1	2.5(b)-1	2.5(a)-2	2.5(b)-2	2.5(a)-3	2.5(b)-3	2.5(a)-4	2.5(b)-4
1	1.859	1.867	1.882	1.882	1.9238	1.9403	1.9606	1.9698
2	1.944	1.946	1.968	1.969	1.9738	1.9739	1.9747	1.9672
3	1.962	1.963	1.986	1.986	1.9923	1.9923	1.9936	1.9936
4	1.967	1.967	1.990	1.990	1.9966	1.9966	1.9980	1.9980
5	1.968	1.968	1.992	1.992	1.9977	1.9977	1.9991	1.9991
λ_{max}	1.968	1.968	1.992	1.992	1.9980	1.9980	1.9995	1.9995

2.5(a)- n の n は第 n ステージを表している.

2.4.7 タイプ I の順序のみが成立する場合

既に §3.2 で述べたように, 定理 2.1 で $k = 0, k' = 1, i_c = 1$ の場合はタイプ I の順序のみが成立する. この順序は次の表 2.7 で表される.

表 2.7 力学的順序.

	$M_2 \Rightarrow$	$M_3 \Rightarrow$	$M_4 \Rightarrow$	$M_5 \Rightarrow \dots$
L_1	11 ←	13 ←	15 ←	17 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
L_2	13 ←	15 ←	17 ←	19 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
L_3	15 ←	17 ←	19 ←	21 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
L_4	17 ←	19 ←	21 ←	23 ← …
↓	↑	↑	↑	↑
…	…	…	…	…

表 2.7 の周期軌道に対する記号列は下記のように得られる.

$$s_{2.7}(i, j) = \{ 0^i (101)0^{2j-1}(101)0^i, 0^i(111)0^{2j-1}(111)0^i \}. \tag{2.44}$$

ここで $i \geq 1, j \geq 2$ である. 表 2.8 に $(i, i + 1)$ 要素 ($i = 1 - 5$) の最大固有値 $\hat{\lambda}_{\max}$ を示してある. 位相的エントロピーの下界は, $i \rightarrow \infty$ の極限で $\ln 2$ であることが分かる.

表 2.8 最大固有値.

i	表 2.7
1	1.874
2	1.974
3	1.993
4	1.998
5	1.999
λ_{\max}	2

2.5 最大の平坦区間とその族

対称線 S_{11} で $T^n\Gamma_u$ と $T^{-n}\gamma_s$ が接触する場合を考える. $n = 1$ の場合の接触とその適正グラフを図 2.13 に描いてある.

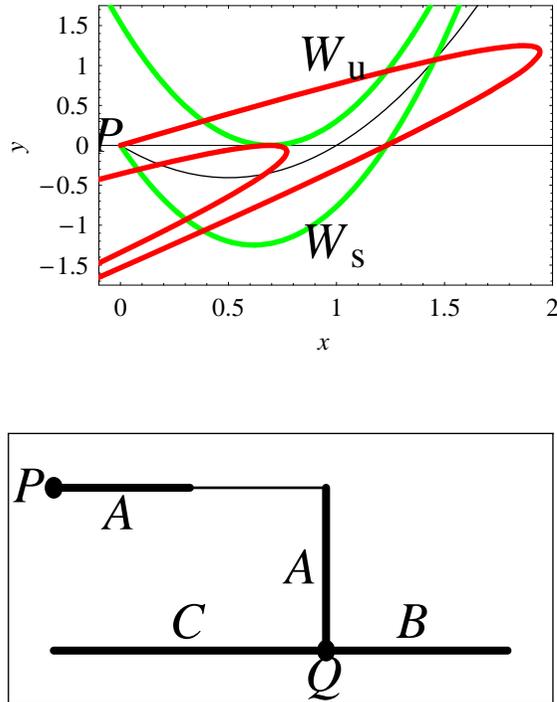


図 2.13 上図は $T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ の接触を表している ($a = 3.242$). 下図はその適正グラフ $\widehat{\mathcal{G}}$ であり, 記号 A, B, C は制御辺を表す.

遷移行列は次のように得られる.⁸⁾

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 1 & 2 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.45)$$

$T^n\Gamma_u$ と $T^{-n}\gamma_s$ が対称線 S_{11} で接する場合も同様の方法で $(2n+3) \times (2n+3)$ 遷移行列が得られる.

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

特性方程式は次のように得られる.

$$\lambda^{2n+1} - \lambda^{2n} - 2 = 0. \quad (2.47)$$

$n \rightarrow \infty$ の極限は, 可積分系つまり $a = 0$ に対応する. この極限で λ_{\max} は 1 に収束する. よって h_{op} は 0 に収束する.

$T\Gamma_u$ と $T\gamma_s$ の最初の接触は 2 次接触であるが, 2 回目の接触は 3 次接触である.¹⁸⁾ 3 次接触の様子は図 2.14 の上図に描いてある. 3 次接触点 α_2 が 2 つのホモクリニック点 β_1 と β_2 を生む. これらの点は下図に描いてある. このタイプの分岐はホモクリニック点の 3 次タイプ分岐と呼ばれている.

$T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ の接触は 2 次接触であることより定理 2.1 においてタイプ 1 の順序が成立する. 但し $k = k' = i_c = n(n \geq 1)$ である. 2 回目の接触は 3 次接触であるが, 定理 2.1 を少し修正することでタイプ II の順序が成立することが示せる. これは簡単なので詳細は省く. 結果を表 2.9(a)- n と (b)- n に示す.

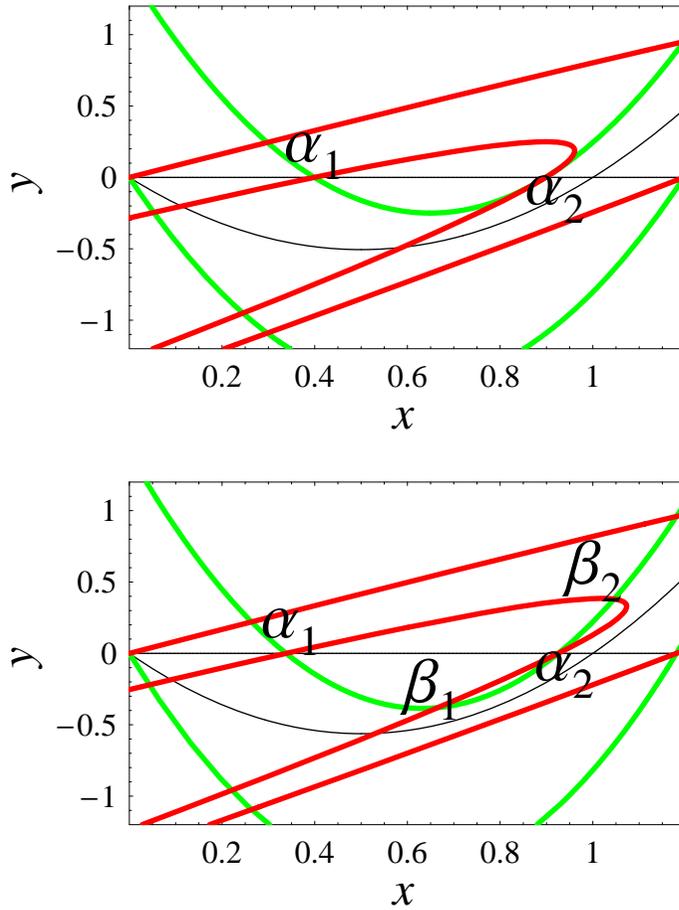


図 2.14 上図は、ホモクリニック点 α_2 において安定多様体と不安定多様体が 3 次接触している状況を示している ($a = 4.045$). 下図は α_2 の周りに新しいホモクリニック点 β_1 と β_2 が生じていることを示している ($a = 4.5$).

表 2.9(a)– n 力学的順序.

	M_{n+1}	\Rightarrow	M_{n+2}	\Rightarrow	M_{n+3}	\Rightarrow	M_{n+4}	$\Rightarrow \dots$
L_n	$8n + 5$	\leftarrow	$8n + 7$	\leftarrow	$8n + 9$	\leftarrow	$8n + 11$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{n+1}	$8n + 7$	\leftarrow	$8n + 9$	\leftarrow	$8n + 11$	\leftarrow	$8n + 13$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{n+2}	$8n + 9$	\leftarrow	$8n + 11$	\leftarrow	$8n + 13$	\leftarrow	$8n + 15$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
L_{n+3}	$8n + 11$	\leftarrow	$8n + 13$	\leftarrow	$8n + 15$	\leftarrow	$8n + 17$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

表 2.9(b)– n 力学的順序.

	M_{n+1}	\Rightarrow	M_{n+2}	\Rightarrow	M_{n+3}	\Rightarrow	M_{n+4}	$\Rightarrow \dots$
L_n	$8n + 5$	\leftarrow	$8n + 7$	\leftarrow	$8n + 9$	\leftarrow	$8n + 11$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{n+1}	$8n + 7$	\leftarrow	$8n + 9$	\leftarrow	$8n + 11$	\leftarrow	$8n + 13$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{n+2}	$8n + 9$	\leftarrow	$8n + 11$	\leftarrow	$8n + 13$	\leftarrow	$8n + 15$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
L_{n+3}	$8n + 11$	\leftarrow	$8n + 13$	\leftarrow	$8n + 15$	\leftarrow	$8n + 17$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

表 2.9(a) と (b) に含まれる周期軌道に対する記号列は次のように決定できる.

$$s_{2.9(a)}^n(i, j) = \{0^i (100^{2n-2}01)0^{2j-1}(100^{2n-2}01)0^i, 0^i(100^{2n-2}11)0^{2j-1}(110^{2n-2}01)0^i, \quad (2.48)$$

$$s_{2.9(b)}^n(i, j) = \{0^i (110^{2n-2}01)0^{2j-1}(100^{2n-2}11)0^i, 0^i(110^{2n-2}11)0^{2j-1}(110^{2n-2}11)0^i. \quad (2.49)$$

ここで $i \geq n, j \geq n + 1, n \geq 1$.

表 2.10 を見ると, 最大固有値 $\hat{\lambda}_{\max}$ は式 (2.47) で決まる λ_{\max} に漸近することが分かる.

表 2.10 最大固有値.

i	2.9(a)-1	2.9(b)-1	2.9(a)-2	2.9(b)-2	2.9(a)-3	2.9(b)-3	2.9(a)-4	2.9(b)-4
1	1.427	1.495						
2	1.634	1.637	1.251	1.288				
3	1.676	1.677	1.386	1.389	1.178	1.203		
4	1.689	1.689	1.424	1.425	1.279	1.281	1.138	1.157
5	1.693	1.693	1.439	1.439	1.312	1.312	1.219	1.220
6	1.694	1.694	1.445	1.445	1.327	1.327	1.248	1.248
7	1.695	1.695	1.447	1.447	1.334	1.334	1.261	1.261
8	1.695	1.695	1.449	1.449	1.337	1.337	1.269	1.269
9			1.450	1.450	1.339	1.339	1.273	1.273
10					1.340	1.340	1.275	1.275
λ_{\max}	1.695	1.695	1.451	1.451	1.342	1.342	1.279	1.279

2.6 いくつかの注意

萩原と首藤¹⁹⁾は位相的エントロピーを計算するための枝刈りアルゴリズムを構成した。このアルゴリズムは下界値を与えるのか上限値を与えるのか保障がない。また非常に複雑なアルゴリズムである。これだけでエノン写像において枝刈り理論が成立しているかどうか不明である。

第1ステージ (§4.2) の内部構造について考えることにする。ここではステージと平坦区間を分けて考える必要がある。図 2.15 で示したように、第1ステージの内部には2つの平坦区間がある。¹⁷⁻¹⁹⁾ 最初の平坦区間の左端は第1ステージの左端に一致している。しかし、第2平坦区間の右端は第1ステージの右端に一致していない。§4.2 で述べたように、各ステージの終わる前後にはサドルノード分岐で対称周期軌道が生じている。このことから周期軌道の個数はこのパラメータ領域で増加する。よって双曲性は成立しない。荒井²²⁾は、双曲性が成立する区間を決定している。これは平坦区間とほぼ一致している。第1ステージを構成している安定多様体と不安定多様体の弧を見る限り、第1ステージの間では位相的エントロピーの下界は一定である。しかし、上記の荒井の結果を見ると、別の場所で安定多様体と不安定多様体の弧が接触し位相的エントロピーの下界を増加させていることが分かる。またもっと狭い平坦区間が第1ステージの内部にある可能性は否定できない。

エノン写像に対してのみピーハム-ウェンツェル法が適用できて周期軌道の個数を計算できる。よって第1ステージの詳細を調べることは可能である。しかし他の写像に関しては周期軌道の個数を調べる方法がない。我々の方法とトレリス法はこのような系に対して

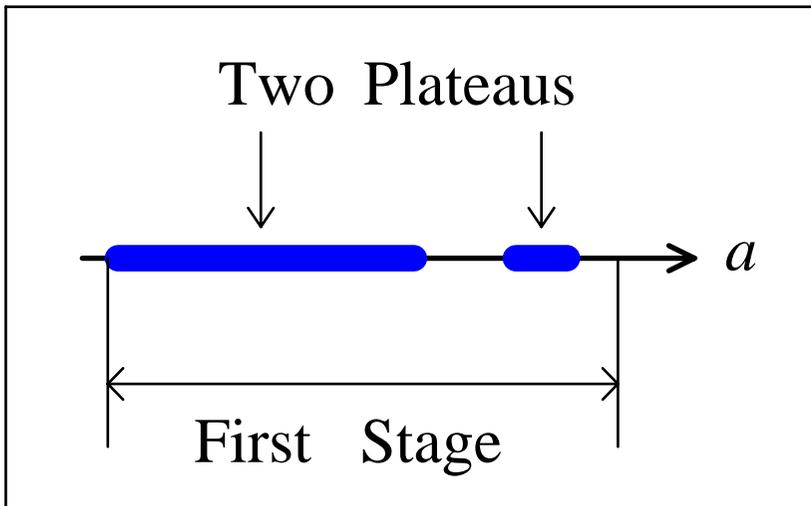


図 2.15 第 1 ステージ $a \in [4.975, 5.145]$ の概念図. この中に双曲性が成立している区間が 2 つある. $a \in (4.975, 5.113)$ と $(5.124, 5.141)$ では分岐が生じないので, 位相的エントロピーが一定の平坦区間である.

も適用できて, 位相的エントロピーの下界を計算できる.

スターリング達はホモクリニック点の 3 次関数分岐について調べた.¹⁸⁾ これは各ステージの終わりで生じる. そしてこの分岐の前後でタイプ II の順序が成立する.

参考文献

- [1] S. E. Newhouse, *Topology* **13** (1974), 9.
- [2] G. D. Birkhoff, *Acta. Math.* **81** (1920), 44.
- [3] R. de Vogelaere, in *Contributions to the Theory of Oscillations*, Vol. IV, Ann. Math. Studies No.41 (Princeton University Press, 1958).
- [4] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002), 1117.
- [5] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005), 935.
- [6] P. Boyland, *Topology and its Appl.* **58** (1994), 223.
- [7] T. Matsuoka, in *Dynamical System 1* (World Scientific, 1986), p. 58; *Contemp. Math.* **152** (1993), 229. *物性研究* **67** (京都大学) (1996), 1.
- [8] P. Collins, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** (2002), 605. "Dynamics of surface maps with homoclinic and heteroclinic tangles", Ph. D thesis (University of California, Berkeley, 1999).
- [9] T. Hall, *Trains*
http://www.liv.ac.uk/math/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html
- [10] J. Nielsen, *Acta. Math.* **50** (1927), 189, *ibid.* **53** (1929), 1; *ibid.* **58** (1931), 87.
- [11] W. P. Thurston, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19** (1988), 417.
- [12] A. J. Casson and S. A. Bleiler, *Automorphisms of Surface after Nielsen and Thurston* (Cambridge University Press, 1988).
- [13] M. Bestvina and M. Handel, *Ann. of Math.* **135** (1992), 1.
- [14] M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69.
- [15] O. Biham and W. Wenzel, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989), 819.
- [16] O. Biham and W. Wenzel, *Phys. Rev. A* **42** (1990), 4639.
- [17] M. J. Dabiz, R. S. Mackay and A. Sannami, *Physica D* **52** (1991), 171.
- [18] D. Sterling, H. R. Dullin and J. D. Meiss, *Physica D* **134** (1999), 153.
- [19] R. Hagiwara and A. Shudo, *J. of Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 10521.
- [20] R. Brown, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **15** (1995), 1045.
- [21] J. Palis, *Topology* **8** (1969), 385.

-
- [22] Z. Arai, *On Hyperbolic Plateaus of Henon Maps*,
<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~arai/>

第 3 章

エノン写像におけるホモクリニック軌道の出現順序

面積保存かつ方向保存エノン写像において馬蹄が完成すれば, すべてのホモクリニック点は記号列で表現される. 一部のホモクリニック軌道の族に関する力学的順序を与える. またこれらのホモクリニック軌道の記号列を利用して位相的エントロピーの下界値を計算した.

3.1 序

面積保存かつ方向保存エノン写像¹⁾において, 我々はサドルノード分岐で生じる対称周期軌道の一般力学的順序を導いた (これに関しては第 1 章と第 2 章を参照のこと).²⁾ この手順は最初にサドル不動点の安定多様体と不安定多様体の接触を決める. 次にこのホモクリニック接触に関する対称周期軌道の出現順序を決定する. 幾何学的には, この方法の幾何学的な意味は簡単である. 対称線の未来の像は不安定多様体に漸近し, 過去への像は安定多様体に漸近する. つまり安定多様体と不安定多様体の接触前後で無限に多くの対称周期軌道が生じる. もし異なったホモクリニック点の出現順序が明らかになると, 対称周期軌道の出現順序関係または系の複雑さに関する情報が得られる. 馬蹄力学系における一部のホモクリニック軌道の強制関係が既に得られている.³⁻⁵⁾ しかし完全な順序関係はまだ得られていない.

我々は平面で定義されたシンプレクティック形式の面積保存でかつ方向保存エノン写像 T を利用する.^{1),6)}

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad (3.1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (3.2)$$

ここで $f(x) = a(x - x^2)$ で, パラメーター a は正である. T は 2 つ不動点 $P = (0, 0)$ と

$Q = (1, 0)$ をもつ. P はサドルで, 不安定多様体と安定多様体をもつ. $W_u = W_u(P)$ を P から右上方に出ている不安定多様体とする. P に右下方から入る安定多様体を $W_s = W_s(P)$ とする. このエノン写像では $a \geq 5.17661 (= a_{hs})$ において馬蹄が存在する.

§3.2 では, 後の節で利用する基本的な道具を準備する. §3.3 では, ホモクリニック軌道の記号列を用いて位相的エントロピーの下界を計算する. §3.4 では, 対称ホモクリニック軌道間の出現順序を調べる. これらの結果をもとに記号列間の出現順序を導く. §3.5 では, 一部のホモクリニック軌道の族に関する局所的な出現順序を導く. また位相的エントロピーの下界を計算する.

3.2 基本的道具

3.2.1 対称線

写像 T は 2 つの対合 h と g の積で次のように表現できる.

$$T = h \circ g. \quad (3.3)$$

対合 h と g は以下のように定義される.

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -y \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - f(x) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

ここで $\det \nabla h = \det \nabla g = -1$. h と g の不動点の集合は対称線と呼ばれる.⁷⁾ h の対称線を S_1 と, g の対称線を S_2 とする. これらは次のように得られる.

$$S_1 : y = 0, \quad (3.5)$$

$$S_2 : y = -f(x)/2. \quad (3.6)$$

関数 $f(x)$ がパラメーターを含むために, パラメーターの変化で S_2 の形状が変わることに注意する. 対称線上の点是对称点と呼ばれる.

3.2.2 安定多様体と不安定多様体の構造

安定多様体 W_s は S_1 と v で, 次に S_2 と u で交差する. 不安定多様体 W_u は S_2 と u で, 次に S_1 と v で交差する (図 3.1 を参照). u と v における安定多様体と不安定多様体の横断的交差はエノン写像では証明されている.⁸⁾

多様体 A の開弧を $(\alpha, \beta)_A$ と表現する. A の方向を自然な方向にとったとき, α が β より上流にあるとする. 閉弧 $[\alpha, \beta]_A$ も同様に記述する. ここで 4 つの弧 $\gamma_u = [u, v]_{W_u}$, $\gamma_s = [u, v]_{W_s}$, $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u}$, $\Gamma_s = [v, Tu]_{W_s}$ を定義する. 次に Z は $[P, u]_{W_u}$, γ_s , Γ_u , $[Tu, P]_{W_s}$ で囲まれた閉領域とする. ホモクリニック軌道の点はすべて Z の中にある. $T^{-1}\gamma_s$ と Γ_u の接触は, $T\Gamma_u$ と γ_s の接触も意味する. この状態が丁度 2 つ折れ馬蹄の完成であることに注

意する. この状況で位相的エントロピーが $\ln 2$ であることはベッドフォードとスマイリー⁹⁾によって証明された.

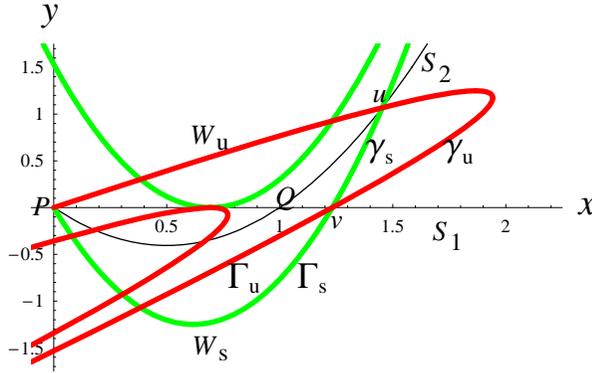


図 3.1 安定多様体 W_s と不安定多様体 W_u , 横断的ホモクリニック交差点 u と v , 安定多様体の区間 γ_s と Γ_s , 不安定多様体の区間 γ_u と Γ_u , 対称線 S_1 (x 軸) と S_2 が描かれている. $a = 3.242$.

3.2.3 ホモクリニック軌道

命題 3.1. s を平面上の任意の点とする. 点 s の軌道を $O(s) = \{\dots, T^{-1}s, s, Ts, \dots\}$ と記す. このとき (i) と (ii) が成立する.

(i) $O(hs) = hO(s) = gO(s) = O(gs)$.

(ii) $O(s) = hO(s) = gO(s)$ が成立することと $O(s)$ が対称周期軌道であることは同値である.

証明. (i) $O(hs) = \{\dots, hT^{-1}s, hs, hTs, \dots\} = \{\dots, hTs, hs, hT^{-1}s, \dots\} = hO(s)$ より最初の関係は得られる. 残りも同様に示すことができる.

(ii) (\rightarrow) $hO(s) = O(hs)$ より, $O(s) = hO(s)$ ならば s から出発した軌道が hs を通ることを意味している. つまり $hs = T^k s$ を満たす整数 k が存在する. ここで k が偶数ならば, $T^{k/2}s = T^{-k/2}hs = hT^{k/2}s$ が成立する. これは $T^{k/2}s$ が S_1 の上にあることを意味する. 次に k が奇数の場合, $k = 2m + 1$ とおく. $T^m s = T^{-m-1}hs = gT^m s$ が得られ, これは $T^m s$ が S_2 の上にあることを意味している.

(\leftarrow) $r = hr \in O(s)$ と仮定する. これより $O(s) = O(r) = O(hr) = hO(r) = hO(s) = gO(s)$ が得られ, 証明は終了する. Q.E.D.

命題 3.1(ii) の性質をもつ軌道を対称軌道と呼ぶ. 対称軌道は必ず対称点を持つ. 逆に対称点の軌道は対称である. s がホモクリニック点ならば, $O(s)$ はホモクリニック軌道と呼ばれる. 更に $O(s)$ が対称ならば, $O(s)$ は対称ホモクリニック軌道と呼ばれる.

3.3 ホモクリニック軌道の符号化

馬蹄が丁度完成したパラメーター $a_{hs} = 5.17661$ に a を固定する. この状態では $T\Gamma_u$ は γ_s と β で接し, 一方 $T^{-1}\gamma_s$ は Γ_u と α で接する (図 3.2 を参照). ここで 4 つの領域 V_0, V_1, H_0, H_1 を定義する. V_0 は 4 つの弧 $[P, T^{-1}u]_{W_u}, [T^{-1}u, \alpha]_{W_s}, [\alpha, Tu]_{W_u}, [\alpha, T^{-1}u]_{W_s}$ で囲まれた領域である. 一方 V_1 は 4 つの弧 $[T^{-1}v, u]_{W_u}, [u, v]_{W_s}, [v, \alpha]_{W_u}, [\alpha, T^{-1}v]_{W_s}$ で囲まれた領域である. H_0 と H_1 は下記の関係で定義される.

$$H_0 = hV_0, \quad (3.7)$$

$$H_1 = hV_1. \quad (3.8)$$

軌道点が V_0 にあれば記号 0 を, V_1 にあれば記号 1 を与える. 次の関係は軌道点の記号化で役に立つ.

$$V_0 = gV_0, \quad (3.9)$$

$$V_1 = gV_1. \quad (3.10)$$

ホモクリニック軌道の記号列は

$$0^\infty 1s_0s_1 \cdots s_{n-1}10^\infty \quad (3.11)$$

と表現される. ここで 0^∞ はゼロが無限個続くことを意味し, s_i は記号 0 または 1 である. 中央部の $s_0s_1 \cdots s_{n-1}$ は核と呼ばれる. ここでは文献 [10] の定義に従った. 核の左の記号 1 はホモクリニック軌道が $T^{-1}\Gamma_u$ に点を 1 つもつことを意味している. 核の右にある記号 1 はこの軌道が γ_s に点を 1 つもつことを意味している. ホモクリニック軌道は長さ n の核によって特徴付けられる. これを $n (\geq 1)$ -核と表現しよう. ここで $n \geq 1$ としたことより, プライマリーホモクリニック軌道 $O(v)$ と $O(u)$ が排除されていることに注意しよう. 理由は, プライマリーホモクリニック軌道の存在はカオスを導くがカオスの強さに関する情報を与えないからである.

$T^{-1}\gamma_s$ が Γ_u と交差した状態を考える. 2 つの交差点は図 3.2 の α が左右に 2 つに分かれた状態と考えることができる. よって, 左側の交差点の核は 0 で右の交差点の核は 1 であることが分かる. この状態では, $T^{-2}\gamma_s$ と Γ_u は 4 点 A_1, A_2, A_3, A_4 で交差している (図 3.3 を参照). これらの軌道を追跡すると, 以下のように 2-核をコード化できる.

$$A_1 : 00, \quad (3.12)$$

$$A_2 : 01, \quad (3.13)$$

$$A_3 : 11, \quad (3.14)$$

$$A_4 : 10. \quad (3.15)$$

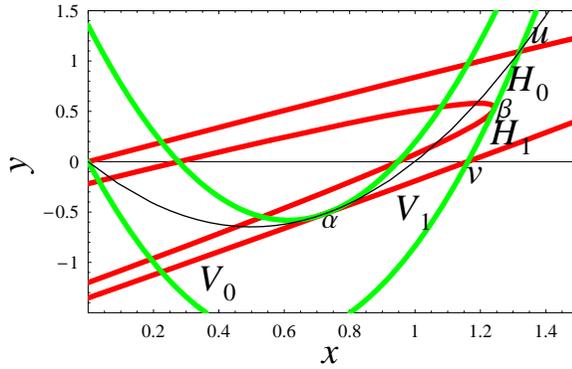


図 3.2 馬蹄が丁度完成したパラメーター値 (エノン写像 : $a_{hs} = 5.17661$) における 4 つの領域 V_0, V_1, H_0, H_1 の定義. α と β は接触点で $\beta = T\alpha$ の関係がある.

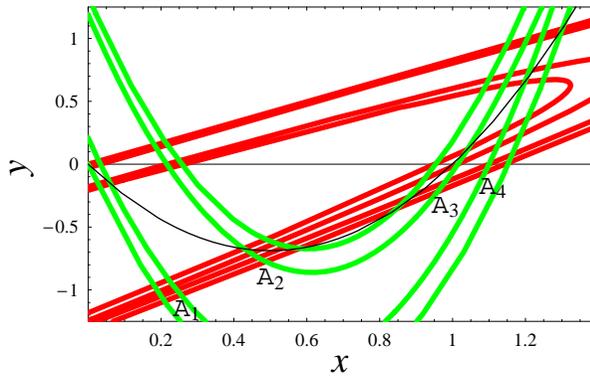


図 3.3 $T^{-2}\gamma_s$ は Γ_u と 4 点 A_1, A_2, A_3, A_4 で交差している.

以下同様に Γ_u にあるホモクリニック交差点の $n (\geq 3)$ -核を順次決めることができる. これらは下記の 1 次元テント写像で決めた記号列と同じになる.

$$x_{n+1} = 2x_n \quad (0 \leq x < 1/2), \tag{3.16}$$

$$= 2 - 2x_n \quad (1/2 \leq x < 1). \tag{3.17}$$

記号の与え方は次のように行う. x_n が区間 $0 \leq x_n < 1/2$ にあれば 0 を, $1/2 \leq x_n < 1$ にあれば 1 を与える.

ホール¹⁰⁾ によって開発されたソフトウェア *Trains3* と上記のホモクリニック軌道の記号列を用いて位相的エントロピーの下界 $h_{\text{op}} (= \ln \lambda_{\text{max}})$ を計算できる. 核の語数が 5 以下のホモクリニック軌道に対して得られた最大固有値 λ_{max} 表 3.1 に掲載してある.

表 3.1. 最大固有値.

Core	λ_{\max}	Core	λ_{\max}	Core	λ_{\max}	Core	λ_{\max}
0	2	0000	1.451	00000	1.388	11000	1.862
1	2	0001	1.451	00001	1.388	11001	1.862
		0011	1.795	00011	1.862	11011	1.925
00	1.695	0010	1.795	00010	1.862	11010	1.925
01	1.695	0110	1.803	00110	1.638	11110	1.855
11	1.695	0111	1.803	00111	1.638	11111	1.855
10	1.695	0101	1.795	00101	1.638	11101	1.638
		0100	1.795	00100	1.638	11100	1.638
000	1.543	1100	1.795	01100	1.638	10100	1.638
001	1.543	1101	1.795	01101	1.638	10101	1.638
011	1.891	1111	1.803	01111	1.855	10111	1.638
010	1.891	1110	1.803	01110	1.855	10110	1.638
110	1.891	1010	1.795	01010	1.925	10010	1.862
111	1.891	1011	1.795	01011	1.925	10011	1.862
101	1.543	1001	1.451	01001	1.862	10001	1.388
100	1.543	1000	1.451	01000	1.862	10000	1.388

最後に表 3.1 の応用について述べる. 例として強制ダフィング方程式を考える. 適当なポアンカレ横断面を考え, この面から面への写像を T とする. T^n ($n \geq 1$) が, $a \geq a_{\text{hs}}$ で 2 つ折れ馬蹄をもつとしよう. $a' (< a_{\text{hs}})$ で, あるセカンダリーホモクリニック点を見つけたとする. ここでパラメーターを a_{hs} まで増加し, 見つけたホモクリニック点の軌道を調べ核の記号列を決める. 例として核が 00100 ならば, $a \geq a'$ においてこの系の位相的エントロピーの下界は $(\ln 1.638)/n$ である. このようにセカンダリーホモクリニック点を見つけると位相的エントロピーの下界が分かるので表 3.1 はいろんな系に簡単に応用できる.

3.4 対称核をもつホモクリニック軌道の出現順序

3.4.1 順序関係

対称核をもつホモクリニック軌道は安定多様体と不安定多様体が対称線上で接することで生じる. 対称偶数核をもつホモクリニック軌道は不安定多様体 $T^n\Gamma_u$ と S_1 の接触から交差を経て生じる. 一方, 対称奇数核をもつホモクリニック軌道は, $T^n\Gamma_u$ と S_2 の接触から交差を経て生じる. この節では対称偶数核と対称奇数核の出現順序を分けて調べる.

馬蹄が完成した状況を考える. 折れ曲がった弧 $T^n\Gamma_u$ ($n \geq 1$) の端点は $(Tu, P)_{W_s}$ にある.

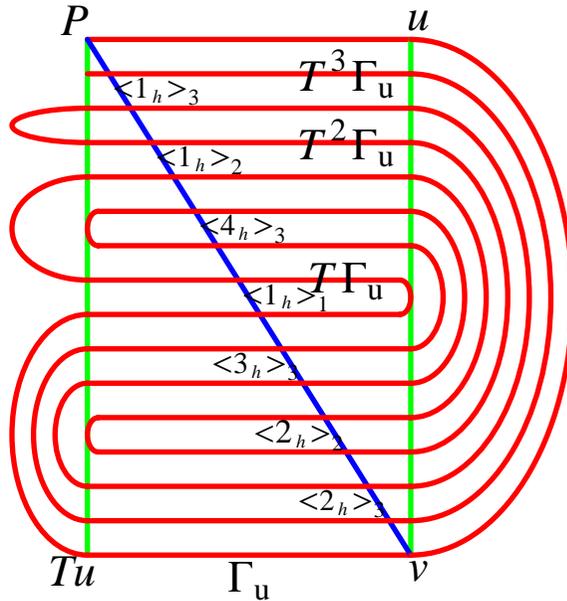


図 3.4 馬蹄が完成したときにおける対称偶数核をホモクリニック軌道の名称.

この弧は不動点 Q を包むように囲む. 端点から不安定多様体の方向に沿って不安定多様体をトレースすると, 不安定多様体は対称線に何度も交差する. これらの交差点が対称ホモクリニック点である. これらに名前を付ける. $T^n \Gamma_u$ ($n \geq 1$) と S_1 の最初の交差点のペアを $\langle 1_h \rangle_n$ とする. これらは P と Q の間にある. 第 2 のペアは Q と v の間にある. これらを $\langle 2_h \rangle_n$ を名づける. 以下同様に名前を付ける. 結果として $\langle 1_h \rangle_n$ から $\langle 2^{n-1}_h \rangle_n$ までの対称ホモクリニック点のペアに名前がつく. 例を図 3.4 に示した. これらの交差点は馬蹄が完成したときは定義できる. 馬蹄が完成していないときも, これらは定義できるであろう. これに関しては次の段落で述べる. 奇数核に対しても同様の表記 $\langle k_g \rangle_n$ ($n \geq 0, 1 \leq k \leq 2^n$) を用いる.

これから馬蹄が完成していないパラメーター領域を考える. $\langle k_h \rangle_n$ は $T^n \Gamma_u$ と S_1 の接触から交差を経て生じることは正しい. しかしパラメーターを増加し馬蹄が完成するまでに 3 次関数タイプの分岐をする可能性は否定できない. この分岐が生じると一つのホモクリニック点が 3 つに分岐する. 分岐しても元々のホモクリニック点が存在することに注意する. このように分岐した場合は分岐した点を無視して $\langle k_h \rangle_n$ を再度定義すればよい. 次に $\langle k_h \rangle_n$ がユニークでない例を考える. $\langle k_h \rangle_n$ が生じた後にパラメーターを増加すると $T^n \Gamma_u$ が伸びて別の所で S_1 と交差して別の $\langle k_h \rangle_n$ が生じる場合である. このような曖昧さをさけるために a を増加したときに $T^n \Gamma_u$ が S_1 と最初の接触で生じたホモクリニック点を $\langle k_h \rangle_n$ とする. これが馬蹄完成時に存在するかどうかは保証がない. しかしこの事と我々が導出

する順序関係とは関係ない. 以下では $\langle k_h \rangle_n^{\min}$ を $\langle k_h \rangle_n$ と略記する.

図 3.5(a) において $(P, v)_{S_1}$ にある $\langle i_h \rangle_n$ の木構造が示されている. これは力学的順序関係を表現していない. 2 分木の根に相当する位置を 1 階と名づけ, 次の階を 2 階と名づけていく. $\langle i_h \rangle_n$ の添え字の n は 2 分木の階数を意味しかつ Γ_u の写像回数も意味する. 図 3.5(b) には, $(P, u)_{S_2}$ にある対称奇数核を配置してある. この木では 2 分木の根に相当する位置を 0 階と名づけ, 次の階を 1 階と名づけていく. 特に根の $\langle 1_g \rangle_0$ の出現は馬蹄の出現を意味する. 実際, 図 3.2 に描かれた状況が $\langle 1_g \rangle_0$ である. 図 3.5 における L と R については §3.4.2 で説明する.

式 (18)-(26) で表される対称偶数核に対する出現順序関係を得た. ここで利用している表現 $A \rightarrow B$ は次のような意味である. A と名づけられたホモクリニック接触または交差が存在すれば, 必ず B と名づけられたホモクリニック接触または交差が存在する.

$$\langle k_h \rangle_n \rightarrow \langle k_h \rangle_{n+1} \quad ((k = 1, n \geq 1), (k = 2, n \geq 2)), \quad (3.18)$$

$$\langle 2_h \rangle_{n+1} \rightarrow \langle 1_h \rangle_n, \quad (n \geq 1), \quad (3.19)$$

$$\cdots \rightarrow \langle 2_h^{n-1} \rangle_n \rightarrow \cdots \rightarrow \langle 8_h \rangle_4 \rightarrow \langle 4_h \rangle_3 \rightarrow \langle 2_h \rangle_2 \rightarrow \langle 1_h \rangle_1, \quad (3.20)$$

$$\langle 3_h \rangle_n \rightarrow \langle 5_h \rangle_{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \langle (2^{k+1} + 1)_h \rangle_{n+k} \rightarrow \cdots, \quad (n \geq 3, k \geq 0), \quad (3.21)$$

$$\langle 6_h \rangle_{n+1} \rightarrow \langle 10_h \rangle_{n+2} \rightarrow \cdots \rightarrow \langle (2^{k+1} + 2)_h \rangle_{n+k} \rightarrow \cdots, \quad (3.22)$$

$$\langle 6_h \rangle_{n+1} \rightarrow \langle 3_h \rangle_n, \quad (3.23)$$

$$\langle (2^{k+1} + 2)_h \rangle_{n+k} \rightarrow \langle (2^{k+1} + 1)_h \rangle_{n+k}, \quad (k \geq 1), \quad (3.24)$$

$$\cdots \rightarrow \langle (2^{n-1} - 1)_h \rangle_n \rightarrow \cdots \rightarrow \langle 15_h \rangle_5 \rightarrow \langle 7_h \rangle_4 \rightarrow \langle 3_h \rangle_3, \quad (3.25)$$

$$\langle 2_h^{n+1} \rangle_n \rightarrow \langle (2^n - 1)_h \rangle_{n+1}, \quad (n \geq 3). \quad (3.26)$$

式 (3.18) と (3.19) は自明である. 以下でこれら以外の順序関係について説明を行う.

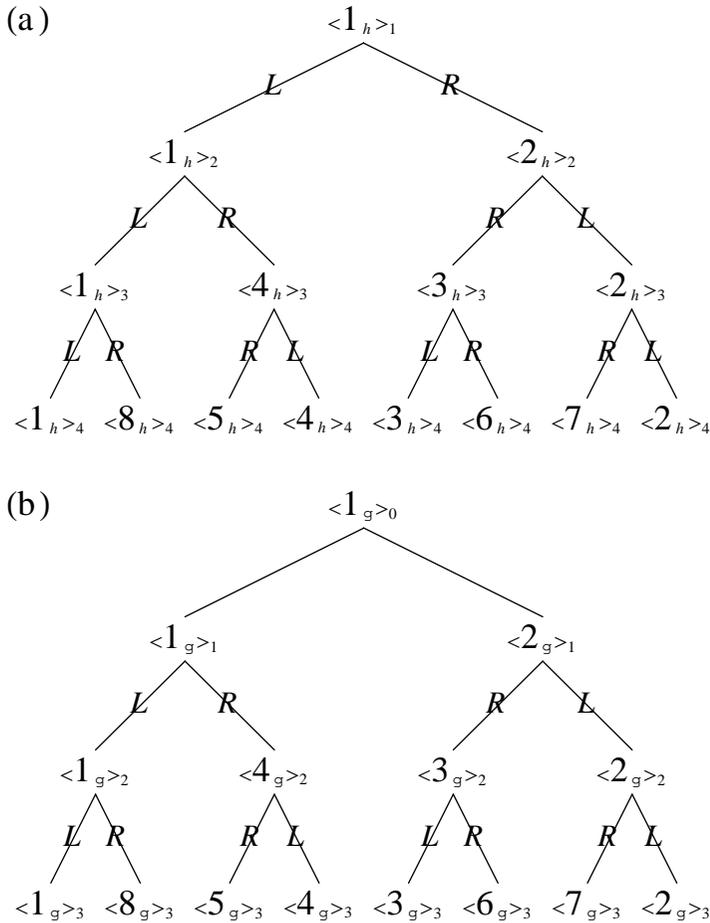


図 3.5 (a) $(P, v)_{S_1}$ 上の対称偶数核をもつホモクリニック軌道の配置. n 階には 2^{n-1} 個の核がある. (b) $(P, u)_{S_g}$ 上の対称奇数核をもつホモクリニック軌道の配置. n 階には 2^n 個の核がある. L と R は 2 分木において経路を指定する作用.

式 (3.20) に対する説明. 最後の順序関係は式 (3.19) に含まれる. 下記の順序関係が成立することを示す.

$$\langle 4_h \rangle_3 \rightarrow \langle 2_h \rangle_2$$

$\langle 4_h \rangle_3$ は Q の左にあるため, その逆像は x 軸の下部にある. $\langle 4_h \rangle_3$ が存在する状況で Q の右側に $\langle 2_h \rangle_3$ ある. この逆像は x 軸の上部にある. この事実より $T^2\Gamma_u$ が x 軸と交差することが導かれる. よって $\langle 2_h \rangle_2$ の存在が示された.

次に残りの関係を証明する. $(P, Q)_{S_1}$ を過去に写像した像 $T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ ($k = 1, 2, \dots$) を考える. $(P, Q)_{S_1}$ には不動点はないので, $T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ と $T^{-k-1}(P, Q)_{S_1}$ は共通点をもたな

い. つまり k によって $T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ は順序づけられている. $k \rightarrow \infty$ とした極限で, $T^3\gamma_s$ に漸近する $T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ の弧の列が存在する. よって $T^3\Gamma_u \cap T^{-k-1}(P, Q)_{S_1} \neq \emptyset$ ($k \geq 0$) が成立しているならば, 交点 $T^3\Gamma_u \cap T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ が存在する (図 3.6 を見よ). 交差点を端点から数えることで, $T^3\Gamma_u \cap T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ が $(k+3)$ 階にあるホモクリニック点である事は簡単に確認できる. 同様に交点 $T^3\Gamma_u \cap T^{-k-1}(P, Q)_{S_1}$ は $\langle 2_h^{k+3} \rangle_{k+4}$ である. 以上をまとめて $\langle 2_h^{k+3} \rangle_{k+4} \rightarrow \langle 2_h^{k+2} \rangle_{k+3}$ が得られる.

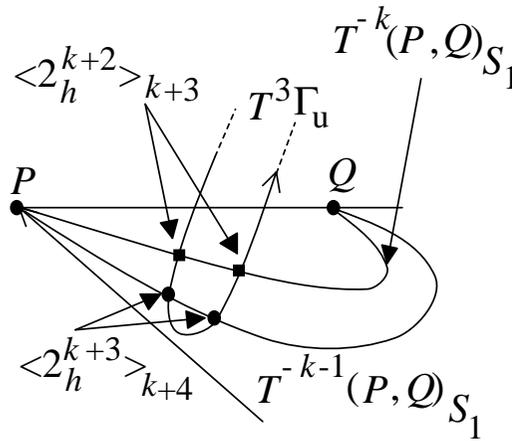


図 3.6 $\langle 2_h^{k+3} \rangle_{k+4}$ と $\langle 2_h^{k+2} \rangle_{k+3}$ の関係.

$a_c(\langle i_h \rangle_n)$ を $\langle i_h \rangle_n$ が生じた最初に臨界値であるとする. 奇数核に対しても同様の記号 $\langle i_g \rangle_n$ と $a_c(\langle i_g \rangle_n)$ を用いる. 漸近的な性質から, 次の関係が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(\langle 2_h^{n-1} \rangle_n) = a_{hs}. \quad (3.27)$$

式 (3.21) に対する説明.

最初に $n = 2m + 1$ ($m \geq 1$) を考える. $T^m\Gamma_u$ と $T^{-m}\gamma_s$ が 4 点で交差している状況を考える. この状況で $T^m\Gamma_u$ and $T^{-m}\gamma_s$ は $(P, Q)_{S_1}$ と既に最初の接触をして, 最初の 3 次タイプの接触も終えている. よって $T^{2m}\Gamma_u$ と γ_s は 4 点で交差している. すなわち $T^{2m}\Gamma_u$ は γ_s で 3 つの弧に分割されている. 最初は端点に近い弧であり Z に含まれる. 第 2 の弧は Z の外にある. 第 3 の弧は再度 Z の内部に入った弧である. 第 3 の弧を ξ_u ($\subset T^n\Gamma_u$) と名づける (図 3.7(a)). この弧の端点は $T\gamma_s$ にあることに注意する. この弧を未来へ写像する.

ξ_u と $(P, Q)_{S_1}$ が最初の接触を生じる状況を考える. この状況は $0 < a < a_{hs}$ において必ず生じる. $a = a_{hs}$ では両者交差しているからである. これは $\langle 3_h \rangle_n$ が生じることを意味す

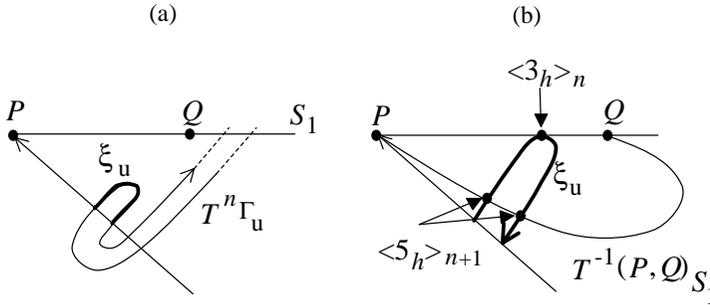


図 3.7 (a) ξ_u の定義と (b) $\langle 3_h \rangle_n$ と $\langle 5_h \rangle_{n+1}$ の関係.

る. 接点は $y > 0$ の領域に写像される. これより ξ_u は $T^{-1}(P, Q)_{S_1}$ と交差する. 交差点は $\langle 5_h \rangle_{n+1}$ である. 以上より $\langle 3_h \rangle_n \rightarrow \langle 5_h \rangle_{n+1}$ が示された.

一般に $T^k \xi_u \cap (P, Q)_{S_1} \neq \emptyset$ が成立しているならば $T^k \xi_u \cap T^{-1}(P, Q)_{S_1} \neq \emptyset$ が成立する. これは順序関係 $\langle (2^{k+1} + 1)_h \rangle_{n+k} \rightarrow \langle (2^{k+2} + 1)_h \rangle_{n+k+1}$ を導く. よって式 (5.25) が奇数の n において証明された.

次に $n = 2m + 2$ ($m \geq 1$) が偶数の場合を考える. $T^m \Gamma_u$ と $T^{-m-1} \gamma_s$ が 4 点で交差しているならばそのうちの 2 点は弧 $(P, Q)_{S_2}$ にある. $T^m \Gamma_u$ の弧 ξ_u が存在する. 弧 ξ_u の端点は $T\gamma$ にあり, これは Z の内部に伸びている. この ξ_u を利用すると, n が偶数の場合に式 (5.25) が成立することが示せる. 実際, z が領域 $y < 0$ にあると, hz は領域 $y > 0$ にある. つまり $Tz = h(gz) = hz$ より, Tz は領域 $y > 0$ にある.

式 (3.22) に対する説明. 式 (5.25) の状況を考える. つまり $T^m \Gamma_u$ の弧 ξ_u を考える. この端点は $T\gamma_s$ にあり, これは Z の内部に伸びている. ここで $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ は $y = -f(x)$ ($y > 0$) であることに注意しよう. ξ_u と $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ が接触した状況を考える. 図 3.8(a) に $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ は細線で描かれている. この接触点は $\langle 6_h \rangle_{n+1}$ の逆像である. この手法を一般化する. $(Q, v)_{S_1}$ の逆像の弧列で $T\gamma_s$ に漸近している弧列がある. よって $k \geq 1$ に対して $\xi_u \cap T^{-k}(Q, v)_{S_1} \neq \emptyset$ が成立しているならば, $\xi_u \cap T^{-k-1}(Q, v)_{S_1} \neq \emptyset$ が得られる. これは順序関係 $\langle (2^{k+1} + 2)_h \rangle_{n+k} \rightarrow \langle (2^{k+2} + 2)_h \rangle_{n+k+1}$ を意味している.

式 (3.23) と (3.24) に対する説明. $\langle 6_h \rangle_{n+1}$ がちょうど生じた臨界値にパラメーターをセットする. $\langle 6_h \rangle_{n+1}$ は $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ の上にあるから, この逆像は $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ にある. 明らかに ξ_u は $(Q, v)_{S_1}$ と交差し, 交差点は $\langle 3_h \rangle_n$ である (図 3.8(b)). よって式 (3.23) が得られた. $T^{-1}(P, Q)_{S_1}$ と $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ の位置を比較すると ξ_u は $T^{-1}(P, Q)_{S_1}$ と $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ とこの順で交差する. これは順序関係 $\langle 6_h \rangle_{n+1} \rightarrow \langle 5_h \rangle_{n+1}$ を意味する. 一般に $k \geq 1$ において ξ_u は

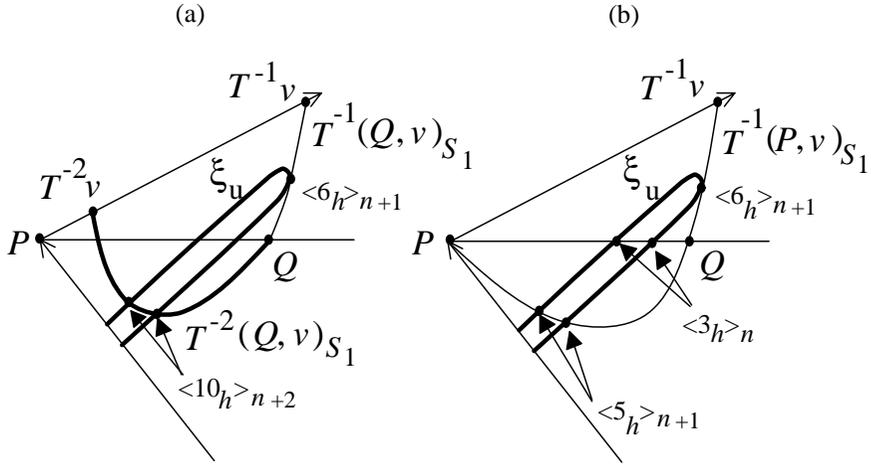


図 3.8 (a) $\langle 6_h \rangle_{n+1}$ と $\langle 10_h \rangle_{n+2}$ の関係. 細線は $T^{-1}(Q, v)_{S_1}$ を, 太い線は $T^{-2}(Q, v)_{S_1}$ を表す. (b) $\langle 6_h \rangle_{n+1}$, $\langle 3_h \rangle_n$ と $\langle 5_h \rangle_{n+1}$ の関係.

$T^{-k}(P, Q)_{S_1}$ と $T^{-k}(Q, v)_{S_1}$ とこの順で交差する. よって式 (3.24) が得られた.

式 (3.25) と (3.26) に対する説明. $T^{-2}\gamma_s$ と $T^2\Gamma_u$ の弧が最初に接触した状況を考える. この状況は第 2 章 (2.4.2) で紹介した第 1 ステージである (参考文献 [2] を見よ). この状況は図 3.9 に描いてある. 接点は小さな円盤で描き α と名前を付けてある. 対称性 $\beta = h\alpha$ より, β も $T^{-2}\gamma_s$ と $T^2\Gamma_u$ の接点である. β は小円で描いてある. 2 点 $T^2\alpha$ と $T^2\beta$ は γ_s 上にある. また $T^2\beta$ は $T^4\Gamma_u$ 上の点でもある. つまり $T^4\Gamma_u$ と $(Q, v)_{S_1}$ は交差点をもち, 交差点は $T^2\beta$ の左にある (図 3.6 では 7_4 と略記). これより $\langle 7_h \rangle_4$ の存在が示され, 順序関係 $\langle 4_h \rangle_3 \rightarrow \langle 7_h \rangle_4$ が示された.

$T^3\beta \in T\gamma_s$ より, $T^5\Gamma_u$ は領域 $y < 0$ に弧をもつ. よって $\langle 15_h \rangle_5$ が存在すれば, $\langle 7_h \rangle_4$ が存在する. 順序関係 $\langle 15_h \rangle_5 \rightarrow \langle 7_h \rangle_4$ が得られた. 次に $T^{-2}\gamma_s$ が $T^3\Gamma_u$ の弧に, 図 3.9 における α の上部で接した状況を考える. これが第 2 ステージの始まりである (§2.4.3). 第 1 ステージに関して行った手順を再度繰り返し次の関係が得られる.

$$\langle 8_h \rangle_4 \rightarrow \langle 15_h \rangle_5,$$

$$\langle 31_h \rangle_6 \rightarrow \langle 15_h \rangle_5.$$

同様にして第 k (≥ 1) ステージに対しても同じ手順を適用に下記の関係を得る.

$$\langle (2^{k+1})_h \rangle_{k+2} \rightarrow \langle (2^{k+2} - 1)_h \rangle_{k+3},$$

$$\langle (2^{k+3} - 1)_h \rangle_{k+4} \rightarrow \langle (2^{k+2} - 1)_h \rangle_{k+3}.$$

最後に関係 $\langle 7_h \rangle_4 \rightarrow \langle 3_h \rangle_3$ を証明する. 図 3.9 の状況では, $\langle 7_h \rangle_4$ と $\langle 3_h \rangle_3$ は両方存在している. $\langle 3_h \rangle_3$ が存在する状況を考える. $\langle 5_h \rangle_4$ が存在していることは知っている. $\langle 3_h \rangle_3$ の像は領域 $y > 0$ にある. つまり $\langle 6_h \rangle_4$ と $\langle 7_h \rangle_4$ は存在していない. よって関係は証明された. これらの関係をまとめると, 式 (3.25) と (3.26) が得られる.

下記の関係が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(\langle (2^{n-1} - 1)_h \rangle_n) = a_{hs}. \tag{3.28}$$

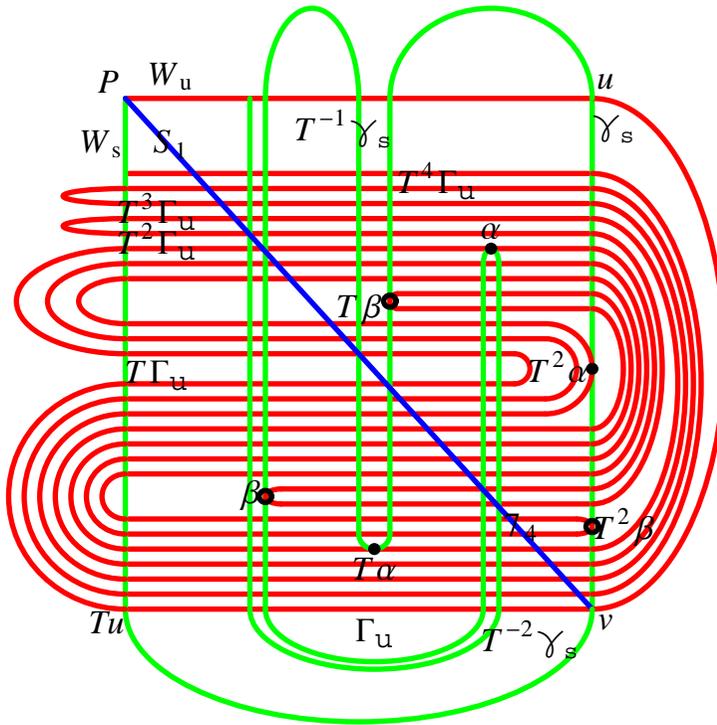


図 3.9 $T^2\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ が接触する第 1 ステージの始まり ($a = 4.975\dots$). 接触点を α と $\beta (= h\alpha)$ とする. 記号 γ_4 は $\langle 7_h \rangle_4$ を意味する. 対角線は S_1 .

奇数核に関する順序関係が次のように得られる. 証明方法は偶数核の場合とまったく同じであるので, 証明は省略する.

$$\langle k_g \rangle_n \rightarrow \langle k_g \rangle_{n+1} \ ((k = 1, n \geq 0), (k = 2, n \geq 1)), \tag{3.29}$$

$$\langle 2_g \rangle_{n+1} \rightarrow \langle 1_g \rangle_n, \ (n \geq 1), \tag{3.30}$$

$$\dots \rightarrow \langle 2^{n-1}_g \rangle_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \langle 16_h \rangle_4 \rightarrow \langle 8_h \rangle_3 \rightarrow \langle 4_h \rangle_2, \tag{3.31}$$

$$\langle 3_g \rangle_n \rightarrow \langle 5_g \rangle_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow \langle (2^{k+1} + 1)_g \rangle_{n+2} \rightarrow \dots, \quad (n \geq 2, k \geq 0), \quad (3.32)$$

$$\langle 6_g \rangle_{n+1} \rightarrow \langle 10_g \rangle_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow \langle (2^{k+1} + 2)_g \rangle_{n+k} \rightarrow \dots, \quad (3.33)$$

$$\langle (2^{k+1} + 2)_g \rangle_{n+k} \rightarrow \langle (2^{k+1} + 1)_g \rangle_{n+k}, \quad (k \geq 1). \quad (3.34)$$

3.4.2 核の出現順序関係

2分木の任意の要素の核を決定する便利な方法を紹介する. そのために2つの作用 L と R を用意する. 偶数核の場合は, 2分木の1階の要素の核を $s_{\text{old}} = 0\hat{s}0$ とする. L をこれに作用すると, 新核 $s_{\text{new}} = Ls_{\text{old}}$ が $0^2\hat{s}0^2$ と得られる. R を作用すると新核 $s_{\text{new}} = Rs_{\text{old}}$ は $01\hat{s}10$ である. 以下に作用をまとめておく.

$$L0\hat{s}0 = 0^2\hat{s}0^2, \quad R0\hat{s}0 = 01\hat{s}10.$$

L と R の作用の仕方は図 3.5(a) に示してある. 2分木の節が偶数のとき, 右枝に進むときの作用は L で左枝に進むときの作用は R である. 節が奇数の場合は, 右枝に進むときの作用は R で左枝に進むときの作用は L である. 例として $\langle 4_h \rangle_3$ の核は RLs ($s = 0^2$) で, 010^210 と得られる. 同様の作用を奇数核に対しても行うことができる. これは図 3.5(b) に示してある. 記号化のプロセスは $\langle 1_g \rangle_1$ (核: 0^3) または $\langle 2_h \rangle_1$ (核: 010) から始める. 例として, $\langle 4_g \rangle_3$ の核は LRs ($s = 0^3$) で, 0^21010^2 と得られる.

2分木において $\langle 1_h \rangle_1$ から $\langle N_h \rangle_n$ までの道はユニークに決まる. この道が L と R の作用の順を決める. その結果, $\langle N_h \rangle_n$ の核の表現が決まる. 順序数 7 が存在する最小の階数は4階である. つまり4階以上の階には 7 は存在する. ここで4階の 7 の核を s_{7_4} と書く. そうすると $\langle 7_h \rangle_n$ ($n \geq 4$) の核は $L^{n-4}s_{7_4}$ となる. このことは $\langle N_h \rangle_{n_{\text{min}}}$ の核を決定することが重要であることがわかる. 但し, n_{min} は N が存在する最小の階数である. 上記の作業を行うためには, n_{min} 階における N の位置を決める必要がある. この位置が決まれば1階からの道が決まり, L と R の作用の順も決まる. この手順をアルゴリズム1にまとめてある(付録Aを見よ). 付録A.3のプログラム-1は, これらの処理を行う. 2分木の位置から N を決め, 1階からの道と L と R の作用の順を決める必要もある. この手順はアルゴリズム2にまとめた. 付録A.3のプログラム-2は, この処理を行う.

§3.4.1 で得られた順序関係より, 核に対する順序関係を導くことができる. 得られた順序関係を以下に示す. 矢印記号 (\rightarrow) は, 2つの核の間の強制関係を表している. 例として $0 \rightarrow 0^2$ は, もし核 0 が存在すれば核 0^2 が存在することを意味する. また 0^0 は空とする.

核に対する順序関係.

$$0 \rightarrow 0^2 \rightarrow 0^3 \rightarrow 0^4 \rightarrow \dots, \quad (3.35)$$

$$010 \rightarrow 01^20 \rightarrow 0^210^2 \rightarrow 0^21^20^2 \rightarrow 0^310^3 \rightarrow 0^31^20^3 \rightarrow \dots, \quad (3.36)$$

$$0^{n-2}1^40^{n-2} \rightarrow 0^{n-2}1^20^21^20^{n-2} \rightarrow 0^{n-2}1^20^41^20^{n-2} \rightarrow 0^{n-2}1^20^61^20^{n-2} \rightarrow \dots, \quad (3.37)$$

$$0^{n-1}1^30^{n-1} \rightarrow 0^{n-1}1^201^20^{n-1} \rightarrow 0^{n-1}1^20^31^20^{n-1} \rightarrow 0^{n-1}1^20^51^20^{n-1} \rightarrow \dots, \quad (3.38)$$

$$\dots \rightarrow 010^{2n-4}10 \rightarrow \dots \rightarrow 010^410 \rightarrow 010^210 \rightarrow 01^20 \rightarrow 0^2. \quad (3.39)$$

$$\dots \rightarrow 010^{n-3}1^20^{n-3}10 \rightarrow \dots \rightarrow 010^21^20^210 \rightarrow 0101^2010 \rightarrow 01^40. \quad (3.40)$$

以下で上記の順序関係の説明を行う.

式 (3.35) に対する説明.

S_1 と S_2 の位置を比較すると, 下記の関係が得られる.

$$\langle 1_h \rangle_n \rightarrow \langle 1_g \rangle_n. \quad (3.41)$$

式 (3.18) と式 (3.29) を一緒にして, 式 (3.35) が得られる核 0^m ($m \geq 1$) で特徴付けられる系の位相的エントロピーの下界値は $\ln \lambda_{\max}$ である. ここで λ_{\max} は下記の特性方程式の解の最大値である.

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m - 2 = 0. \quad (3.42)$$

式 (3.42) はトレリス法を利用して導いた. トレリス法の詳細は文献 [13] にある. また文献 [2] も参考にせよ. $n \rightarrow \infty$ の極限では, 最大固有値は 1 に漸近する. つまり位相的エントロピーはゼロに向かう. この状態は $a = 0$ の可積分系である.

式 (3.36) に対する説明.

下記の 2 つの関係が成立する.

$$\langle 2_g \rangle_n \rightarrow \langle 2_h \rangle_{n+1} \quad (n \geq 1), \quad (3.43)$$

$$\langle 2_h \rangle_n \rightarrow \langle 2_g \rangle_n \quad (n \geq 2). \quad (3.44)$$

$x > 1$ にある S_2 の点は, $y < 0$ の領域に写像される. この事実と $T^n \Gamma_u$ の連続性より式 (3.43) が導かれる. $T^n \Gamma_u$ の連続性より式 (3.44) が成立することは自明である. これらの関係より核に関しての順序関係 (3.36) が得られる. トレリス法を利用して, 核 $0^n 10^n$ をもつ $\langle 2_g \rangle_n$ の位相的エントロピーの下界を計算できる. 最大固有値は下記の式の解の最大値である.

$$\lambda^{3n+2}(\lambda - 1) - \lambda^{2n+1}(\lambda + 1) - 2 = 0. \quad (3.45)$$

同様にして核 $0^n 1^2 0^n$ をもつ $\langle 2_h \rangle_n$ の位相的エントロピーは下記の式の解の最大値より決まる.

$$\lambda^{2n+3} - (\lambda^{n+1} + 1)^2 - 1 = 0. \quad (3.46)$$

$n \rightarrow \infty$ の極限では, これら式の解の最大値は 1 に漸近する.

式 (3.37) の説明

式 (3.37) は式 (3.38) より得られる. $\langle (2k+3)_h \rangle_{n+k}$ ($k \geq 0$) の核は $0^{n-2} 1^2 0^{2k} 1^2 0^{n-2}$ である. $k \rightarrow \infty$ の極限では, 下記の関係が成立する.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(0^{n-2} 1^2 0^{2k} 1^2 0^{n-2}) = h(0^{n-1}) \quad (3.47)$$

式 (3.47) は左辺の極限の状態の位相的エントロピーの下界値が, 右辺の核 0^{n-1} で特徴付けられる状態の位相的エントロピーの下界値に等しいことを表している. 左辺の状態が漸近する状態は $T^n \Gamma_u$ が $T \gamma_s$ と 2 回目の接触をする状態である. しかし, $T^n \Gamma_u$ が $T \gamma_s$ と 1 回目の接触した状態と 2 回目の接触した状態の位相的エントロピーの下界値は等しいという事実をここでも利用している. 0^{n-1} の位相的エントロピーの下界値は式 (3.42) で得られる.

式 (3.38) の説明.

式 (3.38) は式 (3.32) から得られる. $\langle (2k+3)_g \rangle_{n+k}$ ($k \geq 1$) の核は $0^{n-1} 1^2 0^{2k-1} 1^2 0^{n-1}$ である. 極限の状態に関して下記の関係が得られる.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(0^{n-1} 1^2 0^{2k-1} 1^2 0^{n-1}) = h(0^n) \quad (3.48)$$

式 (3.39) と (3.40) の説明.

式 (3.39) は式 (3.20) より得られる. 式 (3.27) より極限に関して次の関係が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(010^{2n-4}10) = \ln 2. \quad (3.49)$$

式 (3.40) は式 (3.25) より得られる. 式 (3.28) より極限に関して次の関係が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(010^{n-3}1^2 0^{n-3}10) = \ln 2. \quad (3.50)$$

3.5 局所的順序関係

$T^n\Gamma_u$ に漸近している不安定多様体の弧の列が存在する. 一方では $T^{-n'}\gamma_s$ に漸近している安定多様体の弧の列が存在する. $T^n\Gamma_u$ と $T^{-n'}\gamma_s$ が接触している状態を考える. この接触が生じる前後に, 漸近している不安定多様体の弧と漸近している安定多様体の弧の交差が無限回生じる. ここでは代表的な例として $T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ が最初の接触をしている状態つまり $\langle 1_h \rangle_1$ と, $T\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ が最初の接触をしている状態つまり $\langle 1_g \rangle_1$ を以下で扱う. この節のタイトルの局所的という語は, $\langle 1_h \rangle_1$ または $\langle 1_g \rangle_0$ の周辺で生じる交差の順序関係であることを反映している.

3.5.1 不安定多様体上の区間の定義

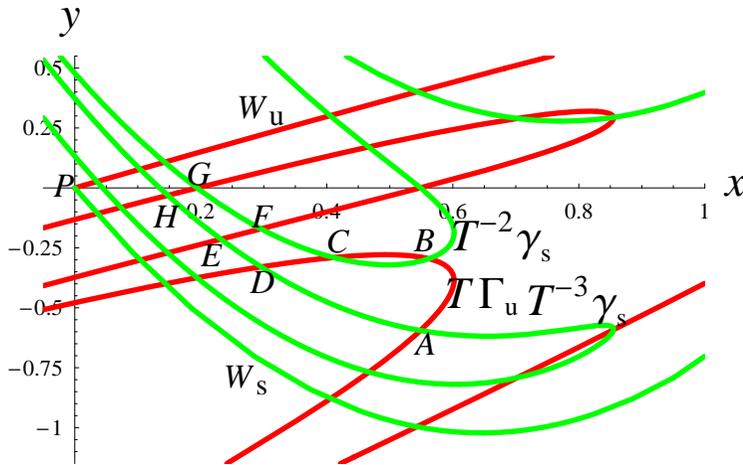


図 3.10 区間 $[A, B]_{T\Gamma_u}$, $[C, D]_{T\Gamma_u}$, $[E, F]_{T^2\Gamma_u}$, $[G, H]_{T^2\Gamma_u}$ の定義.

Γ_u と γ_s に部分区間の列を定義する. そのために $T\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ が最初の接触点を S_2 に持つパラメーターを考える. この接触はパラメーターを 0 から増加したとき, 図 3.1 に示した $T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ の接触が生じる前に起きる. $T\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ が交差点を持つパラメーター値では, $T\Gamma_u$ と $T^{-3}\gamma_s$ はすでに交差している. $T\Gamma_u$ の 2 つの弧 $[A, B]_{T\Gamma_u}$ と $[C, D]_{T\Gamma_u}$ を定義する. ここで A と D は $T^{-3}\gamma_s$ にあり, B と C は $T^{-2}\gamma_s$ にある.(図 3.7 を参照). もっと正確に言うと, $T\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ が最初の接触で, 少しパラメーターの値を増加する. この結果, 接触点は 2 つの交点に分離する. これらの点は B と C で, C は B より安定多様体上で上流にある. この状態で $T^{-3}\gamma_s$ は $T\Gamma_u$ と交差している. Z の内部にある $T^{-3}\gamma_s$ は上流区間と下流区間をもつ. $T\Gamma_u$ はこれらと交差する. A と D を下流区間との交差点とする. ただし, A

は D より安定多様体上で上流にある.

2つの弧 $[A, B]_{T\Gamma_u}$ と $[C, D]_{T\Gamma_u}$ の元像は Γ_u にある. これらをまとめて

$$I_1^u \equiv T^{-1}[A, B]_{T\Gamma_u} \cup T^{-1}[C, D]_{T\Gamma_u}$$

と書くことにする. 次に $T^2\Gamma_u$ は $T^{-2}\gamma_s$ と $T^{-3}\gamma_s$ と交差している. これより交点 E, F, G, H を同様にして定義できる. よって $I_2^u \in \Gamma_u$ を次のように定義する.

$$I_2^u \equiv T^{-2}[E, F]_{T^2\Gamma_u} \cup T^{-2}[G, H]_{T^2\Gamma_u}$$

以上の手順を繰り返して順次区間 I_i^u ($i \geq 1$) を定義できる. これらの区間に関して下記の性質が成り立つ.

性質 1.

[1] $I_i^u \cap I_j^u = \emptyset$ ($i, j \geq 1, i \neq j$).

[2] $i \geq 1$ とする. $T^{i+5}I_{i+1}^u$ は $T^{i+4}I_i^u$ と $T\Gamma_u$ の間にある. そして次の関係が成立する.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+4}I_i^u = T\Gamma_u. \quad (3.51)$$

式 (3.51) が述べている漸近構造はラムダ補題¹²⁾を用いて証明できる. 同様の関係が $I_i^s (= hI_i^u)$ に対して成立する. 最後に $\Omega_u = T^{-1}\Gamma_u$ に区間 $L_i^u = T^{-1}I_i^u$ を定義する.

ここで2つのホモクリニック軌道 $\mathcal{H}(k, k')$ と $\mathcal{G}(k, k')$ を定義する. $T^k\Gamma_u \cap T^{-k'}\gamma_s$ に点を持つホモクリニック軌道を $\mathcal{H}(k, k')$ と記す. 但し $k + k' \geq 1, k \geq 0, k' \geq 0$ が成立しているとする. $T^k\Omega_u \cap T^{-k'}\gamma_s$ に点を持つホモクリニック軌道を $\mathcal{G}(k, k')$ と記す. 但し $k + k' \geq 2, k \geq 0, k' \geq 0$ が成立しているとする.

命題 3.2. k と k' に対して, $k \neq k'$ が満たされるならば下記の性質が成立する.

[1] $\mathcal{H}(k, k') \cap \mathcal{H}(k', k) = \emptyset$. $\mathcal{H}(k, k')$ と $\mathcal{H}(k', k)$ は対称点を持たない.

[2] $\mathcal{G}(k, k') \cap \mathcal{G}(k', k) = \emptyset$. $\mathcal{G}(k, k')$ と $\mathcal{G}(k', k)$ は対称点を持たない.

証明. ホモクリニック軌道は Γ_u に1点をもつ. 実際, もし2点もつとするならば不安定多様体または安定多様体が自分自身と交差する. 軌道 $\mathcal{H}(k, k')$ は $T^k\Gamma_u$ に点を持ち, $\mathcal{H}(k', k)$ は $T^{k'}\Gamma_u$ に点を持つ. これより [1] の最初の主張は証明された. 命題 3.1 より第2の主張が導かれる. [2] の証明も同様にして行える. Q.E.D.

3.5.2 記号

最初に記号

$$\mathcal{H}(k, k') \rightarrow \mathcal{H}(m, m') \quad (3.52)$$

を導入する. これは, $\mathcal{H}(k, k')$ と $\mathcal{H}(m, m')$ の間の順序関係を表している. 我々は, この関係を $\mathcal{H}(k, k')$ は $\mathcal{H}(m, m')$ を強制すると読む. これは $\mathcal{H}(k, k')$ で表される $T^k\Gamma_u$ と $T^{-k'}\gamma_s$ の

ホモクリニック接触点または交差点が存在すれば、 $\mathcal{H}(m, m')$ で表される $T^m\Gamma_u$ と $T^{-m'}\gamma_s$ のホモクリニック交差点が存在することを意味する。下記の記法も利用する。

$$\mathcal{G}(k, k') \rightarrow \mathcal{G}(m, m'). \tag{3.53}$$

これらの記法を利用するときの注意を述べる。 $T^k\Gamma_u$ と $T^{-k'}\gamma_s$ のホモクリニック接触から交差への過程が何度も生じる場合を考える。接触点の場合、何回目の接触なのかを決める必要がある。また交差点の場合も、何回目の接触で生じた交点なのかを確定する必要がある。

$\mathcal{H}(k, k')$ が存在するとしよう。この軌道に強制されるホモクリニック軌道を $\mathcal{H}_{(k, k')}(m, m')$ と書く。ここで $m, m' > \text{Max}(k, k')$ が満たされているとする。 $\mathcal{G}(k, k')$ に対しても同様の記法を用いる。

3.5.3 順序関係 1

ホモクリニック軌道 $\mathcal{H}(1, 1)$ に強制されるホモクリニック軌道 $\mathcal{H}(k, k')$ の順序関係を導く。

定理 3.1. $T\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ が最初の接触で $T^5I_1^u \cap T^{-5}I_1^s = \emptyset$ が成立していると仮定する。ホモクリニック軌道 $\mathcal{H}(1, 1)$ に強制されるホモクリニック軌道に対して次の力学的順序が成立する。

表 3.2. 力学的順序.

	I_1^s	I_2^s	I_3^s	
I_1^u	$\mathcal{H}(5, 5)$	$\leftarrow \mathcal{H}(5, 6)$	$\leftarrow \mathcal{H}(5, 7)$	$\leftarrow \dots \mathcal{H}(5, 1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
I_2^u	$\mathcal{H}(6, 5)$	$\leftarrow \mathcal{H}(6, 6)$	$\leftarrow \mathcal{H}(6, 7)$	$\leftarrow \dots \mathcal{H}(6, 1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
I_3^u	$\mathcal{H}(7, 5)$	$\leftarrow \mathcal{H}(7, 6)$	$\leftarrow \mathcal{H}(7, 7)$	$\leftarrow \dots \mathcal{H}(7, 1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\mathcal{H}(1, 5)$	$\leftarrow \mathcal{H}(1, 6)$	$\leftarrow \mathcal{H}(1, 7)$	$\leftarrow \dots \mathcal{H}(1, 1)$

証明を行う前にいくつかの注意事項を述べておく。エノン写像において定理 3.1 の条件が成立している。実際、 $T\Gamma_u$ と $T^{-2}\gamma_s$ の最初の接触は $a = 2.35$ で生じ、 $T^5I_1^u$ と $T^{-5}I_1^s$ の最初の接触は $a = 3.1$ で生じる。

右の箱と下部の箱において、条件 $k \geq 5$ を満たすホモクリニック軌道 $\mathcal{H}(k, 1)$ ($\mathcal{H}(1, k)$) は、それぞれの行または列の極限集合である。 $k \rightarrow \infty$ の極限において、 $\mathcal{H}(k, 1)$ と $\mathcal{H}(1, k)$ は $\mathcal{H}(1, 1)$ に漸近する。

表 3.2 は, $\mathcal{H}(1, 1)$ がこの表の中のすべてのホモクリニック軌道を強制することを意味している. ホモクリニック軌道 $\mathcal{H}(k, k)$ ($k \geq 5$) は, 対称ホモクリニック軌道をもつ. この軌道はホモクリニック接触点または交差点を $(P, Q)_{S_1}$ にもつ.

表 3.2 のメインの箱の中の $\mathcal{H}(k, k)$ についての注意を述べる. $T^k I_1^u$ と $T^{-k'} I_1^s$ は 2 つの弧をもつ. そのため, これらの弧の接触から交差への過程は 4 回生じる. 4 回のうちどの接触から交差へが生じてても表 3.2 の順序関係は成立するので, これら 4 回の過程を一つのグループとして扱うことにする. 次に右側と下の箱の中の軌道について述べる. 共通部分の $\mathcal{H}(1, 1)$ の場合は, 1 本の安定多様体と不安定多様体の弧が接触して生じるので, 接触の回数は 1 回である. これ以外において接触は 2 回生じる. これらも一つのグループ化として扱う.

$T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ の最初の接触は 2 次接触である. この接触状態で定理 3.1 を証明する. 最初の接触から交差で生じたホモクリニック軌道が $\mathcal{H}(1, 1)$ である. パラメーターを増加すると第 2 回目の接触が生じる. この接触は 3 次接触である.

左矢印の証明. $T^5 I_1^u$ が $T^{-1}\gamma_s$ に接触するまでの様子を調べる. $T^{-1}\gamma_s$ に安定多様体の弧 $T^{-5} I_1^s, T^{-6} I_2^s, \dots$ が, この順に漸近している. これより $T^{-1}\gamma_s$ は最初に $T^{-5} I_1^s$ と接触し, 次に $T^{-6} I_2^s$ と接触し最後に $T^{-1}\gamma_s$ と接触する. これより第 1 行の順序関係が導かれる. 他の行の順序関係の証明も同様である.

上矢印の証明. 先ず $T^{-5} I_1^s$ が $T\Gamma_u$ に接触するまでの様子を調べる. 性質 1[2] より不安定多様体の弧が並んでいる順が分かる. つまり $T^{-5} I_1^s$ は $T^5 I_1^u$ と接触し, 次に $T^6 I_2^u$ と順に接触して, 最後に $T\Gamma_u$ と接触する. これより順序関係の第 1 列の順序が得られる. 他の列の順序関係の証明も同様である. Q.E.D.

表 3.2 に含まれるホモクリニック軌道の記号列を表 3.3 に示す.

表 3.3. 表 3.2 のホモクリニック軌道の核.

軌道名	核	核
$\mathcal{H}(1, 1)$	00	11
$\mathcal{H}(k, 1)$	$00^{k-3}100$	$10^{k-3}100$
	$00^{k-3}111$	$10^{k-3}111$
$\mathcal{H}(1, k)$	$0010^{k-3}0$	$0010^{k-3}1$
	$1110^{k-3}0$	$1110^{k-3}1$
$\mathcal{H}(k, k')$	$00^{k-3}10010^{k'-3}0$	$00^{k-3}11110^{k'-3}0$
	$00^{k-3}10010^{k'-3}1$	$00^{k-3}11110^{k'-3}1$
	$10^{k-3}10010^{k'-3}0$	$10^{k-3}11110^{k'-3}0$
	$10^{k-3}10010^{k'-3}1$	$10^{k-3}11110^{k'-3}1$

表 3.3 において, $\mathcal{H}(1, 1)$ に対する記号は 2 つある. これは接触する安定多様体と不安定多様体の弧が 1 本であることによる. また $\mathcal{H}(k, 1)$ ($k \geq 5$) の記号が 4 つある理由は, 不安定多様体の弧が 2 本で, 安定多様体の弧が 1 本であるためである. $\mathcal{H}(1, k)$ ($k \geq 5$) に関しては不安定多様体の弧が 1 本で, 安定多様体の弧が 2 本である. $\mathcal{H}(k, k')$ ($k, k' \geq 5$) に関しては不安定多様体と安定多様体の弧が共に 2 本あるために, 記号列は 8 個ある. 次に記号列の決め方を簡単に説明する.

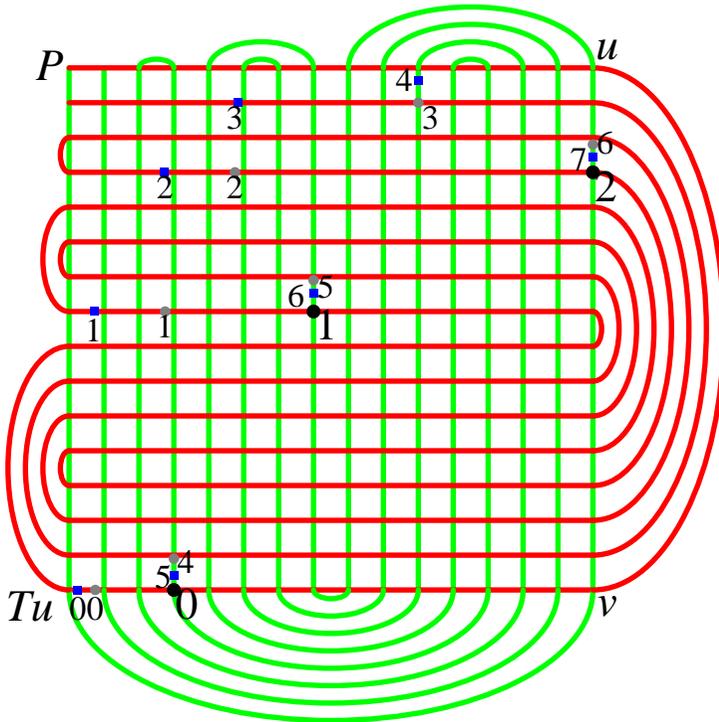


図 3.11 3つのホモクリニック軌道の一部. これらは黒い円盤, 灰色の円盤, 青い四角で描かれている. 数字 i は z_i を表す. 左上の角にサドル P がある.

図 3.8 に Γ_u から出発する対称ホモクリニック軌道を 3 つ描いてある. 点 z_i は数字 i で記してある. $\mathcal{H}(1, 1)$ には 2 つ軌道がある. そのひとつが黒い円盤で描かれた軌道である. z_0 は Γ_u にあり, V_0 に含まれているので記号は 0 である. 点 z_1 は $T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ の交差点にあり, その記号は 0 である. 点 z_2 は γ_s にあるので記号は 1 である. また z_{-1} は $\Omega_u = T^{-1}\Gamma_u$ にあるので記号は 1 である. よって z_{-1} から z_2 までの記号列は 1001 であり, 核は 00 である. 同様にして残りの軌道の記号列は 11 と得られる.

次に $\mathcal{H}(5, 1)$ の記号列を決める. 初期点 z'_0 が $I_1^u \in V_0$ にある一つのホモクリニック軌道を灰色の円盤で描いた. この軌道は P の近くを通過し, 不動点 Q を 1 回転して z_0 (黒い円

盤)の近くに帰ってくる. この図 3.8 で 0 から 3 までの点は安定多様体と不安定多様体の交差点にある. 4 の点は交差点の少し下に描いてある. その理由は, 4 の点を交差点として描くためには更に複雑な図が必要になるためである. 次の点 z'_5 は $T^{-1}\gamma_s$ にあり, z_1 の少し上にある. 点 z'_6 は γ_s にある. よってこの軌道の記号列の核は 000100 である.

$\mathcal{H}(6, 1)$ のホモクリニック軌道の一つを, 図 3.8 に青い四角で描いた. この軌道は上で述べた $\mathcal{H}(5, 1)$ のホモクリニック軌道に比べ, 更に P の近くを通過する. そのため P の近くに滞在する回数が 1 回増える. よって核は 0000100 である. この結果, $\mathcal{H}(k, 1)$ に対する核 $00^{k-3}100$ が得られる. 同様の手順で残りの 3 つの核の表現も得られるので詳細は省略する. これらの表現が得られると h に関する対称性より, $\mathcal{H}(1, k)$ の核の表現が決まる.

$\mathcal{H}(5, 5)$ は 4 個の対称ホモクリニック軌道の点と 4 個の対称でないホモクリニック軌道の点を含む. 初期点 z'_0 が $I_1^u \in V_0$ にあり, $z'_5 \in T^5 I_1^u \cap T^{-5} I_1^s$ が対称線 S_1 にある対称ホモクリニック軌道の核を決める. z'_5 は z'_5 の近くにある. ここで z'_5 は前に $\mathcal{H}(5, 1)$ について説明したときに利用した軌道点である. そのため z'_0 から z'_5 までの記号列は 000100 である. $hz_5 = z_5$ を利用すると, 次の式が得られる.

$$gz_k = z_{9-k}. \quad (3.54)$$

ここで k は整数である. 次の関係が成立する.

$$\sigma(gz_k) = \sigma(z_{9-k}). \quad (3.55)$$

ここで $\sigma(z)$ は次の式で定義される.

$$\sigma(z) = \sigma(gz) = i \quad (z \in V_i). \quad (3.56)$$

つまり対称性より z'_0 から z'_5 までの記号列がきまると z'_6 から z'_9 までの記号列が自動的に決まることを意味している. 決められた記号列は 1000 である. これらの 2 つの記号列をつなげると核は 0001001000 と決まる. これ以外の対称ホモクリニック軌道に対しても同様にして 0001111000, 1001001001, 1001111001 と得られる. 対称でないホモクリニック軌道に関しても 0001001001, 0001111001, 1001001000, 1001111000 と得られる. 導出の詳細は省略する. これら 8 つの核は同じ位相的エントロピーの下界値である $\ln 1.520$ を与える.

表 3.3 の記号列を用いて位相的エントロピーの下界値を計算できる. 表 3.4 には最大固有値を示してある.

表 3.4. 最大固有値.

軌道名	λ_{\max}	軌道名	λ_{\max}	軌道名	λ_{\max}	軌道名	λ_{\max}
$\mathcal{H}(1, 1)$	1.695	$\mathcal{H}(5, 5)$	1.520	$\mathcal{H}(6, 6)$	1.553	$\mathcal{H}(7, 7)$	1.618
$\mathcal{H}(5, 1)$	1.569	$\mathcal{H}(5, 6)$	1.493	$\mathcal{H}(6, 7)$	1.560	$\mathcal{H}(7, 8)$	1.620
$\mathcal{H}(6, 1)$	1.582	$\mathcal{H}(5, 7)$	1.506	$\mathcal{H}(6, 8)$	1.566	$\mathcal{H}(7, 9)$	1.621
$\mathcal{H}(7, 1)$	1.624	$\mathcal{H}(5, 8)$	1.526	$\mathcal{H}(6, 9)$	1.571	$\mathcal{H}(7, 10)$	1.622
$\mathcal{H}(8, 1)$	1.654	$\mathcal{H}(5, 9)$	1.542	$\mathcal{H}(6, 10)$	1.575	$\mathcal{H}(7, 11)$	1.623

$\mathcal{H}(k, k')$ から得られる位相的エントロピーの下界値を $h_{\text{top}}(\mathcal{H}(k, k'))$ と書く. 関係 $\mathcal{H}(k, k') \rightarrow \mathcal{H}(m, m')$ が成立しているとき, 必ずしも $h_{\text{top}}(\mathcal{H}(k, k')) > h_{\text{top}}(\mathcal{H}(m, m'))$ が成立しているとは限らない. 例として $\mathcal{H}(5, 6) \rightarrow \mathcal{H}(5, 5)$ であるが, $h_{\text{top}}(\mathcal{H}(5, 6)) < h_{\text{top}}(\mathcal{H}(5, 5))$ である. 力学的順序関係と位相的エントロピーの下界の大小は一致しないことがある.

力学的順序 $\mathcal{H}(1, 1) \rightarrow \mathcal{H}(4, 4)$ が成立することは自明である. しかし, $\mathcal{H}(4, 4)$ と $\mathcal{H}(5, 5)$ の間の順序関係を定めることはできない. この順序関係を定めるためには, 与えられた写像で不安定多様体と安定多様体の構造を明らかにする必要がある. パラメーターを増加したとき, これらの構造がどのように変化するかを調べ順序関係が決定される. 単に位相的エントロピーの下界値の比較からでは順序を決定できない.

$T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ の 2 回目の接触から交差の過程を調べる. この過程は 3 次接触である. 1 回目の接触から交差で生じた核 11 をもつホモクリニック軌道が, 3 次接触を経てその周りに 2 つホモクリニック軌道を生む. $y < 0$ にある点の核は 01 で $y > 0$ にある点の核は 10 である. このホモクリニック軌道も記号としては $\mathcal{H}(1, 1)$ で表される. 3 次接触の前後で発生するホモクリニック軌道に関しても表 3.2 と同じ表現を用いて表現できる. 結果だけを表 3.5 に示す. $\mathcal{H}(1, 5)$ 等は $\mathcal{H}(1, 1)$ に強制されるホモクリニック軌道として定義した. 表 3.3 から $\mathcal{H}(1, 5)$ が残りのすべてのホモクリニック軌道を強制していることが分かる.

表 3.5. 力学的順序.

	I_1^s	I_2^s	I_3^s	
I_1^u	$\mathcal{H}(5,5) \rightarrow$	$\mathcal{H}(5,6) \rightarrow$	$\mathcal{H}(5,7) \rightarrow \dots$	$\mathcal{H}(5,1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
I_2^u	$\mathcal{H}(6,5) \rightarrow$	$\mathcal{H}(6,6) \rightarrow$	$\mathcal{H}(6,7) \rightarrow \dots$	$\mathcal{H}(6,1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
I_3^u	$\mathcal{H}(7,5) \rightarrow$	$\mathcal{H}(7,6) \rightarrow$	$\mathcal{H}(7,7) \rightarrow \dots$	$\mathcal{H}(7,1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\mathcal{H}(1,5) \rightarrow$	$\mathcal{H}(1,6) \rightarrow$	$\mathcal{H}(1,7) \rightarrow \dots$	$\mathcal{H}(1,1)$

表 3.5 に含まれるホモクリニック軌道の核を表 3.6 に示す. 例として表 3.6 の $\mathcal{H}(5,1)$ の記号列を利用して位相的エントロピーの下界を計算できる. この値は表 3.3 の $\mathcal{H}(5,1)$ の値と同じである. よって位相的エントロピーの下界については省略する.

表 3.6. 表 3.5 のホモクリニック軌道の核.

軌道名	核	核
$\mathcal{H}(1,1)$	01	10
$\mathcal{H}(k,1)$	$00^{k-3}101$ $00^{k-3}110$	$10^{k-3}101$ $10^{k-3}110$
$\mathcal{H}(1,k)$	$0110^{k-3}0$ $1010^{k-3}0$	$0110^{k-3}1$ $1010^{k-3}1$
$\mathcal{H}(k,k')$	$00^{k-3}11010^{k'-3}0$ $00^{k-3}11010^{k'-3}1$ $10^{k-3}11010^{k'-3}0$ $10^{k-3}11010^{k'-3}1$	$00^{k-3}10110^{k'-3}0$ $00^{k-3}10110^{k'-3}1$ $10^{k-3}10110^{k'-3}0$ $10^{k-3}10110^{k'-3}1$

3.5.4 順序関係 2

$\mathcal{G}(1,1)$ に強制されるホモクリニック軌道の力学的順序を決定する定理 3.2 を紹介する. 証明法は定理 3.1 と同じなので, 証明は省略する.

定理 3.2. $T\Gamma_u$ と $T^{-1}\gamma_s$ が最初の接触をしたとき, $T^4L_1^u \cap T^{-4}I_1^s = \emptyset$ が成立していると仮定する. このとき 対称ホモクリニック軌道 $\mathcal{G}(1,1)$ に強制されるホモクリニック軌道 $\mathcal{G}(k,k')$ の力学的順序は表 3.7 で得られる.

表 3.7. 力学的順序.

	I_1^s	I_2^s	I_3^s	
L_1^u	$\mathcal{G}(4,4) \leftarrow \mathcal{G}(4,5) \leftarrow \mathcal{G}(4,6) \leftarrow \dots$			$\mathcal{G}(4,1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
L_2^u	$\mathcal{G}(5,4) \leftarrow \mathcal{G}(5,5) \leftarrow \mathcal{G}(5,6) \leftarrow \dots$			$\mathcal{G}(5,1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
L_3^u	$\mathcal{G}(6,4) \leftarrow \mathcal{G}(6,5) \leftarrow \mathcal{G}(6,6) \leftarrow \dots$			$\mathcal{G}(6,1)$
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\mathcal{G}(1,4) \leftarrow \mathcal{G}(1,5) \leftarrow \mathcal{G}(1,6) \leftarrow \dots$			$\mathcal{G}(1,1)$

エノン写像では, TT_u と $T^{-1}\gamma_s$ との最初の接触は $a = 3.242$ で生じる (図 3.1 を参照). また $T^4L_1^u$ と $T^{-4}I_1^s$ の最初の接触は $a = 4.69$ で生じる. よって定理 3.2 の条件は満たされている.

ホモクリニック軌道 $\mathcal{G}(1,1)$ の出現は馬蹄の完成と同時に生じるので, 第 1 回目の接触のみで第 2 回目の接触は存在しない.

表 3.7 に含まれるホモクリニック軌道の核は表 3.8 に記載されている. また表 3.8 の核を利用して, 位相的エントロピーの下界が計算できる. その結果として, 表 3.9 に最大固有値を示す.

表 3.8. 表 3.7 のホモクリニック軌道の核.

軌道名	核	核
$\mathcal{G}(1,1)$	0	1
$\mathcal{G}(k,1)$	$00^{k-3}10$ $10^{k-3}10$	$00^{k-3}11$ $10^{k-3}11$
$\mathcal{G}(1,k)$	$010^{k-3}0$ $110^{k-3}0$	$010^{k-3}1$ $110^{k-3}1$
$\mathcal{G}(k,k')$	$00^{k-3}1010^{k'-3}0$ $00^{k-3}1110^{k'-3}0$ $10^{k-3}1010^{k'-3}1$ $10^{k-3}1110^{k'-3}1$	$00^{k-3}1010^{k'-3}1$ $00^{k-3}1110^{k'-3}1$ $10^{k-3}1010^{k'-3}0$ $10^{k-3}1110^{k'-3}0$

表 3.9. 最大固有値.

軌道名	λ_{\max}	軌道名	λ_{\max}	軌道名	λ_{\max}	軌道名	λ_{\max}
$\mathcal{G}(1, 1)$	2	$\mathcal{G}(4, 4)$	1.707	$\mathcal{G}(5, 5)$	1.841	$\mathcal{G}(6, 6)$	1.9276
$\mathcal{G}(4, 1)$	1.795	$\mathcal{G}(4, 5)$	1.710	$\mathcal{G}(5, 6)$	1.849	$\mathcal{G}(6, 7)$	1.9292
$\mathcal{G}(5, 1)$	1.862	$\mathcal{G}(4, 6)$	1.741	$\mathcal{G}(5, 7)$	1.854	$\mathcal{G}(6, 8)$	1.9300
$\mathcal{G}(6, 1)$	1.931	$\mathcal{G}(4, 7)$	1.764	$\mathcal{G}(5, 8)$	1.858	$\mathcal{G}(6, 9)$	1.9305
$\mathcal{G}(7, 1)$	1.966	$\mathcal{G}(4, 8)$	1.778	$\mathcal{G}(5, 9)$	1.860	$\mathcal{G}(6, 10)$	1.9308

$\mathcal{G}(k, k')$ から得られる位相的エントロピーの下界値を $h_{\text{top}}(\mathcal{G}(k, k'))$ と書く. 表 3.9 に示したように我々が数値計算した範囲では, 関係 $\mathcal{G}(k, k') \rightarrow \mathcal{G}(m, m')$ が成立しているならば $h_{\text{top}}(\mathcal{G}(k, k')) > h_{\text{top}}(\mathcal{G}(m, m'))$ が成立していることが分かる.

参考文献

- [1] M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69.
- [2] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **114** (2005), 763.
- [3] A. de Carvalho, *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, **19** (1999), 851.
- [4] A. de Carvalho and T. Hall, *Experimental Math.* **11** (2002), 247.
- [5] P. Collins, *Experimental Math.* **14** (2005), 75.
- [6] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005), 935.
- [7] R. de Vogelaere, in *Contributions to the Theory of Oscillations*, Vol. IV, *Ann. Math. Studies* No.41 (Princeton University Press, 1958).
- [8] R. Brown, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **15** (1995), 1045.
- [9] E. Bedford and J. Smillie, *Ann. Math.* **160** (2004), 1.
- [10] Sterling, D.; Dullin, H. R.; Meiss, J. D., *Physica D* **134**, 153-184 (1999).
T. Hall, *Trains3*
http://www.liv.ac.uk/math/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html
- [11] P. Collins, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **12** (2002), 605.
- [12] J. Palis, *Topology* **8** (1969), 385.

第 4 章

3 つ折れ馬蹄が完成するまでの位相的エントロピーの増加 Ⅰ

1 つのパラメーター $a (\geq 0)$ を含む 2 重可逆 2 次元 3 次関数写像では, 最終的に 3 つ折れ馬蹄が生じる. 3 つ折れ馬蹄が生じると系の位相的エントロピーの下界は $\ln 3$ である. 馬蹄が完成する過程でサドルノード分岐で生じる対称周期軌道の出現順序関係を導く. 我々が扱う写像では a が 0 において可積分系であるが, a が正になると系の位相的エントロピーの下界は $\ln 2$ にジャンプすることを示す.

4.1 序

力学系では馬蹄が形成されていくにつれて複雑さが進化していく. この過程には非常に重要で興味ある問題が含まれている.^{1,2)} この論文では, 方向保存 2 重可逆 2 次元 3 次関数写像を調べる.³⁾ この写像の特徴を述べた後に, この論文で議論する内容を紹介する. 我々は, 特にシンプレクティック形式で表現された 3 次関数写像 T を扱う.

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad (4.1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (4.2)$$

ここで $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = a(x - x^3)$ で a は正のパラメーターである.

3 次関数写像はダフィング方程式の差分化で得られる. そのためダフィング写像とか 2 重井戸写像と呼ばれている. 保存系ならびに散逸系においてもダフィング写像は良く研究されている.³⁾

関数 $f(x)$ の奇関数性が一つの可逆性を保障している. この可逆性は y 軸に関する左右の関係を与えるので左右の対称性と呼ばれる. 式 (2) が変数 y に関して奇関数であることより, T は第 2 の可逆性をもつ. これは x 軸に関する上下の関係を与えることより上下の対称性と呼ばれる. このように T は上下左右の対称性をもつ 2 重可逆 (対称) 写像である.

3次関数写像としてパラメーターを2つ含む次のような写像 $f(x) = ax - bx^3$ ($a > 0, b > 0$) を考えることができる. 適当なスケール変換 ($x' = x/\sqrt{a/b}, y' = y/\sqrt{a/b}$) で, この写像は我々が定義した写像になる.

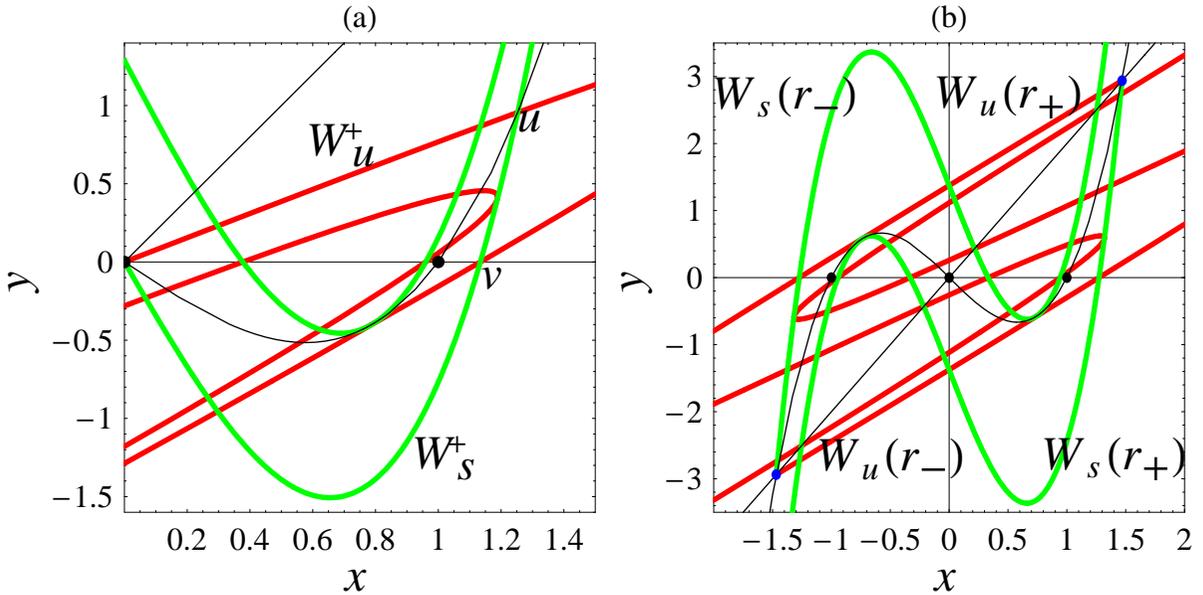


図 4.1 上図 (a) は, ちょうど2つ折れ馬蹄が完成したときの P の不安定多様体と安定多様体の構造を示している ($a = 2.677, x > 0$ のみを表示). 下図 (b) は, 3つ折れ馬蹄が完成したときの r_{\pm} の不安定多様体と安定多様体の構造である ($a = 3.454$). 第1象限の灰色の円が r_+ を, 第3象限の灰色の円が r_- である. 対称線も描かれている.

3次関数写像は不動点と周期2の点をもつ. 原点 $(0, 0)$ はサドルである. P と名づける. これは安定多様体と不安定多様体をもつ. $Q_{\pm} = (\pm 1, 0)$ は, $0 < a < 2$ では楕円点であるが, $a > 2$ では反射を含むサドルである. $a > 0$ では, 周期2の点 r_{\pm} が第1象限と第3象限にある. これらの位置は $(\pm \sqrt{1 + 4/a}, \pm 2\sqrt{1 + 4/a})$ である. またこれらはサドルであり, 安定多様体と不安定多様体をもつ.

パラメーターを増加すると P の不安定多様体と安定多様体の弧が接触する. その結果, 2つ折れ馬蹄が系の中に構成される. $x > 0$ の領域に存在する2つ折れ馬蹄は図 4.1(a) に描かれている. 2つ折れ馬蹄の完成するパラメーター a の値は $2.677 (= a_{2hs})$ である. $a \geq a_{2hs}$ では, $x < 0$ の領域と $x > 0$ のそれぞれの領域で2つ折れ馬蹄が存在する.

パラメーターを更に大きくして $a_{3hs} = 3.454$ になると, 3つ折れ馬蹄が完成する. r_{\pm} の

不安定多様体と安定多様体が3つ折れ馬蹄を構成する。3つ折れ馬蹄は3つの不動点と2つある2つ折れ馬蹄を含む。図4.1(b)には3つ折れ馬蹄が描かれている。

上記で説明したことをもとに、系の位相的エントロピーの増加を考えよう。 $a = 0$ では、系は可積分系である。よって下界的エントロピーは0である。パラメーターを増加すると、系の中に2つ折れ馬蹄が出現し次に3つ折れ馬蹄が出現する。これよりパラメーターの増加によって、位相的エントロピーの下界は $\ln 2$ に達し、最後に $\ln 3$ になると考えられる。本論文では、この自然な考えを検証する。そして、この考えが成立していないことを証明する。つまり、この系では a の値がゼロで無くなると系の位相的エントロピーの下界は $\ln 2$ になる。そしてパラメーターの増大と共に位相的エントロピーの下界は $\ln 3$ まで増加する。途中で完成する2つ折れ馬蹄は系の複雑さに寄与しない。また3つ折れ馬蹄が完成する前においてサドルノード分岐で生じる対称周期軌道の出現順序も調べる。

§2で写像の基本的な性質をまとめる。また後の議論で使用するいくつかの道具を用意する。§3で対称周期軌道の出現順序関係を導く。最後の§4でトレリス法を利用して位相的エントロピーの下界を計算する。

4.2 基本的道具

4.2.1 安定多様体と不安定多様体

軌道の点を z とする。その座標を (x_z, y_z) と書く。 $O(z_0)$ を z_0 の軌道 $\{\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots\}$ とする。ここで $z_n = T^n z_0$ (n : 整数)である。 $(A, B)_C$ を1次元多様体 C 上の点 A, B を端点とする開弧とし、 $[A, B]_C$ を閉弧とする。

サドル P から右上方に出る不安定多様体のブランチを W_u^+ とする。 W_s^+ を P から右下方から入る安定多様体のブランチとする(図4.1(a)を参照のこと)。安定多様体 W_s^+ は対称線 S_h と点 v と横断的に交差し、次に S_g と u で交差する。対称性より W_s^+ は W_u^+ と上記の u, v と横断的に交差する。同様に W_u^- と W_s^- も定義できる。ここで u と v における横断的交差についてコメントする。 a の値が0に近いときの証明はボレル総和法を用いて行われている。⁶⁾この証明は完全ではないことが指摘されている。また a の値が $4/3$ 以上であれば横断性の証明は簡単に証明できる。点 v で横断的でないとする、 v における安定多様体と不安定多様体の傾きは2になる(§2.4.2を参照)。 a の値が $4/3$ 以上ではこの矛盾が生じることが示せる。

ここで2つ折れ馬蹄について説明する。4つの弧 $[P, u]_{W_u^+}$, $[u, v]_{W_s^+}$, $[v, Tu]_{W_u^+}$, $[Tu, P]_{W_s^+}$ で囲まれた閉領域を Z_2^+ とする。図4.1(a)において、この領域の未来の像と過去への像の共通領域 $TZ_2^+ \cap T^{-1}Z_2^+$ は4つある。2つ折れ馬蹄は $T^n Z_2^+ \cap T^{-n} Z_2^+$ で n を無限大にした極限として定義される。同様にして $T^n Z_2^- \cap T^{-n} Z_2^-$ ($n \rightarrow \infty$)は $x < 0$ の領域にある2つ折れ馬蹄である。

周期2のサドル r_+ から左下方にでる不安定多様体を $W_u(r_+)$ と, r_+ に左下方から入る安定多様体を $W_s(r_+)$ とする. 同様に r_- から右上方に出る不安定多様体を $W_u(r_-)$, 右上方から入る安定多様体を $W_s(r_-)$ とする. 3つ折れ馬蹄について説明する. 4つの弧 $[r_+, v_-]_{W_u(r_+)}$, $[v_-, r_-]_{W_s(r_-)}$, $[r_-, v_+]_{W_u(r_-)}$, $[v_+, r_+]_{W_s(r_+)}$ で囲まれた閉領域を Z_3 とする. ここで $W_u(r_+)$ が最初に x 軸と交差した点を v_- とし, $W_u(r_-)$ が最初に x 軸と交差した点を v_+ とした (詳細は図4.3を参照のこと). 図4.1(b)より, $TZ_3 \cap T^{-1}Z_3$ が9つの領域に分かれていることが分かる. 3つ折れ馬蹄は $T^n Z_3 \cap T^{-n} Z_3$ で n を無限大にした極限として定義される.

4.2.2 対称線

2重対称写像 T は対合 H と G , また h と g を用いて次のように表される.

$$T = H \circ G = h \circ g. \quad (4.3)$$

これらの対合は次のように得られる.

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y + f(x) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ y \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - f(x) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -y \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

ここで $\det \nabla G = \det \nabla H = \det \nabla g = \det \nabla h = -1$. 対合によって不変な点の集合は対称線と呼ばれる.⁵⁾ 次に4つの対称線の表式を与える.

$$S_H: y = 2x, \quad (4.8)$$

$$S_G: x = 0, \quad (4.9)$$

$$S_h: y = 0, \quad (4.10)$$

$$S_g: y = -f(x)/2. \quad (4.11)$$

これらは図4.2に描かれている. 領域 $y > 0$ にある $S_{G,H}$ を $S_{G,H}^+$ と, $y < 0$ にある部分を $S_{G,H}^-$ と書く. 領域 $x > 0$ にある $S_{g,h}$ を $S_{g,h}^+$ と, $x < 0$ にある部分を $S_{g,h}^-$ と書く.

最後に反転オペレーター $R = R(x, y)$ を導入する.

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

R と対合の間には, $R = H \circ h = G \circ g$ が成立する. また $R \circ W_u(r_+) = W_u(r_-)$, $R \circ W_s(r_+) = W_s(r_-)$, $R \circ r_+ = r_-$ が成立する.

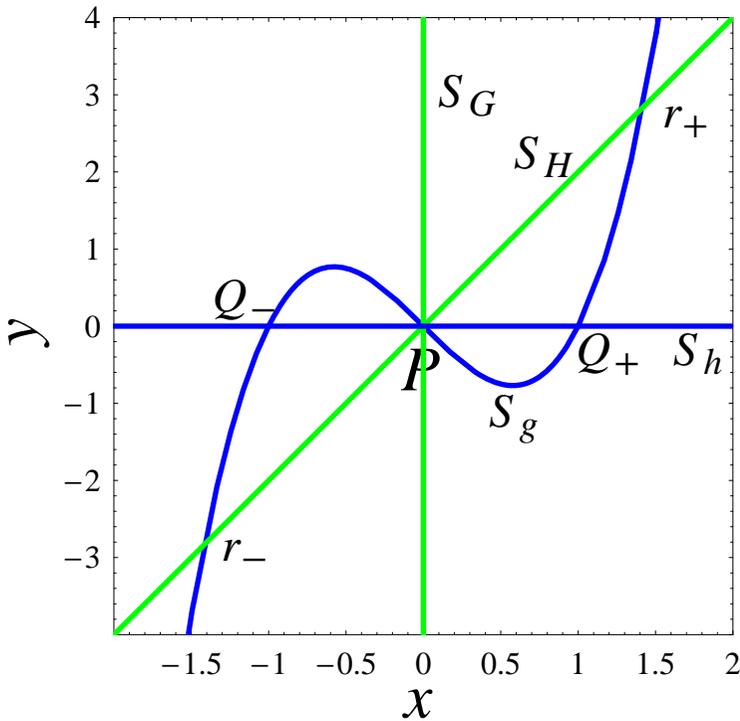


図 4.2 3 次関数写像の 4 つの対称線 S_G, S_H, S_g, S_h の構造. r_{\pm} は S_H と S_g の交点にある.

4.2.3 周期軌道の可逆性

表 4.1 と 4.2 において不動点 P と Q_{\pm} を除いた対称周期軌道を分類する.

表 4.1: 1 重対称周期軌道の分類と最小周期数

軌道名	z_0	z_k	周期数 q	最小周期数
O_{GG}	S_G	S_G	$q = 2k (k \geq 2)$	$q_{\min} = 4$
O_{GH}	S_G	S_H	$q = 2k - 1 (k \geq 2)$	$q_{\min} = 3$
O_{HG}	S_H	S_G	$q = 2k + 1 (k \geq 1)$	$q_{\min} = 3$
O_{HH}	S_H	S_H	$q = 2k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 2$
O_{gg}	S_g	S_g	$q = 2k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 2$
O_{gh}	S_g	S_h	$q = 2k - 1 (k \geq 2)$	$q_{\min} = 3$
O_{hg}	S_h	S_g	$q = 2k + 1 (k \geq 1)$	$q_{\min} = 3$
O_{hh}	S_g	S_g	$q = 2k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 2$

表 4.2: 2重対称周期軌道の分類と最小周期数

軌道名	z_0	z_k	周期数 q	最小周期数
O_{Gg}	S_G	S_g	$q = 4k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 4$
O_{Gh}	S_G	S_h	$q = 4k - 2 (k \geq 2)$	$q_{\min} = 6$
O_{Hg}	S_H	S_g	$q = 4k + 2 (k \geq 0)$	$q_{\min} = 2$
O_{Hh}	S_H	S_h	$q = 4k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 4$
O_gG	S_g	S_G	$q = 4k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 4$
O_gH	S_g	S_H	$q = 4k - 2 (k \geq 1)$	$q_{\min} = 2$
O_hG	S_h	S_G	$q = 4k + 2 (k \geq 1)$	$q_{\min} = 6$
O_hH	S_h	S_H	$q = 4k (k \geq 1)$	$q_{\min} = 4$

表から分かるように, 1重対称周期軌道は左右または上下の対称線上に点をもつ. 2重対称周期軌道は左右の対称線上に1点もち, 上下の対称線上に1点もち. ただし z_1 から z_{k-1} までの点は, いかなる対称線上にもないことに注意する. これらの結果の中で最小周期数以外は参考文献(5,8)で証明されている. よって, ここでは最小周期数に関してコメントする.

表 4.4 について

r_{\pm} は S_H と S_g の交点であることより, O_{HH} と O_{gg} の最小周期は2であることが分かる. 次に S_G^+ 上に $s = (0, y_s)$ をとる. 直接計算より, $Ts = (y_s, y_s)$ と $T^2s = (2y_s + f(y_s), y_s + f(y_s))$ が得られる. 簡単に $2y_s + f(y_s) = 0$ と $y_s + f(y_s) < 0$ を満たす y_s が存在することが分かる. これは $T^2S_G^+ \cap S_G^- \neq \emptyset$ を意味する. これより O_{GG} の最小の周期が4であることが分かる. T^2s が S_H 上にある条件は, $3y_s + f(y_s) = 0$ である. これを満たす y_s が存在することも分かる. よって O_{GH} の最小周期数は3である. 表 4.1 の残りの軌道に関しても最小周期数を簡単に決めることができるので, 詳細は省略する.

表 4.2 について

TS_G^+ は $y = x$ である. この直線と $y = -f(x)$ は原点以外で交差する. この交点の像は x 軸上にある. これより $T^2S_G^+ \cap S_h^+ \neq \emptyset$ が得られ, O_{Gh} の最小周期数は6であることが分かる. TS_G^+ が S_g^+ と交差することより, O_{Gg} の最小周期数は4である. S_H^+ は $y = -f(x)$ と交差する. 交点の像は S_h^+ にある. よって O_{Hh} の最小周期数も4である. 残りの軌道に関しても同様な方法で最小周期数を求めることができる. 詳細は省略する.

4.2.4 安定多様体と不安定多様体の構造

ヘテロクリニックローブの定義

r_- の不安定多様体 $W_u(r_-)$ と r_+ の安定多様体 $W_s(r_+)$ は横断的に交差している (図 4.3 を見よ). 横断的交差の証明は §2.4.2 で行う. r_- を出発した不安定多様体 $W_u(r_-)$ は S_G^- と点 u_+ で交差し, 次に S_h^+ と点 v_+ で交差する. r_+ の安定多様体 $W_s(r_+)$ は逆に S_h^+ と v_+ と

交差し, 次に S_G^- と u_+ で交差する. r_- から $W_u(r_-)$ に沿って移動したとき, u_+ の手前で $W_u(r_-)$ と交差する点を t_+ とする. 次に $W_u(r_-)$ に沿って v_+ を越えて最初に $W_s(r_+)$ と交差した点を w_+ とする. これらの点を R で反転した点をそれぞれ u_-, v_-, t_-, w_- とする. ここで2つの弧 $[t_+, u_+]_{W_u(r_-)}$ と $[t_+, u_+]_{W_s(r_+)}$ で囲まれた開領域を U_+ とし, $[v_+, w_+]_{W_u(r_-)}$ と $[v_+, w_+]_{W_s(r_+)}$ で囲まれた開領域を V_+ とする. これらを R で反転した領域を U_- と V_- と定義する (図 4.3 を参照).

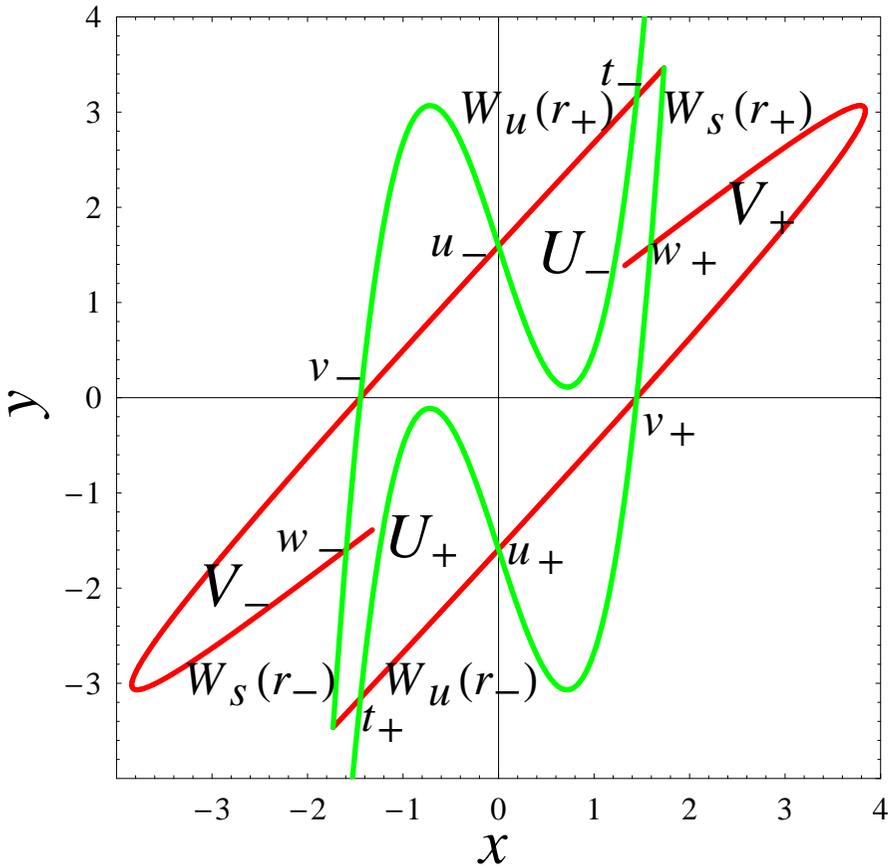


図 4.3 $W_s(r_\pm)$ は r_\pm の安定多様体を, $W_u(r_\pm)$ は不安定多様体を表す. $u_\pm, v_\pm, U_\pm, V_\pm$ も描かれている.

$W_u(r_-)$ と $W_s(r_+)$ の横断的交差

$W_u(r_-)$ と $W_s(r_+)$ が u_+ で横断的に交差することを証明する. また交差点 v_+ が存在することも証明する. これらの事実は §2.4.1 で定義したヘテロクリニックローブの存在を保証する.

$\xi_u(z)$ を点 z における不安定多様体の傾きとする. 同様に $\xi_s(w)$ を点 w における安定多様体の傾きとする. 同様に 2 階微分を $\eta_u(z)$ と $\eta_s(w)$ と記す. 最初に $\xi_u(z_n)$ と $\xi_u(z_{n+1})$ の間の写像を導く. 次に $\eta_u(z_n)$ と $\eta_u(z_{n+1})$ の間の写像も導く (参考文献 9) を参照のこと).

$$\xi_u(z_{n+1}) = \frac{\xi_u(z_n) + f'(x_{z_n})}{1 + \xi_u(z_n) + f'(x_{z_n})}, \quad (4.13)$$

$$\eta_u(z_{n+1}) = \frac{\eta_u(z_n) + f''(x_{z_n})}{(1 + \xi_u(z_n) + f'(x_{z_n}))^3}. \quad (4.14)$$

ここで $z_{n+1} = Tz_n$, $z_n = (x_{z_n}, y_{z_n})$, $f'(x_{z_n}) = a(1 - 3x_{z_n}^2)$, $f''(x_{z_n}) = -6ax_{z_n}$ である.

点 z が不安定多様体上にあるとすると, H_z, G_z, h_z ならびに gz は安定多様体上にある.

$$GW_u(r_{\pm}) = W_s(r_{\mp}), \quad HW_u(r_{\pm}) = W_s(r_{\pm}),$$

$$gW_u(r_{\pm}) = W_s(r_{\pm}), \quad hW_u(r_{\pm}) = W_s(r_{\mp}).$$

不安定多様体の傾きと, 安定多様体の傾きの間には次の関係がある.

$$H : \xi_s(Hz) = \frac{\xi_u(z)}{\xi_u(z) - 1}, \quad (4.15)$$

$$G : \xi_s(Gz) = -\xi_u(z) - f'(x_z), \quad (4.16)$$

$$h : \xi_s(hz) = \frac{\xi_u(z)}{\xi_u(z) - 1}, \quad (4.17)$$

$$g : \xi_s(gz) = -\xi_u(z) - f'(x_z). \quad (4.18)$$

また 2 階微分に関しては次の関係が得られる.

$$H : \eta_s(Hz) = \frac{-\eta_u(z)}{(\xi_u(z) - 1)^3}, \quad (4.19)$$

$$G : \eta_s(Gz) = \eta_u(z) + f''(x_z), \quad (4.20)$$

$$h : \eta_s(hz) = \frac{\eta_u(z)}{(\xi_u(z) - 1)^3}, \quad (4.21)$$

$$g : \eta_s(gz) = -\eta_u(z) - f''(x_z). \quad (4.22)$$

図 4.3 に描かれている点と弧の関係を記しておく.

$$Tt_+ = hgt_+ = hv_- = v_-, \quad Tt_- = v_+,$$

$$Hv_- = v_+, \quad Gv_- = t_-, \quad Gv_+ = t_+,$$

$$G[r_-, u_+]_{W_u(r_-)} = [r_+, u_+]_{W_s(r_+)},$$

$$h[r_-, v_+]_{W_u(r_-)} = [r_+, v_+]_{W_s(r_+)}. \quad (4.23)$$

$\xi_s(r_{\pm})$ と $\xi_u(r_{\pm})$ を点 r_{\pm} における安定多様体と不安定多様体の傾きとする. また $\eta_s(r_{\pm})$ と $\eta_u(r_{\pm})$ を 2 階微分とする. これらは式 (13) と (14) より決定される.

$$\xi_s(r_{\pm}) = a + 6 + \sqrt{a^2 + 10a + 24}, \quad (4.23)$$

$$\xi_u(r_{\pm}) = a + 6 - \sqrt{a^2 + 10a + 24}, \quad (4.24)$$

$$\eta_u(r_+) = -\eta_u(r_-) = \frac{6a\sqrt{1+4/a}}{\Delta^3(r_{\pm}) + 1}, \quad (4.25)$$

$$\eta_s(r_{\pm}) = -\frac{\eta_u(r_{\pm})}{(\xi_u(r_{\pm}) - 1)^3}. \quad (4.26)$$

ここで $\Delta(r_{\pm}) = 1 + \xi_u(r_-) + f'(x_{r_-}) = 1 + \xi_u(r_+) + f'(x_{r_+}) < -1$. $6 - \sqrt{24} \geq \xi_u(r_{\pm}) > 1$ と $\xi_s(r_{\pm}) \geq 6 + \sqrt{24}$ が成立することに注意する.

式 (25) と (26) より, $\Delta(r_-) < -1$ と $\xi_u(r_-) > 1$ を用いて $\eta_u(r_-) > 0$ と $\eta_s(r_-) < 0$ が得られる. 不安定多様体上の点で r_- の近くに s をとる. ただし条件 $\Delta(s) (= 1 + \xi_u(s) + f'(x_s)) < 0$ が満たされているとする. 式 (14) より, $\eta_u(Ts)$ は負であり, $\eta_u(R \circ Ts)$ は正である. r_- から離れるにつれて, $W_u(r_-)$ の傾きは増加する. 一方では $-f'(x)$ は減少する. このことから条件 $\Delta(s') = 0$ を満たす点 s' が $W_u(r_-)$ 上にある. Ts' での不安定多様体 $W_u(r_+)$ の傾きは発散する. よって $R \circ Ts'$ における $W_u(r_-)$ の傾きも発散する. よって $R \circ Ts'$ を最初の引き返し点 (FTP) と呼ぶ. 次に条件 $\xi_u(s'') + f'(x_{s''}) = 0$ を満たす点 $s'' \in W_u(r_-)$ をとる. $\Delta(s'') = 1 + \xi_u(s'') + f'(x_{s''}) > 0$ が成立することより, r_- から不安定多様体を追いかけると最初に s' が見つかり, 次に s'' が見つかることが分かる. 条件 $\xi_u(s'') + f'(x_{s''}) < 0$ を満たすためには, $f'(x_{s''})$ が負であることが必要である. よって s' と s'' は $-\sqrt{1+4/a} < x < -1/\sqrt{3}$ の領域にあることが分かる.

gs'' は第 2 象限 ($x < 0$ かつ $y > 0$) にある. 実際, $-\sqrt{1+4/a} < x_{s''} \leq -1$ ならば Gs'' は第 4 象限にある. それゆえに, 関係 $gs'' = R \circ Gs''$ より, 上記の主張が得られる. S_g は, $y > 0$ かつ $-1 < x < -1/\sqrt{3}$ を満たす領域に弧をもつ. 結果として s'' が上記の領域にあり, gs'' が S_g の上部にあるので主張は証明される. Hgs'' が第 1 象限にあることは明らかである. 同様に理由で Hgs' も第 1 象限にあることが分かる. $HgT^{-1}Ts' = R \circ Ts'$ より, Hgs' は FTP である. よって $W_u(r_-)$ の FTP は第 1 象限にある. これらをまとめて命題 4.1 が得られる.

命題 4.1. $W_u(r_-)$ の最初の引き返し点は第 1 象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$) にある. r_- から最初の引き返し点までの $W_u(r_-)$ の弧の曲率は正である. この弧は y 軸と u_+ で交差し, 次に v_+ で x 軸と交差する. 2 つの交点 u_+ と v_+ での不安定多様体の傾きは 1 より大きい.

点 Gs'' において安定多様体の傾きはゼロで, 2 階微分は正である. よって Gs'' は弧 $(v_+, u_+)_{W_s(r_+)}$ の極小値であり, 第 4 象限にある. これより $W_s(r_+)$ の点 u_+ における傾きは負であることが導かれる. 一方 $W_u(r_+)$ の点 u_+ における傾きは正である. これより命題 4.2 が得られる.

命題 4.2. $a > 0$ では, $W_u(r_-)$ と $W_s(r_+)$ は点 u_+ で横断的に交差する.

§2.1 で定義した領域 Z_2^+ と Z_3 に関して, $Z_2^+ \subset Z_3$ が成立することは自明である. すべての周期軌道は Z_3 (命題 4.3 を見よ) に含まれる. これらは3つのタイプに分類できる. 第1のタイプは Z_2^+ に含まれる周期軌道である. 第2のタイプは $Z_3 \setminus Z_2^+$ に含まれる周期軌道である. 第3のタイプは Z_2^+ を出たり入ったりする周期軌道である.

命題 4.3. $\mathbb{R}^2 \setminus Z_3$ には周期軌道が存在しない.

証明. $W_s^-(r_-)$ と $W_u^-(r_-)$ を, r_- の左側にある r_- の安定多様体と不安定多様体とする. ここで B を次のように定義する.

$$B = \{y = 0, x < x_{v_-}\} \cup [v_-, r_-]_{W_s(r_-)} \cup \{(x, y) | (x, y) \in S_H, x < -\sqrt{1+4/a}\}.$$

B は平面を2分する. A を原点を含まない成分とし, $\tilde{A} = A \cup B$ を定義する. よって $\mathbb{R}^2 \setminus Z_3 = \text{Int}(\tilde{A} \cup H\tilde{A} \cup h\tilde{A} \cup hH\tilde{A})$ を得る. ここで記号 $\text{Int}(\cdot)$ は集合の内部を表す. 我々は A の中に周期点が存在しないことを証明すれば十分である. なぜなら B の中の唯一の周期点は r_- であり, これは Z_3 に含まれるからである.

$z_0 \in A$ の軌道 $O(z_0)$ を考える. $z_1 = (x_{z_1}, y_{z_1})$ は S_g^+ の下にある. すなわち $y_{z_1} < -f(x_{z_1})/2$ が得られる. 直接計算で, 次の関係が得られる.

$$x_{z_2} - x_{z_0} = y_{z_1} + y_{z_2} = 2y_{z_1} + f(x_{z_1}) < 0. \quad (4.27)$$

点 gz_0 は $x < 0$ かつ $y < 0$ を満たす領域にあり, S_g^- の下にある. それゆえに $h(gz_0)$ は $y > 0$ にある. これより $y_{z_1} > 0$ が得られる. $y_{z_1} + y_{z_2} < 0$ より, $y_{z_2} < 0$ であることが分かる. これらの結果をまとめて, 次の関係が得られる.

$$x_{z_2} < x_{z_0} < 0, \quad y_{z_2} < 0. \quad (4.28)$$

この式より $O(z_0)$ は周期軌道でない. (Q.E.D.)

命題 4.4. $a \geq 60/17$ において3つ折れ馬蹄が存在する.

証明. $[u_-, v_-]_{W_u(r_+)}$ が S_g^- と接触すると, 3つ折れ馬蹄が完成する. 弧 $[u_-, v_-]_{W_u(r_+)}$ の曲率は負である. 弧 $[u_-, v_-]_{W_u(r_+)}$ は, 式 $y = \xi_u(r_+)(x - \sqrt{1+4/a}) + 2\sqrt{1+4/a}$ で表される直線の下にある. この直線と S_g^- が接する状況では, 3つ折れ馬蹄が既に存在している. 接触の状況は次の式で表される.

$$(a/2)(x_c - x_c^3) + \xi_u(r_+)(x_c - \sqrt{1+4/a}) + 2\sqrt{1+4/a} = 0. \quad (4.29)$$

ここで $x_c = -\sqrt{(1+2\xi_u(r_+)/a)/3}$ は接点の x 座標である. 式 (29) の解は $a = 60/17$ である. これで証明が完了した. (Q.E.D.)

命題 4.4 の臨界値は数値計算の値 $a_{3hs} = 3.454$ に比べ若干大きい.

4.2.5 区間

S_H^+ に区間 I_i^+ ($i \geq 1$) を下記のように定義する.

$$I_{2i-1}^+ = T^{-2i+2}U_- \cap S_H^+ \quad (i \geq 1), \quad (4.30)$$

$$I_{2i}^+ = T^{-2i}V_- \cap S_H^+ \quad (i \geq 1). \quad (4.31)$$

ここで $I_i^+ = (A_i, B_i)_{S_H^+}$ ($x_{A_i} < x_{B_i}$) である. 更に I_i^+ と I_{i+1}^+ の間の区間を定義する.

$$J_i^+ = (B_i, A_{i+1})_{S_H^+}. \quad (4.32)$$

次に S_g^+ に区間 N_i^+ を定義する.

$$N_{2i-1}^+ = T^{-2i+2}U_- \cap S_g^+ \quad (i \geq 1), \quad (4.33)$$

$$N_{2i}^+ = T^{-2i}V_- \cap S_g^+ \quad (i \geq 1). \quad (4.34)$$

ここで $N_i^+ = (C_i, D_i)_{S_g^+}$, $x_{C_i} < x_{D_i}$ である. 最後に N_i^+ と N_{i+1}^+ の間の区間を定義する.

$$M_i^+ = (D_i, C_{i+1})_{S_g^+}. \quad (4.35)$$

同じ手順で S_H^- に区間 $J_i^- = R \circ J_i^+$ を, S_g^- に $M_i^- = R \circ M_i^+$ を定義する. 以下では記号 $J_i = J_i^+ \cup J_i^-$ を用いる. $a_c(J_i)$ を J_i が生じる臨界値とする. 同様に $M_i (= M_i^+ \cup M_i^-)$ が生じる臨界値 $a_c(M_i)$ も定義する.

4.3 周期軌道の出現順序関係

4.3.1 周期軌道の一般化された出現順序関係

安定多様体と不安定多様体が接触する前後で成立する周期軌道の一般化された出現順序関係を導出する. ここで得られた順序関係は同じ状況が成立する他の系でも成立する. 初期値 z_0 は S_H^+ にあり, 軌道の途中の点 z_k で S_g^+ を通る対称周期軌道 $O_{Hg}(z_0)$ のみに制限する.

命題 4.5. S_H^+ に区間 J_i^+ が存在するならば, S_g^+ に区間 M_{i+1}^+ が存在する.

証明. i を 1 以上の奇数とし, 区間 J_i^+ を考える. 直接計算から, $T^{-1}S_H^+$ は S_g^- の上部にある. 一方, $T^{-1}[u_-, r_+]_{W_u(r_+)} \subset [t_+, r_-]_{W_u(r_-)}$ が成立し, S_g^- の下部にある. これらの事実から $T^{-1}U_-$ は S_g^- と交差する. これは S_g^- に区間 M_{i+1}^- があることを意味する. 対称性より M_{i+1}^+ が存在する. i が 2 以上の偶数の場合も同様にして証明できる. (Q.E.D.)

不安定多様体の区間 $\gamma_u^+ = (t_-, R \circ T^{-1}u_-)_{W_u(r_+)}$ と安定多様体の区間 $\gamma_s^+ = (v_+, w_+)_{W_s(r_+)}$ を定義する. また $\gamma_s^- = R \circ \gamma_s^+$ と $\gamma_u^- = R \circ \gamma_u^+$ を定義する. $g\gamma_s^\pm = \gamma_u^\pm$ が成立する. ここで定義した不安定多様体と安定多様体の区間と, 前に定義した対称線上の区間の間に成立する関係を以下に示す.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{2i} J_{2i+1}^\pm = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{2i+1} J_{2i+2}^\mp = \gamma_u^\pm \quad (i \geq 0), \quad (4.36)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^{-2i} M_{2i+1}^\pm = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{-(2i+1)} M_{2i+2}^\mp = \gamma_s^\pm \quad (i \geq 0). \quad (4.37)$$

定理 4.1. k は 2 以上の整数とする. $T^k\gamma_u^\pm$ と γ_s^\pm が $a = a_c(k) (> a_c(J_i))$ において 2 次接触し, $a > a_c(k)$ では横断的交差をしているとする. また $T^k\gamma_u^\pm$ と γ_s^\pm が $a = a_c(k)$ で 3 次接触し, $a > a_c(k)$ では横断的交差をしているとする. このとき表 4.3(a)-(d) の順序関係が成立する.

表 4.3(a)

	M_{i+1}	\Rightarrow	M_{i+2}	\Rightarrow	M_{i+3}	\Rightarrow	M_{i+4}	$\Rightarrow \dots$
J_i	$4(k+2i)-2$	\rightarrow	$4(k+2i)+2$	\rightarrow	$4(k+2i)+6$	\rightarrow	$4(k+2i)+10$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
J_{i+1}	$4(k+2i)+2$	\rightarrow	$4(k+2i)+6$	\rightarrow	$4(k+2i)+10$	\rightarrow	$4(k+2i)+14$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
J_{i+2}	$4(k+2i)+6$	\rightarrow	$4(k+2i)+10$	\rightarrow	$4(k+2i)+14$	\rightarrow	$4(k+2i)+18$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
J_{i+3}	$4(k+2i)+10$	\rightarrow	$4(k+2i)+14$	\rightarrow	$4(k+2i)+18$	\rightarrow	$4(k+2i)+22$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

表 4.3(b)

	M_{i+1}	\Rightarrow	M_{i+2}	\Rightarrow	M_{i+3}	\Rightarrow	M_{i+4}	$\Rightarrow \dots$
J_i	$4(k+2i)-2$	\leftarrow	$4(k+2i)+2$	\leftarrow	$4(k+2i)+6$	\leftarrow	$4(k+2i)+10$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
J_{i+1}	$4(k+2i)+2$	\leftarrow	$4(k+2i)+6$	\leftarrow	$4(k+2i)+10$	\leftarrow	$4(k+2i)+14$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
J_{i+2}	$4(k+2i)+6$	\leftarrow	$4(k+2i)+10$	\leftarrow	$4(k+2i)+14$	\leftarrow	$4(k+2i)+18$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
J_{i+3}	$4(k+2i)+10$	\leftarrow	$4(k+2i)+14$	\leftarrow	$4(k+2i)+18$	\leftarrow	$4(k+2i)+22$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

表 4.3(c)

	M_{i+1}	\Rightarrow	M_{i+2}	\Rightarrow	M_{i+3}	\Rightarrow	M_{i+4}	$\Rightarrow \dots$
J_i	$4(k+2i)-2$	\rightarrow	$4(k+2i)+2$	\rightarrow	$4(k+2i)+6$	\rightarrow	$4(k+2i)+10$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
J_{i+1}	$4(k+2i)+2$	\rightarrow	$4(k+2i)+6$	\rightarrow	$4(k+2i)+10$	\rightarrow	$4(k+2i)+14$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
J_{i+2}	$4(k+2i)+6$	\rightarrow	$4(k+2i)+10$	\rightarrow	$4(k+2i)+14$	\rightarrow	$4(k+2i)+18$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
J_{i+3}	$4(k+2i)+10$	\rightarrow	$4(k+2i)+14$	\rightarrow	$4(k+2i)+18$	\rightarrow	$4(k+2i)+22$	$\rightarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

表 4.3(d)

	M_{i+1}	\Rightarrow	M_{i+2}	\Rightarrow	M_{i+3}	\Rightarrow	M_{i+4}	$\Rightarrow \dots$
J_i	$4(k+2i)-2$	\leftarrow	$4(k+2i)+2$	\leftarrow	$4(k+2i)+6$	\leftarrow	$4(k+2i)+10$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
J_{i+1}	$4(k+2i)+2$	\leftarrow	$4(k+2i)+6$	\leftarrow	$4(k+2i)+10$	\leftarrow	$4(k+2i)+14$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
J_{i+2}	$4(k+2i)+6$	\leftarrow	$4(k+2i)+10$	\leftarrow	$4(k+2i)+14$	\leftarrow	$4(k+2i)+18$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
J_{i+3}	$4(k+2i)+10$	\leftarrow	$4(k+2i)+14$	\leftarrow	$4(k+2i)+18$	\leftarrow	$4(k+2i)+22$	$\leftarrow \dots$
\Downarrow	\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow	
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	

証明. J_i^\pm の像は γ_u^\pm に集積する. これらは γ_u^\pm の自然な方向に関して γ_u^\pm の左に存在する. 一方 M_i^\pm の像は γ_s^\pm の左側に集積する. これらの事実を用いて順序関係の証明を行う. 証明を行う前に, 安定多様体と不安定多様体の接触には4つの状況があることを示す. $T^k \gamma_u^+$ の方向が右で, γ_s^+ の方向が左の場合である. これは表 4.3(a) の順序関係を導く. $T^k \gamma_u^+$ の方向と γ_s^+ の方向が共に右の場合である. これは表 4.3(b) の順序関係を導く. $T^k \gamma_u^+$ の方向と γ_s^+ の方向が共に左の場合である. これは表 4.3(c) の順序関係を導く. $T^k \gamma_u^+$ の方向が左で, γ_s^+ の方向が右の場合である. これは表 4.4(d) の順序関係を導く.

以下では表 4.3(a) の順序関係を導く. 他の場合も同様であるので詳細は省略する.

i が奇数の場合は, $T^{k+i-1} J_i^+$ は $T^{-i} M_{i+1}^-$, $T^{-i-1} M_{i+2}^+$, $T^{-i-2} M_{i+3}^-$, \dots , γ_s^+ の順に接触し交差する. それゆえに次の順序関係が得られる.

$$4(k+2i-1)+2 \rightarrow 4(k+2i-1)+6 \rightarrow 4(k+2i-1)+10 \rightarrow \dots$$

この方法より右矢印で表わされたすべての順序関係が証明される.

次に $T^{-i}M_{i+1}^-$ は $T^{k+i-1}J_i^+$, $T^{k+i}J_{i+1}^-$, $T^{k+i+1}J_{i+2}^-$, \dots , $T^k\gamma_u^+$ と順に接触し交差する. これより次の順序関係が得られる.

$$4(k+2i-1)+2 \rightarrow 4(k+2i-1)+6 \rightarrow 4(k+2i-1)+10 \rightarrow \dots$$

これらの順序関係は表 4.3(a) では下矢印で表されている. 残りの下矢印で表わされた順序関係も証明される. (Q.E.D.)

4.4 位相的エントロピー

4.4.1 a がゼロに近い極限

定理 4.2 を証明するために命題 4.6 を最初に証明する.

命題 4.6. $a > 0$ において, ヘテロクリニックローブ U_+ は対称線 S_H^- と交差している.

証明. TS_H^- と $V_- = TU_+$ が交差することを証明すれば, この命題を示したことになる. 直接計算より, TS_H^- は P より第 3 象限に出て x 軸の $x < 0$ の部分と交差して第 2 象限に入る. 次に y 軸と交差して第 1 象限に入り, 最後に r_+ に到達する. 我々の興味は TS_H^- の第 3 象限における振る舞いである. ここで点 $z_0 = (-1/2x^*, -x^*)$ ($x^* = |x_{r_-}|$) を S_H^- 上にとる. この点の像 $Tz_0 = ((-1-3a/8)x^*, (-1/2-3a/8)x^*)$ は, $y = \xi_s(r_-)(x+x^*) - 2x^*$ ($y_{r_-} < y < 0$) の左側にある. つまり Tz_0 は弧 $[r_-, v_-]_{W_s(r_-)}$ の左側にある. よって TS_H^- は $[r_-, v_-]_{W_s^-}$ と交差している. より正確には S_H^- は弧 $[w_-, v_-]_{W_s(r_+)} \subset [r_-, v_-]_{W_s^-}$ と交差する. これ以外の弧 $[r_-, v_-]_{W_s^-} \setminus [w_-, v_-]_{W_s(r_+)}$ と交差すると, 不安定多様体同士が交差したり, z_0 が第 1 象限に存在するといった矛盾がでる. まとめて TS_H^- は $V_- = TU_+$ に入り出て行く. 以上で証明が終了する. (Q.E.D.)

定理 4.2. $a > 0$ において T の位相的エントロピーは $\ln 2$ 以上である.

証明. S_H の対称性より, 命題 4.6 は $W_s(r_+)$ と $W_u(r_+)$ は S_H^- 上で交差すると言い換えられる. 正確には $(u_+, t_+)_{W_s(r_+)}$ と $(w_-, t_*)_{W_u(r_+)}$ が交差する. 但し $t_* = Ht_+$ である. a が十分に大きいときはこれらは 4 点で交差している. そのうち 2 点が S_H^- 上にある. しかし, a が小さくなると S_H^- 上にある 2 点のみとなる. 同様の現象は第 1 象限でも生じること注意到する. 上記の現象は, パラメータを大きくすると S_H^- にあった 2 つの交差点のうち上部にあった交差点が 3 次接触して, その周りに 2 つ新たな交差点を生むことを述べている. この分岐については参考文献 10) に証明がある. よって定理 4.2 を証明するためには 3 次接触している状況, またはその前の状況で証明を行えばよいことが分かる.

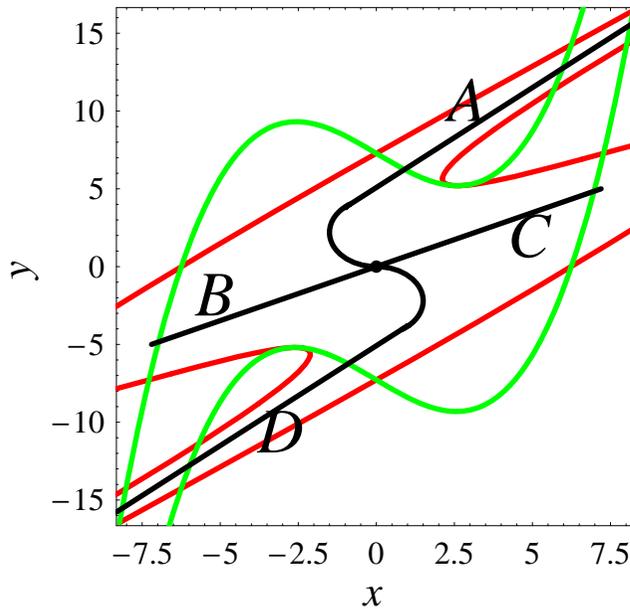


図 4.4 $W_s(r_+)$ と $W_u(r_+)$ が 3 次接触をしている状況でのトレリス. 図の中の A, B, C, D はトレリス法におけるコントロール辺であり, 黒い丸は P である.

コリンズによるトレリス法⁷⁾を図 4.4 の接触状況に適用して位相的エントロピーの下界を計算する. コントロール辺 A, B, C, D 間の遷移行列を求め, 次に特性方程式を求める.

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D \\ A & 0 & 0 & 2 & 1 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

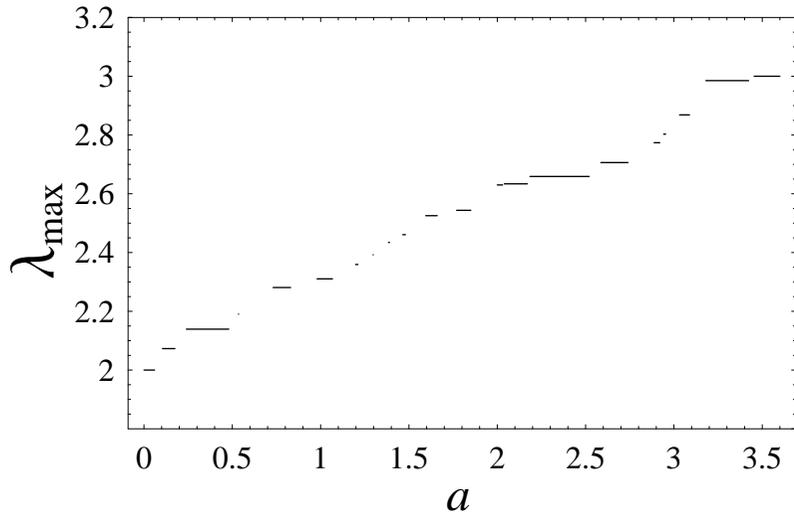
$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 2). \quad (4.39)$$

固有値の最大値は 2 である. これより位相的エントロピーの下界は $\ln 2$ である. (Q.E.D.)

定理 4.2 は位相的エントロピーが a に関して連続でないことを意味している. $a \rightarrow 0$ の極限では P の近くで $\ln 2$ のエントロピーを担うカオスを観測できない. これは r_+ の近傍から r_- の近傍にジャンプする運動とその逆の運動が担っている. 強いカオスは無限遠からやってくる. 2 つ折れ馬蹄の中のカオスは系の位相的エントロピーに寄与しない.

4.4.2 位相的エントロピーのパラメーター依存性

トレリス法を利用して 1 2 の接触状況で位相的エントロピーの下界を計算した. 結果は図 4.5 に示した. λ_{\max} は 2 から 3 へと単調に増加する. 平らな領域の長さは $T^k \gamma_u$ と

図 4.5 λ_{\max} のパラメータ依存性.

$T^{k'}\gamma_s$ の形状に依存する. k と k' が大きくなると不安定多様体と安定多様体は折りたたまれて非常に細くなる. この結果, 接触点では非常にシャープな構造をもつ. そのために平らな領域は非常に短くなる.

参考文献

- [1] S. Smale, Bull. Am. Math. Soc. **73** (1967), 747.
- [2] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, Prog. Theor. Phys. **113** (2005), 261.
- [3] G. D. Birkhoff, Acta. Math. **82** (1920), 44. See K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, J. Math. Phys. **30** (1989), 608 (2重可逆性).
- [4] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, (Springer-Verlag, 1990).
- [5] R. De Vogelaere, in *Contributions to the Theory of Oscillations*, Vol. IV, Ann. Math. Studies No. 41 (Princeton University Press, 1958).
- [6] K. Nakamura and M. Hamada, J. Phy. **A 29** (1996), 7315.
- [7] P. Collins, Int. J. Bifurcation and Chaos **12** (2002), 605.
- [8] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **111** (2004), 757.
- [9] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **103** (2000), 1127.
- [10] D. Sterling, H. R. Dullin and J. D. Meiss, Physica D **134** (1999), 153.

第 5 章

3 つ折れ馬蹄が完成するまでの位相的エントロピーの増加 II

ここでは 3 次関数写像と標準写像における位相的エントロピーを調べる. 用いる方法はトレリス法である. この方法を利用して, これらの写像において 3 つ折れ馬蹄が完成するまでどのように位相的エントロピーが増大するか調べる. またマルコフ分割に似た自然な空間の分割が存在する条件に関する予想を述べる.

5.1 序

力学系で馬蹄¹⁾が完成するまでに生じる様々な分岐現象を研究することは一つの大きなテーマである. 現在も研究が進行している. エノン写像では 2 つ折れ馬蹄 (2HS) が生じる (エノン写像に関しては第 1 章から第 3 章を参考のこと).²⁾⁻¹⁰⁾ 3 つ折れ馬蹄 (3HS) が生じる系もある. 2 次元 3 次関数写像が代表的な例である.¹¹⁾ また標準写像ではパラメータの増加にともない最初に 3 つ折れ馬蹄が生じ, 次に 5 つ折れ馬蹄が生じる. 一般に $2n + 1$ ($n \geq 1$) 折れ馬蹄が生じる.¹²⁾ 開放剛体散乱ビリヤード系では n (≥ 2) 枝馬蹄が存在する.¹³⁾ 3HS の完成の過程は 2HS の完成の過程に比べてより複雑であろうと思われる. 3HS が完成するまでの系の複雑さの増大を決定したい. そのためこの論文では周期軌道の増大率の情報から位相的エントロピーを計算する. 我々は下記のシンプレクティック形式の 2 次元写像 T をもとに, この問題を調べる.

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad (5.1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (5.2)$$

ここで関数 $f(x)$ はひとつのパラメーター a のみを含むとする. 位相的エントロピーは $a = 0$ のときゼロであり, $a = a_{3hs}$ で $\ln 3$ となる. ただし a_{3hs} は 3HS が完成する臨界値である. この値は $f(x)$ の形に依存する.

3つ折れ馬蹄の完成に至るルートとして2つが知られている。最初のルートは第4章で紹介したルートである。つまり $f(x) = a(x - x^3)$ の場合である。 $a = 0$ で位相的エントロピーはゼロである。しかし a が有限値をとると位相エントロピーは $\ln 2$ にジャンプする。その後パラメーターの増大につれて位相エントロピーは $\ln 3$ へと増加する。詳細は第4章を参考にしてもらいたい。第2のルートは $f(x) = a(-x + x^3)$ (3次関数写像: CM) とか $f(x) = a \sin x$ (標準写像: SM) で観測されるルートである。 $a = 0$ で位相的エントロピーはゼロである。 a が増大するにつれて位相エントロピーは $\ln 3$ に向かって増大する。この論文では第2のルートについて調べる。CM は平面で定義されているが, SM は円筒面で定義されていることを注意しておく。しかし, 標準写像で3HSの構成までを調べるときは定義されている曲面の差が結果に反映することはない。ちなみにCMにおいて a_{3hs} は $7.453 \dots$ であり, SM に対しては $8.275 \dots$ である。

ここでは不動点についてまとめておく。CMの不動点 $Q = (0, 0)$ は楕円点または反転サドルである。 $P_{\pm} = (\pm 1, 0)$ はサドルである。一方, SMの不動点 $Q = (\pi, 0)$ は楕円点または反転サドルである。 $P = (0, 0)$ と $P' = (2\pi, 0)$ はサドルである。楕円点 Q は, いずれの写像においても $a = 4$ で周期倍分岐を起こす。

§5.2節では, 対称周期軌道の性質を述べる。また3HSの構成の仕方を解説する。§5.3節では, トレリス法を用いて位相的エントロピーの下界値を求める。§5.4節では, 位相平面の自然な分割について議論する。そしてこれを用いて周期軌道の個数を計算する。§5.5節では, 遷移行列と馬蹄の関係を議論する。

5.2 対称周期軌道と3つ折れ馬蹄

初期点 z_0 から出発する周期軌道を $O_q(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{q-1}\}$ とする。ただし, $z_i = Tz_{i-1}$ ($i = 1, \dots, q-1$), $z_0 = Tz_{q-1}$ である。添え字 q は周期数を意味する。

写像 T は2つの対合の積で2通りに記述できる。¹⁴⁾

$$T = H \circ G = h \circ g, \quad (5.3)$$

ここで対合 H, G, h, g は下記のように定義される。

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ y \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y + f(x) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -y \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - f(x) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$\nabla H = \det \nabla G = \det \nabla h = \det \nabla g = -1$ に注意する。対合の不動点の集合は対称線と呼ばれる。¹⁴⁾ 2つの写像CMとSMにおいて, この論文で使用する対称線を以下に示す。

$$S_H : \{(x, y) | y = 2x\} \text{ (CM)}, \quad (5.6)$$

$$: \{(x, y) | y = 2(x - \pi)\} \text{ (SM)}, \tag{5.7}$$

$$S_G : \{(x, y) | x = 0\} \text{ (CM)}, \tag{5.8}$$

$$: \{(x, y) | x = \pi\} \text{ (SM)}, \tag{5.9}$$

$$S_h : \{(x, y) | y = 0\} \text{ (CM, SM)}, \tag{5.10}$$

$$S_g : \{(x, y) | y = -f(x)/2\} \text{ (CM, SM)}. \tag{5.11}$$

領域 $y > 0$ ($y < 0$) にある対称線 S_G を, S_G^+ (S_G^-) と書く. S_H^+ と S_H^- も同様に定義される. CM の場合, 領域 $0 < x < 1$ ($-1 < x < 0$) にある対称線 S_g を S_g^+ (S_g^-) と書く. SM の場合, 領域 $\pi < x < 2\pi$ ($0 < x < \pi$) にある対称線 S_g を S_g^+ (S_g^-) と書く. S_h^+ も同様に定義される. CM に対する写像 T は, $(0, 0)$ を中心として 180° 回転に対して不変である. SM の場合の回転中心は $(\pi, 0)$ である. これらの回転を R とする.

$$R : x \mapsto -x, y \mapsto -y \text{ (CM)}, \tag{5.12}$$

$$R : x \mapsto 2\pi - x, y \mapsto -y \text{ (SM)}, \tag{5.13}$$

ここで $R = g \circ G = G \circ g = h \circ H = H \circ h$ が成立することに注意する.

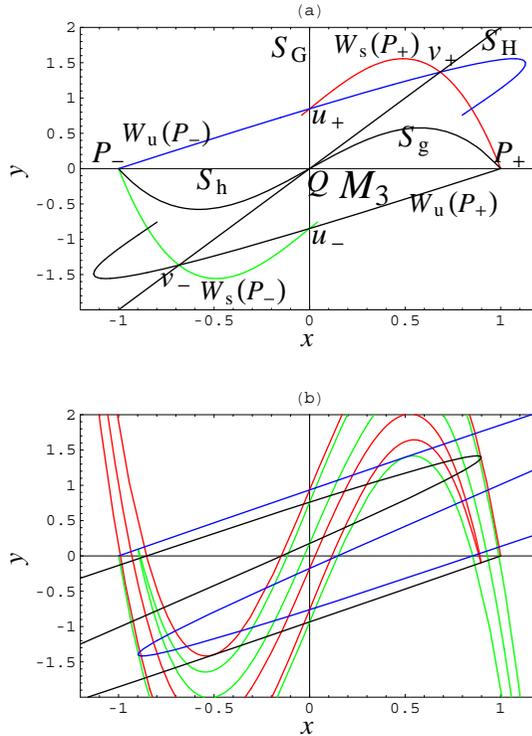


図 5.1 (a)CM を利用した M_3 の定義と, (b)3HS が完成した状況 ($a_{hs} = 7.453 \dots$).

1 次元多様体を Γ とし, この上にある 2 点を α, β とする. これら 2 点を端点とする Γ の開弧を $(\alpha, \beta)_\Gamma$ と書く. 多様体 Γ が方向を持つ場合, $(\alpha, \beta)_\Gamma$ の左端点が上流にあり右端点は下流にあるとする. 閉弧 $[\alpha, \beta]_\Gamma$ に関しても同様に定義される.

次に CM を利用して 3 つ折れ馬蹄の構成について説明する (図 5.1(a) を参照のこと). 不安定多様体 $W_u(P_-)$ は S_G^+ と点 u_+ において横断的に交差している. また S_H^+ と点 v_+ で横断的に交差している.¹⁵⁾ 不安定多様体 $W_u(P_+)$ は S_G^- と点 u_- で横断的に交差し, S_H^- と点 v_- でも横断的に交差している. M_3 を弧 $[P_-, v_+]_{W_u(P_-)}$, $[v_+, P_+]_{W_u(P_+)}$, $[P_+, v_-]_{W_u(P_+)}$, $[v_-, P_-]_{W_u(P_-)}$ で囲まれた閉じた領域とする. 更に $\gamma_s = [v_+, Tu_+]_{W_s(P_+)}$ と $\Gamma_u = [u_-, v_-]_{W_u(P_+)}$ を定義する. 次に $T\Gamma_u$ が γ_s と最初の接触をした状況を考える (図 5.1(b)). この状況が 3HS が完成である. 標準写像においても同様に M_3 を定義できる. 以下では M_3 に含まれる周期軌道を考える. CM の場合, すべての周期軌道は M_3 に含まれる. $\mathbf{R}^2 \setminus M_3$ は遊走集合である. 一方 SM においては M_3 を出入りする周期軌道が存在する. しかしこの論文ではそのような周期軌道 wo 無視する.

性質 1. CM においては 3 つ折れ馬蹄が $a \geq 128/17$ で存在し, SM では $a \geq 8.30465 \dots$ で存在する.

証明. SM に対して証明する. P から不安定多様体を追いかけて始めて傾きが発散する点を最初の引き返し点とする. そうすると不安定多様体は P から最初の引き返し点まではグラフである. これを $y = F(x)$ と書く. 少なくとも P から F の傾きが最初にゼロになる点までは, $F(x)$ の 2 階微分は負である.¹⁶⁾ これより $F(x)$ の傾きは減少する. よって $F(x)$ は直線 $y = \xi_u x$ ($x > 0$) の下部にある. $\xi_u = (\sqrt{a^2 + 4a} - a)/2$ は P の $W_u(P)$ における傾きである. $y = \xi_u x$ ($x > 0$) と S_g^+ ($y = -(a/2) \sin x$ ($\pi < x < 2\pi$)) が接触する状況では, $F(x)$ と S_g^+ は交差する. これは 3HS の存在を意味する. この事実より臨界値 a_{3hs} を決める次式が得られる.

$$\xi_u x_c + (a/2) \sin x_c = 0, \quad (5.14)$$

ここで $x_c = \pi + \cos^{-1}(2\xi_u/a)$ は接点の x 座標を表す. 数値計算して臨界値が得られる. CM に関しても上記の方法を繰り返すことで臨界値が得られる. (Q.E.D.)

5.3 位相的エントロピーの増加

コリンズ⁷⁾ によって開発されたトレリス法を利用して位相的エントロピーの下界 h_{top} を計算する. トレリス法を利用する場合, 最初に不安定多様体と安定多様体を描く. これらは無限に長い多様体であるため, 全体像を把握することはできない. しかし系の複雑さを近似的に測るためには全体像は必要ない. ここでトレリスの定義⁷⁾ を思い出そう. トレリスはサドルとその不安定多様体の有限の弧 \tilde{W}_u と安定多様体の有限の弧 \tilde{W}_s で構成される. ここでいうサドルとは, CM の場合は P_\pm であり, SM の場合は P と P' である. \tilde{W}_u

と \bar{W}_s が横断的に交差しであればトレリスは横断的である。 \bar{W}_u または \bar{W}_s の開弧を線分 (segment) と呼ぶ。これらの端点は交差点であり、内点に交差点を含まない。位相平面はトレリスで分割され、{ 位相平面 } \setminus { トレリス } の各領域は開領域と呼ばれる。次にトレリス法を簡単にまとめる。

トレリス法⁷⁾

[i] トレリスを構成する。

[ii] トレリスの図の中に適正グラフ (compatible graph) \mathcal{G} を重ね合わせて描く。適正グラフは制御辺 (c-辺) と拡張辺 (e-辺) で構成される。c-辺は安定多様体の線分に横断的に交差する。しかし他の線分とは交差しない。c-辺と c-辺をつなぐ辺が e-辺である。c-辺と e-辺をあわせるとつながった適正グラフができる。適正グラフは形状から木とも呼ばれる。

[iii] 2 つの c-辺の間に e-辺がある場合、e-辺をつぶして一つの c-辺にする。このような手順で e-辺をつぶした後に $n (\geq 3)$ 本の c-辺が集まることがある。このような点を n -角 (n -prong) と呼ぶ。

[iv] いままでの手順で得られたグラフが e-辺を含んでいれば、e-辺を削除する。CM では e-辺には周期軌道はないからこの手順を行う前に e-辺は削除されている。一方 SM では e-辺に周期軌道が存在する。しかし e-辺からの寄与は無視することより、この手順は正当化される。e-辺をすべて削除したグラフを単純化された適正グラフと呼ぶ。以下で描くグラフはすべて単純化された適正グラフである。

[v] 単純化された適正グラフの c-辺の像を決定する。これより遷移行列 M を構成し、その固有値を計算する。固有値の絶対値の最大値 λ_{\max} が周期軌道数の主たる発散率を決める。位相的エントロピーの下界は $\ln \lambda_{\max}$ として得られる。

不安定多様体と安定多様体が接触している状況でトレリスを構成し、単純化された適正グラフを描く。その理由は、不安定多様体と安定多様体が交差している状況よりも接触状況で単純化された適正グラフを描くことがより簡単であるからである。図. 5.2 に単純化された適正グラフが描かれている。これらの状況はすべて不安定多様体と安定多様体が対称線に接触している状況である。

図 2(d) を利用して遷移行列の構成方法を説明する。単純化された適正グラフを描く。つまり A, A', B, B', C, C' を描く。次にこれらの像を調べ 6×6 の遷移行列が得られる。ここでは新たな c-辺を次のように定義する。

$$\hat{A} = AUA', \quad \hat{B} = BUB', \quad \hat{C} = CUC'.$$

これらの像を調べ下記の 3×3 遷移行列が得られる。この遷移行列で記述される遷移は図.

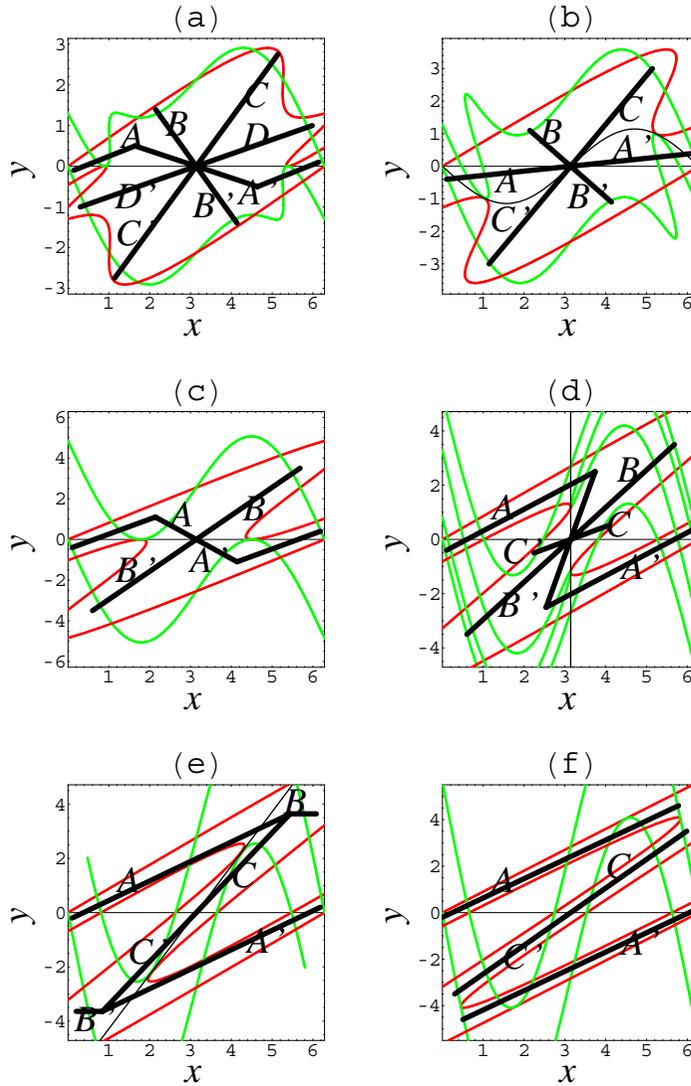


図 5.2 接触状況と簡単化された適正グラフ (太い線). (a) では簡単化された適正グラフは 8-角 ($a = a_c^h(2)$) をもつ. (b) では 6-角 ($a_c^s(1)$) が存在する. (c) では 4-角 ($a_c^h(1)$) が存在する. (d) では 6-角 ($a_c^o(1)$) が存在する. (e) では 2つの 3-角 ($a_c^h(1)$) が存在する. (f) は 3つ折れ馬蹄の完成である (a_{3hs}). すべての図は SM を利用して描いた. A, B, \dots は c -辺の名称である.

5.4(b) に描かれている.

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & \widehat{A} & \widehat{B} & \widehat{C} \\ \hline \widehat{A} & 1 & 2 & 2 \\ \widehat{B} & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{C} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (5.15)$$

3×3 行列の最大固有値と, もとの 6×6 行列の最大固有値が等しいことは直接計算から確かめられる. 最大の固有値 λ_{\max} を決定する方程式は下記のように得られる.

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0. \quad (5.16)$$

上で行った手順を一般化する. $T^n \Gamma_u$ と S_g^- が最初の接触をする臨界値を $a_c^g(n)$ とする. この臨界値で $T^n \Gamma_u$ は $T^{-n-1} \gamma_s$ と接している [図 5.2(b)]. $T^n \Gamma_u$ と $T^{-n} \gamma_s$ が S_h^- で最初の接触をする臨界値を $a_c^h(n)$ とする [図 5.2(a) and (c)]. 同じように $T^n \Gamma_u$ と S_G^+ が最初の接触をする臨界値を $a_c^G(n)$ とし [図 5.2(d)], $T^n \Gamma_u$ と S_H^+ が最初の接触をする臨界値を $a = a_c^H(n)$ とする [図 5.2(e)].

$a_c^g(n)$ における最大の固有値 λ_{\max} を決定する特性方程式は下記のように得られる.

$$\lambda^{2n+1} - \lambda^{2n} - 2 = 0. \quad (5.17)$$

位相的エントロピーの下界は $h_{\text{top}} = \ln \lambda_{\max}$ である. $a = a_c^h(n)$ においては下記の式を得る.

$$\lambda^{2n} - \lambda^{2n-1} - 2 = 0. \quad (5.18)$$

$a = a_c^G(n)$ においては下記の式を得る.

$$\lambda^{2n+1} - \lambda^{2n} - 2\lambda^n - 2 = 0. \quad (5.19)$$

$a = a_c^H(n)$ においては下記の式を得る.

$$\lambda^{3n} - \lambda^{3n-1} - \lambda^{2n} - \lambda^{2n-1} - 2 = 0. \quad (5.20)$$

式 (5.17) と (5.18) はすでにコリンズによって導かれている.⁷⁾ 式 (5.19) と (5.20) はこの論文で得られた.

式 (5.20) の状態は図 5.2(e) と 5.4(c) に対応する. 遷移行列は下記のように得られる.

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & \widehat{A} & \widehat{B} & \widehat{C} \\ \hline \widehat{A} & 1 & 2 & 2 \\ \widehat{B} & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{C} & 0 & 2 & 1 \end{array} \right). \quad (5.21)$$

最大の固有値 λ_{\max} は下記の特性方程式で決まる.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \quad (5.22)$$

図 5.2(f) は 3 つ折れ馬蹄の完成を表している。簡単化されたコンパチブルグラフから得られる遷移行列をもとに下記の方程式が導かれる。

$$\lambda(\lambda - 3) = 0. \quad (5.23)$$

3HS が完成した状況で位相的エントロピーの下界は $\ln 3$ である。

図 5.3(d)–(a) より, a を減少すると状態 \widehat{B} から状態 \widehat{A} への経路 (で示されている) が長くなる。この事実が複雑さの減少に寄与する。逆に図 5.4(a)–(d) では a を増加している。状態 \widehat{A} から状態 \widehat{C} を経て状態 \widehat{B} へ向かう経路が増加している。つまり複雑さが増加していることが分かる。

式 (5.17), (5.18), (5.19) ならびに (5.20) の最大の固有値を $\lambda_{\max}^g(n)$, $\lambda_{\max}^h(n)$, $\lambda_{\max}^G(n)$, $\lambda_{\max}^H(n)$ とする。ただし $n \geq 1$ である。これらに対して下記の関係が成立する。

$$\lambda_{\max}^g(n) < \lambda_{\max}^h(n) < \lambda_{\max}^G(n) < \lambda_{\max}^H(n). \quad (5.24)$$

臨界値についても下記の関係が成立していることが数値計算で確かめられる。

$$a_c^g(n) < a_c^h(n) < a_c^G(n) < a_c^H(n), \quad (n \geq 1) \quad (5.25)$$

$$a_c^h(n) < a_c^G(n+k), \quad a_c^h(n) < a_c^H(n+k), \quad (1 \leq k \leq n-1 \text{ and } n \geq 1) \quad (5.26)$$

$$a_c^h(n) > a_c^G(n+k), \quad a_c^h(n) > a_c^H(n+k), \quad (k \geq n \geq 1) \quad (5.27)$$

$$a_c^g(n) < a_c^G(n+k), \quad a_c^g(n) < a_c^H(n+k), \quad (1 \leq k \leq n \text{ and } n \geq 1) \quad (5.28)$$

$$a_c^g(n) > a_c^G(n+k), \quad a_c^g(n) > a_c^H(n+k). \quad (k \geq n+1 \geq 2) \quad (5.29)$$

安定多様体と不安定多様体が最初の接触を生じる臨界値を表 I に示した。臨界値は標準写像を利用して計算した。最大の固有値は式 (5.17)–(5.20) より求めた。

式 (5.24) は位相的エントロピーが単調に増加していることを表している。また式 (5.25)–(5.29) より安定多様体と不安定多様体が単調に伸びていることが分かる。これらの結果より, a と位相的エントロピーの関係を系統的に計算できる。

位相的エントロピーの下界を求めるためには, 位相平面内で安定多様体と不安定多様体が接触する状況を探す必要がある。見つけた接触状況に対してトレリス法を適用する。このような作業を SM に対して行った結果, 図 5.5 が得られた。この図よりパラメーター a に対して λ_{\max} がゼロから 3 まで単調に増加していることが分かる。この図のもう一つの特徴は多くの平坦部の存在である。平坦部において位相平面のどこかでホモクリニック接触が生じていなければ, 平坦部で双曲性が成立する。この図はいわゆる悪魔の階段に似ている。同様の図が CM に対しても得られる。違いは a のスケールが異なるだけである。平坦部に関する議論は第 2 章にある。または参考文献 9) と 17) を見ていただきたい。

表 I. 臨界値と最大の固有値.

n	$a_c^g(n)$	$a_c^h(n)$	$a_c^G(n)$	$a_c^H(n)$
	$\lambda_{\max}(n)$	$\lambda_{\max}(n)$	$\lambda_{\max}(n)$	$\lambda_{\max}(n)$
1	2.300	3.690	5.255	6.650
	1.6956	2	2.2695	2.6589
2	1.324	1.668	2.724	3.330
	1.4510	1.5436	1.8037	1.8911
3	0.943	1.097	1.846	2.140
	1.3421	1.3880	1.6031	1.6384
4	0.742	0.830	1.413	1.581
	1.2791	1.3069	1.4892	1.5074
5	0.615	0.671	1.157	1.264
	1.2374	1.2563	1.4149	1.4257
6	0.526	0.567	0.985	1.060
	1.2077	1.2214	1.3621	1.3691

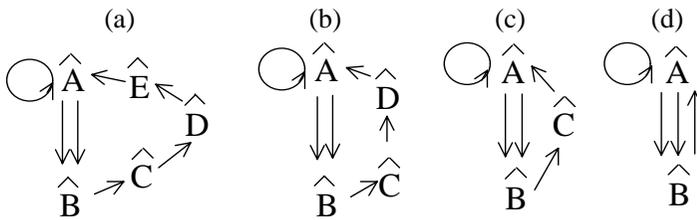


図 5.3 状態遷移図 : (a) $a = a_c^g(2)$, (b) $a_c^h(2)$, (c) $a_c^g(1)$, (d) $a_c^h(1)$.

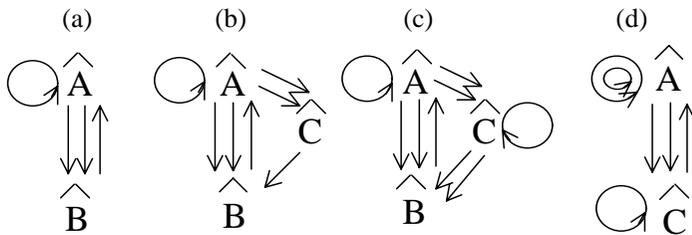


図 5.4 状態遷移図 : (a) $a = a_c^h(1)$, (b) $a_c^G(1)$, (c) $a_c^H(1)$, (d) a_{hs} .

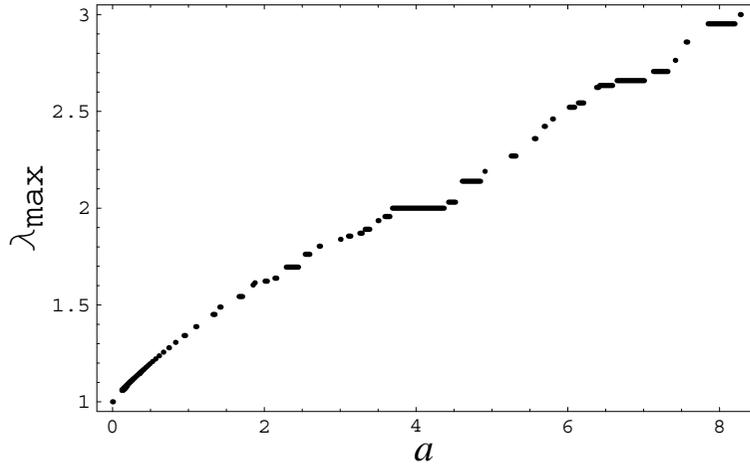


図 5.5 標準写像におけるパラメータ a と最大の固有値 λ_{\max} の関係.

5.4 自然な空間の分割

ここでは位相平面を分割する安定多様体と不安定多様体の特殊な接触状況を考える. 位相平面がうまく分割できれば, 分割領域とその像を利用して遷移行列が構成できる. 一般に適正グラフにおける角は周期点の存在を意味する. 例えば 8-角を含む図 5.2(a) では確かに楕円不動点が存在する. この楕円点を含む近傍を分割し, 分割された領域の像が重ならないようにすることは不可能である. 3-角を含む図 5.2(e) の場合でも同様である. この場合は周期 2 の周期点がある. しかし図 2(f) のように角を含まない状況も存在する.

図 5.6 で描かれた特殊な接触状況を考えよう. この図では $T\Gamma_u$ が $T^{-1}\gamma'_s$ と 4 点で交差し安定多様体の弧 $[A, B]_{T^{-2}\gamma'_s}$ と最初に接触をしている. 弧 $[A, B]_{T^{-2}\gamma'_s}$ は 2 つの不安定多様体 $W_u(P')$ と $W_u(P)$ を連結している. SM における全体像は図 5.7 に示されている. 同じ構造は CM においても存在する. 図 5.7 に適正グラフを重ね合わせて描いてある. この適正グラフは角を持たない.

位相平面で重要な領域である M_3 は 13 の小さな領域に自動的に分割され (図 5.8), 一つの領域は別の領域に写される. 各領域の境界は安定多様体と不安定多様体の弧で構成されているため, 分割には意味がある. 各領域の名称は適正グラフ (図 5.7) で使用した名称をつけた. 適正グラフは角を持たないことに注意しよう. つまり適正グラフが角を持たないならば, M_3 は自動的に分割されることが分かる. 分割された領域の像をより得られる遷移行列は, 適正グラフから得られる遷移行列 M と同じである. ここで得られた分割を位相平面の自然な分割と呼ぶ.

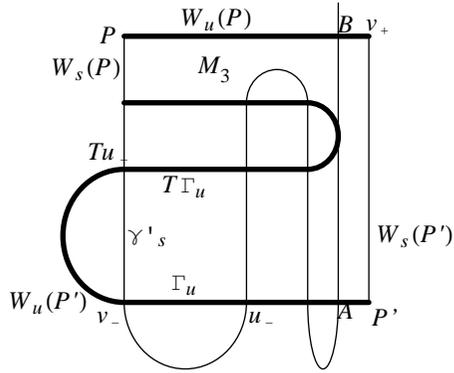


図 5.6 適正グラフにおいて角が無い特殊な接触状況.

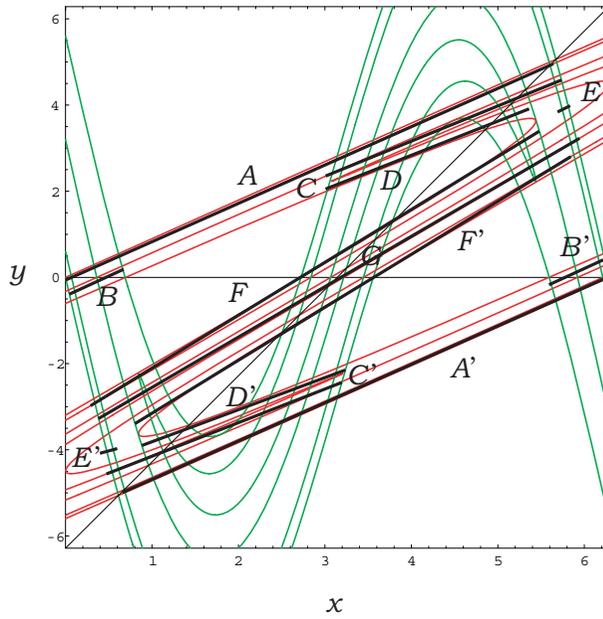


図 5.7 図 5.6 で示した接触状況の全体像. この状況は SM では $a = 7.858\dots$ で生じ, CM では $a = 7.18\dots$ で生じる. 太い線は単純化された適正グラフである.

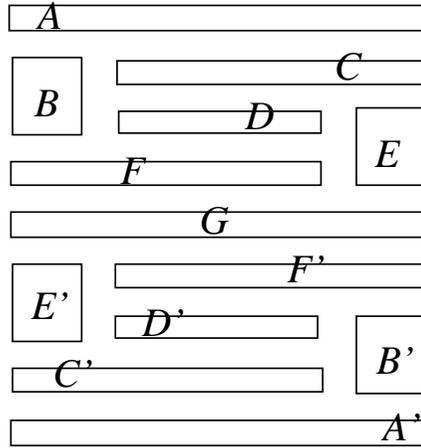


図 5.8 図 5.7 の適正グラフから構成された分割の模式図. 水平方向の辺は不安定多様体の弧であり, 垂直方向の辺は安定多様体の弧である.

図 5.7 の適正グラフから遷移行列 M は下記のように得られる.

$$M = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E & F & G & F' & E' & D' & C' & B' & A' \\ A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ G & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ F' & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ E' & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D' & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C' & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A' & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

M の最大の固有値は 2.9523... である. 上記の結果より次の予想が導かれる.

予想. 単純化された適正グラフが $n (\geq 3)$ -角を持たなければ, 写像は位相平面において自然な分割をもつ.

図 5.7 で示された状況はデービス-マッカイ-三波 (DMS) によってエノン写像で研究された状況と似ている. DMS で調べられた状況の詳細は §2.4.2 にある. これも我々の予想を裏付けている.

ここで我々が考えている自然な分割 (NP) とマルコフ分割¹⁸⁾との違いを考える. 最初に M_3 は双曲集合ではない. なぜなら M_3 の中には楕円点と遊走点が含まれているからである. よってマルコフ分割の定義に従った分割を行うことは不可能である. しかし, NP の境界は安定多様と不安定多様体で構成されているため NP の像は確定している. この事実より遷移行列が一義的に決まる. 実際の系で位相的エントロピーの下界を求めるためには NP を見つければ良いことが分かる.

遷移行列 M を利用すると周期軌道の個数を調べることができる. 周期 q の周期軌道の個数を $N(q)$ とする. $q = 13$ までの周期軌道の個数を表 II に示してある. この表の第 2 列目に図 5.7 の状況における周期軌道の個数を示し, 第 3 列に 3 つ折れ馬蹄が完成したときの周期軌道の個数を示した. 括弧の中の数は対称周期軌道の個数である.

表 II. 周期軌道の個数.

周期 q	$N(q)$: 図 7	$N(q)$: 3HS 完成時
1	3(3)	3(3)
2	3(3)	3(3)
3	4(4)	8(8)
4	14(10)	18(14)
5	44(28)	48(32)
6	110(46)	116(52)
7	284(88)	312(104)
8	716(153)	810(203)
9	1888(276)	2184(312)
10	4998(478)	5830(592)
11	13492(812)	16104(968)
12	36480(1459)	44226(1829)
13	99596(2396)	122640(2912)

周期 $q = 12$ の場合を例にとり, 周期軌道の個数の計算方法を紹介する. 表 III に示したように 6 つの異なったタイプの軌道が存在する. ここで z_0 と z_6 は対称線にあり, 途中の z_1 から z_5 までは対称線の上にないとす. このような軌道は単一对称周期軌道と呼ばれる. これらがタイプ I から IV までである. タイプ V と VI は 2 重対称周期軌道である. つまり z_0 が左右 (上下) の対称線にあり, z_3 が上下 (左右) の対称線にある周期軌道である. ただし z_1 と z_2 は対称線の上にないとす.

表 III. 対称周期軌道の個数.

タイプ	対称周期軌道	n : 図 7	n : 3HS 完成時
I	$z_0 \in S_G$ and $z_6 \in S_G$	119	121
II	$z_0 \in S_H$ and $z_6 \in S_H$	352	362
III	$z_0 \in S_g$ and $z_6 \in S_g$	760	1072
IV	$z_0 \in S_h$ and $z_6 \in S_h$	315	363
V	$z_0 \in S_G$ and $z_3 \in S_g$	13	13
VI	$z_0 \in S_H$ and $z_3 \in S_h$	11	13

タイプ V はタイプ I と III の中に含まれている. またタイプ VI はタイプ II と IV の中に含まれている. ここで $n_s(I)$ をタイプ I の周期軌道数とする. 以下同様の記号を用いる. 我々は $T^6 S_G^+$ と S_G の交点数を数える. 周期 12 の軌道の中には, 12 の約数 (1,2,3,4,6) を周期としてもつ周期軌道が含まれている. 以上のことを踏まえて下記の式が得られる.

$$N_s(12) = \sum_{k=1, \dots, IV} n_s(k) - \sum_{k=V, VI} n_s(k) - \sum_{k=1, 2, 3, 4, 6} N_s(k). \quad (5.31)$$

表 II から非対称周期軌道の個数が求まる. 非対称周期軌道の増大率が対称周期軌道の増大率を凌駕していることが分かるつまり非対称周期軌道の増大率が位相的エントロピーを決定している. 表 III から対称周期軌道の個数にも差があることが分かる. つまり $n(III)$ が非常に多くあり, $n_s(I)$ が少ない. このような差を生じさせた原因については分かっていない.

5.5 補足

$a_c^h(1)$ [図 4(d)] において, 位相的エントロピーは $\ln 2$ である. この事実より系の中に 2 つ折れ馬蹄が存在すると思うかもしれない. しかし, そのような事実はない. この場合の遷移行列は次のようになっている.

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

固有値は 2 と -1 である. m で記述される力学系は一つの不動点をもち, 下記の遷移行列で記述される 2 つ折れ馬蹄を含む系とは異なる.

$$m_{2hs} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

遷移行列の成分を 0 または 1 に制限する. そうすると, 2 つの不動点をもち最大の固有値が 2 である 2 行 2 列の遷移行列は m_{2hs} のみである. しかし, 成分を 2 までとすると 2 つの遷移行列が存在する. その一つが m であり, もう一つは下記の遷移行列である.

$$m' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

S Mと CM では m' は実現しない。我々は m' で記述される力学系を知らない。

参考文献

- [1] S. Smale, *Bull. Am. Math. Soc.* **73** (1967), 747.
- [2] M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69.
- [3] M. J. Dabiz, R. S. Mackay and A. Sannami, *Physica D* **52** (1991), 171.
- [4] D. Sterling, H. R. Dullin and J. D. Meiss, *Physica D* **134** (1999), 153.
- [5] André de Carvalho and T. Hall, *Exper. Math.* **11** (2002), 271.
- [6] André de Carvalho and T. Hall, *Nonlinearity* **15** (2002), R19.
- [7] P. Collins, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** (2002), 605; *Dynamical Systems* **19** (2004), 1.
- [8] R. Hagiwara and A. Shudo, *J. of Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 10521.
- [9] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **114** (2005), 763
- [10] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa (Submitted to *Prog. Theor. Phys.* No.62102)
- [11] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **114** (2005), 1163.
- [12] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005), 261.
- [13] P. Gaspard, *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, 1998).
- [14] R. De Vogelaere, in *Contributions to the Theory of Oscillations*, Vol. IV, *Ann. Math. Studies* No. 41 (Princeton University Press, 1958).
- [15] V. Hakim and K. Mallick, *Nonlinearity* **6** (1993), 57 (Proof for the CM). See also V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannski and M. B. Tabanov, *Physica D* **40** (1989), 235 (Proof for the SM).
- [16] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000), 1127.
- [17] Z. Arai, *On Hyperbolic Plateaus of the Hénon Maps*,
<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~arai/>
- [18] C. Robinson, *Dynamical Systems – Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos –* (CRC Press, 1999).

付録 A

プログラム

すべてのプログラムは MATHEMATICA (Wolfram Research, Inc.) で作成した。

A.1 対称周期軌道を求めるプログラム

ここでは $z_0 \in S_1, z_2 \in S_2$ を満たす回転数 $2/5$ の軌道を求める。下記は図 1.5 の下図の軌道を得るためのプログラムである。図 1.5 の上図の軌道を得るためには FindRoot における初期点である 0.3 を 0.2 にする。

(*方程式の導出*)

```
a = 5.17661;
q = 5;
x[0] = t; y[0] = 0;
Do[
  y[k + 1] = y[k] + a (x[k] - x[k]^2);
  x[k + 1] = x[k] + y[k + 1];
  , {k, 0, 2}];
g[t_] := y[2] + a(x[2] - x[2]^2)/2;
Plot[g[t], {t, 0, 1}];
```

(* 初期点を求め周期軌道を描く*)

```
tx[0] = Part[Part[FindRoot[g[t] == 0, {t, 0.3}], 1], 2];
ty[0] = 0;
Do[
  ty[k + 1] = ty[k] + a (tx[k] - tx[k]^2);
  tx[k + 1] = tx[k] + ty[k + 1];
```

```

Print[{tx[k], ty[k]};
, {k, 0, q}];
tt = Table[{tx[k], ty[k]}, {k, 0, q}];
p25 = ListPlot[tt, PlotStyle -> {Hue[0.6], PointSize[0.02]}];
p25a = ListPlot[tt, PlotStyle -> {Hue[1]}, PlotJoined -> True];
sf = Plot[-a(x - x^2)/2, {x, 0, 1.25}];
Show[sf, p25, p25a];

```

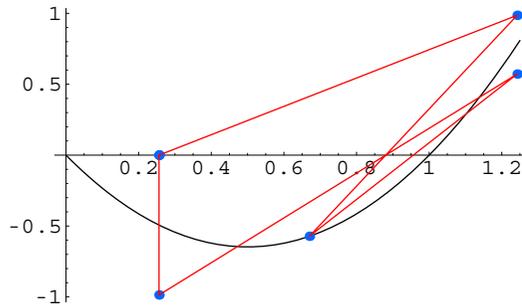


図 A.1 回転数 2/5 の軌道. 対称線も描いてある.

A.2 Burau 行列の構成と固有値を求めるプログラム

式 (1.29) における組みひも

$$\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$$

の Burau 行列を求め, その固有値の絶対値の最大値を求めるプログラムを以下に紹介する. Burau 行列, 固有値 (グラフ), 固有値の絶対値の最大値と特性方程式を出力する.

```

(* 組みひもの次数 (組みひもの数) : n *)
n = 5;
(* グラフの出力 : 角度 2Pi を ma 等分して出力 *)
ma=360;
(* 生成元の定義 : s[1]~s[n - 1], is[1]~is[n - 1] *)
Clear[t];
nn = n - 1; m = 1; v = {0};
Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];

```

```

d[m] = ReplacePart[d[m], -t, m];
d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m + 1];
s[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];
m = 1; v = {0};
Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
d[m] = ReplacePart[d[m], -1/t, m];
d[m] = ReplacePart[d[m], 1/t, m + 1];
is[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];
Do[v = {0};
  Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
  Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
  d[m] = ReplacePart[d[m], t, m - 1];
  d[m] = ReplacePart[d[m], -t, m];
  d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m + 1];
  s[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}], {m, 2, nn - 1}];
Do[v = {0};
  Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
  Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
  d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m - 1];
  d[m] = ReplacePart[d[m], -1/t, m];
  d[m] = ReplacePart[d[m], 1/t, m + 1];
  is[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}], {m, 2, nn - 1}];
m = nn; v = {0};
Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
d[m] = ReplacePart[d[m], t, m - 1];
d[m] = ReplacePart[d[m], -t, m];
s[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];
m = nn; v = {0};
Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m - 1];
d[m] = ReplacePart[d[m], -1/t, m];
is[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];

```

```
(* 組みひもの定義 : Bureau 行列表現 *)
b1 = is[4].is[3].is[2].is[1];
b = is[3].is[2].b1;
Print[MatrixForm[b]];

(* 固有値の計算 *)
Do[
  theta = 2Pi/ma*k;
  t = Cos[theta] + I*Sin[theta];
  gg = Eigenvalues[N[b]];
  Do[e[j] = Abs[Part[gg, j]], {j, 1, n - 1}];
  h1 = Table[e[j], {j, 1, n - 1}];
  y[k] = Max[h1];
  x[k] = N[theta], {k, 0, ma}];

(* 固有値の出力 [グラフと最大値], 特性方程式 *)
g1 = Table[{x[k], y[k]}, {k, 0, ma}];
ListPlot[g1, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];
gg = Table[y[k], {k, 1, ma}];
Max[gg]

t = -1;
CharacteristicPolynomial[b, x]
```

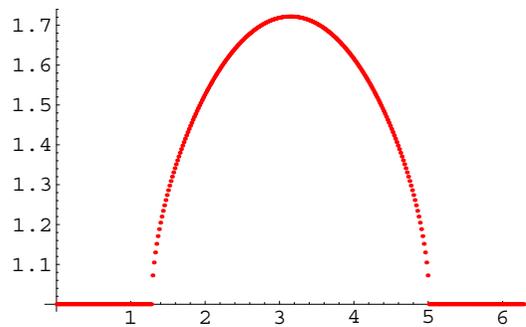


図 A.2 横軸は角度 $0 - 2\pi$ 度. 縦軸は固有値の絶対値. 角度が π のとき, つまり $t = \exp(i\pi) = -1$ で固有値の絶対値は最大値をとる.

A.3 木の構造

アルゴリズム 1 は、入力された数 n の 2 分木での位置を決める。ただし n が存在する最小の階数の位置である。さらに 2 分木の根から n までの道と核を決める操作も与える。アルゴリズム 2 は、2 分木での位置を決めたときその位置にある数を決定する。また、2 分木の根から n までの道と核を決める操作も与える。

2 つのアルゴリズムでは下記の 2 分木の性質を利用する。

[P1] n 階の節 A は $n + 1$ 階に 2 人の子供をもつ。右の子は偶数 B で左の子は奇数 C 。

[P2] A が偶数ならば $B = A$ で、 $C = 2^n + 1 - A$ 。奇数ならば $B = 2^n + 1 - A$ で、 $C = A$ 。

[P3] 偶数節から右枝に進むとき核の作用は L で、左枝に進むときは R である。奇数節から右枝に進むとき核の作用は R で、左枝に進むときは L である。

アルゴリズム 1

[1] $n (\geq 2)$ が存在する最小階 k を求める。

[2] 階数 k が 2 以上なら [3] に進み、1 ならば [6] に進む。

[3] n の対 $m = 2^{k-1} + 1 - n$ を求める。

[4] [P1] と [P2] を利用して (a) または (b) に従い、子から節の数と節から子への道を決める。

(a) $n < m$ の場合。 $k - 1$ 階の節は n である。 n が偶数ならば節から子へは右枝を進む。 n が奇数ならば節から子への左枝を進む。

(b) $n > m$ の場合。 $k - 1$ 階の節は m である。 m が偶数ならば節から子へは右枝を進む。 m が奇数ならば節から子への左枝を進む。

[5] $k - 1$ を k と、[4] で決まった節の数を n として [2] にもどる。

[6] 1 階の根から上記の手順で決めた道をたどりながら [P3] に従い核の作用を決める。

(* Program 1 *)

(* Input Number *)

n = 5;

Print["Position of ", n];

(* Start *)

nmax = Ceiling[Log[2, n]] + 1;

Do[s = 2^(k - 1) + 1; m = s - n;

 If[Mod[n, 2] == 0, z[k] = 1, z[k] = 0];

 If[m < n, n = m];

 If[Mod[n, 2] == 0,

 If[z[k] == 1, y[k] = "L", y[k] = "R"],

 If[z[k] == 1, y[k] = "R", y[k] = "L"]], {k, nmax, 2, -1}];

```

x = 0;
Do[x = x + z[k]/2^k, {k, 2, nmax}];
x = x*2^nmax + 1;
Print[nmax, "-th Floor ", x, "-th Element"];
path = Table[z[k], {k, 2, nmax}];
Print["Path:", path];
core = Table[y[k], {k, 2, nmax}];
Print["Operation for Core:", core];

```

出力結果を以下に示す.

```

Position of 5
4-th Floor 3-th Element
Path:{0, 1, 0}
Operation for Core:{L, R, R}

```

5 が存在する最小の階数は 4 で, 5 は左から 3 番目にある. リスト $\{0, 1, 0\}$ の中の記号 1 (0) は 2 分木の右枝 (左枝) を選ぶことを意味している. $\langle 5_h \rangle_4$ の核は $RRL0^2 = 01100110$ である.

アルゴリズム 2

- [1] 階数 $k (\geq 2)$ を入力する. 左端から順に $1, 2, \dots, 2^{k-1}$ と番号をふる. 左からの番号 m を入力.
- [2] 階数 k が 2 以上なら [3] に進み, 1 ならば [5] に進む.
- [3] 節の番号は $\lceil m/2 \rceil$ ($m/2$ 以上の最小の整数). m が偶数ならば, 節から子へは右枝を進む. m が奇数ならば, 節から子へは左枝を進む.
- [4] $k-1$ を k とし, [3] で決まった節の番号を m として [2] にもどる.
- [5] 1 階の根から上記の手順で決めた道をたどりながら [P1] と [P2] を用いて子の数を決める. また [P3] に従い核の作用を決める. もとの位置に戻ったときに求める数が決まる. 同時に核に対する作用も得られる.

```

(* Program-2 *)
(* Input k and m *)
k=4; (* k-th floor *)
m=7; (* m-th element *)
Print[k, "-th floor ", m, "-th element"];
(* Start *)
Do[mm=Mod[m, 2];

```

```
If[mm==0, z[i]=1, z[i]=0];
m=Ceiling[m/2], {i, k, 2, -1}];
tt=Table[z[i], {i, 2, k}];
Print["Path:", tt];
ans=1;
x[1]=ans;
Do[s=2^(i-1)+1;
  If[Mod[ans, 2]==0,
    If[z[i]==0, ans=s-ans], If[z[i]==1, ans=s-ans]];
  x[i]=ans, {i, 2, k}];
Print["Number=", ans];
Do[If[Mod[x[i-1], 2]==0,
  If[z[i]==1, y[i]="L", y[i]="R"],
  If[z[i]==1, y[i]="R", y[i]="L"]], {i, 2, k}];
ttt=Table[y[i], {i, 2, k}];
Print["Operation for Core:", ttt];
```

このプログラムの出力結果を次に示す.

```
4-th floor 7-th element
Path:{1, 1, 0}
Number=7
Operation for Core:{R, L, R}
```


終わりに

本書では、ある力学系の複雑さの度合いがどのように進化していくのかという問いに答えようとした。手法は幾何学的である。このようなアプローチはポアンカレによって始まりパーコフ、スメールへとその流れは継続されている。一方では複素力学系の理論が発展している。我々には、大きな川を挟んだ対岸の出来事のように見える。実力学系への寄与はあるのだが、我々にはなかなか理解できない。変分法によるアプローチ、摂動法によるアプローチも進展している。これらの結果も取り入れる必要があるであろう。

この本で議論した内容に関して今後の発展を期待したい。新しい発展があればこの本の内容を更新していきたい。

質問、コメントがある読者の方は下記のメールアドレスにメールをして下さるようお願いいたします。

yy-chaos@jb3.so-net.ne.jp

著者一同を代表して 山口喜博

2007年2月1日