2002.10.15

# 1. 序 – 歴史、カオス KAM

**1.1** 天文学のはじまり**:** 天体の運動学
**1.2** ケプラー**,** ニュートン**, . . .**
**1.3 19** 世紀末およびそれ以後
**1.4 KAM** 理論

参考文献

1. 伊藤孝士、谷川清隆、「21 世紀の天体力学」2001.
2. 谷川清隆、「天体力学とハミルトン力学系」, 数理解析研研究集会「近可積分ハミルトン系の数理と応用」, 2002 年 3 月 4 日〜6 日.
3. 荘子, 岩波文庫.
4. 藪内 清、「中国の天文暦法」, 平凡社, 1969.
5. 大橋由紀夫、「後漢四分暦の成立過程」(数学史研究 93 号, 1-27, 1982), 「賈逵の月行遅疾論」(数学史研究 136 号, 29-41, 1993), 「賈逵の天文定数観について」(数学史研究 153 号, 1-17, 1997).
6. 山本義隆、「古典力学の形成」、日本評論社、1997.
7. 齋藤利弥、「解析力学講義」、日本評論社、1991.
8. ラプラス, 「確率の哲学的試論」(1814), 岩波文庫, 内井惣七訳
9. Alain Goriely, Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems, World Scientific, 2001.
10. K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge University Press, 1983.

20 世紀天体力学の最大の成果は何かと問われれば、純理論的には KAM 理論であろうと答える。20 世紀の半ば、1957年に人類が打ち上げたスプートニクは、天体力学に限らず 20 世紀人類の最高の成果のひとつであろう。これは技術革新の勝利とも言えるが、天体力学の立場から見ると摂動論の勝利とも言うことができる。

現在流行中のカオスもまた、ポアンカレに端を発する。ポアンカレは、双曲型不動点に流れ込んで再び流れ出す特別な流れや、安定多様体および不安定多様体の複雑な絡み合いを注意深く観察した。ポアンカレはニュートン力学が垣間見せた無限の深淵に身震いしたのであろう。パン屋のおやじがこねる生地そのままに、われらが世界は引き伸ばされ、折り畳まれる。

Hénon & Heiles (1964) は 1960 年代に数値的に KAM 曲線の崩壊を観察して力学的カオスを発見し、1980 年代の始めに Wisdom (1983) は太陽系の惑星の運動に予測不可能な運命を見た。パワースペクトルもリャプーノフ指数もカオスの存在を示す。至る所にカオスが跳梁跋扈している。宇宙に於いて、太陽系に於いて、カオスが常態であることが 20 世紀後半の共通認識となった。

## 1.1. 天文学のはじまり

- 天文学はいつどのように始まったのか.
- 人類はいつ人類として, あるいは人間として自覚したのか.
- 人類が自分の置かれた環境に気づいたとき,
  始めに規則を見たのであろうか
  それともカオスを見たであろうか.
- 一日の変化, 月ごとの季節の移り変わり, そして年ごとの繰り返し.
  空に規則を見た. 地上に対応する現象を見た.
- 地上の規則は天に固定された星ではなく, これらの星々の間を縫うように動く
  太陽, 月, 惑星の動きに関係する. これは不思議なことだ.
- 生物学では「個体発生は系統発生を繰り返す」と言われる.
  人類が単細胞生物から出発して, 小さな多細胞生物となり,
  魚となり両性類となって陸地に上がり,
  哺乳類を経て霊長類から今日に至るまでを,
  個人は母親の腹の中で経験すると言われる.
- 子どもはいつ空に気づくのか.
  太陽や月を見るのはいつか.
  飛行機雲に注意を向けるのはいつか.
  初めて空を見た人類に対応するのは何歳の子どもか.

著者本人は覚えていない.

紀元前 4 世紀, 荘子は深く世界を理解した. カオスが本質であること, カオスがなくなると世界のある部分が死んでしまうことに気づいていた.

> 荘子 (応帝王篇第七)
> 南海之帝為倏, 北海之帝為忽, 中央之帝為渾沌. 倏與忽, 時相與遇於渾沌之地, 渾沌待之甚善, 倏與忽, 謀報渾沌之徳, 曰, 人皆有七竅, 以視聴食息, 此獨无有, 嘗試鑿之, 日鑿一竅, 七日而渾沌死.

## 中国における天文学

中国においては, 天文学は暦の学問として発達した.
「太陽, 月, 惑星の運動を解明したい」 これが古代文明の課題となった.
天体の運動学である. いったい世界の規則とは何か. 世界には頼るべき規則はあるのか.
変転窮まりないこの世界において, 基準となるべきものは何か.
天球に貼りついた恒星は面白くも何ともない. 知性を刺激しない.
ところが恒星の間を縫って動く太陽や月や惑星は地上の事物の生起と関係する.
これらの動きをきちんと捉えることが当面の目標である, と古代人は考えた.

- 不思議なことにバビロニアでも同じ頃, 日食観測
  確かなデータは紀元前 7 世紀.

藪内清 [1] によると,

- 漢の武帝のとき, 天の一周を 365.25 度 (1 度 $= 0^\circ.9856$) に分割し,
  月や星の位置を度で表現した.
- 後漢のとき, 月の運動に遅速あることが知れた (いまの楕円運動).
  李梵, 蘇統の発見. 賈逵 (30 〜 101) による解釈.
- 三世紀, 白道と黄道の違い, および交点の移動 (歳差) が認識された.
  歳差の認識は中近東文明より遅れた.
- 太陽運動の非一様性は 6 世紀に認識された. これもヒッパルコスに遅れた.
- 元代, 郭守敬 (1231 〜 1316) の授時暦で運動学が完成した.
  暦が正しいことは日月の運動を正しく予測できるということ.

- 力学はまだ始まらない.

人類はカオスから抜け出したい, 渾沌から逃げたいと思った.
だが, 20 世紀, カオスと正面から向かい合うことになった.
逃げることはできないことを悟った.
そして 21 世紀は?

### 1.2 ケプラー, ニュートン, ...

チコ・ブラーエ (Tycho Brahe)(1546 〜 1601) の観測

ケプラー (J. Kepler)(1571 〜 1627)

ケプラーの 3 法則

歳差を知らなくて幸運か? (要チェック)

ニュートン (I. Newton)(1643 〜 1727)

運動方程式

ニュートン以後の力学の発展

オイラー (1707 〜 1783):

ラグランジュ(1736 〜 1813): 変分法

Laplace(1749 〜 1827): ラプラスの魔 (1814):

18 世紀後半から 19 世紀第一四半世紀を生きた Laplace は、自著『確率の哲学的試論』(岩波文庫から内井惣七による邦訳あり) の中でいわゆる「ラプラスの魔」を考えた。われにすべての初期条件を与えよ、さすれば、未来のすべてを予言して見せよう、というわけである。これはまさにニュートン力学の勝利である。この線に沿って、19 世紀中は摂動論を発展させて、太陽系の未来ばかりでなくすべての力学系の未来は完全に予測可能あるいは解けると思われた。あるいは思いたかった。

> ある知性が, 与えられた時点において, 自然を動かしているすべての力と自然を構成しているすべての存在物の各々の状況を知っているとし, さらにこれらの与えられた情報を分析する能力をもっているとしたならば, この知性は, 同一の方程式のもとに宇宙のなかの最も大きな物体の運動も, また最も軽い原子の運動をも包摂せしめるであろう (確率の哲学的試論, 内井惣七訳)

正準変換と摂動論

自然に与えられた変数が最善の変数とは限らない.

だから正準変換によって最善の変数へと変換する.

摂動が小さな系では, 微小パラメータでハミルトン関数を展開し, 正準変換で次数の低い項から順に消して行けばいいじゃないか.

運動の積分を見つければいいじゃない.

$f(q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots; t) =$ 一定

### 1.3 19世紀末およびそれ以後

**定理** (Bruns, 1887). 古典積分は三体問題の唯一の代数積分である.

**定理** (Poincaré, 1890). 制限三体問題には, ヤコビ積分およびそれと同等な積分を除いて

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots = \text{一定}$$

の形の (解析) 積分は存在しない.

19世紀中に力学で説明のできない現象 (熱現象、電磁気現象など) が次々と研究の対象となり始め、力学的世界観および摂動論への信頼はゆるぎ始めた。最終的には、ポアンカレが摂動展開が一般には収束しないことを示してしまった。時まさに、統計力学が擡頭していた。振り子は揺れた。突然未来は統計的になった。粒子が多数になればなるほど、統計力学の領分に入る。

ポアンカレの回帰定理 (Robinson, 力学系, 国府ほか訳, シュプリンガー, 2001)

$\mu$ は空間 $X$ 上の有限な測度 ($\mu(X) < \infty$),
$f : X \to X$ は測度 $\mu$ を保つ
(すなわちどの可測集合 $A$ に対しても $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ であるような) 1:1 写像とし,
$S$ は $\mu$ で可測な集合であるとする. 帰納的に次を定義する

$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_n &= \{x \in S_{n-1} | \text{ある } j \geq 1 \text{ に対し } f^j(x) \in S_{n-1}\} \\ &= S_{n-1} \cap \textstyle\bigcup_{j\geq 1} f^{-j}(S_{n-1}) \end{aligned}$$

$S_\infty = \cap_{n\geq 0} S_n$.

このとき,

- $S_\infty$ は可測である.
- $\mu(S_\infty) = \mu(S)$.
- $x \in S_\infty$ に対し, $f^j(x)$ は $S$ に無限回戻ってくる.

ボルツマン (1844〜1906), ギブス (1839〜1903) の統計力学

エルゴード仮説: 時間平均 = 相空間平均 ← 単一の軌道が相空間を埋め尽くす
準エルゴード仮説: 各軌道は相空間内で稠密
ただし, この仮説からは時間平均 = 相空間平均は出ない!
(Pertersen(1983), metric indecomposability なら OK)
Sinai(1963) によるエルゴード系の存在証明

バーコフ (1884〜1944) のエルゴード定理 (1931).

測度 $\mu$ に関して $f : X \to X$ が保測変換であり, $g : X \to \mathbf{R}$ が $\mu$ に関して可積分であるとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ f^j(x)$$

はある可積分関数 $g^*$ に関してほとんどいたるところで収束する．また $g^*$ はそれが定義される点すべてにおいて $f$ で不変, すなわち $\mu$ に関してほとんどすえべての点において $g^* \circ f(x) = g^*(x)$ が成り立つ．さらに,
(i) $\mu(X) < \infty$ ならば $\int_X g^*(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x)$ であり,
(ii) $\mu$ が $f$ にエルゴード測度ならば $g^*$ は $\mu$ に関してほとんどいたるところで定数である．

### 1.4 KAM 理論

KAM 定理の紹介

- 3 人のそれぞれの定理の形.
- 定理の大雑把な意味は:
  可積分のとき, すべての運動はトーラス上で行なわれる.
  非可積分となっても, 「非可積分性の度合が小さければ」
  ほとんどの運動はトーラス上で行なわれる.

図で説明. アーノルド論文の図. 翻訳集にあり.

KAM 定理の歴史的意味

天体力学のみならず、20 世紀の数理科学すべてにとって KAM 理論 (Kolmogorov–Arnold–Moser) は一つの救いであった. 19 世紀中に力学で説明のできない現象 (熱現象、電磁気現象など) が次々と研究の対象となり始め、力学的世界観および摂動論への信頼はゆるぎ始めた。最終的には、ポアンカレが摂動展開が一般には収束しないことを示してしまった。時まさに、統計力学が擡頭していた。振り子は揺れた。突然未来は統計的になった。粒子が多数になればなるほど、統計力学の領分に入る。

一方で太陽系の推定年齢はどんどん伸びていた。19 世紀には高々数千万年と思われ、20 世紀に入っても、1920 年代には宇宙年齢が 20 億年であった。太陽系の年齢が 45 億年となったのは 1950 年代である。これは摂動論が収束しないことにより太陽系が不安定になること、未来が統計的であることに対する強力な反証である。太陽系を記述する運動方程式が非可積分であっても、 惑星達の運動が準周期的であるということは不安定性を妨げる障壁があるはずである。KAM 理論はこれに応えた。非可積分性が弱いときには、相空間のほとんどを障壁が占める。可積分系から遠ざかるにつれて障壁がまばらになる。こうして振り子はふたたび揺れた。大丈夫、未来はそれほど不確実ではない。

• **Kolmogorov 版**

**定理 1.** 次のようにおく.

$$H(q,p,0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}(q)p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \tag{2}$$

ここで $m$ と $\lambda_\alpha$ は定数である. また定数 $c>0$ と $\eta>0$ を適当に選ぶと, すべての整数成分ベクトル $n$ に対して, 不等式

$$(n,\lambda) \geq \frac{c}{|n|^\eta}, \tag{3}$$

が満たされる. 加えて, 関数

$$\Phi_{\alpha\beta}(q) = \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} H(q,0,0),$$

の平均値

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Phi_{\alpha\beta}(q)dq_1\ldots dq_s,$$

から構成される行列式がゼロでないとする. すなわち

$$|\varphi_{\alpha\beta}(0)| \neq 0. \tag{4}$$

このとき, 十分小さな $\theta$ すべておよび集合 $T_0$(註: トーラス) のある近傍 $V$ の点 $(Q,P)$ すべてに対して決まる解析関数 $F_\alpha(Q,R,\theta)$ と $G_\alpha(Q,P,\theta)$ が存在して, $V$ から $V' \subseteq G$ への接触変換

$$q_\alpha = Q_\alpha + \theta F_\alpha(Q,P,\theta), \quad p_\alpha = P_\alpha + \theta G_\alpha(Q,P,\theta)$$

を決める. この変換によって $H$ は

$$H = M(\theta) + \sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha + O(|P|^2), \tag{5}$$

なる形になる ($M(\theta)$ は $Q$ および $P$ に依らない).