2002.11.5

4. ポアンカレの幾何学定理 (ポアンカレ・バーコフの定理)

4.1 復習

4.2 ポアンカレの幾何学定理

参考文献

1. 幾何学のある定理について
   Sur un theoreme de geometrie
   H. Poincare, Rend. Cir. Mat. Palermo 33(1912), 375-407
2. ポアンカレの幾何学定理の証明
   Proof of Poincare's geometric theorem
   George D. Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. 14(1913), 14-22

4.2 ポアンカレの幾何学定理

(1) 定理の陳述

- 半径が a と b $(a > b > 0)$ の 2 つの同心円 C_a および C_b にはさまれた円環領域を R とする.
- T は R をそれ自身に写す連続な一対一変換であって、
  C_a の点を正方向に C_b の点を負方向に進め、
  しかも面積保存であるものとする.

$\boxed{\text{ねじれ写像}}$ (twist map)

- このとき不動点が少なくとも 2 つある.

用語の説明

- 写像 T: 定義域 A と値域 B が与えられたとき、$Ta \in B$ $(a \in A)$ が一点からなるとき.
- 1 対 1: 「$Ta = Tb$ なら $a = b$ である」とき 1:1 であるという.
- 連続: $\varepsilon - \delta$ 論法. どんな $\varepsilon > 0$ を取っても, $\delta > 0$ を十分小さくとれば,

$$TU_\delta \subset U_\varepsilon$$

  にできるとき. ただし, U_δ は $a \in A$ の近傍, U_ε は $Ta \in B$ の近傍
- 不動点: $Tp = p$.
- 面積保存とは, 任意の領域 $D \subset R$ の面積を $\mathcal{M}(D)$ と書くとき, $\mathcal{M}D = \mathcal{M}(TD)$
  (普通は $\mathcal{M}D = \mathcal{M}(T^{-1}D)$ と書くか?)
- ねじれには不定性あり. 要注意

変換のヤコビ行列および行列式

一般の場合

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{TD} \frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} dx'dy'$$

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 1$ なら面積保存

直交座標から極座標へ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

面積保存でない.

直交座標から修正極座標へ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$v = r^2, \quad u = \theta$$

(u, v) と (x, y) を直接結ぶ関係は

$$v = x^2 + y^2, \quad u = \arctan\frac{y}{x}$$

ヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -2$$

$\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1 + x^2}$ を使った.

(2) 証明の準備

- 修正極座標 $v=r^2, u=\theta$ の採用.

$$v=r^2,\quad u=\theta$$

- 変換 T の表現.

$$u'=\varphi(u,v),\quad v'=\psi(u,v).$$

- 関数 $\psi(u,v)$ の性質
  関数 $\psi(u,v)$ は (u,v) の連続関数
  R の各点で一意に決まる.
  したがって ψ は u に関し周期 2π である.
- 関数 $\varphi(u,v)$ の性質
  普遍被覆面 (要説明) で考えるとわかりやすい.
  $\varphi(u,v)$ はそれぞれが 2π の整数倍だけ異なる無限個の値をとりうる.
  $\varphi(u+2\pi,v)=\varphi(u,v)+2\pi$ である
    点 q が円 C_a を正方向に一周すると像 Tq も円 C_a を一周する.
      そうでないと写像は 1:1 でなくなる.
    連続性より他の任意の点でも上の等式が成り立つ.
- $u'-u$ と $v'-v$ はともに R の中で一価かつ連続である.
  $\varphi(u,v)$ と $\psi(u,v)$ の上記の性質より.

定理の詳細な意味は次のとおり:

$$C_a\text{に沿って } u'>u \quad \text{かつ} \quad C_b\text{に沿って } u'<u,$$

となるような $\varphi(u,v)$ を任意に決めたとき、R 内に

$$u'=u,\quad v'=v,$$

なる点が少なくとも 2 点ある.

(3) 証明法について

- 不動点が 1 つあればただちにもう 1 つの不動点の存在がいえる．
  とバーコフは言うが、問題あり．
- だから定理が正しくなければ T は不動点を持たない．
- このとき R のすべての点に対して

$$(u'-u)^2+(v'-v)^2>d^2>0, \tag{4.1}$$

である．なぜなら円環 R 上で $u'-u, v'-v$ は一価連続であり、また同時には 0 にならないからである．

- 仮定 (1) が矛盾を導くことを示して定理を証明しよう．

(4) 補助変換

- 変換 T_ε の導入．
  一対一連続変換

$$0<\varepsilon<b^2 \quad \text{として},\ \ T_\varepsilon: u'=u,\ \ v'=v-\varepsilon$$

- T_ε の性質
  円 C_a と C_b をそれぞれ同心円 $C_a': v=a^2-\varepsilon$ と $C_b': v=b^2-\varepsilon$ に写す．
  C_a' は C_a の内側にあって C_a から $a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$ の距離にある．
  C_b' も同様に C_b の内側にあって C_b から $b-\sqrt{b^2-\varepsilon}$ の距離にある．
  平面を原点に向けて収縮させる．すべての点を同じ動径上の点に写し、また面積保存．

$$\int\int r dr d\theta = \frac{1}{2}\int\int du dv.$$

- TT_ε の性質 (T を作用した後に T_ε を作用させる)

$$TT_\varepsilon: \overline{u}'=\varphi(u,v),\ \ \overline{v}'=\psi(u,v)-\varepsilon.$$

$$\varepsilon<b^2,\ \ \varepsilon<d,\ \ \varepsilon<a^2-b^2. \tag{4.2}$$

不動点を持たない．($\leftarrow \varepsilon<d$)
普遍被覆面 $S: -\infty<u<+\infty,\ \ b^2\le v\le a^2$, で考えると明らか．

(5) 方位角の導入

- $\omega(u,v)$ の導入:

$$\omega(u,v) = \arctan\frac{v'-v}{u'-u}, \tag{4.3}$$

- 普遍被覆面での $\omega(u,v)$ の性質
  - 無限多価関数である. 無限個の分枝がある. (図必要)
  - $(u,v) \to (u',v')$ ベクトルが u 軸の正方向となす角度と考える.
  - (1) より, 各点で連続であり、よって一価の分枝におさまり、面全体で連続である.
  - C_a および C_b に沿ってそれぞれ π のある決まった偶数倍と奇数倍である.
    C_a に沿って $u'>u, v'=v$、また C_b に沿って $u'<u, v'=v$ だからである.
- R 内での $\omega(u,v)$ の性質: 一価であること.
  すでに見たとおり、関数 $v'-v$ や $u'-u$ は u に関して周期 2π であるから、
  $\omega(u,v)$ の各分枝は点 $(u+2\pi,v)$ と点 (u,v) で (0 も含めて) 2π の整数倍異なる.
  分枝は連続であるから、この整数値は S 全体で同一である.
  ところが、C_a に沿って、また C_b に沿ってこれらの分枝は一定値を有する.
  だからこの整数値は実際 0 である.
  だから、$\omega(u,v)$ のこれらの分枝は u に関して周期 2π である.
  - つまり R 内で一価である.
- 多価関数 $\overline{\omega}(u,v)$ の導入:

$$\overline{\omega}(u,v) = \arctan\frac{\overline{v}'-v}{\overline{u}'-u}, \tag{4.4}$$

  - これは (u,v) から $(\overline{u}',\overline{v}')$ へのベクトルが u 軸の正の方向となす角度.
  - この関数も同様に一価で連続な分枝にはいる.
  - さらに関数 $\overline{v}'-v = v'-v-\varepsilon$ と $\overline{u}'-u = u'-u$ は u に関し周期 2π である.
  - また $\overline{\omega}(u,v)$ の各分枝は $\omega(u,v)$ と同様 u に関し周期 2π である.
  - つまり R 内で一価である.
- $\omega(u,v)$ と $\overline{\omega}(u,v)$ の分枝の組はすべての点 (u,v) における値が次の公式で決まるように調整できる.

$$|\omega(u,v) - \overline{\omega}(u,v)| < \frac{\pi}{2}. \tag{4.5}$$

- (4.5) 式の幾何学的証明.
  普遍被覆面内で点 (u',v') は点 (u,v) から少なくとも距離 d 離れている.
  点 $(\overline{u}',\overline{v}')$ は点 (u',v') から $\varepsilon<d$ だけ離れている.
  3点がつくる三角形が点 (u,v) において作る角度は決して $\pi/2$ に等しくならない.
  だから S のある一点で (5) 式にしたがって2つの分枝を関係させておけば、
  S 内で点を連続的に変化させたとき同じ不等式は S 内のいたるところで成立する.

(6) 補助変換のもとでの曲線と領域の変換

- R の変換 TT_ε による曲線の変換
  C_a は C_a' に写る．C_a' は C_a と C_b の間にある．
  C_a' は単純閉曲線 C_a'' に写る．C_a'' は C_a' と C_b' の間にある．
  C_a' と C_b' にはさまれた円環領域を R' として、
  TT_ε は R を R' に写す一対一連続変換であり、R は T_ε によって縮む．
  C_a' は R に含まれ C_b を囲むから、
  その像 C_a'' は R' に含まれ (したがって C_a' の内側にあり)、C_b' を取り囲む．
  C_a'' は単純閉曲線 C_a''' に写る．
  入れ子になった単純閉曲線の列 $C_a', C_a'', \ldots$ が得られる．
  この過程は閉曲線自体が R に含まれる限り続けることができる．

- R の変換 TT_ε による領域の変換
  円環 C_aC_a' は R' 内の第二の円環 $C_a'C_a''$ に写る. 両者は境界 C_a' で互いに接する．
  C_a'' 全体が R に含まれるなら、$C_a'C_a''$ は円環 $C_a''C_a'''$ に写る. 両者は C_a'' で接する．
  入れ子になった円環の列 $C_aC_a', C_a'C_a'', \ldots$ が得られる．

- C_a 上に点 P があって, 有限回の写像 (n 回) による像が円 C_b より内側にくる．
  円環 C_aC_a' の面積は $\pi\varepsilon$ であり、
  変換 T も T_ε も面積保存であるから、像 $C_a'C_a''$, C_a'' C_a''', $\ldots$ はみな同じ面積 $\pi\varepsilon$ を有する．
  ある曲線 $C_a^{(n)} (n \geq 2)$ の少なくとも一部が円 C_b の内側に入り込むと円環列は途切れる.
  ところが、すべての l に対して C_a と $C_a^{(l)}$ の間の面積は $\pi l\varepsilon$ であるから
  l が十分大きければ $\pi l\varepsilon$ は R の面積を超える．
  だからこのような $C_a^{(n)}$ は存在する．

図

(7) 補助変換のもとで不変な曲線の構築

定義. $P^{(n)}$ が C_b の下に出る. そのもとの点を $P \in C_a$ とする.

- 普遍被覆面上での、点 $P \in C_a$ および曲線分のふるまい
  C_a, C'_a 直線, $C''_a, C'''_a, \ldots$ はそれぞれ各区間 $2k\pi \le u \le 2(k+1)\pi$ で合同な形をしている.
  円環 $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots$ は S 内の単純曲線の列にはさまれた層の列.
  $P' = TT_\varepsilon P$ とし、P と P' を線分 PP' で結ぶ. これは帯 $C_aC'_a$ に完全に含まれる.
  $PP', P'P'', \ldots, P^{(n-1)}P^{(n)}$ を構築する. ただし, $P'P'' = TT_\varepsilon PP'$, $P''P''' = TT_\varepsilon P'P''$, $\cdots$.
  これらは普遍被覆面内で $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots, C_a^{(n-1)}C_a^{(n)}$ に含まれ、
  しかも最後の孤の端点 $P^{(n)}$ は S の下側の境界 C_b の下側にある.

定義. $PP^{(n)}$ と C_b の交点を Q とする.

この孤の列から構成される曲線 PQ は単純である.
  $PP', P'P'', \ldots$ が単純孤の列であり、
  それぞれ S 内で $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots$ に含まれているからである.
  PQ は全体が C_a と C_b の間に含まれる.

定義. Q' は Q の像, Q^{-1} は Q の逆像

- PQ' は単純曲線である.
  - 変換 TT_ε による PQ の像 $P'Q'$ は $P'Q$ とその延長上にある単純孤 QQ' から成る.
  - 孤 QQ' は R 内の点の TT_ε による像であって、完全に直線 C'_a の下にある.
  - とくにこの孤の端点 Q' はもちろん C'_b 上にある.
  - QQ' の PQ との共通点は Q のみである.
    なぜなら共通点があれば、それは $P'Q$ 上にあるが TT_ε の逆写像を作用させれば、
    $Q^{-1}Q$ が Q^{-1} 以外に PQ^{-1} と共通点を有することになるが、
    これは PQ が多重点を持たないことから有り得ない.

- 曲線 PQ は変換のもとで不変である.
  変換 TT_ε によって PQ' の孤 PQ は PQ' の孤 $P'Q'$ に写る.
  その際、PQ 上の各点は PQ' 上で前進する.

- T および T_ε の性質から、図に示されるように、
  P' の u 座標は P の u 座標より大きく、
  Q' の u 座標は Q の u 座標より小さい.

(8) 不変曲線上での補助的点-像ベクトルの回転

定義. B: PQ' 上, P から Q まで動く点.
$\overline{B}'$: B の像. PQ' 上, P' から Q' まで動く点.
$B\overline{B}'$: B から $\overline{B}'$ へのベクトル.

- 示したいこと.
  $B\overline{B}'$ の回転角が $-\pi$ に直線 PP' および QQ' が u 軸となす鋭角を加えたものである.
  - 回転角はこの角度と 2π の整数倍しか違わない.

(i) 証明のために頼る事実は、
点 P, P', Q, Q' を含む単純曲線の列を通って曲線 $PP'QQ'$ を連続的に変形して、
この曲線を折れ線 $PP'QQ'$ に直すことである (図参照).

定義. 曲線 PQ を単調増加するパラメーター t でパラメータづけする.
P, P', Q, Q' でそれぞれ t_0, t_0', t_1, t_1' の値をとるものとする.
点 B において t のときに $\overline{B}'$ において t がとる値は $\tau(t)$ とする.
明らかに $\tau(t)$ は $t(t_0 \leq t \leq t_1)$ の連続な増加関数であって、$\tau(t) > t$ なる性質を持つ.

(ii) $B\overline{B}'$ の全回転角を不変に保ちつつ曲線を変形する[1].
曲線はつねに P, P', Q, Q' を通り、t の値も前と同様 t_0, t_0', t_1, t_1' であるとする.
微小変形曲線と変形前の曲線
初期位置と最終位置はともに等しくて、
ベクトル同士の角度の差はすべて中間の位置において一様に小さいからである.

(iii) 上の論拠により、曲線 $PP'QQ'$ を連続変形し、
しかもつねに P, P', Q, Q' を含むような単純曲線であるようにし、
変形曲線上でうまくパラメーターを選ぶことによって $B\overline{B}'$ の全回転角を不変にできる.

(iv) 孤 QQ' を帯 $C_a'C_b'$ からはみ出さずに直線 QQ' へと連続的に変形できる.
曲線 PQ は完全に S に含まれるから (S の外にある線分)QQ' とは交わらない.
C_a' と C_b' にはさまれる連続体に曲線 $P'Q$ によって切れ目を入れても単連結である.
点 Q と Q' を結ぶ任意の (この連続体に含まれる) 単純曲線を
単純曲線の列を通って変形し、
しかも Q と Q' 以外は切れ目に触れずにもっていけるからである.

(v) 孤 $P'Q$ も P' と Q を結ぶ $C_a'C_b$ 内の単純孤列を通して連続的に線分 $P'Q$ に変形できる. 線分 QQ' と PP' は $C_a'C_b$ に点を有しないからである.

(vi) もとの曲線に沿っての $B\overline{B}'$ の回転は 3 つの直線分 $PP', P'Q, QQ'$ から成る折れ線に沿っての回転角とまったく同じである.
初期位置から最終位置までの折れ線に沿っての回転は明らかに $-\pi$ に直線 PP' と QQ' が u 軸となす鋭角を加えたものに等しい.

こうして主張は証明された.

---
[1] 変形の中には同じ曲線の異なるパラメータづけも含むとする.

- ベクトル $B\bar{B}'$ の回転を $\varpi(u,\,v)$ の変化で測る.
  B の座標を (u,v) とすると、$\overline{B}'$ の座標は $(\overline{u}',\overline{v}')$ であり、
  $B\bar{B}'$ の方向は関数 $\varpi(u,\,v)$ と 2π の整数倍違うだけ. 変化なら同じ.

定義. $\varpi(u,v)$ の連続な分枝 $\varpi_1(u,v)$ として P において PP' が u 軸となす鋭角の負値をとろう.

- このとき、点 Q においては、
  $\varpi_1(u,v)$ は $-\pi$ にベクトル QQ' が u 軸となす鋭角を加えた値をとる.

(9) T による点-像ベクトルの回転

定義. 関数 $\omega(u,v)$ の連続な分枝 $\omega_1(u,v)$ として、S の上端 C_a において 0 をとるものを固定しよう.

主張. 関数 $\omega_1(u,v)$ は Q において、また C_b 上のすべての点において $-\pi$ である.

- 2 つの関数 $\varpi_1(u,v)$ と $\omega_1(u,v)$ は P において $\pi/2$ 未満しか違わない.
- だから不等式 (5) で結びついた $\varpi(u,v)$ と $\omega(u,v)$ の分枝もそうであり、
- これは S 全体で成り立つ.
- $\varpi_1(u,v)$ の最終値は Q において $-\pi$ と $\pi/2$ 未満しか違わない.
- だから Q において $\omega_1(u,v)$ は $-\pi$ と π 未満しか違わない.
- ところが $\omega(u,v)$ の任意の分枝は C_b 上で π の奇数倍に等しいことがわかっている.
- だから関数 $\omega_1(u,v)$ は Q において、また C_b 上のすべての点において $-\pi$ であるはず.

- したがって点 (u,v) が C_a 上の点から C_b 上の点へどんな仕方で動いても、$\omega_1(u,v)$ の変化は $-\pi$ である.

- 換言すれば、点 B を S 内でどんな仕方で C_a から C_b に動かしても、
  T による B の像 B' とでつくるベクトル BB' の全回転角は正確に $-\pi$ である.

(10) 証明の完結

- 次に逆変換 T^{-1} を考える.
  この変換は C_a と C_b 上の点を逆方向に動かすという点を除いて T によく似ている.
  対称性により、B' と T^{-1} による像 B を結ぶベクトル $B'B$ は
  B と B' が C_a から C_b へ動く間に $+\pi$ だけ回転する.

- ここでベクトル $B'B$ は BB' と逆方向を向いている.
  しかし 2 つのベクトル BB' と $B'B$ の実際の回転はもちろん同じである.
  だから矛盾が導かれた.

定理は完全に証明された.