解説：谷川清隆

球状恒星系のもっとも確からしい位相分布および その存在の条件

V.A. Antonov, *Vest. Lenigr. gos. Univ.* **7**, 135, 1962

要約

球状の壁に囲まれた角運動量ゼロの恒星系を考える。
恒星系のエントロピー S は

$$S = -\int f \ln f d\mathbf{r} d\mathbf{v}$$

で定義されるとする。

このとき等温平衡球状恒星系（$N = \infty$ のポリトロープの系）のエントロピーが，ある条件のもとで相対的極大になっていることを示す。その条件とは $\nu_c/\nu_e < 1/709$（ν_c/ν_e はそれぞれ中心とへりの数密度）である。この条件を満たさないときはエントロピーは極大になっていない。

このことを示すのに以下のようにする。

系の全エネルギー，質量，半径を決めたとしても，これら3つの量を共通に持つ分布関数 f は無数にある。これらすべてと等温平衡球状恒星系の分布関数（f_0 としよう）と比較するのは大変であるから，§1，§2でこれらの f の数をしぼる。

§1では f として速度分布がマクスウェル分布のものを考えればよいことがわかる。

§2では密度分布球対称の f を考えればよいことがわかる。こうして

$$\delta S = S_0 - S = -\int f_0 \ln f_0 d\mathbf{r} d\mathbf{v} + \int f \ln f d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \delta S_1 + \delta S_2$$

を計算する（§4）。ここで δS_1 は1次変分，δS_2 は2次変分である。§6でわかるように，δS_2 の正負の問題は固有値問題に帰着する。§9，§10では，不安定な等温平衡球状恒星系の進化の行先を定性的に論ずる。

§1 エネルギー，質量，密度分布の共通な任意の恒星系のうちで，各点の速度分散の等しい（即ち等温の）マクスウェル分布の系のエントロピーが極大である

分布関数を $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ で表わす。ただし $f(\mathbf{r},\mathbf{v})d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ は数を表わすとする。エントロピーを S で表わせば，

$$S=-\int f\ln f d\mathbf{r}d\mathbf{v} \tag{1.1}$$

さて，今一群の $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})$ を考える。これらの $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})$ は

$$\nu(\mathbf{r})=\int f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})d\mathbf{v} \tag{1.2}$$

$$K=m\int\int f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot\frac{v^2}{2}d\mathbf{r}d\mathbf{v} \tag{1.3}$$

に同じ値を与えるものとする。ここで $\nu(\mathbf{r})$，K はそれぞれ系内の粒子数密度分布と全運動エネルギーである。明らかにこれらの $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})$ によって記述される系はみな全エネルギー，質量，系の形が共通である。異なるのは速度分布の形だけである。

これらの $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})$ のうち (1.1) を極大にするものを求めよう。変分法の定理によって，ある $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})$ が (1.2)，(1.3) を満たし，(1.1) を極大値にするなら，$\lambda(\mathbf{r})$，μ が存在して

$$\delta_{1\text{次}}\left(S+\int\lambda(\mathbf{r})\nu(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\mu K\right)=0 \tag{1.4}$$

かつ

$$\delta_{2\text{次}}\left(S+\int\lambda(\mathbf{r})\nu(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\mu K\right)<0 \tag{1.5}$$

を満たす。ただし $\delta_{1\text{次}}()$，$\delta_{2\text{次}}()$ はそれぞれカッコ内の量の 1 次変分，2 次変分である。

(1.1)，(1.2)，(1.3) によって (1.4) を具体的に書けば

$$0=\int\int\left(-\ln f_\alpha-1+\lambda(\mathbf{r})+\frac{mv^2}{2}\mu\right)\delta f_\alpha d\mathbf{r}d\mathbf{v}$$

これから

$$-\ln f_\alpha-1+\lambda(\mathbf{r})+\frac{mv^2}{2}\mu=0$$

すなわち

$$f_\alpha=e^{\lambda(\mathbf{r})-1+\frac{mv^2}{2}\mu}$$

が得られる。ところで $\nu(\mathbf{r})=\int f_\alpha d\mathbf{v}=e^{\lambda(\mathbf{r})-1}(2\pi/(-m\mu))^{\frac{2}{3}}$ であるから $D=-1/m\mu$ とおけば，

$$f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})=(2\pi D)^{-\frac{2}{3}}\nu(\mathbf{r})e^{\frac{-v^2}{2D}} \tag{1.6}$$

が得られる。速度分布はマクスウェル分布になっている。μ は定数であるから D も定数である。従って系内で速度分散は一定（すなわち系は等温）である。
　一方

$$\delta_{2\text{次}}\left(S+\int\lambda(\mathbf{r})\nu(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\mu K\right)=-\int\int\frac{1}{2f}(\delta f)^2 d\mathbf{r}d\mathbf{v}$$

であるから (1.5) はいつも満たされている。
　のちのちのために分布関数が (1.6) で与えられるときの系の巨視的な物理量を表わしておこう。

$$S=\int\nu\left(\frac{3}{2}\ln 2\pi D+\frac{3}{2}-\ln\nu\right)d\mathbf{r} \tag{1.7}$$

$$M=m\int\nu d\mathbf{r} \tag{1.8}$$

$$K=m\int\frac{3D}{2}\nu d\mathbf{r} \tag{1.9}$$

$$U=m\int\frac{\Phi}{2}\nu d\mathbf{r} \tag{1.10}$$

$$E=m\int\left(\frac{3D}{2}+\frac{\Phi}{2}\right)\nu d\mathbf{r} \tag{1.11}$$

ここで K，U，E は系の運動エネルギー，ポテンシャルエネルギー，全エネルギーである。Φ は単位質量あたりのポテンシャルエネルギーである。

§2 エネルギーと質量の共通なさまざまな形状の恒星系のうちで，密度の中心集中した球対称の系（$\nu=\nu(r)$）のエントロピーが最大である（ただし角運動量 0 とする）

　§1 での選び出しでわかったように，今後行う分布関数の選び出しにおいては，速度分布が各点で分散の等しいマクスウェル分布になっている分布関数の中からエントロピーを極大にする分布関数を選び出すようにすればよい。
　いまのところ密度分布については何の選び出しも行っていない。この節では密度分布のおおまかな選び出しを行おう。すなわち物質要素を密度を変えることなく単に移動させる（そして系全体のエネルギーを保存させる）変形によって得られる無数の分布関数のうち，エントロピーを極大にするものを選び出そう。
　これらの分布関数はみな (1.6) の形をしている。したがって，系の巨視的な量は (1.7)〜(1.11) で表わされる。
　さて物質要素内の密度も速度分布も変えずに物質要素を移動させ，物質分布が球対称でかつ中心ほど密度の濃い分布になるようにする。このような移動を

行うと，(1.7)，(1.8)，(1.9) によって S, M, K は変化しない。ところが (1.10) によって U は減少する。(1.11) の E を一定に保つためには D を増やさねばならぬ。そうすると (1.7) によって S は増大する。

従って任意の形状から密度の中心集中した球状に系を非圧縮変形する（全エネルギーを一定に保って）とエントロピーは増大する。

だからエネルギーと質量の共通な系のうちで極大のエントロピーを有する系を選び出すには，互いに非圧縮変形では移り得ない無数の $\nu = \nu(r)$，$d\nu/dr < 0$ の系の中から選び出せば十分である。一般に全角運動量の 0 でない系の場合には，その場合のポテンシャル極小の形状の系の中から選び出せばよい。

§3 球状かつ等温の平衡形状 – 等温球状恒星系

§1 で見たように，どんな密度分布であれ，速度分布が等温のマクスウェル分布になっているならば，エントロピーは極大になっているし，逆に速度分布が等温のマクスウェル分布になっていなければ，どんな密度分布であろうともエントロピーは極値にならない。

また §2 で見たように，系の全角運動量が 0 ならば，エネルギーと質量の共通な任意の形状の系の中で密度集中した球状の系のエントロピーが最大である。

後の節で平衡状態のエントロピーの変分をとり，その平衡状態のエントロピーが極大になっているかどうかを調べるのであるが，この節ではその平衡状態の分布関数を求めよう。

§1，§2 で得られた結果から，この平衡状態として，我々は球状で等温マクスウェル分布の自己重力系を考えれば十分である。なぜなら，これ以外の系がエントロピーを極大にしないことは明らかであるから。

さて，系は球対称で等温マクスウェル分布をしているから，分布関数は (1.6) より，

$$f(r, v^2) = (2\pi D)^{-\frac{3}{2}} \nu(r) e^{-\frac{v^2}{2D}} \tag{3.1}$$

で与えられる。

今考えている系は平衡状態にあるから，分布関数 (3.1) はボルツマン方程式

$$\mathbf{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = 0 \tag{3.2}$$

を満たす。(3.1) の $f(r, v^2)$ を

$$f(r, v^2) = (2\pi D)^{-\frac{3}{2}} \nu e^{\frac{\Phi}{D}} e^{-(\frac{v^2}{2}+\Phi)/D}$$

と書いて (3.2) に代入しよう。このとき $e^{-(\frac{v^2}{2}+\Phi)/D}$ は個々の星の運動の結分

$\frac{m}{2}v^2 + m\Phi$ の関数であるから微分の外に出て，

$$(2\pi D)^{-\frac{3}{2}} e^{-(\frac{v^2}{2}\cdot\Phi)/D} \left(v_r \frac{\partial \nu}{\partial r} e^{\frac{\Phi}{D}} + \nu v_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{1}{D} e^{\frac{\Phi}{D}} \right) = 0$$

すなわち

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{\nu}{D} \cdot \frac{d\Phi}{dr}$$

となる。これを積分して

$$\nu = ce^{-\frac{\Phi}{D}} \tag{3.3}$$

が得られる。c は積分定数である。

(3.3) は等温マクスウェル分布の定常系における密度と単位質量あたりのポテンシャルエネルギー（したがってポテンシャル）との間の関係を示す式である。

また考えている平衡状態の系は自己重力系であるから，ポアッソン方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G m \nu \tag{3.4}$$

を満たす。

(3.3) と (3.4) から密度のふるまいを記述する微分方程式が得られ，それを積分すれば密度分布がわかり，その密度分布を (3.3) に代入すれば Φ のふるまいがわかる。その ν と Φ を (3.1) に代入すれば分布関数 $f(r, v^2)$ がわかる。順を追って求めていこう。まず (3.3) と (3.4) を連立させると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d \ln \nu}{dr} \right) = -4\pi G m \nu / D \tag{3.5}$$

が得られる。2 階の微分方程式なので境界条件を 2 つ与えないと解は決まらない。中心における条件を与えよう。1 つは $r = 0$ で $\nu = \nu_0$。

もう 1 つ，解が物理的に意味のあるものであるためには $r = 0$ で $d\nu/dr = 0$ でなければならぬ。結局，境界条件は，

$$\nu = \nu_0, \quad \frac{d\nu}{dr} = 0 \qquad at \quad r = 0 \tag{3.6}$$

のちの議論に便利なように，ここで無次元変数および関数を導入して (3.5), (3.6) を書き換えよう。次のように変換する：

$$\begin{aligned} r &= R_\xi \\ \nu &= \eta \nu_0 \\ R^2 &= D/4\pi G m \nu_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

これを用いると，(3.5) は

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right) = -\eta \tag{3.8}$$

(3.6) の境界条件は

$$\xi = 0 \quad \text{のとき} \qquad \eta = 1, \quad d\ln\eta/d\xi = 0 \tag{3.9}$$

となる。

(3.5) は，たとえばチャンドラセカールの教科書「Stellar Structure」に載っている通り，詳しく調べられている方程式である。ここではこの式を等温エムデン方程式と呼ぶことにする。実は，この式は解析的に積分できないので，η すなわち ν を変数の陽な関数として書けず，したがって $f(r,v^2)$ も r に関して陽な形に書き表わせない。このために，のちの節で行う変分の極大か否かの吟味がかなりめんどうなものになる。

しかし，ともかく η のふるまいは数値積分によってすでに十分わかっている。したがって $\Phi(r)$ のふるまいも $f(r,v^2)$ のふるまいも十分にわかっていると思ってよい。

§4 エネルギー，質量一定の条件のもとで，等温球状自己重力系のエントロピーの 2 次変分を求める

あらためて等温球状自己重力系の系のエントロピー，質量，エネルギーの表式を書いておこう。

$$S = \int \nu\left(\frac{3}{2}\ln 2\pi D + \frac{3}{2} - \ln\nu\right)d\mathbf{r} \tag{4.1}$$

$$M = m\int \nu d\mathbf{r} \tag{4.2}$$

$$E = m\int\left(\frac{3}{2}D + \frac{\Phi}{2}\right)\nu d\mathbf{r} \tag{4.3}$$

ただし，

$$\nu = ce^{-\frac{\Phi}{D}} \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi Gm\nu \tag{4.5}$$

ここで注意すべきことは，等温球状の非定常な自己重力系は (4.4) を満たさないだけで，残りの 4 つの式をすべて満たしていることである。そしてそのような非定常な系は無限に多数あり，(4.4) も満たす定常な系はただ 1 つそれらの

中に埋まっていると考えられる。我々がこれからやることは，その定常系がその近傍の非定常系に比べて大きなエントロピーを持つか否かである。

変分をとろう。汎関数 S の独立変数は分布関数 $f(r, v^2)$ なのであるが，すでに f の速度依存性は等温マクスウェルと決まっているので，変り得るのは密度依存性つまり密度分布だけである。汎関数 S の独立変数は，だから $\nu(r)$ であると思ってよい。(4.1) はすでにそういう形をしている。あるいは，$\nu(r)$ と $\Phi(r)$ はポアッソン方程式によって一意的に結びついているから，汎関数 S の独立変数は $\Phi(r)$ と思ってもよい。δS, δM, δE の被積分関数には $\delta\nu$, $\delta\Phi$, δD, が入っているが，独立なのはこのうち 1 つだけである。2 次の精度まで S, M, E の変分をとると，

$$\delta S = \int \left\{ \nu \left[\frac{3}{2}\frac{\delta D}{D} - \frac{3}{4}\left(\frac{\delta D}{D}\right)^2 \right] + \frac{3}{2}\delta\nu\frac{\delta D}{D} + \frac{3}{2}\delta\nu \ln D - (\ln\nu + 1)\delta\nu - \frac{(\delta\nu)^2}{2\nu} \right\} d\mathbf{r} \tag{4.6}$$

$$\delta M = m\int \delta\nu d\mathbf{r} = 0 \tag{4.7}$$

$$\delta E = \frac{3}{2}m(\nu\delta D + D\delta\nu + \delta D\delta\nu)d\mathbf{r} + \frac{m}{2}\int(2\Phi\delta\nu + \delta\Phi\delta\nu)d\mathbf{r} = 0 \tag{4.8}$$

ただし，(4.8) を導くにあたって

$$\int \Phi\delta\nu d\mathbf{r} = \int \nu\delta\Phi d\mathbf{r}$$

であることを利用した。これはポアッソン方程式を用いて容易に証明できる。

さて §1 におけると同様に，M, E を一定にしたときの S の極大・極小を調べるには，α, β を定数として $S + \alpha M + \beta E$ の変分を吟味すればよい。1 次の変分を $(\delta S + \alpha\delta M + \beta\delta E)_{1次}$ と書き，2 次の変分を $(\delta S + \alpha\delta M + \beta\delta E)_{2次}$ と書けば，

$$\begin{aligned}
&(\delta S + \alpha\delta M + \beta\delta E)_{1次} \\
&= \int \left(\frac{3}{2}\frac{\nu}{D} + \frac{3}{2}\beta m\nu\right)\delta D d\mathbf{r} \\
&\qquad + \int \left(\frac{3}{2}\ln D - \ln\nu - 1 + \alpha m + \frac{3}{2}\beta m D + \beta m\Phi\right)\delta\nu d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
&(\delta S + \alpha\delta M + \beta\delta E)_{2次} \\
&= \int \left[-\frac{(\delta\nu)^2}{2\nu} + \frac{3\nu}{4D^2}(\delta D)^2 + \frac{3}{2D}\delta\nu\delta D + \frac{3}{2}\beta m\delta D\delta\nu + \frac{1}{2}\beta m\delta\Phi\delta\nu \right] d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

エントロピーが極値になるための必要条件は (4.9) が 0 になることであるが，そのためには

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{mD} \\ \alpha &= \frac{1}{m}\left(\ln C + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\ln D\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

であればよいことは容易に確かめられる。すなわち，(4.1)〜(4.5) を満たす等温球状自己重力系のエントロピーは，系の質量とエネルギーを固定すれば，すくなくとも停留値になっている。§1 の場合と違って今回は密度分布の異なる系と比較していることに注意しよう。定数 α, β の値を (4.10) に代入すれば，

$$(\delta S + \alpha\delta M + \beta\delta E)_{2次} = \int\left[-\frac{(\delta\nu)^2}{2\nu} + \frac{3\nu}{4D^2}(\delta D)^2 + \frac{\delta\nu\delta\Phi}{2D}\right]d\mathbf{r} \tag{4.12}$$

前に述べたように δD，$\delta\Phi$ は $\delta\nu$ と独立ではない。δD，$\delta\nu$ の項を $\delta\Phi$ によって書き直そう。まず δD から。エネルギー一定の条件 (4.8) から，

$$\delta D = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\int \Phi\delta\nu d\mathbf{r}}{\int \nu d\mathbf{r}} + \cdots \tag{4.13}$$

破線にしたところは 2 次以上の項であり，ここでは重要ではない。それらの項は (4.12) に代入すると 4 次以上の項になってしまう。また (4.13) を導くにあたっては，δD が座標に依存しないことを利用したが，これは変分のとり方から明らかである。今回の変分では速度分布は等温マクスウェルに固定してあるからである。

(4.13) を (4.12) に代入しよう。またこれ以後 $(\delta S+\alpha\delta M+\beta\delta E)_{2次} = \delta S_2$ と簡便に書こう。

$$\delta S_2 = -\int\left[\frac{(\delta\nu)^2}{2\nu} + \frac{\delta\nu\delta\Phi}{2D}\right]d\mathbf{r} - \frac{3(\int \Phi\delta\nu d\mathbf{r})^2}{4D^2\int \nu d\mathbf{r}}$$

ν や Φ は球対称であり，$\delta\nu$ も $\delta\Phi$ も球対称にとるから，上の積分は中心からの距離 r だけの積分になる。系の半径を r_e とすると：

$$\delta S_2 = -2\pi\int_0^{r_e}\left[\frac{(\delta\nu)^2}{\nu} + \frac{\delta\nu\delta\Phi}{D}\right]r^2dr - \frac{4\pi(\int_0^{r_e} r^2\Phi\delta\nu dr)^2}{3D^2\int_0^{r_e} r^2\nu dr} \tag{4.14}$$

次に $\delta\nu$ を $\delta\Phi$ で表わすことが残っている。

今，変数 T として次のような量を導入しよう：

$$T = \frac{r^2}{4\pi mG}\cdot\frac{d\delta\Phi}{dr} \tag{4.15}$$

ポアッソン方程式 (3.4) から，$\delta\nu$ と $\delta\Phi$ は

$$4\pi mG\delta\nu = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\delta\Phi}{dr}\right) \tag{4.16}$$

で結びついている。従って，

$$\delta\nu = \frac{1}{r^2}\frac{dT}{dr} \tag{4.17}$$

である。これを (4.14) に代入すれば，結局 δD，$\delta\nu$ は $\delta\Phi$ で表わせたことになる。

ところで，$\delta\Phi$，従って T はまったく任意ではない。もちろん前に述べたように球対称という制限はついているが，それ以外に質量一定という条件がある。(4.7) から

$$\int_0^{r_e} r^2\delta\nu dr = 0 \tag{4.18}$$

であり，従って

$$\begin{aligned} &T(r_e) = T(0) = 0 \\ \text{かつ} & \\ &r \to 0 \quad \text{のとき} \qquad T(r) \propto r^3 \end{aligned} \tag{4.19}$$

である（この証明は Appendix I 参照）。

(4.19) の最初の関係式を利用して，(4.14) の δS_2 を書き換える。まず第 1 項の 2 番目は

$$\int_0^{r_e} r^2\delta\nu\delta\Phi dr = \int_0^{r_e}\frac{dT}{dr}\delta\Phi dr = -\int_0^{r_e} T\frac{d\delta\Phi}{dr}dr = -4\pi mG\int_0^{r_e}\frac{T^2}{r^2}dr$$

第 2 項の分子は

$$\int_0^{r_e} r^2\Phi\delta\nu dr = \int_0^{r_e}\Phi\frac{dT}{dr}dr = -\int_0^{r_e} T\frac{d\Phi}{dr}dr$$

結局 (4.14) の δS_2 は次の形になる：

$$\delta S_2 = -2\pi\int_0^{r_e}\left[\frac{1}{r^2\nu}\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 - \frac{4\pi mG}{D}\frac{T^2}{r^2}\right]dr - \frac{4\pi(\int_0^{r_e} T\frac{d\Phi}{dr}dr)^2}{3D^2\int_0^{r_e} r^2\nu dr} \tag{4.20}$$

§5 等温平衡球状恒星系のリニアー・シリーズ– 壁にかこまれた等温平衡球状恒星系はエネルギーと質量を固定しても唯一ではない

系を記述する式をあらためて書いておこう。(3.8)，(3.9) より，

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)=-\eta \tag{5.1}$$

$$\xi=0 \quad \text{のとき} \qquad \eta=1, \quad d\ln\eta/d\xi=0 \tag{5.2}$$

密度 ν，中心からの距離 r と η，ξ との関係は (3.7) より，

$$\begin{aligned} r &= R\xi \\ \nu &= \nu_0\eta \\ R^2 &= D/4\pi Gm\nu_0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで ν_0 は中心密度である。

系の半径を r_e とし，そこでの ξ，ν，η をそれぞれ ξ_e，ν_e，η_e とする。(5.3) より，

$$\begin{aligned} r_e &= R\xi_e \\ \nu_e &= \nu_0\eta_e \end{aligned} \tag{5.4}$$

いろいろな量を M，E，ξ_e で表わしてみよう。そのために，まず種々の量の関係式を導いておく。

質量 M は

$$M=4\pi m\int_0^{r_e}r^2\nu dr=4\pi m\nu_0R^3\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2d\xi$$

(5.3) の最初と最後の関係式を使うと，

$$GM=Dr_e\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2d\xi/\xi_e \tag{5.5}$$

運動エネルギー K は

$$K=\frac{3}{2}MD \qquad \text{((1.9) より明らか)} \tag{5.6}$$

ポテンシャルエネルギー U は

$$U=\frac{1}{2}MD\left[-\frac{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2\ln\eta d\xi}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2d\xi}+\ln\eta_e-\frac{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2d\xi}{\xi_e}\right] \qquad \text{（}AppendixII\text{ 参照）} \tag{5.7}$$

あるいは

$$U=MD\left[\frac{\eta_e{\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2d\xi}-3\right] \qquad \text{（}AppendixIII\text{ 参照）} \tag*{(5.7)$'$}$$

従ってエネルギー $E = K + U$ は

$$E = MD\left[\frac{\eta_e {\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} - \frac{3}{2}\right] \tag{5.8}$$

上の関係式からいろいろな量が M，E，ξ_e で表わされる。

$$D = \frac{E}{M}\left[\frac{\eta_e {\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} - \frac{3}{2}\right]^{-1} \tag{5.9}$$

$$K = \frac{3}{2}E\left[\frac{\eta_e {\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} - \frac{3}{2}\right]^{-1} \tag{5.10}$$

$$U = E\left[\frac{\eta_e {\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} - \frac{3}{2}\right]^{-1}\left[\frac{\eta_e {\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} - 3\right] \tag{5.11}$$

(5.5) から

$$r_e = \frac{GM^2}{E}\left[\frac{\eta_e {\xi_e}^3}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} - \frac{3}{2}\right]\frac{\xi_e}{\int_0^{\xi_e} \eta\xi^2 d\xi} \tag{5.12}$$

その他，R，ν_0，ν_e なども M，E，ξ_e で表わされる。とくに (5.12) の関係をグラフに描いてみると次のようになる。

図 1 - fig1.pdf

横座表は $-\ln\eta_e$（η_e は中心とへりとの密度比）にとっているが，η_e と ξ_e とは等温エムデン方程式によって一意的に結びついているので問題ない。しかも ξ_e より η_e の方が物理的意味が明らかである。

さて図から明らかなように，等温平衡球状恒星系はエネルギーと質量を固定しても一意に決まらない。系は密度比 η_e をパラメーターにした平衡系のリニアー・シリーズをなしている。

E，M，r_e を固定しても系が一意に決まらない場合がある。しかし E，M，ξ_e (or η_e) を固定すると系は一意に決まる。

E，M を固定すると，ある半径（$r_e = -0.335GM^2/E$）より大きい等温平衡球状恒星系は存在しない。

§6 δS_2 の正負を吟味する。その 1

これから我々が調べるのは，前節の図の曲線上の一点に対応する等温平衡球状恒星系のエントロピーが，その近傍の等温非定常球状恒星系のエントロピーの中で極大値になっているか否かである。

線上の隣同士の系の間で比較するのではない。したがって我々は E，M，ξ_e を固定して変分をとり，第 2 変分 δS_2 の正負を吟味する。そして次に E，M はそのままにして ξ_e を別の値にし，E，M とその新しい ξ_e のもとで第 2 変分 δS_2 の正負を吟味する。

そこで，(4.20) の δS_2 の表式を (3.7) を用いて書き換える。

$$R^3\nu_0\delta S_2 = -2\pi\int_0^{\xi_e}\left[\frac{1}{\eta\xi^2}\left(\frac{dT}{d\xi}\right)^2 - \frac{T^2}{\xi^2}\right] - \frac{4\pi(\int_0^{\xi_e} T\frac{d\Phi}{d\xi}d\xi)^2}{3D^2\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi} \qquad (6.1)$$

ここで $T = T(r) = T(R\xi)$，$\Phi = \Phi(r) = \Phi(R\xi)$ であり，E，M，ξ_e を固定すれば §5 で見たように R，ν_0，D は定まるので，T，Φ は ξ の関数とみることができる。そして (4.19) より T は ξ の関数として次の性質をもつ。

$$\begin{aligned} & T(R\xi_e) = T(0) = 0 \\ \text{かつ}\quad & \\ & \xi \to 0 \quad \text{のとき} \qquad T \propto \xi^3 \end{aligned} \qquad (6.2)$$

(6.1) を見ればわかる通り，第 2 項は常に負または 0 である。そこで (6.2) の 1 番目の条件を用いて (6.1) の第 1 項を書き換えてみる：

$$-2\pi\int_0^{\xi_e}\left[\frac{1}{\eta\xi^2}\left(\frac{dT}{d\xi}\right)^2 - \frac{T^2}{\xi^2}\right]d\xi = 2\pi\int_0^{\xi_e} T\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT}{d\xi}\right) + \frac{T}{\xi^2}\right]d\xi \qquad (6.3)$$

これからわかることは T がもし

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT}{d\xi}\right)+\frac{T}{\xi^2}=0$$

を満たしていれば，δS_2 の第 1 項は 0 になることである。もちろん一般に T はこれを満たすとは限らない。

ところで上の微分方程式はスツルム・リュービル型の微分方程式である。

一般に

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d\psi}{d\xi}\right)+\lambda\frac{\psi}{\xi^2}=0 \tag{6.4}$$

なるスツルム・リュービル型微分方程式に $\psi(0)=\psi(\xi_e)=0$ なる境界条件が与えられた場合，次のことがわかっている。ただしある数 λ（定数）が与えられたとき，ある ψ が (6.4) を満たすならば，λ を (6.3) の固有値と呼び，ψ を λ に対応する固有関数と呼ぶ。

1　固有値を小さい順に並べると可付番列 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$ になり，それに対応する固有関数の列 ψ_n は完全直交系をなす。また，(6.2) と同じ境界条件を満たす連続関数 $T(\xi)$ で，区分的に連続な 2 階までの導関数をもつものはすべて

$$T(\xi)=\sum_n C_n\psi_n \tag{6.5}$$

と表わされ，この和は絶対収束する。

2　第 n 固有関数は区間 $(0,\xi_e)$ で $n-1$ 回 0 になる。とくに第 1 固有関数は区間内で 0 にならない。

3　区間が $(0,\xi_e)$ の場合の固有値，固有関数を λ_n,ψ_n，区間が $(0,\xi_e')$ の場合の固有値，固有関数を λ_n',ψ_n' とするとき，$\xi_e'>\xi_e$ ならば

$$\lambda_n\geq\lambda_n'$$

さて，δS_2 の表式 (6.1) に含まれる T は条件 (6.2) を満たす勝手な関数であるが，1 によって (6.5) のように固有関数展開できる。（勝手であるといっても T が区分的に連続な 2 階までの導関数を持っていると仮定する）

T が実際 (6.5) に展開されたとして，これを (6.3) に代入しよう。

$$
\begin{aligned}
&2\pi \int_0^{\xi_e} T\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT}{d\xi}\right)+\frac{T}{\xi^2}\right]d\xi \\
&= 2\pi \int_0^{\xi_e} (\sum_n C_n\psi_n)\left[\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d}{d\xi}(\sum_m C_m\psi_m)\right\}+\frac{1}{\xi^2}(\sum C_m\psi_m)\right]d\xi \\
&= 2\pi \sum_{n,m} C_nC_m \int_0^{\xi_e} \psi_n\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d}{d\xi}\psi_m\right)+\frac{\psi_m}{\xi^2}\right]d\xi \\
&= 2\pi \sum_{n,m} C_nC_m \int_0^{\xi_e} \psi_n(1-\lambda_m)\frac{\psi_m}{\xi^2}d\xi \\
&= 2\pi \sum_n C_n^2(1-\lambda_n)\int_0^{\xi_e}\frac{\psi_n^2}{\xi^2}d\xi
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

ただし上式を導出するにあたって

$$
\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d}{d\xi}\psi_n\right)+\lambda_n\frac{\psi_n}{\xi^2}=0 \tag{6.7}
$$

$$
\int_0^{\xi_e}\frac{\psi_n\psi_m}{\xi^2}d\xi=0 \qquad (n\neq m) \tag{6.8}
$$

を用いた。

(6.6) は $\lambda_n > 1 \quad (n=1,2,\cdots)$ ならつねに負である。つまり $\lambda_1 > 1$ なら負である。このときには δS_2 は任意の $T(\xi)$ に対して負である。3 からわかるように，$\xi_e \to$ 小 のとき $\lambda_1 \to$ 大 である。だから ξ_e の値によって (6.6) は正になったり，負になったりすると予想される。

そして実際，性質 2 によれば，$\xi_e \to 0$ のとき $\lambda_1 \to \infty$ であることがわかる。というのは，ある ξ_e をとったときの固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots,$ 対応する固有関数を $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots,$ としたとき，φ_n の最初の零点を ξ_e' とすれば，区間 $(0, \xi_e')$ における最初の固有値と固有関数は λ_n と φ_n である。n を大きくとれば λ_n はいくらでも大きくなる。

従って δS_2 が負になるような ξ_e は必ず存在し，ξ_e がそれより小さければ，やはり δS_2 は負になる。つまり定性的に言えば，ρ_c/ρ_e（中心とへりの密度比）の小さい等温平衡球状恒星系のエントロピーは極大であり，安定である。

そこで問題は $\lambda_1 = 1$ となるような ξ_e を求めることになる。

いま，

$$
\varphi(\xi) = -RD\xi^2\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right) = RD\left(\eta\xi^3+\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right) \tag{6.9}
$$

を考えると，

$$
\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\frac{\varphi}{\xi^2}=0 \tag{6.10}
$$

である。すなわち φ は微分方程式 (6.4) の固有値 1 に対応する固有関数である。だから φ の最初の零点を ξ_e に選べば，区間 $(0, \xi_e)$ における最初の固有値が 1 になる。

$\varphi(\xi)$ のふるまいを数値積分によって調べると，

$$
\begin{aligned}
\xi &= \xi_0 = 0 \\
\xi &= \xi_1 \simeq 8.9 \\
\xi &= \xi_2 \simeq 98 \\
\xi &= \xi_3 \qquad (\quad > 800) \\
& \cdots \\
\xi &= \xi_n \\
& \cdots
\end{aligned}
$$

のとき $\varphi(\xi) = 0$ である。$\varphi(\xi)$ の定性的なふるまいを図に描けば次のようになる：

図 2 - fig2.pdf

以上のことから $\xi_e < \xi_1$ のときには等温平衡球状恒星系のエントロピーは極大であり，系は安定であることがわかる。

次に $\xi_e = \xi_1$ のときには $T = C\varphi(\xi)$ のときに δS_2 の表式 (6.1) の第 1 項は 0 になる。同時に第 2 項も 0 になれば，$\delta S_2 = 0$ となってエントロピーが極大かどうかわからない。そこで $T = C\varphi(\xi)$ のときの第 2 項を求めてみよう：

$$\int_0^{\xi_1} T \frac{d\Phi}{d\xi} d\xi = C \int_0^{\xi_1} \varphi(\xi) \frac{d\Phi}{d\xi} d\xi$$

$\varphi(\xi)$ は区間 $(0,\, \xi_1)$ で正であり，(4.4) から $d\Phi/d\xi = -D d \ln \eta / d\xi > 0$ であるから上の積分は 0 にならない。従って δS_2 の第 2 項は負である。

結局 $\xi_e \leq \xi_1$ のとき，等温平衡球状恒星系のエントロピーは極大であり，系は安定である。

E, M を固定したときの安定な等温平衡球状恒星系の半径は (5.12) によって与えられる。

§7 δS_2 の正負を吟味する。その 2

$\xi_e > \xi_1$ の場合を考えよう。このとき (6.4) の最初の固有値 $\lambda_1 < 1$ であり，従って (6.6) を正にするような T が存在しうる。このような T をとると，δS_2 の表式 (6.1) の第 1 項は正，第 2 項は 0 ないしは負となり，第 1 項と第 2 項の絶対値の大小が問題になるので前節より詳しい解析が必要である。

あらためて (6.1) と (6.4) を書いておこう。

$$
\begin{aligned}
R^3\nu_0\delta S_2 &= 2\pi\int_0^{\xi_e} T\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT}{d\xi}\right)+\frac{T}{\xi^2}\right]d\xi-\frac{4\pi(\int_0^{\xi_e}T\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi)^2}{3\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi}\\
&= 2\pi\sum_n C_n^2(1-\lambda_n)\int_0^{\xi_e}\frac{\psi_n^2}{\xi^2}d\xi-\frac{4\pi(\int_0^{\xi_e}T\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi)^2}{3\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

$$
\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d\psi_n}{d\xi}\right)+\lambda_n\frac{\psi_n}{\xi^2}=0 \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{7.2}
$$

ただし

$$
T(\xi)=\sum_n C_n\psi_n \tag{7.3}
$$

また

$$
\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\frac{\varphi}{\xi^2}=0 \tag{7.4}
$$

はじめに ξ_e を大きくとろう。$\xi_e=\xi_2$ としてみる。ξ_2 は $\varphi(\xi)$ の正の 2 番目の零点である。すると $\varphi=\psi_2$（定数倍違いうるが今は重要でないので無視）であり，$\lambda_2=1$ である。当然 $\lambda_1<1$ である。

$T(\xi)=C_1\psi_1+C_2\psi_2$ としてみよう。すると (7.1) の第 1 項は $C_1\neq 0$ である限り正である。次に (7.1) の第 2 項を評価しよう。

$$
\int_0^{\xi_e}T\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi=C_1\int_0^{\xi_e}\psi_1\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi+C_2\int_0^{\xi_e}\psi_2\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi \tag{7.5}
$$

区間 $(0,\xi_2)$ で $\psi_1>0$, $d\ln\eta/d\xi<0$ であるから第 1 項は負である。だから第 2 項の積分が 0 でない限り，

$$
C_1/C_2=-\int_0^{\xi_e}\psi_2\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi\bigg/\int_0^{\xi_e}\psi_1\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi
$$

なる C_1, C_2（ともに $\neq 0$）をとって (7.5) を 0 にすることができる。実際 $\psi_2 = \varphi(\xi) = \xi^2\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)$ を代入して (7.5) の第 2 項を積分すれば 0 でないことがわかるから，(7.5) は 0 にできる。

結局 $\xi_e = \xi_1$ のときには $T = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$（$C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0$）があって，その T に対しては $\delta S_2 > 0$ となる。だから $\xi_e = \xi_2$ のときには等温平衡球状恒星系のエントロピーは極大でなく，系は安定でない。

次に $\xi_1 < \xi_e < \xi_2$ の場合を考えよう。

次の関数を導入する。

$$T_0 \equiv \varphi(\xi) + \frac{\varphi(\xi_e)}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi}\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi} \tag{7.6}$$

明らかに $T_0(0) = T_0(\xi_e) = 0$ である。また $\xi \to 0$ のとき $T_0 \propto \xi^3$ である。これは $\xi \to 0$ のとき $d\ln\eta/d\xi = -\xi/3 + \xi^3/30$ を用いればただちにわかる。したがって T_0 は (4.19) を満たしているので，T として使える。

$T = T_0$ の場合の δS_2 を評価しよう。まず δS_2 の第 1 項

$$2\pi\int_0^{\xi_e} T_0\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_0}{d\xi}\right) + \frac{T_0}{\xi^2}\right]d\xi = 2\pi\frac{\varphi(\xi_e)}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi}\int_0^{\xi_e} T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi \tag{7.7}$$

故に

$$R^3\nu_0\delta S_2 = \left(\varphi(\xi_e) - \frac{2}{3}\int_0^{\xi_e} T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi\right)\frac{2\pi\int_0^{\xi_e} T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi} \tag{7.8}$$

ところで，前節で示したように，$\xi_e < \xi_1$ のときには任意の T に対して，δS_2 の第 1 項は負である。すなわち (7.7) は負である。したがって $\xi_e < \xi_1$ のとき $\int_0^{\xi_e} T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi < 0$ である。また $\xi_e = \xi_1$ のときには $T_0 = \varphi(\xi)$ であるから $\int_0^{\xi_e} T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi = \int_0^{\xi_e}\varphi\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi < 0$ である。まとめると，$\xi_e \leq \xi_1$ のとき

$$\int_0^{\xi_e} T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi < 0 \tag{7.9}$$

したがって $\xi_e \leq \xi_1$ のとき (7.8) のカッコ内の式は正である。ところが後に詳しい計算で示すが，区間 (ξ_1, ξ_2) 内のある ξ_k を境に (7.8) のカッコ内の式は正から負になる。区間 (ξ_1, ξ_k) 内では $\varphi(\xi_e) < 0$ であるから，この区間内で (7.9) の不等式が成り立つ。

上に述べたことからわかるように $\xi_e > \xi_k$ のときには，ξ_e が (7.9) を満たす限り δS_2 の表式は正になる。ところが Appendix で示すように $\xi_e = \xi_e^*$ で δS_2 が正になりうるならば $\xi_e > \xi_e^*$ でも正になりうる。したがってすべての $\xi_e > \xi_k$

で δS_2 は正になりうる。だから $\xi_e > \xi_k$ のとき等温平衡球状恒星系のエントロピーは極大でなく，系は安定でない。

次に $\xi_e = \xi_k$ のとき δS_2 が決して正にならないことを証明しよう。Appendix で示すように $\xi_e = \xi_e^*$ で δS_2 が決して正にならないならば，$\xi_e < \xi_e^*$ では δS_2 は必ず負である。したがって $\xi_e = \xi_k$ のときに δS_2 が決して正にならないことが証明されれば，$\xi_e < \xi_k$ で δS_2 は必ず負であり，等温平衡球状恒星系のエントロピーは極大であり，系は安定であることがわかる。

$\xi_e = \xi_k$ ととる。まず任意の T が次の形で表わされることを示そう：

$$T = \tau T_0 + T_1 \tag{7.10}$$

ただし，T_1 は次の条件に従うものとする：

$$\int_0^{\xi_k} \frac{T_1 \psi_1}{\xi^2} d\xi = 0 \tag{7.11}$$

ψ_1 は $\psi_1(0) = \psi_1(\xi_k) = 0$ を満たす (7.2) の第 1 の固有関数である。

$$\tau = \int_0^{\xi_k} \frac{T\psi_1}{\xi^2} d\xi \bigg/ \int_0^{\xi_k} \frac{T_0 \psi_1}{\xi^2} d\xi \tag{7.12}$$

なる定数 τ を考えると，明らかに $\int_0^{\xi_k} (T - \tau T_0)\psi_1/\xi^2 d\xi = 0$ である。従って $T_1 = T - \tau T_0$ とおけば，T_1 は (7.11) を満たす。つまり T_0 と (7.11) を満たす T_1 によって T は (7.10) のように分けられることになる。ただし (7.12) の分母が 0 になってはいけない。

ところで $\xi_e = \xi_k$ のとき δS_2 の第 1 項 (7.7) は正であったから，(7.1) を見ればわかるように，$T_0 = \sum C_n \psi_n$ としたとき $C_1 \neq 0$ である。よって (7.12) の分母は 0 にはならない。

さて (7.10) を δS_2 の表式 (7.1) に代入しよう。

$$\begin{aligned} &R^3 \nu_0 \delta S_2 \\ &= 2\pi \int_0^{\xi_k} (\tau T_0 + T_1) \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\eta \xi^2} \frac{d(\tau T_0 + T_1)}{d\xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} (\tau T_0 + T_1) \right] d\xi \\ &\qquad\qquad - \frac{4\pi}{3} \frac{\left(\int_0^{\xi_k} (\tau T_0 + T_1) \frac{d \ln \eta}{d\xi} d\xi \right)^2}{\int_0^{\xi_k} \eta \xi^2 d\xi} \end{aligned} \tag{7.13}$$

このうち τ に関して 2 次の項は

$$\tau^2 \left\{ 2\pi \int_0^{\xi_k} T_0 \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\eta \xi^2} \frac{dT_0}{d\xi} \right) + \frac{T_0}{\xi^2} \right] d\xi - \frac{4\pi}{3} \frac{\left(\int_0^{\xi_k} T_0 \frac{d \ln \eta}{d\xi} d\xi \right)^2}{\int_0^{\xi_k} \eta \xi^2 d\xi} \right\}$$

これは ξ_k の定義によって 0 である。

　τ に関して 1 次の項は

$$\tau\left\{2\pi\int_0^{\xi_k}\left[T_0\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_1}{d\xi}\right)+T_1\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_0}{d\xi}\right)+\frac{2T_0T_1}{\xi^2}\right]d\xi\right.$$
$$\left.-\frac{8\pi}{3}\frac{\int_0^{\xi_k}T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi\int_0^{\xi_k}T_1\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi}{\int_0^{\xi_k}\eta\xi^2d\xi}\right\}$$

ところが部分積分すればわかるように $\int_0^{\xi_k}T_0\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_1}{d\xi}\right)d\xi=\int_0^{\xi_k}T_1\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_0}{d\xi}\right)d\xi$ であるから，上式は次のようになる：

$$2\tau\left\{2\pi\int_0^{\xi_k}T_1\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_0}{d\xi}\right)+\frac{T_0}{\xi^2}\right]d\xi-\frac{4\pi}{3}\frac{\int_0^{\xi_k}T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi\int_0^{\xi_k}T_1\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi}{\int_0^{\xi_k}\eta\xi^2d\xi}\right\}$$

(7.6) を用いれば $\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_0}{\xi^2}\right)+\frac{T_0}{\xi^2}=\frac{d\ln\eta}{d\xi}\varphi(\xi_e)/\int_0^{\xi_k}\eta\xi^2d\xi$ であるから，上式はさらに次のようになる。

$$2\tau\left\{\left[\varphi(\xi_e)-\frac{2}{3}\int_0^{\xi_k}T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi\right]\frac{2\pi\int_0^{\xi_k}T_1\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi}{\int_0^{\xi_k}\eta\xi^2d\xi}\right\}$$

これも ξ_k の定義によって 0 である。

　τ に関して 0 次の項は

$$2\pi\int_0^{\xi_k}T_1\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\eta\xi^2}\frac{dT_1}{d\xi}\right)+\frac{T_1}{\xi^2}\right]d\xi-\frac{4\pi}{3}\frac{(\int_0^{\xi_k}T_1\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi)^2}{\int_0^{\xi_k}\eta\xi^2d\xi}$$

となる。(7.11) を考慮に入れて T_1 を固有関数展開すれば $T_1=\sum_{n=2}^{\infty}C_n\psi_n$ となるからこれを上式の第 1 項に代入すれば

$$2\pi\sum_{n=2}^{\infty}C_n^2(1-\lambda_n)\int_0^{\xi_k}\frac{\psi_n}{\xi^2}d\xi$$

となるが，$\lambda_n>1$（$n=2,3,\cdots$）であるからこれは負である。したがって τ に関して 0 次の項は $T_1\neq0$ である限り負である。

　これで $\xi_e=\xi_k$ のとき δS_2 が決して正にならないことが証明された。

§8 ξ_k を求める

　ξ_k の定義の式は次式である：

$$\varphi(\xi_k)-\frac{2}{3}\int_0^{\xi_k}T_0\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi=0 \tag{8.1}$$

(6.9), (7.6) を用いて φ，T_0 を η，ξ で表わして (8.1) に代入しよう。ただし $\mu \equiv \varphi(\xi_k)/\int_0^{\xi_k}\eta\xi^2 d\xi$ とする。

$$RD\left\{\eta\xi^3+\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right\}_{\xi=\xi_k}-\frac{2}{3}\int_0^{\xi_k}RD\left\{\eta\xi^3+\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right\}\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi-\frac{2\mu}{3}\int_0^{\xi_k}\xi^2\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2 d\xi = 0$$

or

$$\left\{\eta\xi^3+\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right\}_{\xi=\xi_k}-\frac{2}{3}\int_0^{\xi_k}\eta\xi^3\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi-\frac{2}{3}\left(1+\frac{\mu}{RD}\right)\int_0^{\xi_k}\xi^2\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2 d\xi = 0 \tag{8.2}$$

上式中の積分を η_k，ξ_k で表わそう：

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi_k}\eta\xi^3\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi=\int_0^{\xi_k}\xi^3\frac{d\eta}{d\xi}d\xi &= \Big[\xi^3\eta\Big]_0^{\xi_e}-3\int_0^{\xi_k}\xi^2\eta d\xi \\ &= \eta_k\xi_k^3+3\left\{\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right\}_{\xi=\xi_k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi_k}\xi^3\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2 d\xi &= \left[\frac{\xi^3}{3}\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2\right]_0^{\xi_k}-\frac{2}{3}\int_0^{\xi_k}\xi^3\frac{d\ln\eta}{d\xi}\frac{d^2\ln\eta}{d\xi^2}d\xi \\ &= \left\{\frac{\xi^3}{3}\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2\right\}_{\xi=\xi_k}-\frac{2}{3}\int_0^{\xi_k}\xi^3\frac{d\ln\eta}{d\xi}\left(-\eta-\frac{2}{\xi}\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)d\xi\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi_k}\xi^2\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2 d\xi &= -\left\{\xi^3\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2\right\}_{\xi=\xi_k}-2\int_0^{\xi_k}\eta\xi^3\frac{d\ln\eta}{d\xi}d\xi \\ &= -\left\{\xi^3\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)^2\right\}_{\xi=\xi_k}-2\eta_k\xi_k^3-6\left\{\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right\}_{\xi=\xi_k}\end{aligned}$$

これらを (8.2) に代入しよう。$1+\frac{\mu}{RD}=-\eta_k\xi_k/(\frac{d\ln\eta}{d\xi})_{\xi=\xi_k}$ に注意しよう。

$$11\eta_k\xi_k^3+3\left(\xi^2\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)_{\xi_k}+2\eta_k\xi_k^4\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)_{\xi_k}+4\eta_k^2\xi_k^4\Bigg/\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)_{\xi_k}=0 \tag{8.3}$$

ここで，次式で定義される x, y を代入しよう。

$$\begin{aligned}x &\equiv -\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi} \\ y &\equiv \xi\frac{dx}{d\xi}=-\xi\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)\end{aligned} \tag{8.4}$$

すると等温エムデン方程式 (3.8) は次式となる。

$$x + y = \eta\xi^2 \tag{8.5}$$

$x_k = x(\xi_k),\, y_k = y(\xi_k)$ とおいて，(8.3) を書き直そう：

$$11(x_k + y_k)\xi_k - 3x_k\xi_k - 2(x_k + y_k)x_k\xi_k - 4(x_k + y_k)^2\frac{\xi_k}{x_k} = 0$$

$\xi_k \neq 0$ であるから上式を ξ_k で割り，x_k を乗じて y_k の降巾順に整理すると，

$$4y_k^2 + (2x_k^2 - 3x_k)y_k + 2x_k^3 - 4x_k^2 = 0$$

となり，これを解けば，

$$y_k = \frac{-2x_k^2 + 3x_k \pm x_k\sqrt{4x_k^2 - 44x_k + 73}}{8} \tag{8.6}$$

となる。

グラフを用いて $x_k,\, y_k$ を求めよう。$(x,\, y)$ 平面を考える。点 $(x_k,\, y_k)$ は曲線 (8.6) 上にある。また $(x_k,\, y_k)$ は (8.4) の定義によって等温エムデン曲線 (8.5) 上にある。求める点 $(x_k,\, y_k)$ はだから曲線 (8.5) と曲線 (8.6) の交点である。詳しいことは数値計算に譲るとして，曲線 (8.5) の定性的なふるまいを調べよう。

(8.5) の両辺の対数をとり，両辺を ξ で微分すると，

$$\frac{\frac{dx}{d\xi} + \frac{dy}{d\xi}}{x + y} = \frac{2}{\xi} + \frac{d\ln\eta}{d\xi} = \frac{2}{\xi} - \frac{x}{\xi}$$

これをさらに変形すれば次式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\xi\frac{dy}{d\xi}}{\xi\frac{dx}{d\xi}} = \frac{2x + y - x^2 - xy}{y} \tag{8.7}$$

この曲線を ξ をパラメータにして $\xi = 0$ からたどっていくと，定性的な性質は次のようになる：

1　$\xi = 0$ で $x = 0,\, y = 0$

2　$y = -\xi\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)$ の零点は $\varphi(\xi) = -RD\xi^2\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)$ の零点 $\xi = 0,\quad \xi_1,\quad \xi_2,\quad \cdots$ と同じである

3　$\lim_{\xi\to\infty} x = \lim_{\xi\to\infty}\left(-\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right) = 2$。しかも x は振動しながら 2 に近づく。したがって $\lim_{\xi\to\infty} y = 0$。$y$ も正負に振動する。

4　曲線が $y=0$ を横切るときはいつも直角に横切る。
これからグラフを書けば

図 3 - fig3.pdf

さて §7 で約束したように (7.8) のカッコ内の式

$$\varphi(\xi_e) - \frac{2}{3}\int_0^{\xi_e} T_0 \frac{d\ln\eta}{d\xi} d\xi \tag{8.8}$$

が $0 < \xi_e < \xi_k$ で正，$\xi_k < \xi_e < \xi_2$ で負であることを示そう。
上式を x_k, y_k を用いて表わせば

$$\varphi(\xi_e) - \frac{2}{3}\int_0^{\xi_e} T_0 \frac{d\ln\eta}{d\xi} d\xi = \frac{\xi_e}{x_e}\left\{4y_e^2 + (2x_e^2 - 3x_e)y_e + 2x_e^3 - 4x_e^2\right\}$$

となる。ただし $x_e = x(\xi_e)$, $y_e = y(\xi_e)$ である。ところで前ページのグラフからわかるように $x-y$ 平面の領域のうち，$4y^2 - (2x^2 - 3x)y + 2x^3 - 4x^2 = 0$ で囲まれる領域（点 (0, 1) を含む方）では $4y^2 - (2x^2 - 3x)y + 2x^3 - 4x^2 < 0$ であり，その外側では $4y^2 - (2x^2 - 3x)y + 2x^3 - 4x^2 > 0$ である。前ページの 2 つの曲線の配置を見ればわかるように $0 < \xi_e < \xi_k$ で (8.8) は正，$\xi_k < \xi_e < \xi_2$ で (8.8) は負である。

大きな図 4 - fig4.pdf

数値計算によれば

$$x_k = +2.031, \quad y_k = -0.364 \tag{8.9}$$

である。(8.4) から $d\ln\eta = -\frac{x}{\xi}d\xi = \frac{xdx}{y}$。したがって

$$\ln\eta_k = \int_0^{x_k} \frac{xdx}{y}$$

ただし積分は曲線 (8.7) に沿って行う。これによって η_k が求まる。あるいは (8.4) の x の表式で，２度目に

$$-\left(\xi\frac{d\ln\eta}{d\xi}\right)_{\xi_k} = 2.031$$

を満たす ξ_k, η_k を求めればよい。結局，

$$\begin{aligned} \xi_k &\simeq 34 \\ \eta_k &\simeq 1/709 \end{aligned} \tag{8.10}$$

が求まる。

結局，中心の密度がへりの密度の 709 倍を超える等温平衡球状恒星系は安定でないことがわかった。

§9 エントロピーがある限界値に達したならば，系は必然的に非定常になる

註　球 $x^2+y^2+z^2 \le r_e^2$ 内の相体積を次のように２つに分割する。

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}\text{の領域} & f \ge e^{-\frac{v^2}{2h}-1} \\ \mathrm{II}\text{の領域} & f < e^{-\frac{v^2}{2h}-1} \le \dfrac{1}{e} \end{array}$$

ただし h は任意の定数である。エントロピーを評価する：

$$\begin{aligned} S = & -\int\int_I f\ln f d\mathbf{r}d\mathbf{v} - \int\int_{II} f\ln f d\mathbf{r}d\mathbf{v} \\ \le & \int\int_I f\left(1+\frac{v^2}{2h}\right)d\mathbf{r}d\mathbf{v} + \int\int_{II}\left(1+\frac{v^2}{2h}\right)e^{-\frac{v^2}{2h}-1}d\mathbf{r}d\mathbf{v} \\ & (x\ln x \quad \text{が} \quad x<1/e \quad \text{のとき減少関数であることを利用して第２項を変形}) \\ \le & \int\int_{I+II} f\left(1+\frac{v^2}{2h}\right)d\mathbf{r}d\mathbf{v} + \int\int_{I+II}\left(1+\frac{v^2}{2h}\right)e^{-\frac{v^2}{2h}-1}d\mathbf{r}d\mathbf{v} \\ = & \frac{M}{m} + \frac{K}{hm} + \frac{5}{2e}(2\pi h)^{3/2}\frac{4}{3}\pi r_e^3 \end{aligned}$$

すなわち

$$K \geq hmS - hM - \frac{5hm}{2e}(2\pi h)^{3/2}\frac{4}{3}\pi r_e^3$$

$S \to$ 大のとき $K \to$ 大

そのうち $K > -E$ つまり $2K + U > 0$ となり，ビリアル定理によって系は非定常になる。

§10 エントロピーの極大は相対極大でしかない

註　特殊な相分布として次のようなものを考える：

質量 αM が半径 ρ_1 の球 N_1 の内部に一様に分布しており，速度の分布は一様で，速度の上限は c_1 である。質量 βM が半径 ρ_2 の球 N_2 内に一様に分布していて，速度分布も一様で上限が c_2 である。$\alpha + \beta = 1$。

２つの球 N_1 と N_2 の中心間の距離を ρ_{12} とし，両方は重なり合わないとする。N_1 と N_2 の外では相分布は 0 である。

相密度はそれぞれ

$$f_1 = \frac{\alpha M}{m\frac{4}{3}\pi\rho_1^3\frac{4}{3}\pi c_1^3}, \quad f_2 = \frac{\beta M}{m\frac{4}{3}\pi\rho_2^3\frac{4}{3}\pi c_2^3} \tag{10.1}$$

エントロピー S は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\alpha M}{m}\ln f_1 - \frac{\beta M}{m}\ln f_2 \\ &= -\frac{M}{m}(\alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta) + \frac{3M}{m}(\beta\ln c_2\rho_2 + \alpha\ln c_1\rho_1) \end{aligned} \tag{10.2}$$

全エネルギー E は

$$E = -\frac{3G\alpha^2M^2}{5\rho_1} - \frac{3G\beta^2M^2}{5\rho_2} - \frac{\alpha\beta GM^2}{\rho_{12}} + \frac{3}{10}(\alpha Mc_1^2 + \beta Mc_2^2) \tag{10.3}$$

今，c_2, ρ_1 そして $\varphi = -\beta\ln c_2\rho_2$ は定数であるとする。一方，ρ_2 は無限小であるとする。c_1 は (10.3) が満たされるように選ぶ。すると，

$$c_1 = \left\{\frac{1}{\alpha}\left[\frac{10}{3M}\left(E + \frac{\alpha\beta M^2}{\rho_{12}}\right) + \frac{2G\alpha^2M}{\rho_1} - \beta c_2^2 + \frac{2G\varphi^2M}{\rho_2(\ln c_2\rho_2)^2}\right]\right\}^{1/2}$$

ここで $\rho_2 \to 0,\ \beta \to 0,\ \alpha \to 1$ にすると $c_1 \to +\infty$ になる。すると (10.2) の S は限りなく増大する。

謝辞. 久保真紀氏にタイプしていただいた.

以下は, 原論文内の参考文献である.

参考文献

[1] Akegyan, T.A., 1962, Vest. LGU, No.1.

[2] Karleman, T., 1960, Mathematical Problems of Kinetic Theory of Gases

[3] Ogorodnikov, K.F., 1958, Stellar Dynamics, Fismatgiz.

[4] Ambartsumyan, V.A., 1938, Uch. zap. LGU, No.22, p.19.

[5] Lavrentiev and Lyusternik, L.A., 1950, The cource of variational Calculation.

[6] Chandraskhar, C., 1950, Introduction to the Strucures of stars.

[7] Courant, R, and Hilbert, D, 1951, Method of Mathematical Physics.

Appendix I.

任意の 2 つの密度分布 $\nu'(r)$ と $\nu''(r)$ が近いということを，r の各点において $|\nu'(r)-\nu''(r)|$ が小さいことと考える。

図 5 - fig5.pdf

したがって，たとえ $\nu'(r)$，$\nu''(r)$，$\nu'''(r)$ が同じ全質量を与えるにしても，$\nu'(r)$，$\nu''(r)$ と $\nu'''(r)$ は近くないと考える。

このように考えると，

$$r \to 0 \quad \text{のとき} \qquad \delta\nu = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots$$

と書ける。すると

$$\begin{aligned} r \to 0 \quad \text{のとき} \quad T &= \int_0^{r_e} r^2 \delta\nu dr \\ &= a_0 \int_0^{r_e} r^2 dr + a_1 \int_0^{r_e} r^3 dr + \cdots \\ &= \frac{a_0}{3} r^3 + \frac{a_1}{4} r^4 + \cdots \end{aligned}$$

したがって

$$r \to 0 \quad \text{のとき} \qquad T(r) \propto r^3 \qquad (a_0 = 0 \quad \text{なら} \quad \propto r^4)$$

だから明らかに

$$T(0) = T(r_e) = 0$$

Appendix II.

等温平衡球状恒星系のポテンシャル（無限で 0）を V とすれば

$$\frac{dV}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}$$

$r \geq r_e$ のときには $M(r) = M$ であるから上式は直ちに積分できる。無限遠で 0 であることに注意すれば

$$V = -\frac{GM}{r} \qquad for \quad r \geq r_e \tag{i}$$

$r \leq r_e$ のときには

$$M(r) = 4\pi m \int_0^r \nu r^2 dr = 4\pi m \nu_0 R^3 \int_0^\xi \eta \xi^2 d\xi = -4\pi m \nu_0 R^3 \xi^2 \frac{d \ln \eta}{d\xi}$$

であるから

$$dV = \frac{GM(r)}{r^2} dr = -4\pi G m \nu_0 R^2 \frac{d \ln \eta}{d\xi} d\xi = -D d \ln \eta$$

となり，積分すれば

$$V = -D \ln \eta + C_1 \qquad for \quad r \leq r_e \tag{ii}$$

(i) と (ii) は $r = r_e$ で同じ値になるはずだから

$$C_1 = D \ln \eta_e - GM/r_e$$

となり，結局

$$V = -D \ln \eta + D \ln \eta_e - \frac{GM}{r_e} \qquad for \quad r \leq r_e \tag{iii}$$

となる。

ポテンシャルエネルギー U は V を用いて

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{r_e} V dM(r)$$

と書ける。ところで

$$dM(r) = 4\pi m \nu r^2 dr = 4\pi m \nu_0 R^3 \eta \xi^2 d\xi$$

であるから，これと (iii) を上の U の表式に代入すれば

$$U = 2\pi m \nu_0 R^3 \int_0^{\xi_e} \left(-D \ln \eta + D \ln \eta_e - \frac{GM}{r_e} \right) \eta \xi^2 d\xi$$

ところで $4\pi m\nu_0 R^3 = M/\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi$ であるから

$$U = \frac{DM}{2}\left[-\frac{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2\ln\eta d\xi}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi} + \ln\eta_e - \frac{GM}{Dr_e}\right]$$

(5.5) を用いれば結局

$$U = \frac{DM}{2}\left[-\frac{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2\ln\eta d\xi}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi} + \ln\eta_e - \frac{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi}{\xi_e}\right]$$

Appendix III.

ビリアル定理から $U = 3p_e v - 2K$

ここで p_e は壁における圧力，v は体積である。$K = \frac{3}{2}DM$

速度の x, y, z 成分を u, v, w とすれば，分布関数 (3.1) を用いて

$$p_e = 2m\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} dv\int_{-\infty}^{\infty} dw f(r_e, \mathbf{v^2})u^2 = Dp_e$$

故に，

$$\begin{aligned} 3p_e v &= 3Dp_e v = 3Dm\nu_0\eta_e\frac{4}{3}\pi r_e^3 \\ &= 4\pi m\nu_0 D\eta_e\xi_e^3 R^3 = 4\pi m\nu_0 D\eta_e\xi_e^3\frac{M}{4\pi m\nu_0}\frac{1}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi} \end{aligned}$$

したがって

$$U = MD\left[\frac{\eta_e\xi_e^3}{\int_0^{\xi_e}\eta\xi^2 d\xi} - 3\right]$$

この U は Appendix II の U と同じであることは容易に示すことができる。