Publ. Astron. Soc. Jpn., **18**, 287–296, 1966 (伊藤孝士 邦訳・註釈 [0])

Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables
(特定しない正準変数を用いた一般摂動の理論)

Gen-ichiro Hori (堀源一郎)
Department of Astronomy, University of Tokyo, Tokyo

(Received July 15, 1966; revised September 9, 1966)

概 要

正準変換に於ける Lie の定理を一般摂動の理論に適用する。この理論では、(a) すべての定式は正準不変の形になるので、どのような正準変数のセットに関しても妥当であり、(b) どのような量の摂動も、例えそれが軌道要素であっても座標であっても、簡単で陽の形で定式化され、(c) ハミルトニアンの無摂動部分が作用変数だけではなく角変数に依存する場合にも適用できる。一般理論の応用として人工衛星の運動を議論する。

1 正準変換に於ける Lie の定理

(ξ_i, η_i) を $2n$ 個の正準変数のセットとし、$f(\xi,\eta), S(\xi,\eta)$ を (ξ_i,η_i) の任意函数とする。演算子 $D_S^n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ を以下のように定義する。

$$D_S^0 f = f, \quad D_S^1 f = \{f, S\} \quad D_S^n f = D_S^{n-1}(D_S^1 f), \quad (n \geq 2) \tag{1}$$

ここで $\{,\}$ はポアソン括弧を表わす。

以下の定理が Lie (1888) によって示されている: 以下の関係式

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^n f(\xi,\eta), \tag{2}$$

により定義される $2n$ 個の正準変数のセット x_j, y_j は、ε を ξ_j, η_j とは独立刻み幅な微小定数とする時、右辺の級数が収束すれば正準となる[1] 。実際に、以下の微分方程式系

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\tau} = -\frac{\partial S}{\partial \xi_j}, \tag{3}$$

によってパラメータ τ を導入し、$\xi_j(\tau), \eta_j(\tau)$ を (3) の解とする。すると式 (2) は以下のようになる。

$$f(x,y) = \sum \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n f}{d\tau^n} = f(\xi(\tau+\varepsilon), \eta(\tau+\varepsilon)),$$

あるいは

$$x_j = \xi_j(\tau+\varepsilon), \quad y_j = \eta_j(\tau+\varepsilon). \tag{4}$$

式 (4) は、x_j, y_j がパラメータ τ が ε だけ増えた際の $\xi_j(\tau), \eta_j(\tau)$ の値を持つことを示している。これ故、ξ_j, η_j が正準変数であるならば、x_j, y_j も正準変数であることが言える。

---

[0] 最終更新: 平成 18 年 12 月 13 日。以下、脚注はすべて訳者によるもの。原論文に脚注はひとつも存在しない。

[1] 原論文での言い回し「正準変数のセット x_j, y_j は . . . 正準となる」(“A set of $2n$ canonical variables x_j, y_j . . . is canonical”) というのは実に妙である。正確には「変数のセット x_j, y_j は . . . 正準となる」であろう。

式 (2) に $f(\xi,\eta)=\xi_j$ および η_j を代入すると、それぞれ以下のようになる。

$$x_j=\xi_j+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}D_S^{n-1}\frac{\partial S}{\partial \eta_j}, \tag{5a}$$

$$y_j=\eta_j-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}D_S^{n-1}\frac{\partial S}{\partial \xi_j}. \tag{5b}$$

ここで

$$f(\xi,\eta)=\sum\frac{\varepsilon^n}{n!}D_{S^*}^n f(p,q) \tag{6}$$

が関数 $S^*=S^*(p,q)$ によるもうひとつの正準変換 $\xi_j,\eta_j\to p_j,q_j$ を定義するものと仮定する[2] 。以上のふたつを組み合わせた変換 $x_j,y_j\to p_j,q_j$ は以下のようになる[3] 。

$$f(x,y)=\sum\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_0^n\binom{n}{m}D_{S^*}^n D_{S(p,q)}^{n-m}f(p,q) \tag{7}$$

具体的に ε の三次まで書き下すと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(p,q)+\varepsilon\{f,S+S^*\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\{\{f,S+S^*\},S+S^*\}\\
&+ \frac{\varepsilon^2}{2}\{f,\{S,S^*\}\}+\frac{\varepsilon^3}{6}\{\{\{f,S+S^*\},S+S^*\},S+S^*\}\\
&+ \frac{\varepsilon^3}{6}\{\{f,2S+S^*\},\{S,S^*\}\}+\frac{\varepsilon^3}{6}\{\{f,\{S,S^*\}\},S+2S^*\}
\end{aligned} \tag{8}$$

但しここでは以下のような D_S と D_{S^*} の交換則を用いている[4] 。

$$D_{S^*}D_S-D_SD_{S^*}=D_{\{S,S^*\}}. \tag{9}$$

式 (5) は、以下のようなより馴染み深い正準変換と比較できる。

$$x_j=\xi_j+\varepsilon\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y_j},\quad y_j=\eta_j-\varepsilon\frac{\partial\tilde{S}}{\partial \xi_j}, \tag{10}$$

但しここでの母関数 $\tilde{S}$ は変数 ξ_j と y_j のセットが入り混じった任意関数である。従って、式 (10) が与える新旧変数の関係は陰的なものである。

式 (10) に於いて、ε は必ずしも小さいことが仮定されていない。けれども、もし ε が小さいならば、式 (10) で定義された陰的な関係を或る種の逐次近似によって解き、x_j,y_j を ξ_j,η_j の陽的な関係として表現することが可能となる。もし二つの関数 $S(\xi,\eta)$ と $\tilde{S}(\xi,\eta)$ (つまり $[\tilde{S}(\xi,\eta)]_{y\to\eta}$)

[2] 式 (6) の総和記号の添字は $\sum_{n=0}^{\infty}$ であるはず。

[3] 式 (7) について、S に付く * の場所が明らかに間違いであろう。ついでに総和記号の添え字を付け加えると、以下のようになると思われる。

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}D_S^n D_{S^*(p,q)}^{n-m}f(p,q) \tag{7}$$

[4] 式 (9) は Poisson 括弧に関する Jacobi の恒等式から導出できる。

が以下のように関係付けられているならば、この結果[5] は式 (5) で与えられる[6] 。

$$S = \tilde{S} - \frac{\varepsilon}{2}\sum \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_j}$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{12}\sum\sum\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta_j \partial \eta_k} + 4\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_k}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta_j \partial \xi_k} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_j}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_k}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right) + O(\varepsilon^3). \quad (11)$$

ここで、x_j, y_j と ξ_j, η_j が式 (5) のように関係付けられている時、式 (2) は任意関数 $f(x,y)$ の $x_j = \xi_j$ および $y_j = \eta_j$ に於ける展開公式を与えるということを述べておこう。一方、もし正準変換が式 (10) の形で与えられるならば、このような公式は存在しない。かくして、式 (5) は式 (10) に比べて大きな長所を持つことがわかる。以下では、$S(\xi,\eta)$ を x_j, y_j から ξ_j, η_j への正準変換の母関数と呼ぶことにする。

2 力学の新しい変換理論

以下のような運動方程式を満たす力学系を考える。

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_j}, \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad (12)$$

ハミルトニアンは

$$F(x,y) = F_0(x,y) + \sum_{k=1} F_k(x,y), \quad (13)$$

であり[7] 、F_k は ε^k を因子として持っている。F は陽には時刻に依存せず、また $\varepsilon = 0$ であれば系は解けるものと仮定する。ここで $S(\xi,\eta)$ を正準変換 $x_j, y_j \to \xi_j, \eta_j$ の母関数としよう。$S(\xi,\eta)$ は ε の冪として以下のように展開される[8] 。

$$\varepsilon S(\xi,\eta) = \sum_{k=1} S_k(\xi,\eta), \quad (14)$$

但し S_k は ε^k を因子として持つ。

仮定より F は時刻と関係無いので、エネルギー積分が存在する[9] 。

$$\sum_{k=0} F_k(x,y) = \sum_{k=0} F_k^*(\xi,\eta). \quad (15)$$

ここで展開公式 (2) を式の左辺[10] に適用し、ε の冪に関して両辺の同次項を比較する。その結果は以下となる。

$$\text{オーダー } 0: \quad F_0 = F_0^*, \quad (16)$$
$$\text{オーダー } 1: \quad \{F_0, S_1\} + F_1 = F_1^*, \quad (17)$$

[5] 原論文の表現「この結果 (The result)」というのが何を指すのか判然としない。取り敢えずここで言いたいことは、ε が小さいとした場合の従来型 (von Zeipel 的な) 正準変換の母関数と新しい正準変換の母関数の関係が式 (11) で与えられる」というものであると解釈しておく。
[6] 式 (11) 内の総和記号の添字は一行目が $\sum_{j=1}^n$ で二行目が $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n$ であろう。
[7] 式 (13) 右辺第二項の総和記号は本来は $\sum_{k=1}^\infty$ であろう。
[8] 式 (14) 右辺の総和記号は本来は $\sum_{k=1}^\infty$ であろう。
[9] 式 (15) 両辺の総和記号は本来は $\sum_{k=0}^\infty$ であろう。
[10] どの式の左辺か明記されていないが、式 (15) であることは明らか。

$$
\begin{aligned}
&\text{オーダー }2: && \{F_0,S_2\}+\{F_1,S_1\}+\frac{1}{2}\{\{F_0,S_1\},S_1\}+F_2=F_2^*, && (18)\\
&\text{オーダー }3: && \{F_0,S_3\}+\{F_1,S_2\}+\{F_2,S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{2}\{\{F_0,S_2\},S_1\}+\frac{1}{2}\{\{F_0,S_1\},S_2\}+\frac{1}{2}\{\{F_1,S_1\},S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{6}\{\{\{F_0,S_1\},S_1\},S_1\}+F_3=F_3^*, && (19)\\
&\text{オーダー }4: && \{F_0,S_4\}+\{F_1,S_3\}+\{F_2,S_2\}+\{F_3,S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{2}\{\{F_0,S_3\},S_1\}+\frac{1}{2}\{\{F_0,S_2\},S_2\}+\frac{1}{2}\{\{F_0,S_1\},S_3\}\\
&&& \quad +\frac{1}{2}\{\{F_1,S_2\},S_1\}+\frac{1}{2}\{\{F_1,S_1\},S_2\}+\frac{1}{2}\{\{F_2,S_1\},S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{6}\{\{\{F_0,S_2\},S_1\},S_1\}+\frac{1}{6}\{\{\{F_0,S_1\},S_2\},S_1\}+\frac{1}{6}\{\{\{F_0,S_1\},S_1\},S_2\}\\
&&& \quad +\frac{1}{6}\{\{\{F_1,S_1\},S_1\},S_1\}+F_4=F_4^*, && (20)
\end{aligned}
$$

更に高次も同様である。

前の次数の方程式を順番に代入して行くならば、式 (16) から (20) は以下の

$$
\begin{aligned}
&\text{オーダー }0: && F_0=F_0^*, && (16')\\
&\text{オーダー }1: && \{F_0,S_1\}+F_1=F_1^*, && (17')\\
&\text{オーダー }2: && \{F_0,S_2\}+\frac{1}{2}\{F_1+F_1^*,S_1\}+F_2=F_2^*, && (18')\\
&\text{オーダー }3: && \{F_0,S_3\}+\frac{1}{2}\{F_1+F_1^*,S_2\}+\frac{1}{2}\{F_2+F_2^*,S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{12}\{\{F_1-F_1^*,S_1\},S_1\}+F_3=F_3^*, && (19')\\
&\text{オーダー }4: && \{F_0,S_4\}+\frac{1}{2}\{F_1+F_1^*,S_3\}+\frac{1}{2}\{F_2+F_2^*,S_2\}+\frac{1}{2}\{F_3+F_3^*,S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{12}\{\{F_1-F_1^*,S_1\},S_2\}+\frac{1}{12}\{\{F_1-F_1^*,S_2\},S_1\}\\
&&& \quad +\frac{1}{12}\{\{F_2-F_2^*,S_1\},S_1\}+F_4=F_4^*, && (20')
\end{aligned}
$$

と同等になる。更に高次も同様である。

ポアソン括弧の正準不変性により、上の関係式も正準不変であるということに留意する必要がある。上の関係式により決められる F_k^* と S_k も従って正準不変であり、結局のところ、式 (2) により与えられるどんな量 $f(x,y)$ も正準不変である。それ故、ここで述べられている摂動の理論は、使用される特定の正準変数のセットとはまったく独立である。或る正準変数のセットに関して得られる新しいハミルトニアンとそれに関連する母関数は、式 (2) により、その正準変数の関数である他のどんな変数や関数の振舞いをも直ちに与える。

式 (2) 中の $f(x,y)$ が被摂動摂動の動径ベクトルの成分 $\boldsymbol{r}(x,y)$ であると仮定する。式 (2) の正準不変性により Delaunay 変数による $\boldsymbol{r}$ の表現は、例えば Poincaré 変数による表現と厳密に等価であることが保証される。もし仮に Delaynay 変数が離心率 $=0$ あるいは軌道傾斜角 $=0$ の場合に特異点を持っているとしてもである。実際のところ、式 (2) により以下が与えられる。

$$
\boldsymbol{r}(x,y)=\boldsymbol{r}(\xi,\eta)+\varepsilon\{\boldsymbol{r},S\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\{\{\boldsymbol{r},S\},S\}+O(\varepsilon^3), \qquad (21)
$$

あるいは $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ が共役であることにより、式 (23) は[11]

$$\boldsymbol{r}(x,y) = \boldsymbol{r}(\xi,\eta) + \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{v}} S + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\nabla_{\boldsymbol{v}}, S\} + O(\varepsilon^3), \tag{22}$$

となる。ここで $\nabla_{\boldsymbol{v}}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\xi,\eta)$ に関する勾配演算子を表す。

Lyddane (1963) は Poincaré 変数を使った式の処理および離心率がほぼ 0 に近い場合の数値積分により得られた結果から、人工衛星の運動に関する Brouwer の理論には衛星の位置の予測に於いて著しい偏差があることを示した。Lyddane は、Brouwer の理論に於いて Delauney 変数が用いられていることがこの偏差の原因ではないかと考えた。けれども私達はそんなはずはないと考えている。Lyddane の数値例によって見出された偏差は、数値的な操作ではなくむしろ理論そのものに由来している可能性がある。

パラメータ t^* を以下で導入する。

$$\frac{d\xi_j}{dt^*} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt^*} = -\frac{\partial F_0}{\partial \xi_j}. \tag{23}$$

すると以下が得られる。

$$\{F_0, S_k\} = -\frac{dS_k}{dt^*}. \tag{24}$$

これ以降では、t^* に関する関数 $A(t^*)$ の平均値が存在する場合にはそれを A_s と書くことにする。A_p は A の残りの部分を指す。解析的には以下である。

$$A_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t^*)dt^*, \tag{25}$$

$$A_p = A - A_s.$$

もし A が t^* について周期的であり、T_p をその周期とすると、(25) は以下のようになる。

$$A_s = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} A(t^*)dt^*. \tag{25$'$}$$

関連する新しいハミルトニアン F^* からパラメータ t^* を取り除くような正準変換を見付けたと仮定する。新しい運動方程式は

$$\frac{d\xi_j}{dt^*} = \frac{\partial F^*}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt^*} = -\frac{\partial F^*}{\partial \xi_j}, \tag{26}$$

であり、第一積分

$$F_0^*(\xi,\eta) = \text{const} \tag{27}$$

が、以下のエネルギー積分に加えて存在する。

$$F^*(\xi,\eta) = \text{const}. \tag{28}$$

実際のところ

$$0 = \frac{d}{dt^*}F^*(\xi,\eta) = \{F^*, F_0\} = -\{F_0, F^*\} = -\frac{d}{dt}F_0(\xi,\eta) = -\frac{d}{dt}F_0^*(\xi,\eta)$$

でとなり、式 (27) が直ちに成り立つことがわかる。

[11] ここは明らかに「式 (21) は」の誤りである。

このような正準変換 $(x_j, y_j) \to (\xi_j, \eta_j)$ を用いることにより、運動方程式 (12) の階数をひとつ減らすことが出来る。F_k^* と S_k を決定する算法は以下であり、

$$\text{オーダー } 0: \quad F_0^* = F_0, \tag{29}$$

$$\text{オーダー } 1: \quad F_1^* = F_{1s}, \tag{30}$$

$$S_1 = \int F_{1p} dt^*, \tag{31}$$

$$\text{オーダー } 2: \quad F_2^* = F_{2s} + \frac{1}{2}\left\{F_1 + F_1^*, S_1\right\}_s, \tag{32}$$

$$S_2 = \int \left(F_{2p} + \frac{1}{2}\left\{F_1 + F_1^*, S_1\right\}_p \right) dt^*, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \text{オーダー } 3: \quad F_3^* = F_{3s} &+ \frac{1}{12}\left\{\{F_{1p}, S_1\}, S_1\right\}_s + \frac{1}{2}\left\{F_2 + F_2^*, S_1\right\}_s \\ &+ \frac{1}{2}\left\{F_1 + F_1^*, S_2\right\}_s, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} S_3 = \int \Big(F_{3p} &+ \frac{1}{12}\left\{\{F_{1p}, S_1\}, S_1\right\}_p + \frac{1}{2}\left\{F_2 + F_2^*, S_1\right\}_p \\ &+ \frac{1}{2}\left\{F_1 + F_1^*, S_2\right\}_p \Big) dt^*, \end{aligned} \tag{35}$$

更に高次も同様である。

式 (23) を積分すると $2n$ 個の定数が現れるが、そのうち一個は t^* に対する付加定数である。なぜなら、式 (23) のハミルトニアン F_0 は ξ_j と η_j を介してしか t^* に依存しないからである。従って (23) の解のひとつは

$$\xi_j = \xi_j(t^* + c_1, c_2, \cdots, c_{2n}), \quad \eta_j = \eta_j(t^* + c_1, c_2, \cdots, c_{2n}), \tag{36}$$

であり、これより以下が得られよう。

$$t^* + c_1 = \varphi_1(\xi, \eta), \quad c_j = \varphi_1(\xi, \eta), \quad (j = 2, 3, \cdots, 2n). \tag{37}$$

t^* に関する平均化と積分の過程は (36) を用いて行われ、この操作の後、(37) によって結果は再び ξ_j と η_j の関数として表現される。

式 (26) から出発して今まで述べて来た一連の過程を繰り返すことが可能である。$\xi_j, \eta_j \to p_j, q_j$ を母関数 $S^*(p, q)$ を用いた正準変換とし、新しいハミルトニアンを $F^{**}(p, q)$ としよう。式 (27)(28) より[12]

$$F_0^*(\xi, \eta) = F_0^{**}(p, q), \tag{38}$$

および以下を得る。

$$F^*(\xi, \eta) = F^{**}(p, q). \tag{39}$$

これ故、以下も結果的に成り立つ[13] 。

$$\sum_{k=1} F_k^*(\xi, \eta) = \sum_{k=1} F_k^{**}(p, q). \tag{40}$$

[12] ここに原文では “severally” という語があるが、この文脈に置かれる意義が全く不明である。無視して良かろう。
[13] 式 (40) 両辺の総和記号は本来は $\sum_{k=1}^{\infty}$ であろう。

以下では、展開定理 (6) を式 (40) に適用する。$F^*(\xi,\eta)$ は $F_0(x,y)$ の役割を果たし、ハミルトニアン $F_1^*+F_1^*+\cdots$ の無摂動部分であると捉えることが出来るかもしれない。式 (23) は以下に置き換えられ[14]、

$$\frac{dp_j}{dt^{**}}=\frac{\partial F_1^*(p,q)}{\partial p_j},\quad \frac{dq_j}{dt^{**}}=-\frac{\partial F_1^*(p,q)}{\partial p_j},\tag{41}$$

t^{**} はパラメータである。方程式 (41) は解けるものと仮定されなければならない。

新しいハミルトニアン $F_1^*+F_1^*+\cdots$ から t^{**} を消去するための正準変換 $\xi_j,\eta_j\to p_j,q_j$ が必要とされる。t^{**} に関する $A(t^{**})$ の平均値を A_s とすると、その定義は以下である。

$$A_s=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t^{**})dt^{**}.\tag{42}$$

A の残りの部分を A_p とする。F_k^{**} と S_k^* を決定する算法は式 (29) から式 (35) により与えられており、表記を適宜変更すれば良い。以下のようになる。

$$\text{オーダー 1:}\quad F_1^{**}=F_1^*,\tag{43}$$

$$\text{オーダー 2:}\quad F_2^{**}=F_{2s}^*,\tag{44}$$

$$S_1^*=\int F_{2p}^*dt^{**},\tag{45}$$

$$\text{オーダー 3:}\quad F_3^{**}=F_{3s}^*+\frac{1}{2}\{F_2^*+F_2^{**},S_1^*\}_s,\tag{46}$$

$$S_2^*=\int\left(F_{3p}^*+\frac{1}{2}\{F_2^*+F_2^{**},S_1^*\}_p\right)dt^{**},\tag{47}$$

$$\begin{aligned}\text{オーダー 4:}\quad F_4^{**}=&F_{4s}+\frac{1}{12}\left\{\left\{F_{2p}^*,S_1^*\right\},S_1^*\right\}_s+\frac{1}{2}\{F_3^*+F_3^{**},S_1^*\}_s\\&+\frac{1}{2}\{F_2^*+F_2^{**},S_2^*\}_s,\end{aligned}\tag{48}$$

$$\begin{aligned}S_3^*=\int\Big(&F_{4p}+\frac{1}{12}\left\{\left\{F_{2p}^*,S_1^*\right\},S_1^*\right\}_p+\frac{1}{2}\{F_3^*+F_3^{**},S_1^*\}_p\\&+\frac{1}{2}\{F_2^*+F_2^{**},S_2^*\}_p\Big)dt^{**},\end{aligned}\tag{49}$$

更に高次も同様である。$F^{**}(p,q)$ は式 (39) により与えられる。

新しい運動方程式は

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{\partial F^{**}}{\partial q_j},\quad \frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial p_j},\tag{50}$$

となり、今度は二個の第一積分

$$F_1^{**}(p,q)=\text{const},\tag{51}$$

$$F_0^{**}(p,q)=\text{const},\tag{52}$$

が以下のエネルギー積分に加えて存在する。

$$F^{**}(p,q)=\text{const}.\tag{53}$$

以上の手続きは必要に応じて何度でも繰り返すことが出来る。

[14] (41) の左式右辺の分母にある微分変数はどう考えても q_j であろう。

3　人工衛星の運動への応用

扁平な楕円体を周回する人工衛星の運動を考える。系のハミルトニアンを Delaunay 変数で表すと以下になる。

$$F = F_0(L) + F_1(L, G, H, l, g) + F_2(L, G, H, l, g). \tag{54}$$

Delauney 変数に関連する六個の正準変数のセット x_j, y_j を以下のように置く。

$$x_j = \varphi(L, G, H, l, g, h), \quad y_j = \psi(L, G, H, l, g, h). \tag{55}$$

L', G', H', l', g', h' は以下、

$$\xi_j = \varphi(L', G', H', l', g', h'), \quad \eta_j = \psi(L', G', H', l', g', h'), \tag{56}$$

$L'', G'', H'', l'', g'', h''$ は以下で導入される。

$$p_j = \varphi(L'', G'', H'', l'', g'', h''), \quad q_j = \psi(L'', G'', H'', l'', g'', h''). \tag{57}$$

前節までと同様に変換 $x_j, y_j \to \xi_j, \eta_j$ の母関数を $S(\xi, \eta)$ と記し、変換 $\xi_j, \eta_j \to p_j, q_j$ の母関数を $S^*(p, q)$ と記す。

F_0 は楕円運動のハミルトニアンなので、式 (23) は人為的時刻 t^* についての楕円運動を定義する。従ってパラメータ $*$ は l' を通してのみ ξ_j, η_j に入り、必要な正準変換 $x_j, y_j \to \xi_j, \eta_j$ は新しいハミルトニアン $F^*(\xi, \eta)$ から l' を消去するようなものとなる。$[A(\xi, \eta)]_s$ は l' に関する $A(\xi, \eta)$ の定数部分であり、式 (26) は

$$\{F_0, S_k\} = \frac{dF_0}{dL'}\frac{\partial S_k}{\partial l'} = -\frac{dS_k}{dt^*}, \tag{58}$$

となり、これより以下が得られる。

$$\int A_p dt^* = -\left(\frac{dF_0}{dL'}\right)^{-1} \int A_p dl'. \tag{59}$$

よって、式 (29) から (35) により与えられた算法は Delaunay 変数を用いることでもっとも簡単に実行される。しかし x_j, y_j 自身が Delaunay 変数である必要はない。

$F(x, y)$ は h に依存しないので、$F_k^*(\xi, \eta)$ と $S_k(\xi, \eta)$ が h' に依存しないことは直ちに言える。すると以下を得る。

$$H(x, y) = H'(\xi, \eta) = \text{定数}. \tag{60}$$

新しいハミルトニアンは以下になる。

$$F^* = F_0^*(L') + F_1^*(L', G', H') + F_2^*(L', G', H', g') + F_3^*(L', G', H', g'). \tag{61}$$

式 (27) より以下が得られる。

$$L'(\xi, \eta) = \text{定数}. \tag{62}$$

次に、正準変換 $\xi_j, \eta_j \to p_j, q_j$ を考える。方程式 (41) を積分すると、$L''(p, q)$, $G''(p, q)$, および $H''(p, q)$ が t^{**} について定数であり、一方で $l''(p, q)$, $g''(p, q)$, $h''(p, q)$ が t^{**} の線形結合であることが示される。この単純な結果は、F_1^* が何如なる角変数にも依存しないことに起因する。t^{**} を消去することは、新しいハミルトニアンから l'', g'', h'' を消去することと等価である。けれども $F^*(\xi, \eta)$ は既に l' と h' に依存していないので、私達の $S_k^*(p, q)$ は l'' と h'' から独立である。よって

$$\{F_1^*, S_k^*\} = \frac{dF_1^*}{dG''}\frac{\partial S_k^*}{\partial g'} = -\frac{dS_k^*}{dt^{**}}, \tag{63}$$

および以下を得る。

$$\int A_p dt^{**} = -\left(\frac{dF_1^*}{dG''}\right)^{-1} \int A_p dg''. \tag{64}$$

(42) で定義された A_s は t^{**} に関する $A(t^{**})$ の定数部分であり、A_p は A の残りの部分を表す。

式 (43) から (49) までの算法は Delaunay 変数を用いることでもっとも簡単に実行される。最終的には式 (50) が以下をハミルトニアンとして得られる。

$$F^{**} = F_0^{**}(L'') + F_1^{**}(L'', G'', H'') + F_2^{**}(L'', G'', H'') + F_3^{**}(L'', G'', H''). \tag{65}$$

積分は以下であり、

$$H(x,y) = H'(\xi,\eta) = H''(p,q) = \text{const}, \tag{66}$$

$$L'(\xi,\eta) = L''(p,q) = \text{const}, \tag{67}$$

$$G''(p,q) = \text{const}, \tag{68}$$

(66) と (67) により最後の積分は式 (51) と等しい。この結果より以下が導かれる。

$$l''(p,q) = \left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial L''}\right) t + l_0, \tag{69}$$

$$g''(p,q) = \left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial G''}\right) t + g_0, \tag{70}$$

$$h''(p,q) = \left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial H''}\right) t + h_0. \tag{71}$$

式 (66) から (71) により、p_j と q_j は時刻と六個の積分定数 L'', G'', H'', l_0, g_0, h_0 の関数となる。式 (57) が関係式を与える。接触変数 x_j, y_j のどんな関数 $f(x,y)$ も、式 (8) を用いれば p_j, q_j を使って以下のように表される。但し S および S^* はそれぞれ $\sum S_k$ および $\sum S_k^*$ を表すものとする：

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(p,q) + \{f, S_1 + S_1^*\} + \{f, S_2 + S_2^*\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{f, S_1 + S_1^*\}, S_1 + S_1^*\} + \frac{1}{2}\{f, \{S_1, S_1^*\}\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{72}$$

現在用いられている変換理論に於いては、正準変換は $\tilde{S}$ を用いた (10) の形で与えられる。$\tilde{S}$ は変数 ξ_i と y_i が混在した関数であり、以下の形をしている。

$$\xi_j = p_j + \varepsilon\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \eta_j}, \quad \eta_j = q_j - \varepsilon\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial p_j}, \tag{73}$$

ここで $\tilde{S}^*$ は変数 p_j, η_j が混在した関数である。ここで、$\tilde{S}_k$, $\tilde{S}_k^*$ が $k \geq 2$ では正準不変でないことを注記しておく。$H(x,y)$ 自身が変数セット x_j, y_j のどれかひとつでない場合には、たとえ $F(x,y)$ が $h(x,y)$ に依存しなくても $\tilde{S}_1(\xi,y)$ が $h(\xi,y)$ に依存することが起こり得る。$L(x,y)$ 自身が変数セット x_j, y_j のどれかひとつでない場合には、F^* から l' が消去されているにも関わらず $\tilde{S}_2^*(p,\eta)$ が $l'(p,\eta)$ に依存するということもあり得る。

F_1^* がどの角変数にも依存しないという事実は g'' の消去をとても容易にしている。月理論に於いては、しかしながら、月と太陽の平均近点離角を消去した後、ハミルトニアンが以下の形になる。

$$F^* = F_0^*(L', K') + F_1^*(L', G', H', g') + F_2^*(L', G', H', g', h') + \cdots$$

ここで K は太陽の平均近点離角に共役な第四番目の運動量である。本稿で述べた変換理論を用いれば、このような場合にも角変数の消去を実行することが出来る。この問題については稿を新ためて述べたい。

特に Lie の定理に関する議論について、東京天文台の青木信仰博士に感謝する。

References

Lie, S., 1888, *Theorie der Transformationgruppen* I, Teubner, Leipzig, § 12.
Lyddane, R. H., 1963, *A. J.,* **68**, 555.