Astronomy and Astrophysics **152**, 121–129 (1985)

磁気恒星風 — Weber-Davis モデルの 2 次元への拡張

桜井 隆 *
マックスプランク物理学・天体物理学研究所
ドイツ連邦共和国 D-8046、ガーヒンク、カール・シュバルツシルト通り 1 番地

1985 年 2 月 18 日受付、4 月 29 日受理

概要
完全導体に凍結した磁場を持つ、軸対称、定常の恒星風モデルを計算する方法を提案する．Weber and Davis (1967) のモデルを拡張して、各磁力線に沿っての解は代数方程式であるベルヌーイの式から求めることができる．この段階で 2 つの臨界点 (critical point) が現れる．磁気流体力学における遅い波 (slow mode) と速い波 (fast mode) の臨界点である．ポロイダル磁場の形は、磁力線を横切る方向の力の釣り合いを満たすように決めなければならない．この結果、磁気ポテンシャルに関する 2 階の偏微分方程式が得られる．この偏微分方程式は Alfvén 面が特異点になっており、そこでの正則条件と、内側境界での条件から解は一意に決まる．単極子的な磁場配位を仮定して例を計算してみた．その結果見られた重要な性質は、らせん状の磁場による、極方向への流れの偏向である．解の遠方での漸近的振る舞いを見ると、流れは放射状にはならず回転軸方向に収束 (コリメート) される．自転軸のごく近傍では、磁気ピンチの力がガスを閉じこめた、密度の高い柱状の構造ができる．
キーワード：恒星風、太陽風、磁気流体力学

1．始めに

スペクトル型 F5 あたりで起こる、自転の速い星から遅い星への遷移を説明するため、恒星風によるブレーキ効果が提案されている (Schatzman, 1962)．すなわち、晩期型の星では表面に対流層があるために、ダイナモ・メカニズムによって磁場ができ、熱いコロナ (これも磁場によって作られる) ができる．磁場を持った星風が及ぼすブレーキのトルクは、磁場により実効的なトルクの腕が長くなるために、磁場のない星風に比べてずっと大きい．

磁場を持つ星風の初めての定量的モデルは Weber and Davis (1967) によって作られた．彼らのモデルは、粘性のない、電気伝導度無限大の流体の、定常で軸対称な流れをポリトロピックなエネルギー式により扱ったものである．幾何学的形状は単極子的 (いわゆるスプリット・モノポール・モデル) で、ポロイダル磁場 (子午面内の磁場) が放射状 (まっすぐ) で、向きだけが赤道面で逆転するというものである．この磁場配置では、赤道面に電流層があって、その上下から押しつける磁気力をガスの圧力が支えていることになる．しかし電流層が無限に薄いと近似できるならば、電流層の存在は数学的には何の作用もない．彼らは赤道面の近傍の解を求め、太陽の自転が減速する時間スケールを $\simeq 7 \times 10^9$ 年と見積もった (ただし角運動量は太陽内部で一様に混ぜられているとする .)

Weber and Davis (1967) のモデルでは、流速が磁気流体力学 (MHD) の 3 つの波動モード [遅い波 (slow mode)、速い波 (fast mode)、Alfvén 波] の速度と一致するところに 3 つの「臨界点」がある．この状況は、音波に対応する臨界点一個のみが現れる、磁場のない星風の場合 (Parker, 1958) と比べて複雑である．Weber and Davis (1967) が使った手法は、赤道から離れた領域についても拡張できる (Yeh, 1976)．しかしいずれにせよ、これらのモデルは磁力線を横切る方向の力の釣り合いを考えていない (ポロイダル磁場は放射状と仮定されている .)　従ってモデルは 1 次元で、各磁束管に沿って解を独立に求めることができる．

*東京大学理学部天文学教室より出張中

一方、磁力線を横切る方向の力の釣り合いを満たすように磁場構造を矛盾なく決めようとすると、ポロイダル断面における二つの位置座標に関する、２階の偏微分方程式が得られる（２次元モデル）．この方程式を解こうという試みはPneuman and Kopp (1971), Mestel (1968), Okamoto (1974, 1975) によってなされた．Pneuman and Kopp (1971) による反復解法では、磁力線に沿っての星風の解と、磁力線を横切る向きの力の釣り合いを交互に解いている．しかしOkamoto (1975) は、この２番目のステップでは方程式に特異点があるのに、Pneuman and Kopp (1971) はそれを正しく扱っていないから、結果も疑わしいと批判している（この点については第４章で詳しく論ずる．）　Mestel (1968, 1967, 1968), Okamoto (1974,1975) は一連の論文で、この問題の解析的定式化を行ったが、Pneuman and Kopp (1971) と比べられるほど詳しい数値的扱いを与えてはいない．加えて、彼らがMHD fast modeの臨界点について注意を払っていないのも疑問に思われる．

この論文では、２次元の星風の解を数値的に求める方法を述べる．この方法はWeber-Davisの１次元モデルの自然な拡張なので、最初に第２章でWeber-Davisモデルの基本的特徴を簡単にまとめている．そこで述べるいくつの点は過去の研究結果 (Weber and Davis 1967; Yeh 1976) のまとめであるが、新しい結果もいくつか含んでいる．特に、磁力線に沿っての星風の解を効率よく求める方法を述べているが、これが第３章において２次元問題を解くときにも利用される．第３章では２次元解の例が示されるが、流れが自転軸方向に収束することが見いだされる．この振る舞いは、遠方での漸近解を検討することによっても理解できる．これらの結果を参考に、第４章で今回の方法とPneuman and Kopp (1971) の方法を比較する．

１次元モデルを２次元に拡張する際に解析を複雑にするひとつの要素は、止水領域（dead zone、磁場が閉じていて流れがない）の存在である．風領域と止水領域の磁束の比は、恒星の自転速度の減衰の度合いを決める重要なパラメータであることがわかっている (Mestel, 1968)．今回の研究では、風領域と止水領域両方を扱う数学的、数値的複雑さを避けるため、単極子配位を採用する．この簡単化の仮定により、Weber-Davisモデルと、対応する２次元モデルとの直接の比較が可能となる．止水領域を含むモデルは将来の論文で扱う予定である．止水領域の存在は、数学的・数値的難しさのほか、二領域の境界で、不連続性のため不安定が起こる可能性があることから、物理的にも状況を複雑にする．

2. Weber and Davis (1967) の一次元モデル

2.1. モデルの定義

このモデルは６個の未知数に対する６個の方程式からなる．未知数は密度 ρ、圧力 p、速度と磁場の動径成分と方位角成分 V_r, V_φ, B_r, B_φ である．球座標 (r, θ, φ) を用い、赤道 $\theta = \pi/2$ の近くの解を求める．モデルを決定する方程式は

$$p = K\rho^\gamma, \tag{1}$$

$$\rho V_r r^2 = f, \tag{2}$$

$$B_r r^2 = \Phi, \tag{3}$$

$$(V_\varphi - \Omega r)B_r = V_r B_\varphi, \tag{4}$$

$$r\left(V_\varphi - \frac{B_r B_\varphi}{4\pi\rho V_r}\right) = \Omega r_A^2, \tag{5}$$

$$\frac{V_r^2}{2} + \frac{1}{2}(V_\varphi - \Omega r)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = E\ . \tag{6}$$

ここで M は星の質量、G は万有引力定数である．6 個の積分定数 $K,\, f,\, \Phi,\, \Omega,\, r_A,\, E$ を導入している．(1) 式は指数 γ (=一定) のポリトロピック関係である．(2) 式と (3) 式は質量と磁束の保存を表す．(4) 式は、角速度 Ω で回転する系に乗って見ると流れと磁場が平行であると言うことを表し、磁場凍結条件 (frozen-in 条件) を言い換えたものである．(5) 式は角運動量の保存を表す．(6) 式は回転系でのベルヌーイの保存則で、遠心力のポテンシャル $-\Omega^2 r^2/2$ が入っている．回転系では磁気力は流線の方向に成分を持たないので、(6) 式には磁場の項は現れない．Weber and Davis (1967) は静止系で記述したベルヌーイの保存則を用いたので、$V_\varphi - \Omega\, r$ の代わりに V_φ が入り、また遠心力ポテンシャル $-\Omega^2 r^2/2$ は現れず代わりにポインティング流速の項が付いていた．彼らのエネルギー定数は (6) 式の定数 E と $\Omega^2\, r_A^2/2$ だけ異なっている．

6 個のパラメータ $K,\, f,\, \Phi,\, \Omega,\, r_A,\, E$ が与えられれば、6 個の方程式が解を決める．通常、Ω は磁力線が根ざしている中心星の自転角速度にとる．コロナの底 $r = r_*$ では、密度 ρ_*、圧力 p_*、磁場強度 B_{r*} が与えられているとする．従って解を決めるには、あと 2 つ条件が必要である．以下、2 つある臨界点がその 2 つの条件を与えることを示す．

(1)–(5) 式を (6) 式に代入すると、密度 ρ のみを含む式が得られる．これが密度分布 $\rho(r)$ を決めるベルヌーイの式で、

$$H(r,\, \rho) = E \tag{7}$$

という形に書ける．ここで、

$$H(r,\, \rho) = \frac{GM}{r_A}\tilde{H}(x,\, y), \tag{8}$$

$$x = r/r_A, \qquad y = \rho/\rho_A, \qquad \rho_A = 4\pi f^2/\Phi^2, \tag{9}$$

$$\tilde{H}(x,\, y) = \frac{\beta}{2x^4 y^2} + \frac{\Theta}{\gamma - 1}y^{\gamma-1} - \frac{1}{x} + \frac{\omega}{2}\left\{\frac{(x - 1/x)^2}{(y-1)^2} - x^2\right\}, \tag{10}$$

であり、また

$$\beta = \frac{\Phi^2}{4\pi GM\rho_A r_A^3} = \left[V_{Ar}^2 \Big/ \frac{GM}{r}\right]_A, \tag{11a}$$

$$\Theta = \frac{\gamma K \rho_A^{\gamma-1} r_A}{GM} = \left[C_S^2 \Big/ \frac{GM}{r}\right]_A, \tag{11b}$$

$$\omega = \frac{\Omega^2 r_A^3}{GM} = \left[\Omega^2 r^2 \Big/ \frac{GM}{r}\right]_A, \tag{11c}$$

と定義されている．ここで $C_S^2 = \gamma p/\rho$ は音速の 2 乗、$V_{Ar}^2 = B_r^2/4\pi\rho$ は動径方向の Alfvén 速度の 2 乗である．下付添え字 A は Alfvén 点を意味する．なぜなら $(\rho/\rho_A)^{-1/2} = V_r/V_{Ar}$ は Alfvén マッハ数で、$\rho = \rho_A$ で 1 になるからである．

このモデルの重要な性質は以下のようにまとめられる．

1. 密度分布 $\rho(r)$ は $(r,\, \rho)$-面内でのベルヌーイ関数 $H(r,\, \rho)$ の等高線である．
2. $\rho = \rho_A$ では、$r \neq r_A$ なら $H(r,\, \rho)$ は発散するが、$r = r_A$ なら $H(r,\, \rho)$ は有限にとどまる．すなわち、$\rho = \rho_A$ は $(r,\, \rho)$-空間の無限に高い壁で、$(r_A,\, \rho_A)$ にのみ穴がある．従って $(r,\, \rho)$-面内で Alfvén

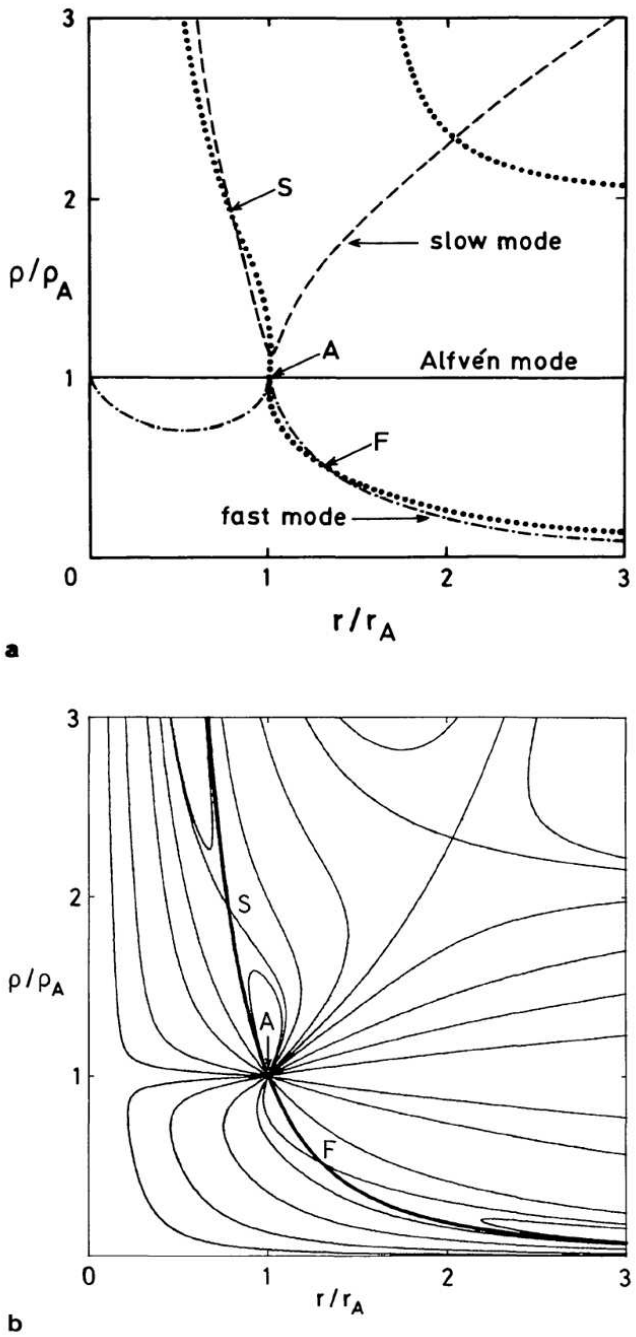

図 1: **a** Weber-Davis モデルの解空間．この $(r,\, \rho)$-平面において上から下に向かって順に、解は slow mode のマッハ曲線 (動径方向の速度が slow mode の速度を超える所、破線)、Alfvén 線 (速度が Alfvén 速度を超える所、実線)、fast mode のマッハ曲線 (速度が fast mode の速度を超える所、一点鎖線) を通過する．点線は、重力の効果を表すラバル・ノズル点の位置を示す．マッハ曲線と重力ノズル曲線の交点が slow mode 臨界点 (S) と fast mode 臨界点 (F) を与える．Alfvén 点は A で示してある．**b** 解曲線群．求める星風解は太い線で示してある．パラメータの値 $(\Theta = 0.5, \omega = 0.25)$ は、3 つの臨界点がきれいに分離するような例として選んだものである．

速度より低速の領域 $(\rho > \rho_A)$ から Alfvén 速度より高速の領域 $(\rho < \rho_A)$ へ遷移するすべての解は自動的に Alfvén 点 $(r_A,\, \rho_A)$ を通る．

3. 等高線 $\rho(r)$ の X 型 (あるいは O 型) 臨界点は関数 $H(r,\, \rho)$ が局所的に平坦なところ、すなわち

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

にできる．

4. $(r,\, \rho)$-面内の曲線 $\partial H/\partial \rho = 0$ を slow mode, fast mode のマッハ曲線と名付ける．なぜなら、

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial H}{\partial \rho} &= -V_r^2 - \frac{\Omega^2\rho}{\rho - 4\pi f^2/\Phi^2}\left(\frac{V_r B_\varphi}{B_r}\right)^2 + K\rho^{\gamma-1} \\ &= -\frac{V_r^4 - V_r^2(C_S^2 + V_{Ar}^2 + V_{A\varphi}^2) + C_S^2 V_{Ar}^2}{V_r^2 - V_{Ar}^2} \\ &= -\frac{(V_r^2 - V_{sr}^2)(V_r^2 - V_{fr}^2)}{V_r^2 - V_{Ar}^2} \end{aligned} \tag{13}$$

$(V_{A\varphi}^2 = B_\varphi^2/4\pi\rho)$ であり、従って $\partial H/\partial\rho$ は V_r が slow mode の伝搬速度 V_{sr} または fast mode の伝搬速度 V_{fr} に一致するところでゼロになる．

5. $(r,\, \rho)$-面内の曲線 $\partial H/\partial r = 0$ を重力ノズル曲線と名付ける．太陽風の遷音速的性質はラバル・ノズルとの類似で考えることができ (Parker, 1963)、ノズルのくびれの位置が $\partial H/\partial r = 0$ で与えられる．

6. slow mode のマッハ曲線と重力ノズル曲線の交点が slow mode の臨界点 $(r_s,\, \rho_s)$、fast mode のマッハ曲線と重力ノズル曲線の交点が fast mode の臨界点 $(r_f,\, \rho_f)$ となる．そこでは、二つの条件が課される．

$$\begin{aligned} H(r_s,\, \rho_s) &= E, \\ H(r_f,\, \rho_f) &= E\ . \end{aligned} \tag{14}$$

このようにして星風解が一意的に決定される．

図 1a と 1b に典型的なマッハ曲線、重力ノズル曲線、解曲線の配置を示す．r の小さいところで遅い速度 $(V_r < V_{sr})$ からスタートし、r の大きいところで高速 $(V_r > V_{fr})$ になる、適切な星風解は太線で示されている．Alfvén 点は多数の解曲線の集中する点になっており、特別の解を選び出す役割はしていない．厳密に言えば、Alfvén 臨界点と呼ぶのは正しくなく、単に Alfvén 点と呼ぶべきである．ただし第 3 章に見るように、磁力線を横切る方向の釣り合いの方程式では、Alfvén 臨界点が方程式の特異点として現れる．ベルヌーイの式は密度に関する式なので、密度変化を伴わない Alfvén 波はベルヌーイの式には現れない、というように理解できる．

2.2. 無次元パラメータによる星風解の分類

解の中には互いにスケールを変えただけのものもあるので、(7) 式を無次元化して考えてみる．

$$\tilde{H}(x,\, y;\ \beta,\, \Theta,\, \omega) = \tilde{E}\ . \tag{15}$$

ここで $\tilde{E}$ は E に代わって導入されたパラメータである $[\tilde{E} = E/(GM/r_A)]$．星風解は

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = 0, \qquad \tilde{H} = \tilde{E}, \qquad [(x,\, y) \text{ が } (x_s,\, y_s) \text{ と } (x_f,\, y_f) \text{ で}] \tag{16}$$

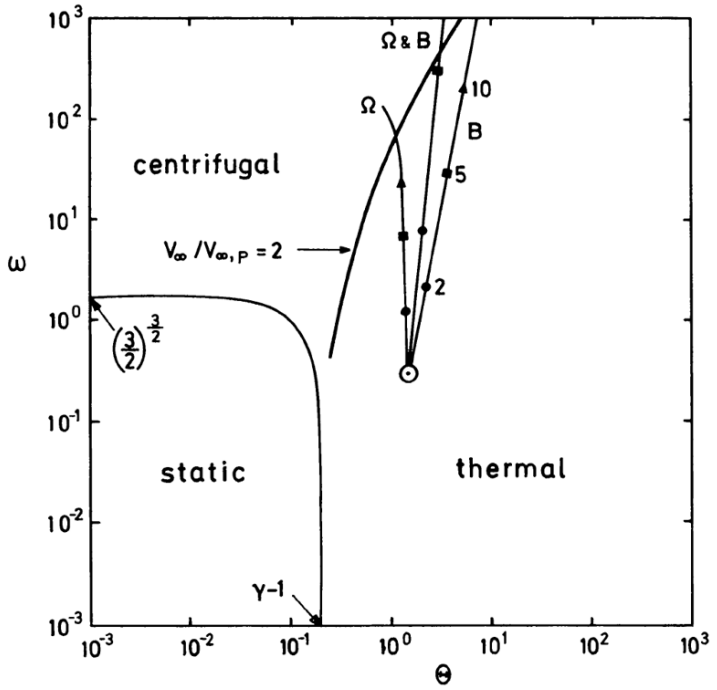

図 2: Weber-Davis モデルのパラメータ空間．横軸は熱的力を表す Θ、縦軸は遠心力の効果を表す ω を取ってある．図の左下の領域では、熱的力も遠心力も不十分なため星風解が存在しない．右下は熱的星風の領域で、遠心力は重要でない．左上は遠心力風の領域で、熱的圧力は重要でない．この領域に入るにつれて、星風の終端速度 V_∞ は、回転が無視できる場合の値 $(V_{\infty,P})$ よりも増加する．曲線 $V_\infty/V_{\infty,P}=2$ の左側の領域を、速い磁気回転体 FMR (Belcher and MacGregor, 1976) と呼び、それ以外の領域すなわち遅い磁気回転体 (SMR) と区別する．Weber and Davis (1967) の太陽風モデルは $\odot$ で示されている．自転角速度、磁場強度、またはその両方を 2 倍 ($\circ$ で示す)、5 倍 ($\square$)、10 倍 ($\triangle$) と増やして行くと、モデルは実線に沿って FMR 領域に進んで行く．

から求められる．ここで下付添え字 s と f は slow mode, fast mode の臨界点を表す．8 個の未知数 $(x_s,\, x_f,\, y_s,\, y_f,\, \beta,\, \Theta,\, \omega,\, \tilde{E})$ のうち、6 個は方程式から決めることができる．残る 2 つは自由に指定できるので、ここでは Θ と ω を指定することにする．すると未知数 $x_s,\, x_f,\, y_s,\, y_f,\, \tilde{E},\, \beta$ は Θ と ω の関数となる．故に、あらゆる星風解は 2 つの無次元パラメータ Θ と ω (各々、星風を加速する熱的圧力と遠心力の強さの指標である) で特徴づけられる．磁場の強さの指標である β [(11a) 式] を独立のパラメータの一つに取ってもよいのだが、ここでそうしなかったのは、磁気力だけでは星風を加速できないからである．磁気力は磁力線に沿う成分を持たないので、回転 (遠心力) と組になって初めて加速効果を発揮する．

次元を持つパラメータ $\Omega,\, \rho_*,\, p_*,\, B_{r*}$ と、無次元パラメータ Θ, ω の関係は以下のように見いだされる．まず定数 E をコロナ底部で (6) 式により見積もる．このとき、始めの二項は無視できるとする．(8) 式と (11c) 式を使うと、

$$\tilde{E}/\omega^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_*}{\rho_*} - \frac{GM}{r_*} - \frac{\Omega^2 r_*^2}{2}\right)\Big/ (GM\,\Omega)^{\frac{2}{3}} \tag{17a}$$

が得られる．次に (11a–c) 式から r_A と ρ_A を消去し、$\Phi = r_*^2 B_{r*}$ を使って

$$\beta^{\gamma-1}\Theta/\omega^{4/3-\gamma} = \frac{\gamma p_*}{\rho_*}\left(\frac{B_{r*}^2}{4\pi\rho_*}\right)^{\gamma-1} \Bigg/ \left(\frac{GM}{r_*}\right)^{2\gamma-4/3} (\Omega r_*)^{2(4/3-\gamma)} \tag{17b}$$

を得る．2 つの式 (17a,b) が Θ と ω の値を次元のあるパラメータ Ω, ρ_*, p_*, B_{r*} の関数として決める．なぜなら β と $\tilde{E}$ も Θ と ω の既知の関数だからである．

ここで強調しておくべき重要な点は、星風解を求めるために、いわゆる“狙い撃ち法 (shooting method)”は必要ないということである．連立代数方程式 (16) は Newton-Raphson 法により簡単、高速に解くことができ、そうして x_s, x_f, y_s, y_f, $\tilde{E}$, β の値を決めてから、(x, y)-面内での等高線を引くことで無次元化した密度分布 $y(x)$ が得られる．この方法により星風解を高速に求めることができるので、第 3 章の 2 次元モデルの計算でもこれを利用している．

広い範囲の Θ と ω の値に対して解を求めた結果を図 2 に示した．($\gamma = 1.2$ と仮定した．)　(Θ, ω)-面の左下には星風解はない．この禁止領域は近似的に $\Theta < \gamma - 1$ と $\omega < (3/2)^{3/2}$ で与えられる．この領域では圧力も遠心力も弱いために星風ができず、静水圧平衡の大気ができると考えられる．右下の領域は熱的星風の領域であり、左上の領域は遠心力風の領域である．右上の領域では熱圧力と遠心力の両方が星風の加速に寄与している．星風の終端速度 V_∞ は、熱的星風の領域では、星の回転のない場合の終端速度 $(V_{\infty,P})$ と変わりがない．$V_\infty/V_{\infty,P} = 2$ となるような解位置も図 2 に示してある．この曲線の左側では、星風の終端速度 V_∞ は回転のない場合の値 (Parker の値) $V_{\infty,P}$ に比べて明らかに大きくなっている．Belcher and MacGregor (1976) にならって、この領域の解を“速い磁気回転体 (fast magnetic rotator, FMR)”、逆に $V_\infty \simeq V_{\infty,P}$ の場合を遅い磁気回転体 (slow magnetic rotator, SMR) と呼ぶ．

Weber and Davis (1967) の太陽風解は $\Theta = 1.5$, $\omega = 0.3$ に相当し、図 2 の中で $\odot$ で示されている．太陽風は熱的風領域にある．もし太陽の自転速度、磁場強度、またはその両方が増加した場合、解は図 2 に示された曲線に沿って FMR 領域へ進化して行く．原理的には、必要な境界条件 $(\Omega, \rho_*, p_*, B_{r*})$ が与えられれば、主系列星全体をこの図にプロットすることもできる．しかし ρ_* や p_* の値、特に B_{r*} の値はよくわからないので、ここではそれは行っていない．

3. 2 次元軸対称星風モデル

3.1. 定式化

この章では、磁場の基本構造 (スプリット・モノポール) は保ちつつ、1 次元 Weber-Davis モデルを、磁力線を横切る向きの力の釣り合いを満たす 2 次元モデルに拡張する．球座標 (r, θ, φ) で記述するが、自転軸からの距離 $\varpi = r\sin\theta$ も必要に応じて用いる．(1)–(6) 式は下記のように一般化される (Mestel, 1968; Okamoto, 1974)．磁束の保存は

$$\boldsymbol{B} = \nabla a \times \nabla\varphi + \varpi B_\varphi \nabla\varphi \tag{18}$$

と書くことにより保証される．ここで a (磁場の流れ関数) と、磁場のトロイダル成分 B_φ は (r, θ) の関数である．第一項がポロイダル磁場 $\boldsymbol{B}_p$ を与え、ポロイダル磁場の磁力線は a=一定という曲線群で与えられる (通常のベクトルポテンシャルの方位角成分は a/ϖ である．)　速度は

$$\boldsymbol{V} = \frac{\alpha(a)}{\rho}\boldsymbol{B} + \varpi^2\Omega(a)\nabla\varphi \tag{19}$$

と書かれる．ここで第一項は、角速度 Ω で回転する系から見た、磁場に平行な速度である．質量の保存 $(\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{V} = 0)$ と誘導方程式 $[\nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}) = 0]$ は、2 つのスカラー変数 α と Ω が a の関数であれば満たされる．Ω が a に依存してもいいということは、考えている中心星が差動自転していてもいいことを表している．(1), (5), (6) 式を一般化することはたやすく、

$$p = K(a)\rho^{\gamma}, \tag{20}$$

$$\varpi\left(V_{\varphi} - \frac{B_{\varphi}}{4\pi\alpha}\right) = \Omega\varpi_A^2(a), \tag{21}$$

$$\frac{V_p^2}{2} + \frac{1}{2}(V_{\varphi} - \Omega\varpi)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} - \frac{\Omega^2\varpi^2}{2} = E(a), \tag{22}$$

となる．ここで $\boldsymbol{V}_p = \alpha\boldsymbol{B}_p/\rho$ は速度のポロイダル成分、$\varpi_A(a)$ は Alfvén 半径である．第 2 章で導入した 6 個の積分定数 K, f, Φ, Ω, r_A, E の代わりに、ここでは 5 個の「磁力線に沿った積分定数」$K(a)$, $\alpha(a)$, $\Omega(a)$, $\varpi_A(a)$, $E(a)$ と流れ関数 a を導入している．

流れ関数 a が与えられれば、(18)–(22) 式は各々の磁力線 a=一定に沿った星風解を与える．自転角速度 Ω を与え、コロナ底部での密度と圧力を境界条件として指定すると、slow, fast mode 臨界点での条件を用いて、定数 $K(a)$, $\alpha(a)$, $\varpi_A(a)$, $E(a)$ の値が一意的に定まる．その結果、密度分布が決まるのも第 2 章の過程と同じである．このためのベルヌーイ方程式は

$$\frac{\alpha^2}{2\rho^2}\left(\frac{\nabla a}{\varpi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4\pi\alpha^2\Omega(\varpi_A^2 - \varpi^2)}{\varpi(4\pi\alpha^2 - \rho)}\right]^2 + \frac{\gamma K}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} - \frac{\Omega^2\varpi^2}{2} = E \tag{23}$$

となる．

従って残るステップは、磁力線を横切る方向の力の釣り合いにより a を決定することである．いくらかの式変形の後、運動方程式を以下のように書き換えることができる (Okamoto, 1975; Heinemann and Olbert, 1978)．

$$\begin{aligned} 0 =& -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} + \rho\nabla\frac{GM}{r} - \rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} \\ =& \nabla a\left\{\mathrm{div}\left[\left(\frac{\alpha^2}{\rho} - \frac{1}{4\pi}\right)\frac{\nabla a}{\varpi^2}\right] - \rho\left(E' - \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\frac{K'}{K} + \varpi^2\Omega\Omega'\right)\right. \\ &\left. - \frac{B^2}{\rho}\alpha\alpha' - \varpi B_{\varphi}\left[(\alpha\Omega)' - \frac{1}{\varpi^2}(\alpha\Omega\varpi_A^2)'\right]\right\}, \end{aligned} \tag{24}$$

ここで $(')$ は d/da を意味する．φ-方向、磁力線方向の力の釣り合いはすでに (21) 式と (22) 式で考慮されているので、(24) 式は磁力線を横切る方向、すなわち ∇a の方向の成分しか持たない．従って、解くべき方程式は

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left[\left(\frac{\alpha^2}{\rho} - \frac{1}{4\pi}\right)\frac{\nabla a}{\varpi^2}\right] =& \rho\left(E' - \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\frac{K'}{K} + \varpi^2\Omega\Omega'\right) + \frac{B_p^2}{\rho}\alpha\alpha' \\ &+ D\left[\frac{D}{4\pi}\Omega^2\varpi^2\alpha\alpha' - \alpha^2\Omega^2\varpi_A^{2\prime} - \alpha^2\Omega\Omega'(\varpi_A^2 - \varpi^2)\right], \\ D =& \frac{4\pi\rho(\varpi_A^2 - \varpi^2)}{\varpi^2(4\pi\alpha^2 - \rho)}, \end{aligned} \tag{25}$$

となる．ここで ρ は (23) 式により、陽にではないが r, θ, a, ∇a の関数となっている．

(25) 式は a に関する、2 階の準線形偏微分方程式である．a の 2 階微分は (25) 式の左辺にしか含まれない．この方程式の基本的性質は、その主要項 (最高次微分の項) を取り出すとはっきりする．すなわち、

$$\mathrm{div}\left\{\left(\frac{\alpha^2}{\rho}-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\nabla a}{\varpi^2}\right\} = -\frac{\alpha^2}{\rho^2}\nabla\rho\cdot\frac{\nabla a}{\varpi^2}+\frac{1}{\varpi^2}\left(\frac{\alpha^2}{\rho}-\frac{1}{4\pi}\right)\nabla^2 a + (\text{lower-order terms})\,. \tag{26}$$

(23) 式を微分することにより、

$$\frac{\alpha^2}{2\varpi^2}\nabla(\nabla a)^2 - \frac{V_p^4-V_p^2(C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2)+C_S^2V_{Ap}^2}{V_p^2-V_{Ap}^2}\nabla\rho + (\text{lower-order terms}) = 0, \tag{27}$$

となる ($V_{Ap}^2 = B_p^2/4\pi\rho$, $V_{A\varphi}^2 = B_\varphi^2/4\pi\rho$) ので、(25) 式は結局次のように書ける．

$$\frac{1}{4\pi\varpi^2}\left(\frac{V_p^2}{V_{Ap}^2}-1\right)\left[\nabla^2 a-\frac{\nabla\nabla a:\nabla a\nabla a}{(\nabla a)^2}\frac{V_p^4}{V_p^4-V_p^2(C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2)+C_S^2V_{Ap}^2}\right] = g(r,\,\theta,\,a\,,\,\nabla a). \tag{28}$$

ここで dyadic の表現で書かれているのは

$$\nabla\nabla a:\nabla a\nabla a = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2 a}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial a}{\partial x_j} \tag{29}$$

の意味である．また関数 g の具体的な形は (25) 式から容易に得られる．この方程式の重要な性質は、2 階微分の係数が $\rho = 4\pi\alpha^2$ つまり $V_p = V_{Ap}$ の場合にはゼロになることである．つまりこの方程式は Alfvén 点が特異点となっている．そこで、Alfvén 特異点での正則な解を以下のように選び出す．まず (28) 式から、Alfvén 点で $g = 0$ でなければならない．この条件があれば 2 階微分はそこで有限となるが、$0/0$ のような不定の表式になる．2 階微分を決定するには、(28) 式にロピタルの定理を適用する．すなわち、Alfvën 点 A で (28) 式を r について微分し、以下の式を得る．

$$\left[\nabla^2 a-\frac{\nabla\nabla a:\nabla a\nabla a}{(\nabla a)^2}\frac{V_p^4}{V_p^4-V_p^2(C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2)+C_S^2V_{Ap}^2}\right]_A = 4\pi\varpi_A^2\left[\frac{\partial g}{\partial r}\right]_A\Bigg/\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_p^2}{V_{Ap}^2}-1\right)\right]_A\,. \tag{30}$$

従って、Alfvén 点では 2 つの条件が課されることになり、ロピタルの定理に基づく (30) 式はある種の境界条件と見なされる．つまり a には 2 つの境界条件が課されたことになる．ひとつはコロナの底部で a の値が指定されることによるもので、もうひとつは Alfvén 点でのロピタルの定理による条件である．Alfvén 点での解の正則条件は、Alfvén 波の定在衝撃波を排除することと等価である．正則条件を課さないと、磁力線は Alfvén 点で折れ曲がることがありうる．これら 2 つの条件があれば a を決めることができ、特筆すべきは無限遠での境界条件などは必要ないことである．

(28) 式のもうひとつの重要な性質は、混合型の方程式であるということである．つまり考えている空間の一部では楕円型、ほかでは双曲型となる．この性質を見るため、(28) 式の主要項で $\nabla^2 a$ と $\nabla\nabla a$ を $-k^2 a$

と $-\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,a$ で置きかえる．特性波面を表す波数ベクトル $\boldsymbol{k}$（十分大きいとする）を求めると

$$\begin{aligned}\frac{k_{||}^2}{k_\perp^2} &= \frac{V_p^2(C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2)-C_S^2V_{Ap}^2}{V_p^4-V_p^2(C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2)+C_S^2V_{Ap}^2}\\ &= \frac{(V_p^2-V_{cp}^2)(C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2)}{(V_p^2-V_{sp}^2)(V_p^2-V_{fp}^2)}\end{aligned} \tag{31}$$

となる．ここで $k_{||}$ と $k_\perp$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ のうちポロイダル磁場 $\boldsymbol{B}_p$ に平行、直角方向の成分を表す．また

$$V_{cp}^2 = \frac{C_S^2V_{Ap}^2}{C_S^2+V_{Ap}^2+V_{A\varphi}^2} \tag{32}$$

である．(31) 式の右辺が正（負）なら、$\boldsymbol{k}$ は実（虚）となり、方程式は双曲型（楕円型）となる．すなわち、方程式は $V_p < V_{cp}$ か $V_{sp} < V_p < V_{fp}$ なら楕円型、$V_{cp} < V_p < V_{sp}$ か $V_{fp} < V_p$ なら双曲型である (Heinemann and Olbert, 1978)．[V_{sp} と V_{fp} はslow, fast mode波の伝搬速度のポロイダル成分で、(13) 式と同じようにして定義される.] a に関する方程式が無限遠での境界条件を必要としないのもこの性質から理解できる．なぜなら星から十分遠方に行くと流れはfast mode の伝搬速度より速く、どんな磁気流体波動も上流へさかのぼることができないので、解はfast mode臨界点より内側の条件ですべて決定されることになるからである．

3.2. 計算方法

(25) 式を $r_{\rm in} \le r \le r_{\rm out}$ と $0 \le \theta \le \pi/2$ で定義される領域で解く（赤道面に対して上下対称であると仮定する.）　内側の境界 $r_{\rm in}$ は、$0 \le \theta \le \pi/2$ の磁力線のslow mode臨界半径 r_s の最小値より十分小さく取る．$r = r_{\rm in}$ での境界条件として、B_r=一定（モノポール的磁場）を課す．外側の境界 $r_{\rm out}$ は、r_f（fast modeの臨界半径）の最大値より少し大きいところに取る．前に述べたように、a に関する外側境界条件はAlfvén 半径で与えられるので、(25) 式は密度分布が与えられれば、$r_{\rm in} \le r \le r_A$ という領域でも解くことができるように思われる．しかし実際は、密度分布はfast mode臨界点の位置にも依存するので、領域 $r_{\rm in} \le r \le r_{\rm out}$ を同時に解かなければならない．一方、半径 $r_{\rm out}$ より外の領域は (25) 式を外向きに積分することによって得られる．なぜなら (25) 式はこの領域では双曲型であり、内部領域 $r_{\rm in} \le r \le r_{\rm out}$ で得られた解により a の値とその空間微分が $r = r_{\rm out}$ で与えられるからである．

磁気単極子の磁場 ($B_r = \Phi/r^2$) は $a = 2\Phi\sin^2(\theta/2)$ のように表される．従って a の代わりに、変数 θ_0 を $a(\theta_0) = 2\Phi\sin^2(\theta_0/2)$ により導入するのが便利である．そして計算が便利なように、独立変数を $(r,\,\theta)$ から $(r,\,\theta_0)$ に変更し、解として $\theta = \theta(r,\,\theta_0)$ を求めることとする．(25) 式の左辺は結局、

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\left[\left(\frac{\alpha^2}{\rho}-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\nabla a}{\varpi^2}\right]\\ &= -\frac{\Phi}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial\theta}{\partial r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\right]\left[\left(\frac{\alpha^2}{\rho}-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\sin\theta_0}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\right)^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right]\\ &+ \frac{\Phi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\left[\left(\frac{\alpha^2}{\rho}-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\sin\theta_0}{r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\right)^{-1}\frac{1}{r^2\sin\theta}\right]\end{aligned} \tag{33}$$

となる．また (25) 式の右辺で、$d/da = (\Phi\sin\theta_0)^{-1}\,d/d\theta_0$ であり、B_p^2 は

$$B_p^2 = \left(\frac{\nabla a}{\varpi}\right)^2 = \left(\frac{\Phi \sin\theta_0}{\sin\theta}\right)^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\right)^{-2} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2\right] \tag{34}$$

で与えられる．(25) 式は $(r,\, \theta_0)$-空間を格子に切ることにより数値的に解かれる．磁力線は変数 θ_0 により番号づけられているから、今回の方法は磁力線を横切る方向についてはラグランジュ的 (格子が磁力線と共に動く) であり、r-方向にはオイラー的である．しかし r-方向の格子も固定されているわけではなく、各磁力線について、一つの格子点が常に Alfvén 点に来るように調整している．このようにしないと、Alfvén 点における方程式の特異性を正しく扱うことができない．以下に示す例では、θ_0-方向に格子点を 10 (10° 間隔)、r-方向には 15–20 の格子点を、$\log r$ についてほぼ等間隔となるように配置している．$r = r_{\rm in}$ における境界条件は $\theta = \theta_0$ と簡単に表せ、また当然 $\theta_0 = 0$ で $\theta = 0$、$\theta_0 = \pi/2$ で $\theta = \pi/2$ である．

第 2 章で議論した 1 次元モデルと同様、$\gamma = 1.2$ ととる．$\Omega(\theta_0)$ は、(剛体回転している) 星の自転角速度に等しい定数と仮定する．また、$K(\theta_0)$ と $E(\theta_0)$ は θ_0 によらない定数と仮定する．この仮定は、星の自転がゆっくりで、星の表面近くの大気がほぼ球対称な静水圧平衡にあるならば成り立つと考えられる．自転の速い星では、この仮定は成り立たないかもしれない．パラメータの $\alpha(a)$ と $\varpi_A(a)$ は、密度関数が slow, fast mode 臨界点を通るという条件により決定される (臨界点の位置も反復解法の一回ごとに更新される .)

(25) 式を解く前に、まず同じパラメータの値に対して、Weber-Davis モデルを解いておく．Alfvén 半径 r_A と Alfvén 点での密度 ρ_A を求め、これを $r_{A,WD}$ と $\rho_{A,WD}$ と書くことにする (Weber-Davis モデルについての値であることがはっきりわかるように、添え字 $_{WD}$ をつける)．長さと密度の単位を $r_{A,WD}$ と $\rho_{A,WD}$ にとると、(25) 式を無次元化した形で解くことができる．

第 2 章での議論と同じように、モデルは 2 つの無次元パラメータ Θ と ω、

$$\Theta \;=\; \frac{\gamma K\, \rho_{A,WD}^{\gamma-1}\, r_{A,WD}}{GM}, \tag{35a}$$

$$\omega \;=\; \frac{\Omega^2 r_{A,WD}^3}{GM}, \tag{35b}$$

によって規定される．解は、パラメータ空間 (図 2) の中で、r_s, r_A, r_f が同程度の大きさであるときが求めやすいので、Θ と ω がほぼ 1 である場合を考える．(25) 式を離散化し、Newton-Raphson 法による反復解法で解く．解の初期値としては、ω が小さいときは放射状の磁場をとる．一つ解が求まれば、それを初期値に使って、少し大きい ω の値に対する次の解を求める．

3.3. 計算結果

図 3–6 は、$\Theta = 0.5, \omega = 1.75$ に対して求めた解である．まず、領域 $r \le r_{\rm out}$ における解の振る舞いについて論ずる (以下に示す例では $r_{\rm out} = 4\, r_{A,WD}$ である)．図 3a は、反復解法により解を求める前 (磁場は放射状) の、子午面内の 3 つの臨界点 (slow, Alfvén, fast) の位置を示したものである．図 3b は、反復解法により求められた解である．ポロイダル磁力線は、始めの放射状磁場と比べてはっきりと極方向に曲がっている．これは主に、トロイダル磁場の増幅による効果である (図 4 を見よ)．磁力線は赤道面付近ではきつく巻くのに対して、自転軸上では $B_\varphi = 0$ であるから、B_φ^2 は赤道面で大きく極では小さい．従って、磁気圧の勾配 $-\nabla B_\varphi^2/8\pi$ は赤道面から離れる向きに作用する．この効果は太陽風の場合に Suess (1972), Winge and Coleman (1974), Nerney and Suess (1975) によって初めて指摘された．さらに、B_φ による磁気張力も極に向いているので、この効果を強める．磁力線の極方向への偏向のため、自転軸付近の流路の面積は、放射状磁場の場合 ($\sim r^2$) に比べて小さくなる．従って、星風を加速する効率が下がり、超音速流への遷移が遠くの距離に持ち越され、従って臨界面が外側に押し出される．これとは逆に赤道付近では、広がった流路が星風を効率よく加速し、その結果臨界面が内側に入ってくる．単位磁束あたりの質量流速 [すなわち (19) 式の α] も赤道近くで大きくなる．星風の終端速度 V_∞ は、ベルヌーイの式 (23) から $V_\infty^2/2 = E + \Omega^2 \varpi_A^2/2$ となる [(37) 式を見よ]．星風モデルが SMR 領域にあるときは、上に述べたような流路の変化により、流速

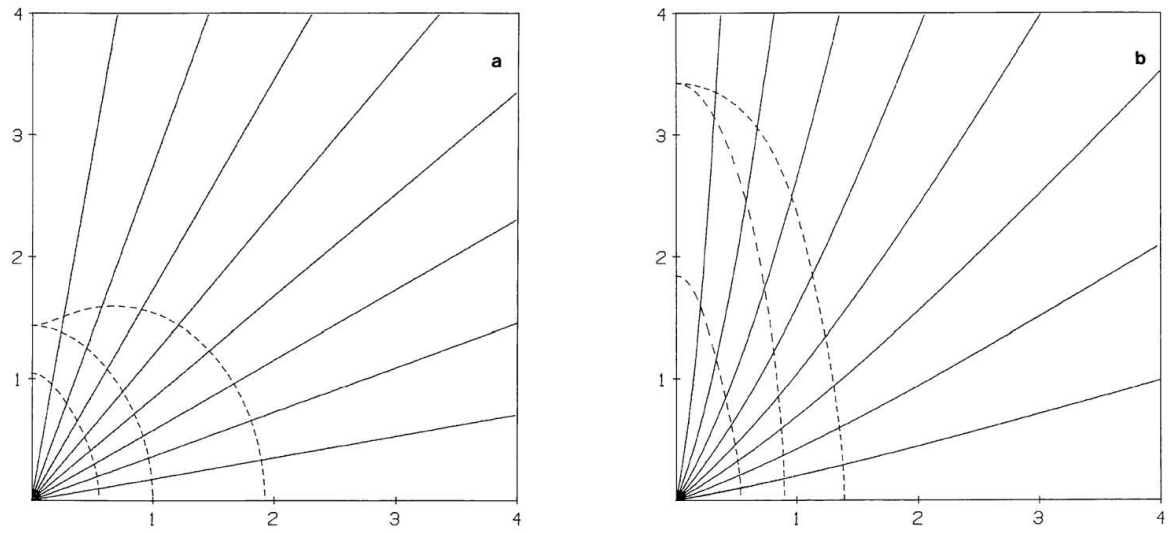

図 3: **a** 磁場が放射状の場合の、子午面内における slow, Alfvén, fast mode の臨界面 (内側から順に) . 長さの単位は $r_{A,WD}$ である . **b** 磁場形状も正しく解いた結果 . **a** と比べると、磁力線は極に向かって曲がり、臨界面は極では外側へずれ、赤道では内側にずれる .

は同一の終端値 $V_\infty \simeq \sqrt{2E}$ に赤道近くでは急速に、極近くではゆっくりと近づく . モデルが FMR 領域にあるときは、当然ながら終端速度は赤道付近で増加している .

図 4 は赤道面内の磁力線と流線を示したものである . 3 つの円は内側から順に slow, Alfvén, fast mode 臨界面である . 磁力線は、トロイダル磁場の増幅を反映して、らせん状を示している . 流線の様子から、星から遠く離れれば流れは弾道的であることがわかる . 星から遠くの流線のまっすぐな部分を星に向かって延ばすと、星の中心を通らないことから、流れが角運動量を持っていることもわかる . 図 5 は赤道面外の磁力線の形を見るために、子午面に投影したものである . 磁力線の巻きつきが自転軸付近でもだんだんきつくなって行く様子がわかる .

3.4. 遠方での解の漸近的振る舞い

次に、星から十分遠方での解の振る舞いについて考える . (25) 式を双曲型領域 $r > r_{\rm out}$ で外に向かって積分すると、磁力線の自転軸方向への偏向はどんどん穏やかになるが、しかし止まることはない . 図 6 は解の構造を、通常の極座標 (r, θ) でなく、広い r の範囲が見えるように $(\log r, \theta)$ について示したものである . (自転軸付近では θ は $\theta \sim 1/r$ のように減少するので、ϖ はほぼ一定である . 解が見かけ上、軸に向かって収束して行くのは、r について対数的な目盛りを使ったためである .)　解が放射状 ($\theta \to$ 定数) に近づく様相は全く見られない .

解のこの振る舞いは、次のような半解析的扱いで調べることができる . 数値解によれば、r の大きなところでは、解の振る舞いは θ_0 の値により 3 つに分けられる . 内側 (極付近) の領域 $0 \le \theta_0 \le \theta_{0a}$ では、B_φ による張力と圧力が両方とも極方向に向き、これがガスの圧力で支えられている . 中間領域 $\theta_0 a \le \theta_0 \le \theta_{0b}$ では、B_φ による張力と圧力が釣り合い、ガスの圧力の効果は無視できる . 外側 (赤道付近) の領域 $\theta_{0b} \le \theta_0 \le \pi/2$ では、B_φ による極向きの力が、流れの慣性 $\rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ と釣り合っている (言い換えれば、流れが磁気力で曲げられている .)　内側と中間領域では $\partial\theta/\partial r$ は無視でき、解くべき方程式は $\partial/\partial\theta_0$ のみを含む常微分方程式に帰着する . 外側の領域では、$\theta \simeq \pi/2 + f(r)(\theta_0 - \pi/2)$ のような変数分離の解を仮定できる . これら 3 つの領域の近似解を θ_{0a} と θ_{0b} でつなげれば、θ_0 の全領域にわたる漸近解が得られる .

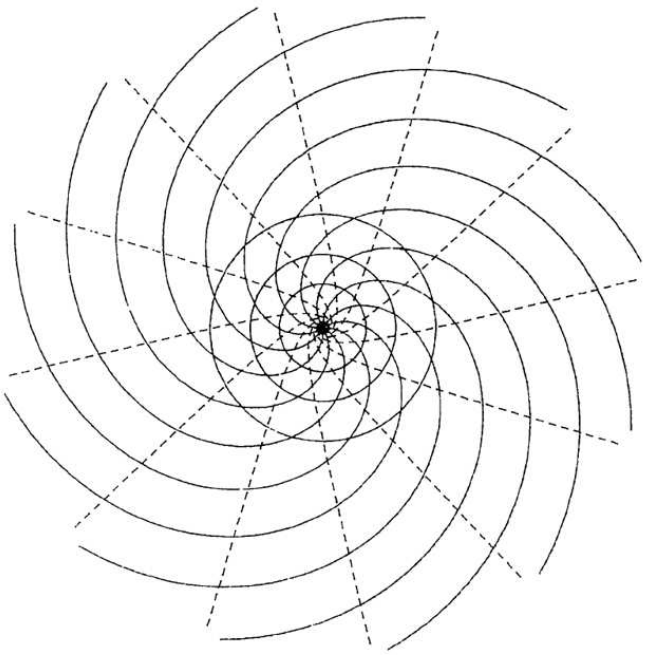

図 4: 赤道面内の $0 \leq r \leq 4\, r_{A,WD}$ の領域での磁力線 (実線) と流線 (破線) . 3 つの円は、図 3b に示された 3 つの臨界面の位置を表している .

このようなつぎはぎの手続きにより以下のような結果が得られる . 角 θ_{0a} は $\theta_{0a} \sim (\log r)^{-1/2} \ll 1$ のように変化する . 極域 $0 \leq \theta_0 \leq \theta_{0a}$ では、密度は r と共に非常にゆっくりと、$\rho \sim (\log r)^{-1/(\gamma-1)}$ のように減少する . この高密度のガスの圧力が B_φ によるピンチ効果の力と釣り合う . この内部領域の半径は対数的にしか増加しないので、流れはほとんど円柱状である . ポロイダル磁場の圧力はガスの圧力に比べて無視できる . なぜなら、$p \sim (\log r)^{-\gamma/(\gamma-1)}$ であるのに対して $B_p^2 \sim (\log r)^{-2/(\gamma-1)}$ だからである . この高密度の極域柱状流は典型的なピンチプラズマの配置をしており、ソーセージ不安定、キンク不安定が起こる可能性がある . しかしこの柱状流の芯の部分では $B_p^2 > B_\varphi^2$ であるので、B_p の安定化作用が重要であるかもしれない . 角 θ_{0b} は $\pi/2$ に近く、$\pi/2 - \theta_{0b} \sim (\log r)^{-1} \ll 1$ のように変化する . 中間領域と外側の領域 $\theta_{0a} \leq \theta_0 \leq \pi/2$ では、θ は $\theta \sim r^{-\nu}$ のように変化する . ここで、べき指数 $\nu(\theta_0)$ は、自転軸近傍ではほぼ 1 で、赤道近くではほぼ 0 である . その漸近的振る舞いが $\theta \sim r^{-\nu}$ であるということは、r の非常に大きな値に対して、$\theta_0 = \pi/2$ (赤道) のごく近くを除いて、θ はほぼゼロだということである . つまり、ほとんどすべての磁力線が自転軸の方向に曲げられる . 密度は $\rho \sim r^{-2+2\nu}/\log r$ のように距離と共に減少する . 従って赤道面での密度は自転軸上の密度よりずっと小さくなる .

上に説明した解の漸近的振る舞いは、B_φ の増幅による当然の結果である . 従って、どんなに Ω が小さくても、星風は最終的には自転軸方向に束ねられる . $\Omega = 0$ $(B_\varphi = 0)$ の星風モデルでは、流れは星から遠ざかるにつれて放射状になるが、これは我々の $\Omega \neq 0$ のモデルとは画然と異なる . さらに、ベルヌーイの式 (22) から、星風の終端速度 V_∞ は

$$\frac{V_\infty^2}{2} = E + \Omega^2 \varpi_A^2 \left[1 - \frac{(\rho \varpi^2)_\infty}{(\rho \varpi^2)_A} \right] \tag{36}$$

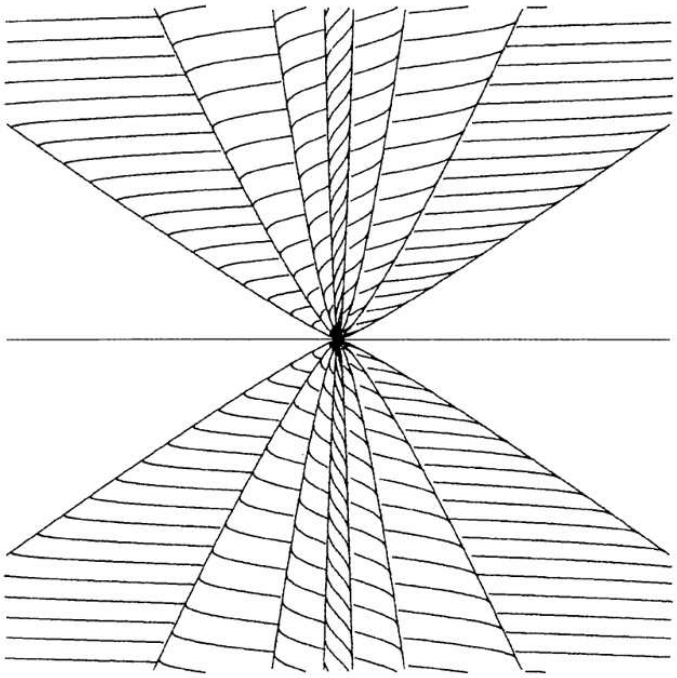

図 5: 子午面内の $0 \leq r \leq 50\, r_{A,WD}$ の範囲について、らせん状の磁力線を描いたもの．横線が赤道面を示す．磁力線は、入れ子になった円錐状の磁気曲面 ($\theta_0 = 10°, 30°, 50°, 70°$) の上に描かれている．ただし、描かれているのは、図の左半分で我々から遠ざかり、極軸の裏側を回り、図の右半分で我々に向かってくる磁力線のみである．紙面より手前側を走る磁力線は、重なり合いを避けるため描かれていない．他の磁気曲面の背後にある磁気曲面も消してある．

で与えられることがわかる．もし解が無限遠で放射状になるなら、$(\rho\varpi^2)_\infty$ はある有限の値に収束する (この事情は 1 次元の Weber-Davis モデルでも同じである .)　我々のモデルでは、漸近解により $\rho\varpi^2 \sim 1/\log r \to 0$ であることがわかり、従って

$$\frac{V_\infty^2}{2} = E + \Omega^2 \varpi_A^2 \tag{37}$$

となる．この $R = (\rho\varpi^2)_\infty/(\rho\varpi^2)_A$ という比は、無限遠でのエネルギー密度の比、$\frac{1}{2}\rho V^2 : B^2/8\pi = E + \Omega^2\varpi_A^2(1-R) : \Omega^2\varpi_A^2 R$ にも現れる．星の角運動量の減少は、星風が運び出す角運動量と、磁気トルクによるブレーキの両方の和である．この 2 つの効果の比は $1-R : R$ である．Weber and Davis (1967) の太陽風モデルでは $R \simeq 3/4$ であるが、我々の解析では、星の自転を遅くするのに果たす磁気トルクの役割は、遠方に行くにつれ減少する．($r \to \infty$ に対して $R \to 0$ である .)

4. まとめと考察

この論文では、1 次元の Weber-Davis モデルの自然な拡張として、凍結磁場を持つ、定常軸対称の星風解を求める方法を示した．磁力線に沿った星風解は、密度に対する代数方程式 (ベルヌーイの式) によって与えられる．このとき、slow mode と fast mode の 2 つの臨界点が現れる．磁力線の形は、磁場を横切る方向の力の釣り合いが満たされるように決められなければならない．この条件は、磁場の流れ関数 a に対す

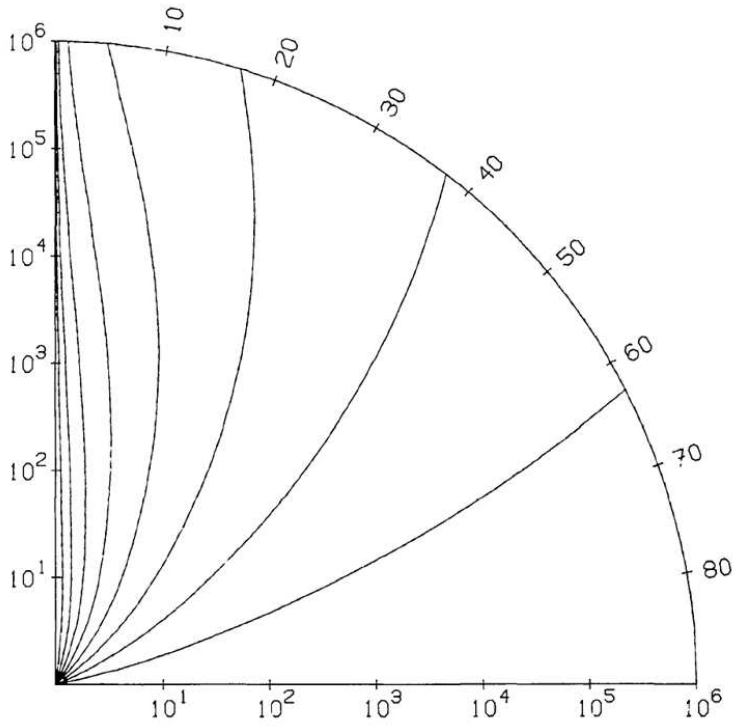

図 6: 遠方でのポロイダル磁場を示すため、r について対数目盛で描いた磁力線．流れは常に自転軸に向かって曲げられて行く．$r = 10^6 r_{A,WD}$ の距離では、$\theta_0 \leq 50°$ にあった磁力線が $\theta \leq 5°$ の円錐の中に束ねられている．

る 2 階の偏微分方程式に帰着する．これを解くには 2 つの境界条件が必要である．ひとつは内部境界 (コロナの底部) において与えられ、そこで a の値が指定される．もう一つの条件は、a の 2 階微分にかかる係数がゼロになる、Alfvén 面において与えられる．a の 2 階微分が滑らかな関数となるためには、そこでロピタルの定理による条件が満たされなければならない．以上の定式化に沿った数値解法が作られ、解の例が第 3 章に示された．解の基本的な性質は、星風の中で増幅されたトロイダル磁場による、流れの極方向への偏向である．遠方での解の漸近的振る舞いから、ほとんどすべての磁力線は自転軸の方向に曲げられることが分かった．すなわち、流れは束ねられる (コリメートされる) . 星風は自転軸の近傍ではほぼ円柱状であり、トロイダル磁場のピンチ効果により高密度のガスが閉じこめられた柱状の配置となる．

我々の解法を Pneuman and Kopp (1971) のものと比べてみると、彼らの解析では一見 Alfvén 特異点が現れていないのが大きな差違である．我々の (28) 式は次のような形に書ける．

$$\nabla^2 a = \frac{V_p^2}{V_{Ap}^2}\nabla^2 a + \frac{\nabla\nabla a : \nabla a \nabla a}{(\nabla a)^2}\frac{V_p^2(V_p^2/V_{Ap}^2 - 1)}{V_p^4 - V_p^2(C_S^2 + V_{Ap}^2 + V_{A\varphi}^2) + C_S^2 V_{Ap}^2} + 4\pi\varpi^2 g \ . \tag{38}$$

彼らの反復解法では、(38) 式の右辺を第 n 回目の近似解 a_n について計算し、(38) 式をポアソン方程式として解いて $(n+1)$ 回目の近似解 a_{n+1} を求めている．この方法では $V_p = V_{Ap}$ の特異点は一見消滅する．なぜなら $(1 - V_p^2/V_{Ap}^2)\nabla^2 a$ の項が 2 つに分けられ、$\nabla^2 a_{n+1}$ は左辺に残り、$V_p^2/V_{Ap}^2 \nabla^2 a_n$ は右辺に非斉次項として移るからである．特異点での正則条件がなくなる代わりに、彼らは磁力線が無限遠で放射状になるという条件を課した．彼らの方法と我々の方法との違いが、単に数値技法の差だけなのかどうかが知りたい点である．Okamoto(1975) が指摘したように、また第 3 章での議論からも明らかなように、彼らの定式化で

は Alfvén 特異点での非正則な解を除外する条件がないので、唯一の正則な解を求めることはできないはずである．彼らの与えた解は Alfvén 点で滑らかに見えるが、反復法の解は初期推定の取り方に依存する可能性があるので、滑らかな初期解から出発したために、滑らかな解が得られたという可能性がある．いずれにしろ、彼らの方法は $\Omega \neq 0$ では使えない．なぜなら、この場合解は無限遠で放射状にならないからである．

我々の解法にも数学的不確実さがある．第一に、方程式が領域 $r_{\rm in} \leq r \leq r_{\rm out}$ において境界値問題として解かれている．この領域には双曲型領域も含まれ、これまで得た解では特に問題は起こらなかったが、本来もっと厳密な解き方があるかもしれない．第二に、外側の境界条件が r_A で与えられているため、我々の方法は楕円型領域 $r_A < r < r_f$ での Cauchy 初期値問題を解いているように見える．よく知られているように、これは不適切な問題設定 (ill-posed problem) であり、解法が不安定になりうる．物理的にも、不安定が以下のように起こると予想される．質量流束 [あるいは (19) 式の $\alpha(a)$] が固定されていると仮定する．もし領域 $r_A \leq r \leq r_f$ において、隣り合う磁力線が少し接近したとすると、 2 本の磁力線の間の流速は増加し、密度は減少する．従って圧力が 2 本の磁力線をさらに接近させようとするので、初期擾乱は成長するであろう．しかし実際の計算では、このような振る舞いは見いだされなかった．なぜなら、$\alpha(a)$ は実際は固定されてはおらず、磁力線の形の変化に応じて変わるからである．実際に起こることは、磁束管が圧縮されると、流路が細くなり、加速は抑えられ、密度は増加する．方程式の型 (楕円型か双曲型か) は局所的な性質であり、星風解の非局所的なフィードバックの仕組みを十分に表すものではないと考えられる．一方、密度関数 [あるいは $\alpha(a)$] を固定して (25) 式を解くことを試みたところ、確かに我々の解法は楕円型領域 $r_A < r < r_f$ で不安定となった．従って、磁力線に沿っての星風解と、磁力線を横切る向きの力の釣り合いとは同時に解かねばならず、 2 つを交互に解くようなことはできない．

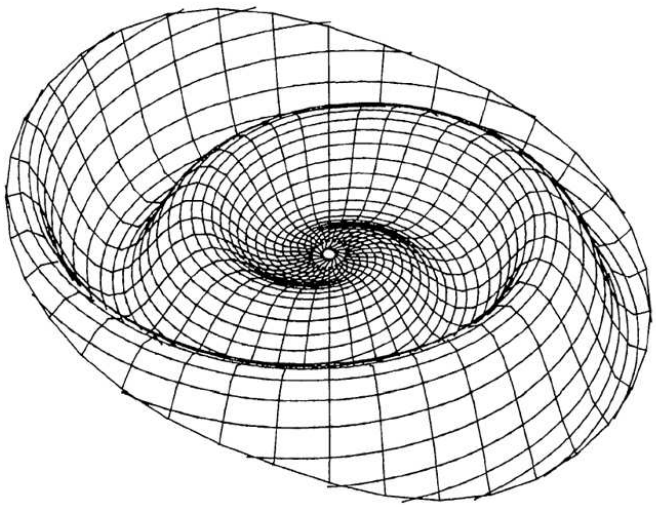

図 7: 斜め回転体が作る電流層の構造．スプリット・モノポール・モデルではどの磁気面も電流層と置きかえることができるので、そのような面を図 3–6 から取ってきている．

最後に、我々のモデルの簡単な応用例として、斜め回転体 (自転軸に対し磁軸が傾いている星) からの星風を考えてみよう．もちろん磁気単極子には磁軸はないのであるが、スプリット・モノポール・モデルの意味するところは、どんな磁気面も、正負の磁極を境する電流層と考えてよいということである．図 7 は、星の近くで赤道に対して 10° 傾いた磁気面を表し、いわゆる「バレリーナのスカート」の様相を示している．いうまでもなく、斜め回転体の一般的な扱いは 3 次元のモデルを必要とする．

我々のモデルを改良する次のステップは、より現実的なモデルを構築するために、流れのない、閉じた磁

場領域も含むようにすることである．もう一つの興味深い問題は、今回の方法を、磁場で貫かれた降着円盤に応用することである．降着円盤の問題では、自己相似解の研究がBlandford and Payne (1982)らによってなされているが、我々の方法ではもっと一般的な条件下で解を求めることができる．これらの課題は今後の論文において取り組む予定である．

謝辞
多くの有益な議論をして頂いたH. C. Spruit博士、論文の原稿を注意深く読んで頂いたH. U. Schmidt、F. Meyer、U. Anzerの各氏に感謝する．著者がマックスプランク物理学・天体物理学研究所に滞在した際に与えられた良好な研究環境についてR. Kippenhahn所長に感謝する．この論文の数値計算はガーヒンクにあるマックスプランク研究所コンピュータセンターのCRAY-1によって行われた．

参考文献

Belcher, J. W., MacGregor, K. B.: 1976, *Astrophys. J.* **210**, 498
Blandford, R. D., Payne, D. G.: 1982, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **199**, 883
Heinemann, M., Olbert, S.: 1978, *J. Geophys. Res.* **83**, 2457
Mestel, L.: 1961, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **122**, 473
Mestel, L.: 1967, in *Plasma Astrophysics*, ed. P. A. Sturrock, Academic Press, New York, p. 185
Mestel, L.: 1968, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **138**, 359
Nerney, S. F., Suess, S. T.:1975, *Astrophys. J.* **196**, 837
Okamoto, I.: 1974, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **166**, 683
Okamoto, I.: 1975, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **173**, 357
Parker, E. N.: 1958, *Astrophys. J.* **128**, 664
Parker, E. N.: 1963, *Interplanetary Dynamical Processes*, Interscience, p. 51
Pneuman, G. W., Kopp, R. A.: 1971, *Solar Phys.* **18**, 258
Schatzman, E.: 1962, *Ann. Astrophys.* **25**, 18
Suess, S. T.: 1972, *J. Geophys. Res.* **77**, 567
Weber, E. J., Davis, L., Jr.: 1967, *Astrophys. J.* **148**, 217
Winge, C. R., Jr., Coleman, P. J., Jr.: 1974, *Planetary Space Sci.* **22**, 439
Yeh, T.: 1976, *Astrophys. J.* **206**, 768