2002.10.22

2. KAM理論以後 – Henon-Heiles

1.1 復習
1.2 KAM 理論とカオス
1.3 数値的研究
(**1.4** 理論的研究)

参考文献

1. 谷川清隆、「天体力学とハミルトン力学系」, 数理解析研研究集会「近可積分ハミルトン系の数理と応用」, 2002年3月4日〜6日.
2. M. Henon & C. Heiles,
The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments,
Astron. J. **69**, 73-79(1964)
3. 齋藤利弥、「解析力学講義」、日本評論社、1991.
4. Alain Goriely, Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems, World Scientific, 2001.
5. K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge University Press, 1983.

1.1. 復習

天文学のはじまり, – 古代文明による天体の運動学
ケプラー, ニュートン, . . . – 近代天文学のはじまり, ニュートン力学
19 世紀末およびそれ以後 – ニュートン力学的世界観の自身喪失
KAM 理論 – ゆりもどし

20 世紀天体力学の最大の成果
理論的には KAM 理論か
スプートニクは、天体力学に限らず 20 世紀人類の最高の成果のひとつ

紀元前 4 世紀, 荘子は深く世界を理解した. カオスが本質であること, カオスがなくなると世界のある部分が死んでしまうことに気づいていた.

ヨーロッパ
チコ・ブラーエ (Tycho Brahe)(1546 〜 1601) の観測
ケプラー (J. Kepler)(1571 〜 1627): 3法則
ニュートン (I. Newton)(1643 〜 1727): 運動方程式
Laplace(1749 〜 1827): ラプラスの魔 (1814):

正準変換と摂動論

運動の積分を見つければいいじゃない.
$f(q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots; t) =$ 一定

19 世紀末およびそれ以後
Bruns の定理 (1887): 古典積分は三体問題の唯一の代数積分である.
Poincaré の定理 (1890). 制限三体問題には, ヤコビ積分およびそれと同等な積分を除いて

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots = \text{一定}$$

の形の (解析) 積分は存在しない.

熱現象, 電磁気現象, 統計力学
振り子は揺れた。突然未来は統計的になった。
ポアンカレの回帰定理
ボルツマン (1844〜1906), ギブス (1839〜1903) の統計力学
エルゴード仮説: 時間平均 = 相空間平均 ← 単一の軌道が相空間を埋め尽くす
準エルゴード仮説: 各軌道は相空間内で稠密
ただし, この仮説からは時間平均 = 相空間平均は出ない!
(Pertersen(1983), metric indecomposability なら OK)
Sinai(1963) によるエルゴード系の存在証明
バーコフ (1884〜1944) のエルゴード定理 (1931).

1.2 KAM 理論とカオス

KAM定理

↓

自由度

(次元)

	(規則的) 可積分			不規則性増大 → ← カオス →	(複雑系)	...	randomness
1	二体問題		–	–	–	–	–
2			2次元写像	–	–	–	–
2		K	Henon&Heiles系	–	–	–	–
2			制限三体問題	–	–	–	–
$2 \sim 9$		A	三体問題	–	–	–	–
30			太陽系9惑星		–	–	–
↓		M		N体問題	–	–	–
↓				$(N > 10)$			
↓		定					
大					銀河・星	–	–
↓		理			人体・脳	–	–
↓	偏微分方程式				...	...	
∞	可積分系		ソリトン?			→	統計力学

次元ごとに

「最大複雑度」the maximal complexity proper to a particular dimension がありそう.

または「最大カオス度」

過去の問題例:

ポアンカレによる制限三体問題の非可積分性の証明

ポアンカレの幾何学定理

Sitnikovによる楕円制限三体問題の振動解の存在

1.3 数値的研究

- Henon & Heiles,
  The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments,
  Astron. J. **69**, 73-79(1964)
  - KAM 理論の説明によい.
  - 横断面・写像の導入
  - その後の研究の雛形

<u>研究の動機</u>

銀河内での運動の第三積分の存在の問題. 銀河重力場は軸対称. 円筒座標 R, θ, z で, このポテンシャルは

$$U_g(R,z)$$

問題: 相空間 $(R,\theta,z,\dot{R},\dot{\theta},\dot{z})$ で一本の軌道で埋め尽くされる領域はどこか
(エルゴード性の問題)?
天体の軌跡は, 5 個の運動積分で決まる超曲面の交わりとして決まる.
重要なのは isolating integral(孤立積分). $\rightarrow$ 積分とよばれる.
エネルギー積分と z 軸まわりの角運動量積分が知られている.

$$I_1 = U_g(R,z) + \tfrac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2),$$
$$I_2 = R^2\dot{\theta}$$

I_4, I_5 は non-isolating, では I_3 は?
I_3 が non-isolating なら, 太陽近傍の星の速度分散は動径方向と接線方向が同じ.
観測によると, 動径方向 : 接線方向 $= 2:1$.

$$\boxed{\text{積分があると動きが窮屈になる}}$$

§2. <u>やったこと</u>

$$U(R,z) = U_g(R,z) + \frac{C_2^2}{2R^2}$$

運動方程式

$$\dot{R} = -\frac{\partial U}{\partial R}, \quad \dot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

(R,z) 平面内の運動. (R,z) を (x,y) と書く.

$$I_1 = U(x,y) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

この第一積分はエネルギー積分 (単位質量あたり). 第二積分 I_2 は?

相空間は 4 次元 $(x,y,\dot{x},\dot{y})$ 空間から 3 次元 $(x,y,(E,)\dot{y})$ 空間 with

$$U(x,y) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E \tag{7}$$

運動可能領域は $\dot{x}^2 \geq 0$ より

$$\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 = E - U(x,y) - \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad U(x,y) + \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 \leq E \tag{8}$$

case i) ほかに孤立積分がなければ軌跡は領域 (8) を埋め尽くすはず.
　これをエルゴード的ということにする.

case ii) 第二積分があれば, 軌跡は相空間で曲面上にある. → 可積分.

横断面の導入
　軌跡が $x=0$ 面を下から上に ($\dot{x}>0$ で) 横切る場面を想像する.
　軌跡は何度も横切る可能性がある. その点を $P_1, P_2, \ldots$ と書く.
　$x=0$ 面は $(y, \dot{y})$ 面である.

$$x=0, \quad \dot{x}>0$$

　軌跡を無限時間にわたって追跡すると, 無限個の点列 $P_1, P_2, \ldots$ が得られる.

第二積分
　なし. → 面

$$U(0,y) + \frac{1}{2}\dot{y}^2 \leq E \tag{10}$$

　を点が埋め尽くす. 正確にはわけへだてなくうろつきまわる.
　あり. → 面内で曲線上を動く.

第二積分の存在・非存在の判定条件
　横断面の点の動きを見ればよい. 2 次元領域を埋めるか, 曲線上にあるか.

写像の導入
　P_i から P_{i+1} への移行は**写像**と考えることができる.
　$U(x,y)$ と E が決まれば点の移行は決まる. → 写像が決まる.
　$P_i = (y, \dot{y}, x=0, \dot{x} \leftarrow (7))$
　写像は面積保存.

§3. 結果

ポテンシャル

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2 y - \frac{2}{3}y^3)$$

　解析的に単純 → 計算が簡単
　逆にある程度複雑
　典型的な場合かも. 高次を加えても定性的に結果は変らないかも.

$x=0$ 面で $E=0$ の運動可能領域は $y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \dot{y}^2 = 0$, つまり $y^2(1-\frac{2}{3}y) = \dot{y}^2$

運動方程式

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -x - 2xy$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -y - x^2 + y^2$$

図 3 の説明

点は曲線に乗っている.
相次ぐ点は曲線上を回転する.
O を中心として平均回転角 α が決まる.
回転角は曲線ごとに異なる.
$\alpha = 0.1143$(回転)
α は一般に有理数でない. 有理数なら元に戻る.

図 4 の説明

$E = \frac{1}{12} = 0.0833\ldots$
閉曲線ごとに軌道は異なる.
曲線が全領域を占めるようだ.
写像の不動点が 4 つ. これは安定な周期軌道
曲線の交点も不動点. これは不安定な周期軌道.

以上からすると第二積分ありそう.

図 5 の説明

$E = 0.12500$
閉曲線はある. しかし全領域を占めない.
孤立点はひとつの軌道のもの.
曲線上を動いているとは思えない. 曲線と曲線の間をでたらめに動いているようだ.
$\boxed{\text{この変化は突然生じる!}}$
島鎖 (a chain of island): 右にある 5 個の島は同一軌道に属する. 点は島から島へと跳ぶ.
このような島構造はいろいろなところにある.
島鎖の島の数 q は勝手. q が増大すると, 島は小さくなる.
島は q 周期の安定周期点を囲んでいる.
孤立した単独の閉曲線は島の数が 1 の島鎖と理解できる.
エルゴード軌道はない.
予想

(1) 島の数は無数.
(2) すべての島の集合はいたるところ稠密.
(3) 島は全面積を占めるわけではない.
(4) 島と島の間に海がある. 海の中をエルゴード軌道が動く.

図 6 の説明

$E = \frac{1}{6} = 0.16667$

さらに描像は急激に変った.
孤立点は同一の軌道に属する.
「エルゴード」軌道がほぼ全面積を占める.
点はでたらめに動くまわる.
y 軸上にあった閉曲線は消滅した. 周期点が不安定化した.
残りの大きな島は島鎖になった (2 つの島からなる).
ほかには島は見えなくなった.
8 の字形の軌道は, エルゴード的でもなく, 規則的でもない.

図の説明のまとめ
パラメータの中程度の変化の間に様相がまったく変化する.

曲線の占める面積を計算する
各点が曲線に属するかどうか判定する.
$d(P_1, P_1') = 10^{-7}$ から計算を始める.
25 回写像を行なう.
写像点同士の距離が線形に離れていけば曲線領域.
写像点同士の距離が指数関数的に離れていけばエルゴード.

$$\mu = \sum_{i=1}^{25} (P_i P_i' \text{の距離})^2$$

$\mu < \mu_c$ または $\mu > \mu_c$
$\mu = 10^{-12} \sim 10^{+1}$, $\mu_c \simeq 10^{-4}$.
結果は Fig.7
臨界エネルギー $(E = 0.11)$ まで曲線で占められる.
その後, 曲線領域は急速に収縮する.
第 2 積分は臨界エネルギー以下では存在するがそれ以外では, ない.
$E = 1/6$ はエスケープエネルギー. ポテンシャル障壁はなくなる.
臨界エネルギー $(<)$ エスケープエネルギーの関係は未知.
$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - x^2 y^2)$ では上の関係は逆転

§4. 写像の研究

写像
利点: 微分方程式を積分する必要がない. 1000 倍速くなる.
欠点: 天文学の方程式から遠くなる.

写像例 (面積保存)

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + a(y_i - y_i^3) \\ y_{i+1} &= y_i - a(x_{i+1} - x_{i+1}^3) \end{aligned} \tag{14}$$

図 8 の説明
$a = 1.6$

線で結んだ点は同一の軌道, 孤立点はすべてひとつの軌道に属する.
図 5 の右側とよく似ている. 中心の島と島鎖. そして外のエルゴード領域.
面積保存写像は微分方程式による力学問題とほぼ同じ.

図 9 の説明
図 8 の上半分. グリッドサイズは図の全面にわたって, 見たとおり.
1000 回写像を繰り返す.
エルゴード軌道はいずれ無限遠に去る. この発散は速い. y^3 項による
1000 回原点近くにいたら $(x^2 + y^2 < 100)$, 点を打つ. そうでなければ空白.
その結果は図 8 と同じ!

図 10, 11, 12 の説明
図 10 は 10 倍拡大.
小さな島がたくさんある.
分布はランダム.
中央の島の境界はシャープなのに, 左の島の境界はぼやけている.
図 11 は図 10D を 10 倍拡大.
新たな詳細が見えて来た.
無数に島があって, それらは稠密であろう.
図 12 は図 9B を 10 倍拡大.
島の密度は減った.
密度勾配もある.
領域 C には 0.002 のグリッドで島なし.　　島の分布密度は急激に減る.

§4. 結論

単純な一般的答え, たとえば,
(a) 第三積分はつねに存在する, とか,
(b) 第三積分は存在しないとか,
が得られる望みはないようだ.

真実の状況
ポテンシャルが与えられたとし, 角運動量とエネルギーを決める
エネルギーが小さければ, 第三積分はつねに存在するようだ.
(おそらくそれは準積分に過ぎないであろうが.)
エネルギーが大きくなると, 第三積分の存在する領域は無数の小さな場所に分散して存在する.
残りのエルゴード領域では第三積分は non-isolating である.
エルゴード領域の面積はエネルギーとともに急速に増大する.

疑問:
曲線は本当に曲線か?
島全体の位相的性質は?
軌道を積分せずに曲線を求めることはできないか?

数学的アプローチはたいへん難しそう.

ここで考えた問題:

自由度 2 の力学系

制限三体問題に近い

付録: 等ポテンシャル曲線を描く.

$x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3 = 2U(x,y) =$ 一定 を x で微分して

$$2x + 2yy' + 4xy + 2x^2y' - 2y^2y' = 0$$

これを整理すると

$$y'(y + x^2 - y^2) + x + 2xy = 0, \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2xy}{y^2 - y - x^2}$$

パラメータを導入して

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - y - x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2xy$$

現在進行中の問題

三体問題

1 次元三体問題

自由落下三体問題

太陽系

Wisdom – 小天体に運動の安定性

Ito&Tanikawa – 長期数値計算 Tanikawa&Ito – 安定な惑星系の部分系

ねじれ写像

標準写像

Greene による Last KAM の崩壊問題

Henon&Heiles