Journal of the American Mathematical Society **4**, 207-263(1991)

ねじれ微分同相写像の軌道の変分的構築
Variational construction of orbits of twist homeomorphisms

John N. Mather

序

本論文では, 円筒のある種の完全面積保存微分同相写像においてある種の

乱雑軌道あるいはカオス的軌道

を構成する. 考える写像は単調ねじれ写像の**有限個**の合成であり, 各ねじれ写像は同じ符号 (つまり, すべて正単調であるかすべて負単調であるか) を持つとする. 簡単のため, 正単調ねじれ微分同相写像の有限個の合成のみ考える. というのは, 負単調ねじれ微分同相写像の有限個の合成の場合は逆写像をとることにより, 上記の場合に帰着するからである. 円筒の完全面積保存正単調ねじれ微分同相写像の有限個の合成の

類 $\mathcal{P}^1$

は 1 節で定義する.

$\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ とする. 上に棒の付いた関数は円筒で定義され, 上棒がないものは不変被覆で定義されたものである.

無限円筒の $\overline{f}$ 不変閉部分集合 $M_{\overline{f}}$

がある. これについては文献, たとえば [3, Bangert1988] で詳しく議論されてきた. この集合は変分原理によって定義される. すなわち, その中の軌道は, 2 節で定義される意味で, 作用に関して極小である. $M_{\overline{f}}$ 内の軌道は作用を極小にするものであるから, 集合 $M_{\overline{f}}$ は内的 (intrinsically) に定義される. ただ, 内的な定義を与えるのはやや面倒であるが. 2 節で与えた比較的単純な定義は内的でない. 内的な定義は 3 節で与える.

$\overline{f}$ 不変単純閉曲線であってゼロホモトープでないもの, つまり円筒を巻く不変曲線はすべて $M_{\overline{f}}$ 内にある (命題 2.8). 加えて, Aubry-Mather 集合は, 本質的に定義より, $M_{\overline{f}}$ 内にある.

本論文の主結果は 4 節で述べる．4 節では $\overline{f}$ の

バーコフ不安定領域 R

の概念を定義する．主結果は定理 4.1 と 4.2 である．これらの結果は自己説明的である．ひとつだけ説明が必要である．$M_{\overline{f},\omega}$ は (角) 回転数 ω の $M_{\overline{f}}$ の軌道集合である．手短かに言えば, 定理 4.1 によると,

> あらかじめ指定した α 極限集合および ω 極限集合を持つ軌道を構築することが可能である．

ただし, α 極限集合も ω 極限集合も同じバーコフ不安定領域内の Aubry-Mather 集合であるとしてである．定理 4.2 によると,

> あらかじめ指定した Aubry-Mather 集合列に次々と近づくという意味で「ランダム」な軌道を構築することが可能である．

この場合もすべては同一のバーコフ不安定領域にあるとしている．

定理 4.1 の証明 (これは 11 節に完結する) は定理 4.1 で述べられたことより多くのことを示す．すなわち, $\mathcal{O}_-$ と $\mathcal{O}_+$ は極小 (つまり作用極小) 軌道であってバーコフの不安定領域 R 内にあるとしよう．Γ_+ と Γ_- は R の上下の境界であるとし $\rho(\Gamma_+)$ と $\rho(\Gamma_-)$ はそれらの (角) 回転数であるとする．定理 4.1 の陳述からすると次の疑問が浮かぶ．$\mathcal{O}_-$ に α 漸近でかつ $\mathcal{O}_+$ に ω 漸近な軌道 $\mathcal{O}$ はあるか? 11 節で示すとおり, このような軌道が存在するのは, 狭義の不等式 $\rho(\Gamma_-) < \rho(\mathcal{O}_\pm) < \rho(\Gamma_+)$ が (どちらの軌道に対しても) 満たされ, しかも $\rho(\mathcal{O}_-)$ も $\rho(\mathcal{O}_+)$ も無理数のときである．$\rho(\mathcal{O}_-)$ または $\rho(\mathcal{O}_+)$ が有理数 p/q (ただし $\rho(\Gamma_-) < \rho(\mathcal{O}_\pm) < \rho(\Gamma_+)$ ではある) であるなら, この結論は付加的な仮説のもとで成り立つ．それについては 11 節で説明する．これらの付加的な仮説が成り立つためには, f が生成的であればいい．すなわち, 角回転数 p/q の極小周期軌道がひとつだけあればいい．もちろん, $\rho(\mathcal{O}_-)$ も $\rho(\mathcal{O}_+)$ も有理数なら, 同様のコメントが成り立つ．この段階では, $\rho(\mathcal{O}_-) \neq \rho(\mathcal{O}_+)$ かどうか著者は何もいわない．

定理 4.1 の陳述から, ω_- が有理数のときに $\omega_- = \rho(\Gamma_-)$ または $\rho(\Gamma_+)$ の場合を除かなければならないこと, そして ω_+ が有理数のときに $\omega_+ = \rho(\Gamma_-)$ または $\rho(\Gamma_+)$ の場合を除かなければならないことは, わずらわしい．しかし, これらの場合, 境界に近づく軌道を構築することは相変わらず可能である．これについても 11 節で議論する．

11 節の議論でいくつか未解決問題が残る．そのうち多くは定式化するのは困難であるが, 本論文の手法を使って決定するのは容易である．この理由で, こ

れらの問題を定式化することにはかかずらわない．しかし, 2 つ問題があって, 面白く, 重要でしかも難しい．その問題において, ρ_- は無理数であると仮定する．$\mathcal{O}_-$ を下境界内の軌道とする．

問題 1. R 内に軌道 $\mathcal{O}$ が必ず存在して $\mathcal{O}_-$ に α 漸近であるか?

問題 2. R 内に軌道 $\mathcal{O}$ が存在して $\mathcal{O}_-$ に α 漸近であるようなことはあるか?

境界上の与えられた軌道に ω 漸近な軌道を探す問題もあり得る．すなわち,「下の境界」と「ρ_-」をそれぞれ「上の境界」と「ρ_+」に変える．すると同値な問題となるのは明らかである．ただし, ρ_- が無理数であるという条件を落とすと, 上の問題には簡単な解がある．

この問題を変形して, $\overline{f}$ を C^r とし, $r \geq 1$, $r = \infty$ または $r = \omega$ とすることも可能である．

定理 4.1 と 4.2 はある種の性質を持つ軌道 $\mathcal{O}$ の存在を主張する．これらの軌道の存在を変分手法で証明する．証明の基本スキームは 5 節で説明する．

$\mathcal{J}(\ldots, J_i, \ldots)$

は $\mathbf{R}$ の閉連結非空部分集合 (谷川: 閉区間ではだめなのか? J_i は有界でないことはあり得る) の両無限列であるとする．命題 5.1 により, 任意に小さなまた任意に大きな i が存在して J_i が有界なら (谷川: 意味わからず．$i \to \infty$ のとき，区間はどんどん無限遠に遠ざかるはず．どんなに i が大きかろうと，固定すれば，ということか?),

$\mathcal{J}$ 極小配置

がある．つまり, 実数の両無限列 $x = (\ldots, x_i, \ldots)$ があって,

f にともなう変分原理 h に関して極小

である．比較相手の両無限列は, どの i に対しても $x_i \in J_i$ なるものである．x が

$\mathcal{J}$ 自由

とは, どの i に対しても $x_i \in \mathrm{Int} J_i$ のときである．命題 5.2 より, どの $\mathcal{J}$ 自由および $\mathcal{J}$ 極小配置 $x = (\ldots, x_i, \ldots)$ も, ある f 軌道 $(\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ に対応する．この命題のどちらも証明するのは容易である．証明の主たる部分は $\mathcal{J}$ に関する条件, すなわち, どの $\mathcal{J}$ 極小配置も $\mathcal{J}$ 自由であることを見つけることにある．(通常, 唯一の $\mathcal{J}$ 極小配置がある.) 次に, $\mathcal{J}$ に関する更なる条件, すなわち, $\mathcal{J}$ 極小および $\mathcal{J}$ 自由配置に対応する軌道は定理 4.1 または定理 4.2 で要求される性質を持つことを意味する条件を見つける．

$\mathcal{J}$ 極小配置が $\mathcal{J}$ 自由であることを意味する条件は, 以下の形のいくつかの条

件に分かれる．J_i が $j_0-K_0 \leq i \leq j_1+K_1$ に対してある種の形を持つこと仮定すると, $\xi=(\ldots,\xi_i,\ldots)$ が $\mathcal{J}$ 極小であるなら, $j_0 \leq i \leq j_1$ に対して $\xi_i \in \mathrm{int} J_i$ が証明できる．このような ξ は「部分 $\mathcal{J}$ 自由」とよぶことができる．これらの結果のうち最初のものは命題 6.1 である．ここで, J_i は $j_0-K_0 \leq i \leq j_1+K_1$ に対して極小配置 $x=(\ldots,x_i,\ldots)$ を使って定義される．ω を x の (角) 回転数とし, $a \in \mathbf{R}$ が存在して

パイエルスの障壁 (Peierls's barrier) $P_\omega(a)$

が正であるとする．($P_\omega(a)$ の定義は 6 節のはじめに再述する．これは $a \in \mathbf{R}$ の非負関数であって, $a \in \mathbf{R}$ の関数としてリプシッツ条件を満たし, 周期 1 で周期的であり, ω が無理数のとき, $\mathbf{R}$ 上で恒等的にゼロであるのは $\overline{f}$ の不変円があって円筒を巻き, 角回転数 ω を持つとき, またそのときのみの場合である.) 命題 6.1 の場合, $K_0=K_1=K(\omega,a)$ と取る．ただし最後の数は 6 節で定義する．(ある場合には, $K(\omega,a)$ は定義されない．命題 6.1 が適用できるのは $K(\omega,a)$ が定義されているときである.) 実際, $K(\omega,a)$ は f にも, ω や a にも依存するが, f への依存性は出さないでおく．というのは, f は定理 4.1 と 4.2 の証明の間は固定するからである．もっと詳しく言うと, $K(\omega,a)$ は ω と $\theta/P_\omega(a)$ にのみ依存する．ただし, $\theta=\cot\beta$ であり, 角 β は微分同相写像 $\overline{f}_i$ のねじれ量の下限である．$\overline{f}$ は $\overline{f}_i$ の合成であることを言っておく．$K(\omega,a)$ は ω が無理数で, $P_\omega(a)>0$ のときに定義される．$\omega=p/q$(既約) なら, $K(\omega,a)$ が定義されるのは $q-1>2\theta/P_\omega(a)$ のときかつそのときのみである．

命題 6.1 において, $j_0-K(\omega,a) \leq i \leq j_1+K(\omega,a)$ に対して, J_i は長さ 1 の閉区間とする．とくに, $J_i=[a_i,a_i+1]$ である．ここで, a_i は, 条件 $a_i-a \in \mathbf{Z}$ および $x_i \in (a_i,a_i+1)$ で定義される．パイエルスの障壁が周期的であるから, $P_\omega(a_i)=P_\omega(a)>0$ が成立ち, これが正であることから, $j_0 \leq i \leq j_1$ に対して $\xi_i \in (a_i,a_i+1)$ を証明できる．

命題 6.1 の構成法は [15] の基本構成法と非常によく似ている．ただし, 目的は異なる．

量 $K(\omega,a)$ は 7 節でもっと全面的に解析する．そこでは強く関係する量 $K(\omega,\varepsilon)$ を導入する．これは $\omega \in \mathbf{R}$ と $\varepsilon>0$ の関数である．ω が有理数であって, p/q が既約かつ $q\varepsilon \leq 1$ のときにはこれは定義されない．その他のすべての場合, $K(\omega,\varepsilon)$ は正整数である．$K(\omega,\varepsilon)$ は ω と ε のみに依存することを注意しておく．これは純粋に数論的な関数であり, 力学とは何の関係もない．$K(\omega,a)$ とは次のような仕方で関係する．k は $k>2\theta/P_\omega(a)$ なる最小の整数とする．このとき, 定義より, $K(\omega,a)=K(\omega,k^{-1})$ である．$K(\omega,\varepsilon)$ の最も重要な性質は, $K(\omega,a)$ との関係は別として, (7 節で証明される) $K(\omega,\varepsilon)$ が $\omega \in \Omega$ に対して有界であ

るのは, Ω が閉区間であって, 分母が $\leq \varepsilon^{-1}$ なる有理数を含まず, 分母が $\leq \varepsilon^{-1}$ なる有理数に ω が近づくにつれて $K(\omega, \varepsilon) \to +\infty$ となるときである. これは見積り $1/2\Delta_\varepsilon(\omega) \leq K(\omega, \varepsilon) \leq 2/\Delta_\varepsilon(\omega)$ からしたがう. これは 7 節で述べる. これと命題 6.1 を使って, 命題 7.4 と 7.5 を 7 節で証明することができる. 命題を読めば中身はわかる. これらの命題からすると, 命題 6.1 を使えば, 定理 4.1 と 4.2 の証明まであとどれくらいあるかを知ることができる.

命題 6.1 を使う際に 2 つの制限がある. 最初のものは, 命題 6.1 を使うには, a を一度固定したら動かしてはいけないことから来る. われわれは, バーコフの不安定領域 R の中で自由に動きたいし, R に課す唯一の条件は Γ が R 内の不変閉曲線で R 内の 1 点に可縮でないなら, Γ は境界曲線 Γ_- または Γ_+ である, というものである. このことから, $\rho(\Gamma_-) < \omega < \rho(\Gamma_+)$ なら, a が存在して $P_\omega(a) > 0$ であることが出る. しかし, 同じ a がすべての ω に対して有効であるとは限らない. この困難は命題 6.2 により容易に克服できる. ここで P_ω の連続率 (moduli of continuity) [17, 定理 2.2] を使う. $\omega > p/q$ のときは不等式 $|P_{p/q+}(a) - P_\omega(a)| \leq C\theta|\omega q - p|$ があり, $\omega < p/q$ のときは不等式 $|P_{p/q-}(a) - P_\omega(a)| \leq C\theta|\omega q - p|$ がある. これらの不等式からすると, $P_\omega(a)$ は ω の関数として, 無理数において連続であり, したがって, $P_\omega(a) > 0$ がある無理数 $\omega = \omega_0$ で成り立つなら, 同じ不等式が ω_0 の十分近くのすべての ω で成り立つ.

命題 6.1 を使う際のもっと深刻な制限は, $\omega = p/q$ で q が小さ過ぎるときに命題が適用できないことからくる. 特に, $K(\omega, a)$ が定義されないとき, すなわち, $q - 1 \leq 2\theta/P_\omega(a)$ のときに適用できない. 小分母を持つ有理回転数をやり過ごすためには別の手法が必要である. 命題 8.1 がこれを用意する. f の回転数が有理数 p/q の場合は, $F(x, y) = f^q(x, y) - (p, 0)$ で定義される F のゼロ回転数の場合に還元できる. 後者は変分原理 H を持ち, これ自身は f の変分原理 h から, [16] で導入された結合 (conjunction) によって定義される. 命題 8.1 は, 有理回転数をやり過ごす方法を説明する. これは F および H, そして簡単のためゼロ回転数を使って陳述される. 8 節の証明は本論文の心臓部であり, 概念的に新たな vis-a-vis[15] なる部分である (?). 次に補題 9.3 において, 命題 8.1 で F と H に対して得られた結果を, f と h に適用する. 命題 8.1 の J_i によって, 閉連結, 非空部分集合 J^*_α を $\mathbf{R}$ 内に定義して, 補題 9.3 のトリックを行なわせることができる. 補題 9.3 の証明は長いけれども, 自明な条件が満たされるかどうかをチェックするだけのことである.

10 節において, $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ に関する条件を与えて, $\mathcal{J}$ 極小および $\mathcal{J}$ 自由配置 $\xi = (\ldots, \xi_i, \ldots)$ が以下の性質を持つようにする. すなわち, それに対応

する f 軌道が定理 4.1 および定理 4.2 で要請されるほどに $M_{f,\omega}$ にできる限り近づくようにする.

11 節では, 定理 4.1 と 4.2 の証明を完結し, これらの証明から言えるいくつかの結論を述べる.

1. 無限円筒の完全面積保存正単調ねじれ写像の有限個の合成およびその変分原理

次節では, 極小軌道に関する結果を概観する. これらの結果は, 定義がやや複雑なある特別な類の写像からのみ得られてきた. 本節では, この特別な類の写像の定義およびこの類の写像にともなう変分原理の概念を思い出す.

$\beta > 0$ とする. 無限円筒の C^1 完全 (exact) 面積保存, 方向保存, 正単調ねじれ写像で円筒の両端を保存し, これらを無限にねじり, ねじれ量の一様な下限として β を持つものの集合を

$$\mathcal{C}^1_\beta$$

と記す. $\mathcal{C}^1_\beta$ の詳しい定義は [16,2 節] で与えた. そこでは J_β とよんだ.

読者の便宜のために, $\mathcal{C}^1_\beta$ の定義を繰り返そう. 無限円筒とは $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ のことである. $\theta (\mathrm{mod}\ 1)$ は $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ の標準座標であるとし, y は $\mathbf{R}$ の標準座標であるとする. 無限円筒をそれ自身の中に写す C^1 微分同相写像 $\overline{f}$ を考える. $\overline{f}(\theta, y) = (\theta', y')$ と書く. だから, 1 形式 $y'd\theta'$ の $\overline{f}$ による引き戻し (pull-back) は $yd\theta$ である. $\overline{f}$ が面積保存かつ方向保存であるための条件は $dy' \wedge d\theta' = dy \wedge d\theta$ であることを指摘しておく. 言い換えると, $y'd\theta' - yd\theta$ は閉である. もっと強い条件として $y'd\theta' - yd\theta$ が完全 (exact) であることを要請する. $\overline{f}$ がこの条件を満たすとき, 完全面積保存かつ方向保存である, という.

正の単調ねじれ条件とは $\partial\theta'/\partial y > 0$ のことである (ここで, θ と y を独立変数としてある). 幾何学的には, これは, $\overline{f}$ が無限円筒の各鉛直線を, 無限円筒のまわりを正の方向にねじる曲線へと写すことを意味する. 正の単調ねじれ条件は条件 $\partial\theta/\partial y' < 0$ と同値である (ここで θ' と y' が独立変数である). β がねじれ量の一様下限であるという条件は, $\partial\theta'/\partial y > \tan\beta$ かつ $\partial\theta/\partial y' < -\tan\beta$ を意味する. 幾何学的には, 鉛直線の $\overline{f}$ による像が, どの鉛直線とも β より大きな角度をなすこと, 同様に, 鉛直線の $\overline{f}^{-1}$ による像も同様であることを意味する.

$\overline{f}$ が無限円筒の両端を保存する条件は, 明らかに $y \to \pm\infty$ のとき $y' \to \pm\infty$ なることである.

無限円筒の普遍被覆面 $\mathbf{R}^2$ の座標を x と y で表わす. すると, $\theta \equiv x (\mathrm{mod}\ 1)$ である. 普遍被覆への $\overline{f}$ の持ち上げを f と記し, $f(x, y) = (x', y')$ と書く. f が両端を無限にねじる条件は, $y \to \pm\infty$ のとき $x' \to \pm\infty$ なることである (ここで x は固定してある). 同様に, $y' \to \mp\infty$ のとき $x \to \mp\infty$ である (ここでは x' を固定してある).

以上で, $\overline{f}$ が $\mathcal{C}^1_\beta$ のメンバーであるための条件が出そろった.

$$\mathcal{C}^1 = \cup_{\beta>0}\mathcal{C}^1_\beta$$

とおく.

$\overline{f} \in \mathcal{C}^1$ とし, f は普遍被覆 $\mathbf{R}^2$ への $\overline{f}$ の持ち上げであるとする. 上と同様 $f(x,y)=(x',y')$ とおく. われわれが課した条件からすると, $f \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ のグラフは (x,x') 面の上に可微分同相的に射影される. だから, x と x' を独立変数に取って, $(y'dx'-ydx)|\mathrm{graph} f = dh$ と書くことができる. ただし, $h=h(x,x')$ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 関数である. 古典力学では, h は f の「母関数」とよばれている. これは

$$f(x,y)=(x',y') \quad \Leftrightarrow \quad y=-\partial_1 h(x,x') \quad \text{and} \quad y'=\partial_2 h(x,x')$$

なる特徴を持ち, 定数を加える不定性を除いて一意に定義される.

このような母関数 h はいくつか有用な条件を満たす:

(H_1) $$h(x+1,x'+1)=h(x,x'), \quad \text{for all} \quad x,x' \in \mathbf{R}$$

(H_2) x に関して一様に $\lim_{|\xi|\to\infty} h(x,x+\xi)=\infty$,

(H_5) $\mathbf{R}^2$ 上に正の連続関数 ρ があって,

$$h(\xi,x')+h(x,\xi')-h(x,x')-h(\xi,\xi') \geq \int_x^\xi \int_{x'}^{\xi'} \rho,$$

が, $x<\xi$ および $x<\xi'$ のとき成り立つ.

その上, $\overline{f} \in \mathcal{C}^1$ で $\theta=\cot\beta$ のとき, h は次の条件を満たす.

$(\mathrm{H}_{6\theta})$ $x \mapsto \theta x^2/2-h(x,x')$ は任意の x' に対して凸であり, $x' \mapsto \theta x'^2/2-h(x,x')$ は任意の x に対して凸である.

1 変数関数が凸であるとは, その関数のグラフ上の 2 点を結ぶ線分がグラフ上またはそれより上にあることであることを思い出そう.

h がこれらの条件を満たすことは [16] で証明した. [16, 3 節] の例と [16, 4 節] の議論を見よ. (ここでは [16] の記法を守る. そこでは, その他の条件 H_3 と H_4 についても議論した. これは Bangert[3] が導入したものである. 本論文では条件 H_3 と H_4 は使わない.)

h を使う理由のひとつは, 無限円筒の $\overline{f}$ 不変閉部分集合 $M_{\overline{f}}$ を定義することができるからである. この集合は $\overline{f}$ の力学を調べるのにたいへん重要な性質

を持つように思われる．この集合は Bangert [3] の用語によれば, 極小軌道すべての和である．Mather [16-18] でもそれを採用した．それ以前にはこれらは, Aubry and LeDaeron [2] および Mather [13] において「極小エネルギー軌道」とよばれていた．実は, $M_{\overline{f}}$ を定義するのに $\overline{f} \in \mathcal{C}^1$ の場合だけでなく, $\overline{f}$ が $\mathcal{C}^1$ の要素の有限個の合成の場合でもよい．

$M_{\overline{f}}$ の定義は次節に回し，もっと一般の設定，つまり $\overline{f} = \overline{f}_k \circ \cdots \circ \overline{f}_1$ かつ $\overline{f}_i \in \mathcal{C}^1$ の場合に h を定義しよう． これを行なうには, [16, 5 節] で導入した「接合」(conjunction) の概念を基にする．h_1, h_2 を $\mathbf{R}^2$ 上の実数値連続関数とし, (H_2) を満たすものとする．このとき

$$h_1 * h_2(x, x') = \min_{\xi}(h_1(x, \xi) + h_2(\xi.x'))$$

とおく．簡単に確認できるように, $h_1 * h_2$ は定義され, 連続で, (H_2) を満たす. [16, 5 節] において, この作用を「接合」(conjunction) とよんだ．だから, $\mathbf{R}^2$ 上の連続実数値関数類で (H_2) を満たすものは, 接合作用の下で閉じている．接合は associative である．

解説: 集合 S 上の 2 項作用が associative であるとはすべての $x, y, z \in S$ に対して $(x * y) * z = x * (y * z)$ のときである。

無限円筒の C^1 微分同相写像の集合のうち, $\mathcal{C}^1_\beta$ の要素の有限個の合成で表現できるものを $\mathcal{P}^1_\beta$ と書く．$\mathcal{P}^1 = \cup_{\beta>0}\mathcal{P}^1_\beta$ とおく．

$\overline{f} \in \mathcal{P}_1$ に対して, $\overline{f}_i \in \mathcal{C}^1$ として分解 $\overline{f} = \overline{f}_k \circ \cdots \circ \overline{f}_1$ を考える．f_i を普遍被覆面への $\overline{f}_i$ の持ち上げとし, 集合 $h = h_1 * \cdots * h_k$ とおく．ただし, h_i は f_i [1] の母関数である．h を, $f = f_k \circ \cdots \circ f_1$ にともなう「変分原理」とよぶことにする．実は, 付加定数を除いて, h は f (および無限円筒の座標づけ) にのみ依存するが, この事実は必要としない．(証明は長ったらしい.) $\overline{f} \notin \mathcal{C}^1$ (おかしい) のときは, h はもはや母関数ではないが, $M_{\overline{f}}$ の定義を許すほどの性質は持ち続けている．

[16] において, 変分原理 h が $\overline{f} \in \mathcal{P}^1_\beta$ の持ち上げにともなうなら, (H_1), (H_2), (H_5), および $\theta = \cot\beta$ として $(\mathrm{H}_{6\theta})$ を満たすことを証明した．証明の主段階は, [16, 補題 5.3] であった．それによると, h_1 と h_2 が $\mathbf{R}^2$ 上の連続な実数値関数であって, これらの条件を満たすなら, $h_1 * h_2$ も同様である．([16, 補題 5.3] が適用できることを見るには, 条件 (H_3) と (H_4) がこれら条件から出ることに注意する．(H_3) は (H_5) の弱い形であり, [16,4 節] の終わりに証明したように, (H_4) は (H_5) と (H_6) から出る.) [16] の補題 5.3 が十分であるのは, $\overline{f} \in \mathcal{C}^1_\beta$ の持ち上

[1] 原論文では f となっている (谷川).

げ f の母関数が (H_1), (H_2), (H_5), および $(\mathrm{H}_{6\theta})$ を満たす事実 (これを上で [16] から引用した) によるのである. ([16] の用語にしたがえば, h が (H_6) を満たすのは, ある $\theta > 0$ に対して $(\mathrm{H}_{6\theta})$ を満たすときである.)

記法を簡単にするために, 次のような定義を導入する. $\theta > 0$ とする.

> 関数 $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が (H_θ) を満たすとは, この関数が連続で, (H_1), (H_2), (H_5), および $(\mathrm{H}_{6\theta})$ を満たすときである.

前と同様, この条件はあらかじめ選んでおいた数 $\theta > 0$ に依存する.

> h が (H) を満たすとは, この関数が, ある $\theta > 0$ に対して (H_θ) を満たすときである.

本節をまとめると, 無限円筒の完全面積保存正単調ねじれ写像の有限回の合成としての類 $\mathcal{P}^1$ の定義を復習した. 任意の $\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ に変分原理 h をともなわせた. 参考文献 [16] より, そのような h が (H) を満たすことを思い出した.

2. 極小軌道

本節では, 微分同相写像 $\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ の極小軌道の定義を思い出そう. これは, $\overline{f}$ にともなう変分原理 $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ によって定義される. h を, 実数列 $(x_j, \ldots, x_k)$, $j < k$ にまで拡張して

$$h(x_j, \ldots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} h(x_j, x_{j+1})$$

とおく. $(x_j, \ldots, x_k)$ が h に関して**極小**であるとは,

$$h(x_j, \ldots, x_k) < h(x_j^*, \ldots, x_k^*)$$

が, $x_j = x_j^*$ および $x_k = x_k^*$ なるすべての実数列 $(x_j^*, \ldots, x_k^*)$ に対して成り立つときである. (ここが以下の節で定義される束縛条件付き極小と違う点である. x_j^* と x_k^* に挟まれる x_i の範囲に制限はついていない.) 両無限列 $(\ldots, x_j, \ldots)$ が h に関して**極小**であるのは, どの $j < k$ に対しても, その対応する切片 $(x_j, \ldots, x_k)$ が (h に関して) 極小のときである.

この概念は Aubry and LeDaeron[1] による. われわれがこれに興味を持つのは, われわれが [12] で得た面積保存微分同相写像の力学に関する結果の別証を与えるだけでなく, 他の結果をも与えるからである. これらの結果は, 本論文の出発点であり, それをここで紹介する.

参考文献[16,4節]の最期から二番目の段落においてわれわれが示したところによると, hが(H)を満たし, $(x_j,\dots,x_k)$がhに関して極小であるなら, $(x_j,\dots,x_k)$はhに関してつぎのような意味で停留である．すなわち, $j<i<k$ に対して, 第一偏微分 $\partial_2 h(x_{i-1},x_i)$ および $\partial_1 h(x_i,x_{i+1})$ が存在して

$$\partial_2 h(x_{i-1},x_i)+\partial_1 h(x_i,x_{i+1})=0$$

を満たす．もちろんhが微分可能なら, この主張は自明である．しかし, 条件(H)は必ずしもhの微分可能性を意味しない．その上, 一般に, $\overline{f}\in\mathcal{P}^1$ にともなう変分原理hは微分可能である必要はない．とはいえ, 極小性が停留性を意味するのはhが(H)を満たすときであることを証明することは容易である．すなわち, (H_6)からすると, hの片側偏微分は存在して

$$\partial_1 h(x-,x')\geq\partial_1 h(x+,x'),\quad \partial_2 h(x,x'-)\geq\partial_2 h(x,x'+)$$

を満たす．極小性から停留性が出ることは, hが微分可能であるときと同じ仕方で証明できる．詳しくは[16,4節]を参照されたい.

$\overline{f}\in\mathcal{P}^1$ とし, hは普遍被覆 $\mathbf{R}^2$ への $\overline{f}$ の持ち上げ f にともなう変分原理であるとする．hの極小配置 $(\dots,x_i,\dots)$ を考察する．

$$y_i=-\partial_1 h(x_i,x_{i+1})=\partial_2 h(x_{i-1},x_i)$$

とおく．[16,5節]の例において, $f(x_i,y_i)=(x_{i+1},y_{i+1})$ であること, すなわち, $(\dots,(x_i,y_i),\dots)$ はfの軌道であることを証明した.

まとめるなら, われわれは次を証明した ([16,5節]).

命題 2.1. $\overline{f}\in\mathcal{P}^1_\beta$ とする．$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を$\overline{f}$の持ち上げとする．hをfにともなう変分原理とする．すると$\theta=\cot\beta$としてhは(H_θ)を満たす．実数の両無限列 $x=(\dots,x_i,\dots)\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ を考え, xが(hに関して)極小であるとする．すると, $i\in\mathbf{Z}$ に対して[2]

$$y_i=-\partial_1 h(x_i,x_{i+1})=\partial_2 h(x_{i-1},x_i)$$

が存在して, $(\dots,(x_i,y_i),\dots)$はfの軌道である．つまり, $f(x_i,y_i)=(x_{i+1},y_{i+1})$.

こうして, 各(hに関する)極小 $x\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ にfの軌道を伴わせる．この随伴は明らかに1対1である．このようにして得られたfの軌道を「極小軌道」とよぶ．fの軌道は$\mathbf{R}^2$内にある．これを$(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\mathbf{R}$の上に射影して$\overline{f}$ の軌道を

[2] 原論文では, 右辺は $\partial_2 h(x_{i+1},x_i)$

得る．f の軌道が極小のとき，対応する $\overline{f}$ の軌道も「極小」ということにする．$M_f \subset \mathbf{R}^2$ は f の極小軌道全部の和を表すとし，$M_{\overline{f}} \subset (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ は $\overline{f}$ の極小軌道すべてとする．

次に，以下の命題 2.2 – 2.4 において，極小配置のいくつかの性質を列挙しよう．これらは Aubry and LeDaeron[1] が求め，Bangert[3] が一般化したものである．証明は [3] を参照してほしい．Bangert は「変分原理」h が 4 つの前提 (H_1) – (H_4) を満たすとした．Bangert の結果を適用するには，われわれの条件 (H) から Bangert の条件 (H_1) – (H_4) が出ることを言えばよい．実際，[16,4 節] の最後の段落で，(H_5) と (H_6) から (H_3) と (H_4) が出ることを示した．

だから，条件 (H) を満たす任意の h に Bangert[3] の結果を適用することができる．すなわち，命題 2.1 より，そのような結果は $M_{\overline{f}}$ 内にある $\overline{f}$ の軌道に関する情報をくれる．これらの結果は $\overline{f}|M_{\overline{f}}$ の力学をかなり完全に示してくれる．

$\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ の要素を配置とよぶことにする．x と x^* が任意の 2 つの配置であるとき，すべての i に対して $x_i < x_i^*$ のとき $x < x^*$ であるという．

> x と x^* が比較可能であるとは，$x < x^*$，または $x = x^*$ または $x > x^*$ のときである．

これからすると，回転数の異なる配置は比較可能でない．回転数の異なる 2 つの配置は必ず交わるから．比較可能であるためには回転数が同じでなければならない．回転数が同一の配置でも複数ある．だから，この定義には意味がある．どのような意味があるか，それは以下で示す．「配置を平行移動する」平行移動後の配置は元の配置とは異なる．そして，この平行移動後の配置と元の配置との関係のあり方によって，元の配置の性質があきらかになる．

x が配置であって $p, q \in \mathbf{Z}$ のとき，$T_{p,q}x$ は

$$(T_{p,q}x)_i = x_{i+q} - p$$

で定義される配置であるとする．これを素直に読み取れば，$T_{p,q}x$ の i 番目の点は，x の $i+q$ 番目から持ってきて，x 座標を p だけ減らしたものである．一般に，配置 x 内の x_i は左下から右上に向かって並んでいる．だから，番号が増えると，x_i の座標は増える．q だけ多い番号のところから点を引き戻して，p だけ座標を減らす．これは確かに平行移動になっている．p も q もどんな整数でもいいから，平行移動により無数の配置が得られる．たとえば，q を大きく取って $|p|$ を小さく取る．すると 2 つの配置は遠い．平行移動後の配置ははるか上にある．逆に，q を小さく取って $|p|$ を大きく取る．すると，平行移動後の配置ははるか下にある．とすると，p, q をうまく選ぶと，元の配置と平行移動配置とが，互いに近くなる．近さの下限というような概念が可能である．

さまざまな $T_{p,q}x$ を x の平行移動 (translate) と呼ぶ．x が h に関する極小配置なら (h は (H) を満たす), その平行移動もすべて (h に関して) 極小配置である．これは (H_1) から直接の言えることである．x が有理数回転数の軌道なら, うまく p, q を取ると, 平行移動が元の配置と一致する．一方, x が無理数回転数の軌道なら, どんな p, q を持ってきて平行移動しても, 元の配置とは一致しない．いくらでも近くに来るものがあるだろうが．

命題 2.2. h が (H) を満たし, x が h に関する任意の極小配置であると, x の任意の 2 つの平行移動は比較可能である．

証明. Bangert 参照 ([3, 定理 3.13])．(谷川: Bangert との記法の違いを修正すること。とくに $T_{p,q}$ の違い)．$q = 0$ なら陳述は自明に成り立つ．実際, 番号を変えずに, 上下に移動するだけだから, 交わらない．x と $x^* = T_{(p,q)}x$ が交わると仮定する．交点が 0 で起こるか, または 0 と 1 の間で起こるとしても一般性は失わない．極小配置同士は二度と交わらない．必要なら x と x^* を取り替えて, 次が成り立つと仮定できる．

$$x_j^* > x_j \quad \text{for} \quad j < 0 \quad \text{かつ} \quad x_j^* < x_j \quad \text{for} \quad j > 0.$$

つまり, $j = 0$ を境界にして, 左では x^* が x より上, 右では x より下．

$p > 0$ の場合を証明する．$p < 0$ の場合は同様に扱える．

いま $j \geq 0$ として $x_j > x_j^* = x_{j+q} - p$ である．また $x_{j+q} > x_{j+q}^* = x_{j+2q} - p$. よって $x_{j+q} - p > x_{j+2q} - 2p$. 同様にして整数 $v > 0$ に対して $x_{j+vq} - vp > x_{j+(v+1)q} - (v+1)p$. だから, どの $j \geq 0$ に対しても, 列

$$v \in \mathbf{N} \to x_{j+vq} - vp$$

は減少列である．

いま $j < 0$ として $x_j < x_j^* = x_{j-q} + p$ である．また $x_{j-q} < x_{j-q}^* = x_{j-2q} + p$. よって $x_{j-q} + p < x_{j-2q} + 2p$. 同様にして整数 $v > 0$ に対して $x_{j-vq} + vp < x_{j-(v+1)q} + (v+1)p$. どの $j < 0$ に対しても, 列

$$v \in \mathbf{N} \to x_{j-vq} + vp$$

は増大列である．

x を, 周期 (q, p) かつ $\overline{x}_0 < x_0$ なる $\overline{x} \in \mathcal{M}_f$ と比較する．このような $\overline{x}$ を得るには次の定理 (Bangert の定理 (3.3)) を使う．

定理. すべての $(q, p) \in (\mathbf{Z} \backslash \{0\}) \times \mathbf{Z}$ に対して, 周期 (q, p) の $x \in \mathcal{M}_f$ がある．

必要なら平行移動 $T_{(j,0)}$ を行なう．($p < 0$ の場合, 増大列になるから, 周期 (q,p) で $\overline{x}_0 > x_0$ を満たす $\overline{x} \in \mathcal{M}_f$ と比較する.) 極小配置同士は1度しか交わらないから, $j \le 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ であるか, $j \ge 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ である．

$j \le 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ の場合を扱おう．$j \ge 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ の場合もまったく同様である．$j \le 0$ のとき, 列 $v \to x_{j-vp} + vq$ は減少列であって, 下から $\overline{x}_{j-vp} + vq = \overline{x}_j$ によって抑えられている．ゆえに

$$\tilde{x}_j : \lim_{v\to\infty}(x_{j-vp} + vq) = \lim_{v\to\infty}(T_{(vp,vq)}x)_j$$

が $j \le 0$ に対して存在し, $\tilde{x}_{j-p} + q = \tilde{x}_j$ である．$(\tilde{x}_j)_{j\le 0}$ の周期性より, x も x^* も $(\tilde{x}_j)_{j\le 0}$ に α 漸近であること, また $|x_{i+1} - x_i|$ は $j \to -\infty$ のとき有界であることが簡単に結論できる．いまや, 互いに漸近的な極小配置同士は交わらないという性質は x と x^* が交わるという仮定に矛盾する． □

$T_{p,q}x > x$ なら $T_{lp,lq}x > x$ がどの整数 l に対しても成り立つ．なぜなら, $T_{lp,lq} = T_{p,q}^l$ ($T_{p,q}$ の l 回反復) だからである．したがって, $q > 0$ のみを考えると, $T_{p,q}x > x$ か $T_{p,q}x < x$ かは p/q のみに依存する．

$\rho_-(x)$ は $T_{p,q}x < x$ なる p/q ($q > 0$) の集合とし,
$\rho_+(x)$ は $T_{p,q}x > x$ なる p/q の集合とする．

いま, 配置 x の回転数は未知である．勝手な回転数 p/q を持って来て, x を回転数 p/q だけ縦横にずらす．配置 x は, 横軸 n, 縦軸 x 座標からなる空間における．傾いた折れ線である．その傾きが実は回転数である．このずらしの「精神」は, 配置 x を傾きを変えずにずらすことである．すなわち, 配置 x の各点を横に q ずらし, 縦に p だけずらす．一斉に同じ量だけ左右上下にずらすから傾きは変わらない．上記命題 2.2 は極小配置の局所的ふるまいに強い制限を課す．どんな平行移動を行っても, もとの配置と交わらない．ということは, 極小配置はかなり滑らかに左下から右上に進んで行く．前後の点に凸凹が少ないのである．単調であることが条件である．次の点の x 座標の方が小さいと, 平行移動したときに交わってしまう．これは簡単に示せる．

命題 2.3. h は (H) を満たし, x が h に関する任意の極小配置であると, $(\rho_-(x), \rho_+(x))$ は有理数の集合のデデキント切断である．つまり, $\rho_-(x)$ のどの要素も $\rho_+(x)$ のどの要素より小さく, $\rho_-(x)$ も $\rho_+(x)$ も空でなく, $\rho_-(x) \cup \rho_+(x)$ は高々1つを除いてすべての有理数を含む.

<u>証明</u>. 簡単にわかるように, 命題 2.2 から, $\rho_-(x)$ も $\rho_+(x)$ も空でないという陳述以外が出る．この陳述自身は, [3, 系 3.16] から言える．

Bangert の**定理** (3.15). どの $x \in \mathcal{M}$ に対しても, 円写像 $f \in \tilde{G}_+$ があって, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $x_{i+1} = f(x_i)$ である. ($\tilde{G}_+$ は円写像の持ち上げ群.)

<u>(3.15) の証明</u>. はじめに閉集合 $A := p_0(\overline{B}_x)$ 上で f を $f := p_1 \circ (p_0|\overline{B}_x)^{-1}$ で定義する. ただし, $B_x = \{T_{a,b}x \mid (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$. あるいは同じことであるが, $x^* \in \overline{B}_x$ のとき $f(x^*_0) := x^*_1$ とする. (3.14) より, f は A からそれ自身の上への狭義増加同相写像である. 明らかに, f はすべての $t \in A$ に対して $f(t+1) = f(t) + 1$ を満たす. f を A から $\mathbf{R}$ へ affine 的に拡張する. すなわち, $\mathbf{R} \backslash A = \cup(a_n, b_n)$ なら, $t \in [0,1]$ に対して $f((1-t)a_n + tb_n) := (1-t)f(a_n) + tf(b_n)$. 簡単にわかるように, $f \in \tilde{G}_x$ および $f(x_i) = f((T_{(-i,0)}x)_0) = x_{i+1}$ である. □

(3.15) を円写像の結果 (2.1) および (2.2) と合わせて次を得る.

(3.16) **系.** 次の性質を持つ連続写像 $\tilde{\alpha} : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ が存在する.

(a) すべての $x \in \mathcal{M}, i \in \mathbf{Z}$ に対して, $|x_i - x_0 - i\tilde{\alpha}(x)| < 1$ である. とくに $\tilde{\alpha}(x) = \lim_{|i| \to \infty} x_i/i$ である.

(b) $x \in \mathcal{M}$ が (q,p) 周期的なら, $\tilde{\alpha}(x) = p/q$ である.

(c) $\tilde{\alpha}$ は T の下で不変である. すなわち, すべての $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ に対して $\tilde{\alpha}(T_{(a,b)}x) = \tilde{\alpha}x$ である.

<u>注意</u>. $\tilde{\alpha}(x)$ を $x \in \mathcal{M}$ の回転数と呼ぶ.

<u>証明</u>. $x \in \mathcal{M}$ に対して, (3.15) に応じて $f \in \tilde{G}_+$ を選び, $\tilde{\alpha} := \tilde{\alpha}(f)$ を定義する. すると, (a) は (2.1) および (2.2) から出る. とくに $\tilde{\alpha}(x)$ はよく定義されている. $\tilde{\alpha}$ の連続性や (b),(c) は (a) からただちに出る.

□

$\widetilde{\rho}(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$ とおき, $\widetilde{\rho}(x)$ を x の回転記号とよぶ. $\rho(x)$ は $\widetilde{\rho}(x)$ の切断点を表すとする. すなわち, 一意の実数であって, $\rho_-(x)$ のどの要素も $\leq \rho(x)$ であり, $\rho_+(x)$ のどの要素も $\geq \rho(x)$ である. $\rho(x)$ を x の回転数と呼ぶ.

記号空間 $\mathcal{S}$ は有理数のデデキント切断の集合を表す. $\mathcal{S}$ に標準的順序を与える. つまり, (A,B) と (A',B') がデデキント切断であるとき, $(A,B) \leq (A',B')$ は $A \subset A'$ かつ $B' \subset B$ を意味する. デデキント切断にともなう標準的写像 (canonical mapping) $\mathcal{S} \to \mathbf{R}$ は順序保存である.

ω を無理数とするとき, これを切断とする有理数のデデキント切断は一意である. そのデデキント切断も ω と書く. 有理数 p/q には 3 つのデデキント切断 (A,B) がある. すなわち, p/q が A に含まれる, B に含まれる, どちらにも含まれない場合である. これらをそれぞれ $p/q+$, $p/q-$, p/q と書く. だから

$p/q- < p/q < p/q+$ である．このようにして，実数の集合 $\mathbf{R}$ は記号空間 $\mathcal{S}$ の部分空間となる．言い換えると，$\omega \in \mathbf{R}$ であるとき，これをデデキント切断 (A, B) と同一視する．ここで，A は ω より小さなすべての数からなり，B は ω より大きいすべての数からなる．

$\tilde{\rho}(x) \in \mathcal{S}$ であるから，この記号の意味するところは，$\tilde{\rho}(x)$ は無理数であるか，$p/q+, p/q-$ または p/q であると考える．ただし，p/q は有理数である．

命題 2.4. h は (H) を満たすとし，$\omega \in \mathbf{R}$ であるとする．このとき，(h に関する) 極小配置 x があって，$\rho(x) = \omega$ を満たす．

<u>証明</u>. Bangert[3, 定理 3.17] を見よ． □

この結果が，面白いのは，$\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ として，$M_{\overline{f}}$ の構造へ応用があるからである．定義から容易に理解できるように，$M_{\overline{f}}$ は無限円筒の閉 $\overline{f}$ 不変集合である．

$\mathcal{O}(\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ が $\overline{f}$ の普遍被覆への持ち上げ f の軌道であるとすると，$\mathcal{O}$ の**回転数**は

$$\rho(\mathcal{O}) = \lim_{i \to \pm\infty} x_i/i,$$

によって，極限が存在する場合に定義される．同じ用語を $\overline{f}$ の軌道に対しても使うことにする．すなわち，$\overline{\mathcal{O}}$ を $\mathcal{O}$ の無限円筒への射影とすると，その回転数を $\rho(\overline{\mathcal{O}}) = \rho(\mathcal{O})$ で定義する．曖昧な点がある．つまり，$\rho(\overline{\mathcal{O}})$ は持ち上げ f の選び方に依存する．持ち上げを変えると，回転数は整数値だけ変化する．しかし，変化はどの軌道に対しても同一なので，この曖昧性を無視し，議論の間中，$\overline{f}$ の持ち上げ f を固定しておく．

$\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ とし，f はその持ち上げとし，h は f にともなう変分原理とする．$x = (\ldots, x_i, \ldots)$ を h に関する極小配置とする． 命題 2.1 より，軌道 $\mathcal{O} = (\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ が M_f 内にあって，$(\ldots, x_i, \ldots)$ にともなう．直截に

$$\rho(\mathcal{O}) = \rho(x)$$

が成り立つ．

こうして，命題 2.3 と 2.4 から次が出る．

命題 2.5. $M_{\overline{f}}$ 内のどの $\overline{f}$ 軌道も回転数を持つ．どの実数 ω に対しても，$M_{\overline{f}}$ 内に $\overline{f}$ 軌道があって，回転数として ω を持つ．

$M_{\overline{f}}$ 内の $\overline{f}$ 軌道 $\overline{\mathcal{O}}$ (または M_f 内の f 軌道 $\mathcal{O}$) の回転記号 $\tilde{\rho}(\overline{\mathcal{O}})$ (または $\tilde{\rho}(\mathcal{O})$) とは，対応する極小配置の回転記号である．前と同様，回転記号は実数であるか，p/q を有理数として $p/q-$ または $p/q+$ の形をしている．

ω が実数なら, $M_{\overline{f},\omega}$ は $M_{\overline{f}}$ 内の $\overline{f}$ 軌道のうち回転**記号** (数でない) ω を持つもののすべての和を表す. ω が有理数の場合, すなわち, $q>0$ として p/q が既約の場合, $M_{\overline{f},\omega}$ 内の軌道はすべて周期 q で周期的である. 実は, $(\ldots,(x_i,y_i),\ldots)$ が $\mathbf{R}^2$ へのこのような軌道の持ち上げであると, $x_{i+q}=x_i+p$ (したがって $y_{i+q}=y_i$) である. このことは回転記号の定義からただちにしたがう. なぜなら, デデキント切断で記号 p/q に対応するものは p/q を含まないからである.

ω が $p/q-$ または $p/q+$ の形の回転記号なら, $M_{\overline{f},\omega}$ は, 回転記号として ω または p/q を持つすべての軌道の和を表すものとする (意味不明).

命題 2.6. $\overline{f}\in\mathcal{P}^1_\beta$ かつ $\omega\in\mathcal{S}$ のとき, $M_{\overline{f},\omega}$ は無限円筒 $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\mathbf{R}$ のコンパクト部分集合である. π は無限円筒において, その第一成分 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への射影とする. このとき, $\pi|M_{\overline{f},\omega}$ は 1 対 1(injective) である. したがって, $M_{\overline{f},\omega}=\mathrm{graph}\ u$ が適当な関数 $u=u_{\overline{f},\omega}:\pi(M_{\overline{f},\omega})\to\mathbf{R}$ に対して成り立つ. この関数はリプシッツであり, リプシッツ定数は $\le\cot\beta$ である. すなわち, $\theta,\theta'\in\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対して

$$|u(\theta')-u(\theta)|\le(\cot\beta)|\theta'-\theta|$$

が成り立つ. ただし, $|\theta'-\theta|$ は, $\theta\equiv x(\mathrm{mod}\ 1)$ および $\theta'\equiv x'(\mathrm{mod}\ 1)$ として $\min|x'-x|$ と定義される.

<u>証明</u>. 定義より明らかに, $M_{\overline{f},\omega}$ は無限円筒の閉部分集合である. Bangert[3] のさまざまな結果 (もとは [1] においてもっと強い制限の下で証明された) からすると, x と x' が極小配置であって, $M_{\overline{f},\omega}$ 内の 2 つの軌道に対応すると, これらは比較可能である. ω が無理数の場合, これは [3, 定理 4.1] である. $\omega=p/q-,p/q,$ または $p/q+$ のとき, これは [3, 定理 5.1] の帰結である. [16] の 5 節最後の議論を見よ. このような任意の 2 つの配置は比較可能であるから, $\pi|M_{\overline{f},\omega}$ は 1:1 (injective) である.

$u_{\overline{f},\omega}$ に対するリプシッツ限界を証明するために, $M_{f,\omega}\subset\mathbf{R}^2$ 内の (x,y) と (ξ,η) を考える. (もちろん, $M_{f,\omega}$ は, 射影 $\mathbf{R}^2\to(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\mathbf{R}$ の下での $M_{\overline{f},\omega}$ の逆像である.) $(\overline{x},\overline{y})=f^{-1}(x,y)$, $(\overline{\xi},\overline{\eta})=f^{-1}(\xi,\eta)$, $(x',y')=f(x,y)$, および $(\xi',\eta')=f(\xi,\eta)$ とおく. たとえば, $x<\xi$ としてみる. 上で引用した比較可能性の結果から, $\overline{x}<\overline{\xi}$ および $x'<\xi'$ が出る. $y=\partial_2h(\overline{x},x)$, $\eta=\partial_2h(\overline{\xi},\xi)$ が命題 2.1 より成り立つ. ここで h は f にともなう変分原理である. h は (H_5) を満たすから, $\partial_2h(\overline{\xi},x+)\le\partial_2h(\overline{x},x)$ である. h は $(\mathrm{H}_{6\theta})$ を $\theta=\cot\beta$ として満たすから, $\partial_2h(\overline{\xi},\xi)\le\partial_2h(\overline{\xi},x+)+\theta(\xi-x)$ が成り立つ. これらの不等式をつなぎ合わせて $\eta\le y+\theta(\xi-x)$ を得る. $y=-\partial_1h(x,x')$, $\eta=-\partial_1h(\xi,\xi')$ を使って $y\le\eta+\theta(\xi-x)$ を同様な議論から得る. □

$M_{\overline{f},\omega}$ 内の軌道に対応する極小配置が比較可能である事実は, もうひとつ重

要な結果をもたらす．$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 内の順序つきの異なる 3 点 $(\theta, \theta', \theta'')$ が正の (負の) 向きを持つとは, $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\backslash\theta''$ 内で θ を θ' に結ぶ方向付き線分が 正に (負に) 向きづけられているときである, という定義を思い出そう．$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の順序付きの異なる 3 点を 2 つの類に分割する (partition) するやり方は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の**円順序**とよばれる．明らかに, これは $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の任意の部分集合に円順序を誘導する．$\pi|M_{\overline{f},\omega}$ は 1:1 (injective) であるから, $M_{\overline{f},\omega}$ にも円順序が成り立つ．同様に, $\mathbf{R}$ 内の順序は $M_{f,\omega}$ に順序を誘導する．なぜなら $M_{f,\omega}$ から $\mathbf{R}$ への射影は 1:1 だからである．

命題 2.7. 任意の $\omega \in \mathcal{S}$ に対して, f は $M_{f,\omega}$ 上の順序を保存し, $\overline{f}$ は $M_{\overline{f},\omega}$ 上の円順序を保存する．

証明. 最初の陳述は $M_{f,\omega}$ 内の 2 つの軌道に対応する配置が比較可能であるという陳述を翻訳したものである．第二の陳述は最初のものからしたがう．□

極小軌道の問題への筆者の興味は Percival [19,20] の数値結果に触発されたものである．彼は (数値計算を基に), ねじれ写像のホモトピー非自明な不変円は全体が極小軌道からなることを予想した．この予想は, ほぼ Aubry and Le Daeron[1] の結果から出るものであり, R. MacKay への手紙 [11] において, (ねじれ写像の場合は) 完全な証明を筆者は与えた．ねじれ写像の有限合成へのこの結果の一般化も正しい．完全を期すために, この一般化を述べ, 証明する．

命題 2.8. $\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ とする．Γ は無限円筒 $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ の部分集合とする．Γ が円に同相であって, 無限円筒内で点に可縮でないとする．$\overline{f}\Gamma = \Gamma$ であるとする．このとき, $\Gamma \subset M_{\overline{f}}$ である．

証明. Birkhoff の定理 (補遺 1) より, Γ はリプシッツ関数 $u : (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$ のグラフである．h は $\overline{f}$ の変分原理であるとし,

$$H(x, x') = h(x, x') - \int_x^{x'} u(t)dt$$

とおく．配置が H に関して極小であるのは, h に関して極小であるとき, そしてそのときのみである．なぜなら,

$$H(x_i^*, \ldots, x_j^*) - H(x_i, \ldots, x_j) = h(x_i^*, \ldots, x_j^*) - h(x_i, \ldots, x_j)$$

だからである．

補題 1. H は (x, x') 平面の Γ の像の上で一定である．

(x, x') 面の Γ の像とは, 次のようなものである．$\overline{f}$ の持ち上げ $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は議論の間中固定しておく．$\widetilde{\Gamma}$ は平面から円筒への射影の下での Γ の逆像であ

るとする. $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ かつ $f(x,y)=(x',y')$ のとき, $\pi_f(x,y)=(x,x')$ とおく. (x,x') 面の $\widetilde{\Gamma}$ の**像**とは $\pi_f(\widetilde{\Gamma})$ のことである. これを Γ^* と表す. π_f は $\widetilde{\Gamma}$ 上で 1:1 であること, また Γ^* は $\mathbf{R}^2$ の閉部分集合であることを注意しておく. 前者は Γ がグラフであるという Birkhoff の定理の帰結である.

<u>補題 1 の証明</u>. $\overline{f}\in\mathcal{P}^1$ であるから, $\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_k\in\mathcal{C}^1$ があって, $\overline{f}=\overline{f}_k\circ\ldots\circ\overline{f}_1$ を満たす. $\overline{f}_i$ $(i=1,\ldots,k)$ の持ち上げ $f_i:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を選んで, $f=f_k\circ\cdots\circ f_1$ とする. $\Gamma_0=\Gamma,\Gamma_i=\overline{f}_i\Gamma_{i-1}$ とおく $(i=1,\ldots,k)$. Birkhoff の定理より, 各 Γ_i はリプシッツ関数 $u_i:\mathbf{R}/\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ のグラフである. なぜなら, Γ_i は $\overline{f}_i\circ\overline{f}_{i-1}\circ\cdots\circ\overline{f}_i\circ\overline{f}_k\circ\cdots\circ\overline{f}_{i+1}\in\mathcal{P}^1$ だからである.

$(x,x')\in\Gamma^*$ を考える. このとき, $y,y'\in\mathbf{R}$ があって, $(x,y)\in\Gamma$ と $f(x,y)\in(x',y')$ が成り立つ. 次に, h が (x,x') において微分可能であること, また

$$y=-\partial_1h(x,x'),\quad y'=\partial_2h(x,x')$$

であることを示す. これを証明するために, h は一般に微分可能でないが, 片側第一微分 $\partial_1h(x-,x')$ ほかは常に存在することを指摘しておく. また [16, 5 節] の終わりの例において, 次のような表現をそれらに与えた. すなわち, h_i を f_i の母関数とする. 条件 $x_0=x$ および $x_k=x'$ を満たす列 $x_0,\ldots,x_k$ で

$$h_1(x_0,x_1)+h_2(x_1,x_2)+\ldots+h_k(x_{k-1},x_k)$$

を極小にするものすべての中で, 最小のもの $x_0^{\min},\ldots,x_k^{\min}$ と最大のもの $x_0^{\max}$, ..., $x_k^{\max}$ がある.

$$\begin{aligned}y_i^\mu&=-\partial_1h(x_i^\mu,x_{i+1}^\mu),\quad i=0,\ldots,k-1,\\ y_i^\mu&=\partial_2h(x_i^\mu,x_{i+1}^\mu),\qquad i=0,\ldots,k,\end{aligned}$$

とおく. ここで $\mu=\min$ または $\max$ である. このとき, $f_i(x_i^\mu,y_i^\mu)=(x_{i+1}^\mu,y_{i+1}^\mu)$ および

$$\begin{aligned}\partial_1h(x-,x')&=-y_0^{\min},\quad \partial_1h(x+,x')=-y_0^{\max},\\ \partial_2h(x,x'-)&=y_k^{\min},\qquad \partial_2h(x,x'+)=y_k^{\max},\end{aligned}$$

である.

$(x,x')\in\Gamma^*$, $(x,y)\in\Gamma$, かつ $f(x,y)=(x',y')$ の場合に戻ろう. Birkhoff の定理を使って, $y_0^{\min}=y_0^{\max}=y$ および $y_k^{\min}=y_k^{\max}=y'$ を証明することができる. 実際, 逆, つまり, $y_0^\mu\neq y$ (μ は min または max), たとえば $y_0^\mu<y$ としてみる. $(x_0,y_0)=(x,y)$, $(x_i,y_i)=f(x_{i-1},y_{i-1})$, $i=1,\ldots,k$ とおく. f_1 のねじれ条件より, $x_1^\mu<x_1$ である. なぜなら, $x_0^\mu=x_0$ かつ $y_0^\mu<y_0$ だからである. 明らかに $y_1^\mu<u_1(x_1^\mu)$ である. つまり, (x_1^μ,y_1^μ) は $\Gamma_1=\text{graph }u_1$ より下にある. f_2 の

ねじれ条件を, Γ_1 と Γ_2 が関数のグラフであることを合わせると, $x_2^\mu < x_2$ が出る. このようにして続けると, k ステップ後に $x_k^\mu < x_k$ を得る. けれども, 定義により, $x_k^\mu = x' = x_k$ である. この矛盾からすると, $y_0^\mu < y$ は不可能である. 同様に, $y_0^\mu > y$ から $x_k^\mu > x_k$ が出て, これも矛盾である.

こうして, $y_0^{\min} = y_0^{\max} = y$ および $y_k^{\min} = y_k^{\max} = y'$ が示せた. 片側第一微分に関するわれわれの公式からすると, このことから, h が (x, x') において微分可能であり, $u(x) = y = -\partial_1 h(x, x')$, $u(x') = y' = \partial_2 h(x, x')$ であることがわかる.

各 $x \in \mathbf{R}$ に対して, 一意の $x' = x'(x)$ があって, $(x, x') = \Gamma^*$ を満たす. Birkhoff の定理と f が C^1 であるという仮定より, x' は x のリプシッツ関数であり, したがって, ほぼいたるところ微分可能である. (たとえば, [22, 11.7 節] を見よ.) このとき

$$\frac{d}{dx} H(x, x'(x)) = \partial_1 H(x, x') + \partial_2 H(x, x') \frac{dx'}{dx}$$

である. ところが

$$\begin{aligned} \partial_1 H(x, x') &= \partial_1 h(x, x') + u(x) = 0, \\ \partial_2 H(x, x') &= \partial_2 h(x, x') - u(x') = 0, \end{aligned}$$

である. だから, $dH(x, x'(x))/dx$ はほぼいたるところでゼロである. $H(x, x'(x))$ は x のリプシッツ関数であるから, このときは H が Γ^* 上で一定であることを意味する. (たとえば, [22, 11.7 節] を見よ.) □

補題 2. C は H の極小値であり, この値は Γ^* 上でのみ実現される.

<u>証明</u>. 明らかに, $H(\xi, x') + H(x, \xi') - H(x, x') - H(\xi, \xi') = h(\xi, x') + h(x, \xi') - h(x, x') - h(\xi, \xi')$ が $x < \xi$ かつ $x' < \xi'$ のときに成り立つ. したがって, H は (H_5) を満たす. したがって,

$$\liminf_{\xi \downarrow x} \frac{H(\xi, x') + H(x, \xi') - H(x, x') - H(\xi, \xi')}{\xi - x} \geq \int_{x'}^{\xi'} \rho(x, t) dt,$$

が $x' < \xi'$ のとき成り立つ. 補題 1 の証明において, $\partial_1 H(x, x') = 0$ が $(x, x') \in \Gamma^*$ のとき成り立つことを示した. したがって,

$$\liminf_{\xi \downarrow x} \frac{H(\xi, \xi') - H(x, \xi')}{\xi - x} \leq -\int_{x'}^{\xi'} \rho(x, t) dt,$$

が, $(x, x') \in \Gamma^*$ かつ $x' < \xi'$ のとき成り立つ. ξ が x に向かって下から近づいていくときも $\limsup$ を扱うことができ, 同じ上限を得る. この 2 つの場合を結ん

で, $(x,x')\in\Gamma^*$ かつ $x'<\xi'$ のとき

$$\liminf_{\xi\to x}\frac{H(\xi,\xi')-H(x,\xi')}{\xi-x}\le-\int_{x'}^{\xi'}\rho(x,t)dt,$$

を得る．言い換えると, 第一変数に関する $H(x,\xi')$ の上 Dini 微分は, (x,ξ') が Γ^* より上にあるときに負である．同様な議論により, 第一変数に関する $H(x,\xi')$ の下 Dini 微分は, (x,ξ') が Γ^* より下にあるときに正である．

$(x,\xi')\in\mathbf{R}^2$ とし, また ξ は $(\xi,\xi')\in\Gamma^*$ なる一意の実数とする．(x,ξ') が Γ^* より上 (または下) にあるなら, $x<\xi$ (または $x>\xi$) である．補題 2 は補題 1 と, 第一変数に関する H の Dini 微分について上で述べた主張からである．というのは, これらから $H(x,\xi')>H(\xi,\xi')$ が $x\neq\xi$ のとき成り立つからである．□

<u>命題 2.8 の証明</u> (結論)．$(\ldots,(x_i,y_i),\ldots)$ は $\widetilde{\Gamma}$ 内の f 軌道であるとする．対応する配置はどの i に対しても (x_i,x_{i+1}) を満たす．補題 2 からただちにしたがうとおり, この配置は H に関して極小であり, したがって, h に関しても極小である．□

J. Moser が指摘してくれたところによると, 命題 2.8 は有名なワイエルシュトラスの定理に強く関係する．その定理によると, 正定値ラグランジュ系の極値の体 (field) の要素は作用を極小にする．Moser の指摘では, 上に与えた証明はワイエルシュトラスの証明に強く関係する．この結果と証明に関しては, Carathéodory [5] を参照のこと．

3. $M_{\overline{f}}$ の内的性質

前節で与えた $M_{\overline{f}}$ の定義からはまったく明らかではないが, $M_{\overline{f}}$ は, 以下の結果が語る意味で内的 (intrinsic) である．

命題 3.1. $\overline{f},\overline{g}\in\mathcal{P}^1$ とし, 無限円筒 $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\mathbf{R}$ の C^1 面積保存微分同相写像 $\overline{\phi}$ があって, $\overline{g}=\overline{\phi f\phi}^{-1}$ であるとする．このとき $\overline{\phi}(M_{\overline{g}})=M_{\overline{f}}$ が成り立つ．

本節の残りは命題 3.1 の証明である．

$\overline{\phi}$ が方向保存であることを示すことから始める．$C>0$ とする．無限円筒の上端 (下端) のどの近傍にも, 回転数が $>C$ $(<-C)$ なる $\overline{f}$ の軌道がある．このことは前節の理論から出る．すなわち, $M_{\overline{f}}$ はこのような軌道を含む．一方, N が上端 (下端) の十分小さな近傍であるとき, N に完全に含まれる軌道で回転数を持つものはどれも回転数は $>C$ (または $<-C$) である．なぜかというと, $\overline{f}$ は両端を無限にねじるからである．

回転数の定義は持ち上げの選び方に依ることを思い出そう．$\overline{f}$ の持ち上げ f と $\overline{g}$ の持ち上げ g を選んで $g = \phi f \phi^{-1}$ となるようにする．ここで, ϕ は $\overline{\phi}$ の持ち上げである．この約束の下で, $\overline{\phi}$ が $\pi_1((\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R})$ 上に恒等写像を誘導するなら, $\overline{\phi}$ は同じ回転数を持つ $\overline{g}$ の軌道を $\overline{f}$ の軌道へと運ぶ. $\overline{\phi}$ が $\pi_1((\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R})$ の非自明自己同形写像を誘導するなら, $\overline{\phi}$ は $\overline{f}$ の軌道を $\overline{g}$ の軌道へ運ぶ．その際, 後者はもとの軌道の回転数の負の回転数を持つ．

だから $\overline{\phi}$ は π_1 上の恒等写像を誘導し両端を固定する．あるいは, 恒等写像の負を誘導し, 両端を反転する．どちらの場合でも, $\overline{\phi}$ は方向保存である．

この節の残りでは, $\overline{f}$ は $\mathcal{P}^1$ の要素であるとする．われわれが示すのは, $M_{\overline{f}}$ が $\overline{f}$ と無限円筒上の面積形式 $\Omega = dy \wedge d\theta$ のみを使って定義できることである．これで十分である．なぜなら, $\overline{\phi}$ は方向保存かつ面積保存であり, したがって面積形式を保存するからである．

$\overline{f}$ 不変確率測度 μ に対して, [18] の平均作用 (または平均ポアンカレ・カルタン不変量) $A(F,\mu) = A_{H,\eta}(f,\mu)$ を定義する．これは $d\eta = \Omega$ なる 1-形式 η の選び方に依存し, (周期 1 の) 周期的ハミルトン関数 H に依存する．ここで $\overline{f}$ は H にともなう時間 1 写像である．ところが, これはポアンカレ・カルタン不変量の普通の不変性も有する．今回の状況では, この不変性は以下のことに対応する．すなわち, H' が第二の (周期 1 の) 周期的ハミルトン関数であって, その時間 1 写像が $\overline{f}$ であり, η' は第二の 1-形式であって $d\eta' = \Omega$ を満たすなら, $B, C \in \mathbf{R}$ があって,

$$A_{H',\eta'}(\overline{f},\mu) = A_{H,\eta}(\overline{f},\mu) + B\rho(f,\mu) + C$$

が, どの $\overline{f}$ 不変確率測度に対しても成り立つ．ここで, $\rho(f,\mu)$ は μ の平均回転数であって, [18] でも定義された．平均作用の上記の不変性は [18] で証明された．

[18] において, **極小**測度の概念を定義した．すなわち, $\overline{f}$ 不変確率測度 μ が極小であるのは, 実数 λ があって, μ が $\overline{f}$ 不変確率測度 μ の上で $A(\overline{f},\mu) - \lambda\rho(f,\mu)$ を極小にするとき, そしてそのときのみである．この概念は面積形式 Ω と $\overline{f}$ のみに依存する．これは上記の平均作用の不変性から来る．

エルゴード的 $\overline{f}$ 不変確率測度 μ が極小であるのは, その台が $M_{\overline{f}}$ 内にあるとき, そしてそのときのみである．これが [18] での主結果であった．$M_{\overline{f}}^{\circ}$ は, $\overline{f}$ 極小測度すべての台すべての和の閉包を表すとする．極小測度の概念は Ω と $\overline{f}$ のみに依存するから, $M_{\overline{f}}^{\circ}$ も同様である．言い換えると, $M_{\overline{f}}^{\circ}$ は命題 3.1 の意味で内的 (intrinsic) である．つまり, $\overline{\phi}(M_{\overline{g}}^{\circ}) = M_{\overline{f}}^{\circ}$ である．

$M_{\overline{f}}$ が内的 (intrinsic) であることの証明の概略は以下のとおりである．M_f° は $\mathbf{R}^2$ 内の $M_{\overline{f}}^{\circ}$ の逆像であるとする ($\mathbf{R}^2$ 内の $M_{\overline{f}}$ の逆像 M_f との類比である)．$\mathcal{O} = (\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ が M_f 内の軌道なら, M_f° 内に軌道 $\mathcal{O}' = (\ldots, (x_i', y_i'), \ldots)$ があって, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i' - x_i| + y_i' - y_i| < +\infty$ という意味で $\mathcal{O}$ に L^1 **漸近**であるこ

とを以下で示す．$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ が f の L^1 漸近軌道であって，それらを無限円筒に射影したときに相対コンパクトであるなら，**作用差** (difference action) (または**ポアンカレ・カルタン不変量差** difference Poincaré–Cartan invariant) $\Delta A(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ なる内的概念を定義する．これから示すのは，M_f の軌道 $\mathcal{O}$ が次のように特徴づけられることである．すなわち，M_f° 内に軌道 $\mathcal{O}'$ で $\mathcal{O}$ に L^1 漸近のものがあって，$\Delta A(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = 0$ なることである．$M_{\overline{f}}^\circ$ は内的であるから，このことから M_f° が内的であることがいえる．

$\mathcal{O} = (\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ は M_f 内の軌道であるとする．ω は $\mathcal{O}$ の回転記号であるとし，$M_{f,\omega}^\circ = M_f^\circ \cap M_{f,\omega}$ とおく．$x = (\ldots, x_i, \ldots)$ は $\mathcal{O}$ に対応する配置であるとし，$X_{f,\omega}^\circ$ は $M_{f,\omega}^\circ$ 内の軌道に対応する配置集合であるとする．すでに見たように (命題 2.7), Aubry 理論からすると，$X_{f,\omega}^\circ$ の任意の 2 つの要素は比較可能である．$M_{f,\omega}^\circ$ は $\mathbf{R}^2$ 内で閉じているから，$X_{f,\omega}^\circ$ の最大要素 $x_- = (\ldots, x_{i-}, \ldots)$ で $\leq x$ なるものがあり，また $X_{f,\omega}^\circ$ の最小要素 $x_+ = (\ldots, x_{i+}, \ldots)$ で $\geq x$ なるものがある．$\mathcal{O}_-$ と $\mathcal{O}_+$ は ($M_{f,\omega}^\circ$ 内の) 対応する軌道であるとする．

このとき $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{i+} - x_{i-} \leq 1$ である．なぜなら，区間 $[x_{i-}, x_{i+}]$ を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に射影すると，回転記号 ω が有理数 p/q でないときは互いに素であり，ω が有理数 p/q なら $x_- = x = x_+$ である．実は，$\omega = p/q$ なら，$x_{i+q} = x_i + p$ であるから，$\mathcal{O}$ を $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ へ射影すると周期 q で周期的であり，エルゴード的確率測度を持つから，この場合 $\mathcal{O}$ は $M_{f,p/q}^\circ$ 内にあり，したがって主張どおり $x_- = x = x_+$ である．ω が無理数のとき，区間 $[x_{i-}, x_{i+}]$ を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ へ射影すると互いに素であり，このことは $\overline{f}|M_{\overline{f},\omega}$ の円順序保存性からの自明な帰結である (命題 2.7). ($M_{\overline{f},\omega}$ はただひとつの不変確率測度 $\mu_{\overline{f},\omega}$ を支え，また 台$\mu_{\overline{f},\omega} \subset M_{\overline{f},\omega}^\circ$ である.)

残りの場合，すなわち $\omega = p/q-$ または $p/q+$ のとき，この事実はもうすこし微妙である．簡単のため，$\omega = p/q+$ の場合のみを考察する．残りの場合も同様である．Aubry の議論 (Bangert[3, 定理 5.8] を見よ) によると，$M_{f,p/q+}^\circ$ は $M_{f,p/q}^\circ = M_{f,p/q}$ のどの補区間とも交わる．なぜなら，$M_{\overline{f},p/q+} \supset \limsup_{i\to\infty} \mathrm{supp}\mu_{\overline{f},\lambda(i)}$ が，任意の無理数列 λ_i で p/q に下向きに向かうものに対して成り立つからである．$M_{f,p/q+}^\circ$ は $M_{f,p/q}^\circ$ のどの補区間とも交わるから，x_- と x_+ の回転記号は $p/q+$ である (p/q ではない)．すると，$\overline{f}|M_{\overline{f},p/q+}$ の円順序保存性 (命題 2.7) と回転記号 $p/q+$ の定義したときの性質から簡単に言えるように，$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ へと区間 $[x_{i-}, x_{i+}]$ を射影すると互いに素である．

$\mathcal{O}' = \mathcal{O}_-$, $x' = x_-$, ほかとする．$x_- \leq x \leq x_+$ であるから，たったいま示したことから $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i - x_i'| \leq 1$ が成り立つ．$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ は極小軌道であるから，$y_i = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i)$ および $y_i' = -\partial_1 h(x_i', x_{i+1}') = \partial_2 h(x_{i-1}', x_i')$ が成り立つ．(H_5) と ($\mathrm{H}_{6\theta}$) と $x' < x$ より，$|y_i - y_i'| \leq \theta |x_i - x_i'|$ が得られる．だから，$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ は L^1 漸近である．これで第一ステップの証明が終わる．以上で,

M_f 内の任意の軌道 $\mathcal{O}$ が M_f° 内の任意の軌道 $\mathcal{O}'$ に L^1 漸近であることが示された.

$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ が f の L^1 漸近な軌道であって, 無限円筒へのその射影が相対コンパクトであるなら, **作用差** (または **ポアンカレ・カルタン不変量差**)

$$A(\mathcal{O}',\mathcal{O}) = \lim_{\substack{i \to -\infty \\ j \to \infty}} L_\eta(\mathcal{O}')(i,j) - L_\eta(\mathcal{O})(i,j)$$

を定義することができる. 右辺の量は次のように定義される. 知られているように, $\overline{f}$ は無限円筒上で周期 1 の周期ハミルトン関数 H から生成される時間 1 写像である (たとえば [18,3 節] を見よ). Γ が (無限円筒の) H の軌跡で $\mathcal{O}$ を拡張したものなら (?),

$$L_\eta(\mathcal{O})(i,j) = \int_{\Gamma|[i,j]} \eta - Hdt$$

とおく. ここで η は無限円筒上の 1-形式であって $d\eta = dy \wedge d\theta$ を満たすものである. これは [18,2 節] の記法と同じであって, もっと完全な記述に関してはそちらを参照されたい. とくに, $\eta = yd\theta$ と取ることができる. だから, Γ' を $\mathcal{O}'$ にともなう軌跡とし, $\Gamma(t) = (\theta(t), y(t))$, $\Gamma'(t) = (\theta'(t), y'(t))$ とおくと,

$$\Delta A(\mathcal{O}',\mathcal{O}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[y'\frac{d\theta'}{dt} - y\frac{d\theta}{dt} - H(\theta,y,t) - H(\theta',y',t) \right]$$

が成り立つ. $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ は L^1 漸近であるから, 被積分量は $L^1(\mathbf{R})$ に属し, 右辺の積分は存在する.

[18,2 節] において, $L_\eta(\mathcal{O})(i,j)$ が H と η にどのように依存するか解析した. H を変えるても, これは積分定数しか違わない. η を η' に置き換えると, $\int_{\Gamma|[i,j]} \eta' - \eta$ だけ変る. $\eta' - \eta$ は閉であるから, $\Delta A(\mathcal{O}',\mathcal{O})$ は η に依存しない ($d\eta$ が面積形式である限り) か, H に依存しない. 言い換えると, これは内的である.

$\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k \in \mathcal{J}^1$ を選んで $\overline{f} = \overline{f}_k \circ \ldots, \circ \overline{f}_1$ とする. f_i は普遍被覆への $\overline{f}_i$ の持ち上げとし, $f = f_k \circ \ldots \circ f_1$ とおく. h_i は f_i にともなう母関数であるとする. これらのさまざまな選択がなされて $h = h_1 * \ldots * h_k$ になっているとする.

$$\left(x^{(ki+j)}, y^{(ki+j)}\right) = f_j \circ \cdots \circ f_1(x_i, y_i)$$

とおく. $\mathcal{O}'$ に対しては, $\mathcal{O}$ と同様の記法 ($'$ つきで) を使う.

$$\Delta A(\mathcal{O}',\mathcal{O}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i(x'^{(i)}, x'^{(i+1)}) - h_i(x^{(i)}, x^{(i+1)})$$

が成り立つ. ここで $h_{i+k} = h_i$ とすることにより h_i の定義を $i \in \mathbf{Z}$ に広げた. [18,2 節] の議論によりこの公式は正しい.

この公式より, $\mathcal{O}$ が極小軌道であって $\mathcal{O}'$ が $\mathcal{O}$ に L^1 漸近なら, $\Delta A(\mathcal{O}', \mathcal{O}) \geq 0$ である. 等式は $\mathcal{O}'$ が極小のとき, そしてそのときのみ成り立つ.

したがって, M_f 内の軌道は次のような内的特徴を持つ. これらは軌道 $\mathcal{O}$ であって, これに対して M_f° 内に軌道 $\mathcal{O}'$ があって, $\mathcal{O}$ に L^1 漸近であり, $\Delta A(\mathcal{O}', \mathcal{O}) = 0$ を満たす.

これで命題 3.1 が証明された. □

4. 主結果

この節では, この論文の主結果を述べる. この論文の残りのほとんどはその証明からなる.

$\overline{f} \in \mathcal{P}^1$ を固定する. 本論文では以後, これを固定する. $\overline{f}$ のバーコフ不安定領域 R とは, 無限円筒のコンパクト不変部分集合であって, 以下の条件を満たすものである. すなわち, まず, R の境界点集合 (frontier) は 2 つの成分 Γ_- および Γ_+ からなり, それぞれは円に同相で, 無限円筒内で点に可縮でない. 次に, Γ が R の任意の $\overline{f}$ 不変集合であって円に同相で無限円筒内で点に可縮でないなら Γ は Γ_- または Γ_+ である.

$\overline{f}$ は無限円筒の両端を不動にするから, Γ_- も Γ_+ も $\overline{f}$ 不変であることに注意しよう. 命題 2.8 より, $\Gamma_\pm \subset M_{\overline{f}}$ である. 論文の残りでは, R は $\overline{f}$ のある固定したバーコフ不安定領域とする. Γ_- は R の下の境界成分とし, Γ_+ は上の境界成分とする.

次が主結果である.

定理 4.1. $\rho(\Gamma_-) \leq \omega_-, \omega_+ \leq \rho(\Gamma_+)$ なら, R 内に $\overline{f}$ 軌道 $\mathcal{O}$ があって, $\mathcal{O}$ は $M_{\overline{f},\omega_-}$ に α 漸近かつ $M_{\overline{f},\omega_+}$ に ω 漸近である. ただし, $\omega_- = \rho(\Gamma_-)$ (または $\omega_+ = \rho(\Gamma_+)$) のときは $\omega_-(\omega_+)$ は無理数とする.

定理の意味は次のとおりである. $\mathcal{O} = (\ldots, (\theta_i, y_i), \ldots)$ とする. 「$\mathcal{O}$ が $M_{\overline{f},\omega_-}$ に α 漸近する」とは, $i \to -\infty$ のとき $\mathrm{dist}((\theta_i, y_i), M_{\overline{f},\omega_-}) \to 0$ を意味する. 「$\mathcal{O}$ が $M_{\overline{f},\omega_+}$ に ω 漸近する」とは, $i \to +\infty$ のとき $\mathrm{dist}((\theta_i, y_i), M_{\overline{f},\omega_+}) \to 0$ を意味する. 注意すべきは, 軌道 $\mathcal{O}$ が作用極小であるとも作用極大であるとも, 作用ミニマックスとも言っていないことである. 証明を読むにあたって, このことを忘れずにいるべきである. $\omega_- \neq \omega_+$ とも言っていない. だから, 同じ回転数の極小軌道をつなぐ軌道も許されるのか? このことにも注意しながら証明を読もう.

定理 4.2. 各 $i \in \mathbf{Z}$ に対して実数 $\rho(\Gamma_-) \leq \omega_i \leq \rho(\Gamma_+)$ および正数 ε_i を考える. R 内に $\overline{f}$ 軌道 $\mathcal{O} = (\ldots, (\theta_i, y_i), \ldots)$ および整数の増大両無限列 $\ldots, j(i), \ldots$ があって, $\mathrm{dist}((\theta_{j(i)}, y_{j(i)}), M_{\overline{f},\omega_i}) < \varepsilon_i$ である.

言い換えると, $\mathcal{O}$ は, 写像を j_i 回作用させたときに, $M_{\overline{f},\omega(i)}$ から ε_i 以内に近づく.

5. $\mathcal{J}$ 極小配置

束縛条件 $\mathcal{J}$ とは, 両無限列 $(\ldots, J_i, \ldots)$ であって, 各 J_i は $\mathbf{R}$ の閉連結, 非空部分集合なるものである. J_i を閉区間と思っていいのだろうか? 1 点の場合も含まれる. 片方または両方の端点が無限遠にあってもいい. コンパクトであるとは限らない.

$\mathcal{J}$ 配置とは, $x_i \in J_i$ なる両無限列 $(\ldots, x_i, \ldots)$ である. たしかに $\mathcal{J}$ は束縛条件になっている. 配置の各点 x_i は J_i に入っていなければならない. いまのところ, J_i にどんな意味があるのかわからない. もともとの極小配置の場合には, $J_i = \mathbf{R}$ であった. とはいうものの, 変分の議論は本質的に軌道に沿っての, あるいは配置に沿っての局所的な議論であるので, 最小が求まるわけではない. 最小かもしれないが, 極小でしかない. くねくね道を用意して, それに細い幅をつけ, その幅の中でそのくねくね道が作用を極小にすることだって考えられる.

$\mathcal{J}$ 配置の**切片**とは, 各 $j \leq i \leq k$ に対して $x_i \in J_i$ なる有限列 $(x_j, \ldots, x_k)$ のことである.

本論文の残りでは, 普遍被覆への $\overline{f}$ の持ち上げ f を考える. f にともなう変分原理を h とする.

$\mathcal{J}$ 配置の切片 $(x_j, \ldots, x_k)$ が (h に関して)$\mathcal{J}$ 極小といわれるのは,

$$h(x_j, \ldots, x_k) \leq h(x_j^*, \ldots, x_k^*)$$

が $x_j^* = x_j$ かつ $x_k^* = x_k$ なるどの $\mathcal{J}$ 配置切片 $(x_j^*, \ldots, x_k^*)$ についても成り立つときである. $\mathcal{J}$ 配置 $(\ldots, x_i, \ldots)$ が $\mathcal{J}$ 極小といわれるのは, どの $j < k$ に対しても対応する切片 $(x_j, \ldots, x_k)$ が $\mathcal{J}$ 極小のときである. $\mathcal{J}$ 配置の中でだけ極小問題を考える. いつでも区間 J_i の端点を通る配置が最小を与えるとすると, 考える配置の範囲を少し広げただけで極小性を失う可能性がある.

次の 2 つの命題は, ほぼ自明であるが, 主結果の証明の構造において基本的である.

命題 5.1. $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ は束縛条件であって, J_i が有界であるような, 任意に小さい, また任意に大きい i が存在するとする. このとき, $\mathcal{J}$ 極小配置が存在する.

各 J_i が有界でないとすると, $x_i \to \pm\infty$ のとき作用がどんどん小さくなれば極小は存在しない可能性がある. コンパクトな区間 J_i がいつでも存在すると, 縛りがかかる. 区間の端点で極小となろうと, 極小はある. またコンパクトでないとへんな事が生じるので, 閉としている.

<u>証明</u>. (H_2) より, 関数 $h(x_{-N}, x_{-N+1}, \ldots, x_N)$ は, $J_{-N} \times J_{-N+1} \times \cdots \times J_N$ 上で proper (Mather の以前の論文に定義あり), 連続かつ下から限られている. したがって, 列 $(x_{-N}^{(N)}, x_{-N+1}^{(N)}, \ldots, x_N^{(N)})$ があって, この関数を $J_{-N} \times J_{-N+1} \times \cdots \times J_N$ 上で極小にする. (H_2) を使えば, 各整数 j に対して, コンパクト集合 K_j を見つけて, すべての N に対して $x_j^{(N)} \in K_j$ とすることができる. J_j が有界なら, $K_j = J_i$ と取ればよい. そうでないとき, $j' < j < j''$ があって $J_{j'}$ も $J_{j''}$ も有界であるという事実と, h の性質 (H_2) を使えばよい. したがって, カントールの対角線論法により, 列 $N_1 < N_2 < \cdots$ を選んで, $i \to +\infty$ のときに, $x_j^{(N)} \to x_j \in K_j$ となるものを選ぶことができる. 簡単に示すことができるように, 結果として得られる両無限列は $\mathcal{J}$ 極小である. □

$\mathcal{J}$ 配置 $x = (\ldots, x_i, \ldots)$ が $\mathcal{J}$ 自由であるとは, 各 i に対して $x_i \in \mathrm{Int} J_i$ のときである.

命題 5.2. $x = (\ldots, x_i, \ldots)$ が $\mathcal{J}$ 極小配置であるとする. x が $\mathcal{J}$ 自由であるなら, $-\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i)$ である. (とくに, これらの偏微分が存在する.) その上, $f(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ である. ただし, $y_i = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1})$ である. つまり, $(\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ は f 軌道である.

<u>証明</u>. これは 2 節の極小軌道の議論とまったく同じである. □

命題 5.1 によれば, $\mathcal{J}$ 極小配置は存在する. 命題 5.2 によれば, これらが $\mathcal{J}$ 自由なら軌道をもたらす. 定理 4.1 と 4.2 でわれわれが存在を主張する軌道は, $\mathcal{J}$ 極小配置および $\mathcal{J}$ 自由配置にともなう軌道から構築する. 証明はどうするかというと, $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ が properly 選ばれた束縛条件であるなら, 任意の $\mathcal{J}$ 極小配置は $\mathcal{J}$ 自由であること, また対応する軌道は定理 4.1 と定理 4.2 で要請される性質を持つことを示す. 以上の結果を得るための $\mathcal{J}$ に関する指定条件は複雑なので, あとの節で説明する. これからすると, 求める軌道 $\mathcal{O}$ は束縛条件つき作用極小軌道である.

6. 半 $\mathcal{J}$ 自由配置

この節では, 束縛条件 $\mathcal{J}$ に関する条件として, $\mathcal{J}$ 極小配置が少なくとも半 $\mathcal{J}$ 自由 (partially free) であることを保証するものを与える. この節の主結果は命

題 6.1 である．命題 6.1 の拡張として命題 6.2 も与える．これは本論文の主結果を証明するのに必要である．

われわれの条件を述べるために, 極小配置に関係する 2 つの基本概念を思い出す必要がある．すなわち, Peierls の障壁と Percival ラグランジュ関数を極小にする関数である．

ω を回転記号とし, $a \in \mathbf{R}$ とする．ϖ は ω の下敷数 (underlying number) とする．ω が実数なら, $\varpi = \omega$ であり, $\omega = p/q\pm$ なら, $\varpi = p/q$ である．

回転記号 ω または ϖ を持つ最大の極小配置 $\xi_- = (\ldots, \xi_{i-}, \ldots)$ があって, $\xi_{0-} \leq a$ を満たし, また, 回転記号 ω または ϖ を持つ最小の極小配置 $\xi_+ = (\ldots, \xi_{i+}, \ldots)$ があって, $a \leq \xi_{0+}$ を満たす．(ここで最小とか最大は, 2 節で導入した回転記号 ω または ϖ の極小配置上の順序に関してである．すなわち, $\xi < \xi'$ であるための必要十分条件は, すべての整数 i に対して $\xi_i < \xi'_i$ なることである.)

$$\sum_{i \in I} \xi_{i+} - \xi_{i-} \leq 1,$$

が成り立つ．ただし, 添字集合 I が整数の集合 $\mathbf{Z}$ であるのは ω が有理数でないときであり, $\{0, \ldots, q-1\}$ であるのは, $\omega = p/q$ のときである．なぜかというと, $\xi_{i-} = a = \xi_{i+}$ であるか, または区間 (ξ_{i-}, ξ_{i+}) の $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への射影が互いに素であるからである．直観的には, 長さ 1 の区間に下ろしたとき, この区間の中に重複せずに納まるからである．次のようにおく．

$$P^h_\omega(a) = P_\omega(a) = \min \sum_{i \in I} h(\xi_i, \xi_{i+1}) - h(\xi_{i-}, \xi_{i+1-}).$$

ここで, 極小を取るのは, $\xi_{i-} \leq \xi_i \leq \xi_{i+}$ かつ $\xi_0 = a$ なる $\xi = (\ldots, \xi_i, \ldots)$ 全体の上においてである．条件 $\xi_{i-} \leq \xi_i \leq \xi_{i+}$ は上記の和が絶対収束することを保証する．

[2] において, $P_\omega(a)$ を Peierls 障壁とよんだ．なぜなら, $P_\omega(a)$ が固体物理でよく知られた概念と関係があるからである．

$P_\omega(a) \geq 0$ がすべての $a \in \mathbf{R}$ に対して成り立ち, $P_\omega(a) = 0$ になるのは, $a \in \pi(M_\omega)$ のとき, そしてそのときのみであることに注意する．ただし, π は $\mathbf{R}^2$ の $\mathbf{R}$ への射影である．回転数 ω のリプシッツ曲線を引きのばして実数軸と同一視する．この実数軸上で, Aubry–Mather 集合はカントール集合と前後への無限個のコピー である．KAM 曲線なら実数軸そのものである．周期軌道なら離散的な点を占める．そこで, 任意に $a \in \mathbf{R}$ を取ると, この a は KAM 曲線があれば, 必ず KAM 曲線上の点である．この場合, $P^h_\omega(a) = 0$ である．KAM 曲線がない場合, a を Aubry–Mather 集合上に取れば $P^h_\omega(a) = 0$ である．そうでなければ, $P^h_\omega(a) > 0$. a を通る配置 (軌道) は極小でない．周期軌道の場合は, 漸近軌道を除いている．だからやはり, $P^h_\omega(a) > 0$ なのか?

必要な第二の概念は Percival のラグランジュ関数

$$P_\omega(\phi) = \int_0^1 h(\phi(t), \phi(t+\omega))dt$$

を使って一番簡単に定義できる. この量は $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$ を満たす任意の有界可測関数 ϕ および任意の数 ω に対して定義される. ϕ_ω は P_ω を極小にする, そのような任意の関数であるとする. このような関数の存在はねじれ写像の場合は, [12,15] で証明された.

しかし, Aubry[1] によるもうひとつの定義が本論文においては都合がよい. $M_{f,\omega}$ の順序性 (命題 2.7) から簡単に従うように, どの実数 ω に対しても, 関数 $\phi_\omega : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ があって, 以下を満たす.

(1) $s \le t$ なら $\phi_\omega(s) \le \phi_\omega(t)$;

(2) $\phi_\omega(t+1) = \phi_\omega(t) + 1$;

(3) $t \in \mathbf{R}$ なら

$$x_-^{\omega,t} = (\ldots, \phi_\omega(t+\omega i-), \ldots), \quad x_+^{\omega,t} = (\ldots, \phi_\omega(t+\omega i+), \ldots)$$

は回転記号 ω の極小配置である. ここで

$$\phi(s-) = \lim_{u\uparrow s} \phi(u), \quad \phi(s+) = \lim_{u\downarrow s} \phi(u)$$

上の (3) は, 「Aubry–Mather 集合の点は, 左または右から近づくことができる」ということを表現したものか?

関数 ϕ_ω で (1) - (3) を満たすものは Percival のラグランジュ関数を極小にする ([12,15] を見よ) ことを示すことができる. ただ, このことは使わない.

ω は無理数であるとする. $M_{f,\omega}$ の順序保存性 (命題 2.7) から容易にわかるように, ϕ_ω は連続点において, 右に平行移動を合成する不定性を除いて一意である. もっと詳しくいうと, ϕ' が (同じ無理数 ω に関して) 同じ条件 (1) - (3) を満たす第二の関数であるとすると, $a \in \mathbf{R}$ があって

$$\phi'(t\pm) = \phi_\omega(t + a\pm)$$

が成り立つ. ω が有理数 p/q の場合, (p,q) 型の周期的極小配置がすべて単一の配置の平行移動である場合には, これは成り立つが, 一般には成り立たない.

命題 6.1 を述べるために, 実数 ω を選び, ϕ_ω は上の条件 (1) - (3) を満たす関数であるとする. x はある t に対して $x_+^{\omega,t}$ または $x_-^{\omega,t}$ のどちらかであるとする. すなわち, $x_i = \phi_\omega(t + \omega i\pm)$ とする.

また実数 a を選んで, $P_\omega(a) > 0$ とする (このような数が存在するとして: KAM 曲線が壊れているということだろう). 各整数 i に対して, a_i は $a_i - a$ が

整数であって, $x_i \in (a_i, a_i+1)$ となるような一意の実数とする. $x_i - a$ は整数でないことを指摘しておく. なぜなら $P_\omega(a) > 0$ だからである.

命題 6.1. $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ は束縛であるとする. $j_0 \leq j_1$ は整数であるとし, ω, a は実数であるとする. $K(\omega, a)$ は定義されているとし, $J_i = [a_i, a_i+1]$ が $j_0 - K(\omega, a) \leq i \leq j_1 + K(\omega, a)$ に対して成り立ち, a_i は上で定義したものとする. $\xi = (\ldots, \xi_i, \ldots)$ は $\mathcal{J}$ 極小配置であるとする. このとき,

$$a_i < \xi_i < a_i + 1, \quad \text{for} \quad j_0 \leq i \leq j_1$$

が成り立つ.

命題6.1の意味を考える. x は極小配置である. $j_0 - K(\omega, a) \leq i \leq j_1 + K(\omega, a)$ なる $2K + |j_1 - j_0|$ の長さの添字 i に対して単位長さの区間 J_i はすべて x_i を含む. そのように設定したとき, J 極小の配置 ξ は, $j_0 \leq i \leq j_1$ なる $|j_1 - j_0|$ の長さの添字 i に対して同じ区間 J_i の内点として含まれる. 簡単に言えば, $j_0 \leq i \leq j_1$ の間, 極小配置 x と $\mathcal{J}$ 極小配置 ξ は近い.

以下では同じ一般形のほかの命題をいくつか証明する. 極小配置 (いまの場合 x) を使って, 添字のある範囲にわたって明示的に束縛条件 $\mathcal{J}$ を定義する. それから, $\mathcal{J}$ 極小配置がより小さな添字範囲にわたって自由であることを証明する.

命題 6.1 の陳述を完成させるために, 整数 $K(\omega, a)$ を定義しよう. $P_\omega(a) = 0$ なら $K(\omega, a)$ は定義されない.

p_n/q_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ は ω の連分数展開の近似分数列とする. 当面の間, 近似列に関して必要なことは, まず, $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$ であること, 次に正整数 q が q_n のどれかであるのは, $||q'\omega|| > ||q\omega||$ が $q' = 1, \ldots, q-1$ に対して成り立つとき, そしてそのときのみである. ここで, $||\lambda||$ は $\min\{|\lambda - n| : n \in \mathbf{Z}\}$ によって定義される. さらに, p_n は $n \geq 1$ に対して, $q_n\omega$ に最も近い整数である. ω が無理数なら, 近似列は無限であり, $\omega = p/q$ なら, 連分数展開は有限ステップで終了し, 最後の近似分数は p/q そのものである.

$K(\omega, a)$ の定義は, $\overline{f} \in \mathcal{P}^1_\beta$ なる β の選び方に依存する. このような β を選んで, 本論文では以後動かさない. $\theta = \cot\beta$ とおく. この記法も本論文では以後固定する.

$P_\omega(a) > 0$ なら, k は $k > 2\theta/P_\omega(a)$ なる最小の整数であるとする. m を大きくしていけば, いずれは $P_\omega(a) > 2\theta/m$ が満たされる. 最初の m を k と置いた. n は $k < q_n$ なる最小の整数とする. ただし存在するとしてである (ω が無理数であるか $\omega = p/q$, $k < q$ で p, q が互いに素のときである). n が存在するとき $K(\omega, a) = q_{n-1} + q_n$ とおき, そうでないとき, $K(\omega, a)$ は定義されないとする.

これで $K(\omega, a)$ の定義が完成した. $K(\omega, a)$ は実は β に依存し, また Peierls の障壁にも依存するが, 記法の上ではこの依存性を表さなかった. というのは, β は f のみに依存し, $P_\omega(a)$ は f, ω および a のみに依存するからである. さらに f は本論文をとおして固定しておく.

簡単のため, 以下の証明では $K = K(\omega, a)$ とおく.

命題 6.1 の証明. 簡単のため, $j_0 = j_1$ であるとし, その共通値を j と書く. 明らかに, この場合から命題6.1の一般形が出る. $\xi_j < a_j + 1$ を証明する. $\xi_j > a_j$ の証明は同様である.

s は一意の実数であって, $\phi_\omega(s + \omega j-) < a_j + 1 < \phi_\omega(s + \omega j+)$ を満たすとする. $y_i = \phi_\omega(s + \omega j-)$ とする. だから, y (x も) は極小配置であって, その回転数は ω である. 定義より, $x_j < a_j + 1$ であるから

明らかに $t \le s$ であり, したがって $x \le y$ である.

まず, 証明を与えるのは, i_0 が存在して $j - K \le i_0 < j$ を満たし, i_1 が存在して $j < i_1 \le j + K$ を満たし, $a_i + 1 < y_i$ が $i = i_0, i_1$ に対して成り立つ場合である. この場合, 簡単にわかるように, $\xi_i < y_i$ が $i_0 \le i \le i_1$ に対して成り立つ (そしてとくに $i = j$ に対して成り立つ. これが証明すべきことであった). これの証明は実質的には Aubry の crossing 補題の証明と同一である. その補題は, 2つの極小配置の Aubry グラフが高々いちどしか交わらないことを述べる. (Bangert[3, 補題 3.1] を見よ. 配置 $z = (\ldots, z_i, \ldots)$ の Aubry グラフとは, 平面の折れ線であって, (i, z_i) と $(i+1, z_{i+1})$ を結ぶ線分の和である.)

今回の文脈でこの証明を思い出そう. (H_5) より

$$\begin{aligned} &h((\xi \wedge y)_{i(0)}, \ldots, (\xi \wedge y)_{i(1)}) + h((\xi \vee y)_{i(0)}, \ldots, (\xi \vee y)_{i(1)}) \\ &\qquad \le h(\xi_{i(0)}, \ldots, \xi_{i(1)}) + h(y_{i(0)}, \ldots, y_{i(1)}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $(\xi \wedge y)_i = \min(\xi_i, y_i)$, $(\xi \vee y)_i = \max(\xi_i, y_i)$ である. 等式が成り立つための必要十分条件は, すべての交差が節点で生じることである. 等式が成り立たないとき, ξ が $\mathcal{J}$ 極小 である (なぜなら $\xi \wedge y$ は $\mathcal{J}$ 配置であって $i = i_0, i_1$ において ξ と一致するから) という仮定に矛盾するか, あるいは, y が極小である ($\xi \wedge y$ は $i = i_0, i_1$ において y と一致する) という仮定に矛盾する, という結果を得る. 等式が成り立てば, 同じ論拠によって

$$\begin{aligned} h((\xi \wedge y)_{i(0)}, \ldots, (\xi \wedge y)_{i(1)}) &= h(\xi_{i(0)}, \ldots, \xi_{i(1)}) \\ h((\xi \vee y)_{i(0)}, \ldots, (\xi \vee y)_{i(1)}) &= h(y_{i(0)}, \ldots, y_{i(1)}) \end{aligned}$$

が成り立つことが出る. ところが, グラフが i で交差すると, $(\xi \wedge y)$ または $(\xi \vee y)$ が, (H_5) と (H_6) により停留でなくなり, これらのひとつに少しだけ摂動を加えることによって, 極小性の仮定に矛盾する結果を得ることができる.

これで $\xi_j < y_j$ が特別の場合に証明できた．一般の状況に戻って，

$$z_i = \phi_\omega(s + ||q_{n-1}\omega|| + \omega i+)$$

とおく．だから $z = (\ldots, z_i, \ldots)$ は極小配置である．$j \le i \le j+K$ に対して $y_i < a_i + 1$ とする．q_n は $||q\omega|| < ||q_{n-1}\omega||$ なる最小の q であることに注意しよう．したがって，$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への区間 $[(i-j)\omega, (i-j)\omega + ||q_{n-1}\omega||]$, $i = j, \ldots, j+q_n-1$ への射影は重なり合わない．ϕ_ω は単射 (injective) であり，$\phi_\omega(t+1) = \phi_\omega(t)+1$ であるから，上のことより，$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への区間 $[y_i, z_i]$, $i = j, \ldots, j+q_n-1$ への射影は重なり合わない．$k \le q_n - 1$ であるから，$j < i_1 \le j+k$ なる i_1 があって，$z_{i(1)} - y_{i(1)} \le k^{-1}$ を満たす．その上，y_j と z_j の定義より $y_j < a_j + 1 < z_j$ が成り立つ．$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への区間 $[y_i, z_i]$ への射影は区間 $[y_j, z_j]$, $j < i \le i_1$ の射影と重なり合わないから，$a_i + 1$ は $[y_i, z_i]$ 内にない．$y_i < a_i + 1$ であるから，$z_i < a_i + 1$ が $j < i \le i_1$ に対して成り立つ．

i_2 は $i > j$ なる i のうち，$[(i-j)\omega, (i-j)\omega + ||q_{n-1}\omega||]$ が整数を含むような最小のものとする．$i_1 < i_2 \le j+K$ が成り立つ．事実，$i_2 = j + q_n$ または $i_2 = j + q_n + q_{n-1}$ である．これは q_n が，$||q\omega|| < ||q_{n-1}\omega||$ を満たす最小の整数であるという事実から簡単に出る．

さて，z は極小配置であって，$a_j + 1 < z_j$, $a_{i(2)} + 1 < z_{i(2)}$, また $j < i < i_2$ に対して $a_i < z_i < a_i + 1$ を満たす．ξ は $\mathcal{J}$ 極小であるから，(前と同じように Aubry の交差議論を使って) $j \le i \le i_2$ に対して $\xi_i < z_i$ を得る．とくに $\xi_{i(1)} < z_{i(1)} < y_{i(1)} + k^{-1}$ である．

こうして，われわれが示したのは，$j < i_1 \le j+K$ が存在して $\xi_{i(1)} < y_{i(1)} + k^{-1}$ および $y_i < a_i + 1$ を $j \le i < i_1$ に対して満たすことである．同様に，$j - K \le i_0 < j$ が存在して，$\xi_{i(0)} < y_{i(0)} + k^{-1}$ および $y_i < a_i + 1$ を $i_0 < i \le j$ に対して満たす．($j - K \le i_0 < j$ があって $a_{i(0)} + 1 < y_{i(0)}$ を満たすなら $\xi_{i(0)} < y_{i(0)}$ である．そうでなければ，すぐ上で述べた議論が適用できる．)

$\xi_j < a_j + 1$ を背理法で証明しよう．$w_i = \xi_i, i = i_0, i_1$; および $w_i = \min(y_i, \xi_i)$, $i_0 < i < i_1$ とおく．$\xi_j = a_j + 1$ なら $h(w_{i_0}, \ldots, w_{i_1}) < h(\xi_{i_0}, \ldots, \xi_{i_1})$ であることを示そう．ξ は $\mathcal{J}$ 極小であるから，これは求めていた矛盾である．

$i = i_0, i_1$ に対して $v_i = y_i$ とおき，$i_0 < i < i_1$ に対して $v_i = \max(\xi_i, y_i)$ とおき，$\tilde{w}_i = \min(y_i, \xi_i)$, $\tilde{v}_i = \max(y_i, \xi_i)$ とおく．端点 $i = i_0$ と $i = i_1$ 以外では v_i と $\tilde{v}_i$ は同じであることに注意しよう．端点では違いは高々k^{-1} である．同じことが w_i と $\tilde{w}_i$ についても成り立つ．

記法を簡単にするため，以下の証明では，$h(w_{i_0}, \ldots, w_{i_1})$ を $h(w)$ と書き，そのほかもそれに準ずるとする．

$$h(w) - h(\tilde{w}) + h(v) - h(\tilde{v}) \le 2\theta k^{-1}$$

が成り立つ. 区間 $[i_0, i_1]$ の端点を除いて $\tilde{v}$ は v に, そして $\tilde{w}$ は w に一致するから, 左辺は 2 つの項の和であり, そのうちのひとつは区間 $[i_0, i_1]$ の各端点から来ることは明らかである. $\xi_{i_0} \le y_{i_0}$ なら, i_0 端点から来る項は消え, そうでないときには

$$\begin{aligned} &h(\xi_{i_0}, w_{i_0+1}) - h(y_{i_0}, w_{i_0+1}) + h(y_{i_0}, v_{i_0+1}) + h(\xi_{i_0}, v_{i_0+1}) \\ &\quad = \int_{y_{i_0}}^{\xi_{i_0}} (\partial_1 h(\alpha+, w_{i_0+1}) - \partial_1 h(\alpha+, v_{i_0+1}))\, d\alpha \le \theta k^{-1} \end{aligned}$$

である. なぜなら, 積分は区間 $[\xi_{i_0}, y_{i_0}]$ で行なわれ, この区間の長さは k^{-1} 以下だからであり, 被積分関数は θ 以下だからである. というのは, $\beta \le \gamma \le \beta+1$ のとき, $\partial_1 h(\alpha+, \beta) \le \partial_1 h(\alpha-1+, \beta)+\theta = \partial_1 h(\alpha+, \beta+1)+\theta \le \partial_1 h(\alpha+, \gamma)+\theta$ が $(\mathrm{H}_{6\theta})$, (H_6), (H_5) により成り立つからである. $a_{i_0+1} \le v_{i_0+1} \le w_{i_0+1} \le a_{i_0+1}+1$ であることに注意し, これを $\beta = v_{i_0+1}$, $\gamma = w_{i_0+1}$ とおいて適用することができる. 前者 (?) はこの帰結であり, 対応する不等式は i_1 端点から来る.

こうして, $h(w) \le h(\tilde{w})+h(\tilde{v})-h(v)+2\theta k^{-1} \le h(y)+h(\xi)-h(v)+2\theta k^{-1} \le h(\xi) - P_\omega(a) + 2\theta k^{-1} < h(\xi)$ が成り立つ. これで最初の不等式を導いた. 第二の不等式は定義 $\tilde{w} = y \wedge \xi$, $\tilde{v} = y \vee \xi$ と条件 (H_5) の帰結である. 第三の不等式の場合, $\xi_j = a_j + 1$ という仮定を使う. このとき $v_j = a_j + 1$ である. $i = i_0, i_1$ のとき $v_i = y_i$ であり, y は回転記号 ω の極小配置であって $y_i = \phi_\omega(s+\omega i-)$ で定義される. ここで, $\phi_\omega(s+\omega j-) < a_j + 1 < \phi_\omega(s+\omega j+)$ である. これから, $h(v) - h(y) \ge P_\omega(a_j + 1) = P_\omega(a)$ が出る. これが第三の不等式である. k を選んで $k > 2\theta / P_\omega(a)$ とする. これが第四の不等式である.

まとめると, $\xi_j = a_j + 1$ を仮定して, 不等式 $h(w) < h(\xi)$ を証明した. この不等式は ξ が $\mathcal{J}$ 極小であることに矛盾する. この矛盾から, $\xi_j < a_j + 1$ であることが結論できる. □

命題 6.1 において, 障壁 a_i はすべて a と整数だけ違う. だから, $\mathcal{J}$ 自由であることの証明は単一の障壁 a を使って行なったのであると言える. ときには, もう少し柔軟な結果が必要である. その場合, 2 つの障壁を許す.

この結果は次のように定式化できる. 実数 ω, a, b で, $P_\omega(a) > 0$ および $P_\omega(b) > 0$ を満たすものを考える. 前と同様, p_n/q_n は ω への近似分数列であるとする. k は $k^{-1} < \min(P_\omega(a)/2\theta, P_\omega(b)/2\theta)$ なる最小の整数とする. n は $k < q_n$ を満たすものがあればそのうちの最小の整数とする. n が存在する場合に $K = k + q_{n-1} + q_n$ とおき, 存在しない場合は K は定義しないでおく. 実数 l を選び, また

$$x = x_\pm^{\omega,t} = (\ldots, \phi_\omega(t + \omega i \pm), \ldots)$$

とおく. 整数 j^* を考える. $i < j^*$ の場合, a_i は $a_i - a$ が整数であって $x_i \in$

(a_i, a_i+1) となるような唯一の実数であるとする. $i \geq j^*$ の場合, a_i は $a_i - b$ が整数であって $x_i \in (a_i, a_i+1)$ となるような唯一の実数であるとする.

命題 6.2. $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ は束縛であるとする. $j_0 \leq j_1$ は整数であるとし, ω, a は実数であるとする. K は定義されているとし, ある整数 $j_0 < j^* \leq j_1$ に対して $J_i = [a_i, a_i+1]$ が $j_0 - K \leq i \leq j_1 + K$ の区間で成り立つとする. このとき, 前と同様の結論が成り立つ.

この陳述はおかしくないか? 命題 6.2 と 6.1 の主な違いは a_i の定義が異なることにある. j^* にある障壁を変えた. a と b の両方の顔を立てている.

<u>証明</u>. 以前の証明への修正部分のみを指摘する. $\mathcal{J}$ 極小配置 ξ と $j_0 \leq j \leq j_1$ なる整数 j を考える. $\xi_j < a_j + 1$ を証明する. $a_j < \xi_j$ の証明も同様である.

極小配置 y と z を前とまったく同様に定義する. 整数 j_0, j_1 で, $j_0 - K \leq i_0 < j < i_1 \leq j_1 + k$ であって, かつ

$$\xi_i \leq y_i + k^{-1}, \quad \text{for} \quad i = i_0, i_1$$

を満たし, $y_i < a_i + 1$ が $i_0 < i < i_1$ なるものを見つける. このような整数が見つかれば, 証明は前とまったく同じように進む.

i_1 を見つけるのに次のように進む. i があって $j < i \leq j_1 + K$ および $a_i + 1 < y_i$ を満たせば, i_1 として, そのような i の最小のものとする. このとき, $\xi_{i_1} < a_{i_1} + 1 < y_{i_1}$ が得られる. これは要求以上の性質である. そうでないとき, $j < i_1 \leq j + K$ が存在して $z_{i_1} - y_{i_1} < k^{-1} < \varepsilon$ (これも前と同じ理由で) を満たし, $i_1 < i_2 \leq j_1 + K$ が存在して $a_{i_2} + 1 < z_{i_2}$ を満たす. ここで, 理由は前と本質的に同じであるが, 議論が有効でであるためには K の定義として新しいものを使わねばならない. この場合の証明は区間 $[(i-j)\omega, (i-j)\omega + ||q_{n-1}\omega||]$, $i = j_1 + k + 1, \ldots, j_1 + K$ を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ へ射影したものが $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を被覆するという観察の基づく. (2 つの障壁があるから, 2 つの区間のどちらかが, $j < j^*$ の場合に整数を含むだけでは十分でない.) そうでないとき, 議論は前とまったく同様に有効である. □

7. いくつかの $\mathcal{J}$ 自由配置

前節では, $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ が束縛なら, J_i は添字のある範囲 $j_0 - K \leq i \leq j_1 + K$ において特殊な形を持ち, $\xi = (\ldots, \xi_i, \ldots)$ は $\mathcal{J}$ 極小配置であるなら, $\xi_i \in \mathrm{int} J_i$ が $j_0 \leq i \leq j_1$ なる狭い範囲の i に対して成り立つことを示した. 命題 6.1 において, $j_0 - K \leq i \leq j_1 + K$ に対して $J_i = [a_i, a_i + 1]$ であった[3] . ただし,

[3] 論文では $J_i = [a_i, a_1 + 1]$ となっているが, 間違いであろう.

その範囲で $a_i \equiv a \pmod 1$ および $x_i \in (a_i, a_i+1)$ であった．$x = (\ldots, x_i, \ldots)$ は基底配置 (回帰軌道に対応する極小配置) である．

だから，基底配置 x と数 a を知ることにより，一意に J_i が範囲 $j_0 - K \le i \le j_1 + K$ で指定される．J_i はこの範囲で基底配置 x に「したがう」といえる．明らかに，ほかにも基底配置 y があって，これらの J_i もしたがう．実は，開区間 Ω があって，どの $\omega \in \Omega$ に対しても，回転数 ω の基底配置 y があって，J_i は範囲 $j_0 - K \le i \le j_i + K$ において y にしたがう．

次に，非常に長い J_i の列をどのように構築するかを考える．ただし，この列の比較的短い部分列には命題 6.1 が適用できるようにしたい．「比較的短い」からといって，「短い」わけではない．というのは，命題 6.1 が適用できるためには，「比較的短い部分列」は $2K$ より長くなければならないからである．

$n = (\ldots, n_i, \ldots)$ は整数の双無限列であるとし，$\varepsilon > 0$ とする．n が「ε 拘束されている」とは，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して，実数 ω_j と s_j があって，以下が成り立つときである．すなわち，p_{j1}/q_{j1}, $p_{j2}/q_{j2}, \ldots$ は ω_j の連分数展開の近似列であるとする．ω_j は無理数であるか，ε^{-1} より大きな分母を持つ (既約) 有理数であるとする．l_j は $q_{jl(j)} > \varepsilon^{-1}$ なる最小の整数であるとする．$K_j = q_{j,l(j)-1} + q_{j,l(j)}$ とおく．$j - K_j \le i \le j + K_j$ に対して $n_i < \omega_j i + s_j < n_i + 1$ であることを要請する．

Ω は $\mathbf{R}$ の開区間であるとする．これは回転数方向の区間である．n が ε 拘束であって，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して $\omega_j \in \Omega$ であるとき，n は (ε, Ω) 拘束であると言うことにする．

命題 7.1. $n = (\ldots, n_i, \ldots) \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ とする．$\varepsilon = k^{-1}$, k は正整数とする．Ω は開区間であるとする．$a \in \mathbf{R}$ とする．すべての $\omega \in \Omega$ に対して

$$P_\omega(a) > 2\theta/k$$

であるとする．n は (k^{-1}, Ω) 拘束であるとする．$a_i = a + n_i$, $J_i = [a_i, a_{i+1}]$ および $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ とする．このとき，どの $\mathcal{J}$ 極小配置も $\mathcal{J}$ 自由であり，したがって $\overline{f}$ の軌道に対応する．

証明．これは単に，命題 6.1 の前提が，どの $j \in \mathbf{Z}$ に対しても満たされていることをチェックする問題である．s は一意の実数であって，$\phi_\omega(s-) < a < \phi_\omega(s+)$ を満たすとする．ただし，$\omega = \omega_j$ である．$x_i^{(j)} = \phi_\omega(s + s_j + \omega_j i-)$ および $x^{(j)} = (\ldots, x_i^{(j)}, \ldots)$ とおく．このとき，$j_0 - K_j \le i \le j_1 + K_j$ に対して $a_i < x_i^{(j)} < a_{i+1}$ である．なぜなら，同じ範囲で $n_i < \omega_j i + s_j < n_i + 1$ だからである．K_j は ω_j と k によって定義されているが，これは $K = K(\omega, a)$ が ω と k によって命題 6.1 で定義されている仕方と同じである．命題 6.1 において k に

関する唯一の制限は $k > 2\theta/P_\omega(a)$ であった．これは前提より，ε によって満たされる．□

命題 7.1 の有利な点は，$\mathcal{J}$ 極小ならば $\mathcal{J}$ 自由であるという制限条件 $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ を見つける問題を，ε 拘束の双無限整数列を見つける純粋に数論的な問題に帰着できることにある．命題 7.1 の限界は，それが準備する制限条件 $\mathcal{J}$ の類がわれわれの目的に十分近くないことである．この限界が命題 8.1 を持ち出す動機となった．

次に $n \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ が ε 拘束であるための十分条件について議論する．$j < k \in \mathbf{Z}$ に対して，$A_n[j,k] = A[j,k]$ は $\mathbf{R}$ 内の開区間であって，端点は $(n_k - n_j - 1)/(k-j)$ と $(n_k - n_j + 1)/(k-j)$ であるとする．$B_n[j,k] = B[j,k]$ は $j \le j' < k' \le k$ に対して，すべての $A[j',k']$ を表わすとする．だから $B[j,k]$ は開区間または空集合である．

補題 7.2. $\omega \in B[j,k]$ なら，$s \in \mathbf{R}$ があって，

$$n_i < \omega i + s < n_j + 1 \quad \text{for} \quad j \le i \le k$$

を満たす．

<u>証明</u>．明らかに，$\omega \in A[j',k']$ であるための必要十分条件は，2 つの開区間 $(n_{j'} - j'\omega, n_{j'} - j'\omega + 1)$ と $(n_{k'} - k'\omega, n_{k'} - k'\omega + 1)$ が空でない交わりを持つことである．なぜなら，$A[j',k']$ の端点は，$[n_{j'}, n_{j'} + 1]$ と $[n_{k'}, n_{k'} + 1]$ を結ぶ線分の傾きの最小と最大だからである．したがって，$\omega \in B[j,k]$ という前提は，区間 $(n_i - i\omega, n_i - i\omega + 1)$, $j \le i \le k$ なる形の区間の任意の 2 つが空でない交わりを持つことを意味する．したがって簡単にわかるように，これらの区間全体 $(j \le i \le k)$ の族は空でない交わりを持つ．交わりの中の点 s は補題の結論を満たす．□

つぎに行なうことのために，ω および ε への K の依存性を明示的に指摘しておこう．定義を思い出す．$p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots$ は ω の連分数の近似列であるとする．l は $q_l > \varepsilon^{-1}$ (論文では q_l ではなくて g_l となっているが間違いであろう) なる最小の整数であるとする．このような整数 l がなければ K を定義しない．このような l があるなら，$K = K(\omega) = K'(\omega, \varepsilon) = q_{l-1} + q_l$ とおく．

補題 7.3. $n \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ とする．このとき，n が ε 拘束であるのは，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して，$\omega = \omega_j$ があって，$K(\omega, a)$ が定義され，

$$\omega \in B_n[j - K(\omega,\varepsilon), j + K(\omega,\varepsilon)]$$

が成り立つときである．

<u>証明</u>. 補題 7.2 および n が ε 拘束であることの定義よりただちに出る. □

$K(\omega,\varepsilon)$ が定義されないのは, ω が有理数 p/q で $q \le \varepsilon^{-1}$ のときである. それ以外の場合にはすべて $K(\omega,\varepsilon)$ が定義される.

$K(\omega,\varepsilon)$ のサイズは以下のようにして見積もる. $F(\varepsilon^{-1})$ は, 有理数 p/q のうち, $q \le \varepsilon^{-1}$ なるものの集合であるとする. $\Delta_\varepsilon(\omega) = \min\{|q\omega - p| : p/q \in F(\varepsilon^{-1})\}$ とおく. すると,

$$1/2\Delta_\varepsilon(\omega) \le K(\omega,\varepsilon) \le 2/\Delta_\varepsilon(\omega)$$

が成り立つ. また $K(\omega,\varepsilon)$ が定義されないための必要十分条件は $\Delta_\varepsilon(\omega) = 0$ である. この見積もりは, ω の連分数展開の収束列 $p_1/q_1, \ldots$ に関する基本的事実から出る. l は K を定義したときのものとすると,

$$1/2q_l \le |q_{l-1}\omega - p_{l-1}| \le 1/q_l$$

が成り立つ. これは任意の実数 ω の連分数展開の相続く近似分数の間で成り立つ. $K(\omega,\varepsilon)$ に関する上記見積もりは, $K(\omega,\varepsilon) = q_l + q_{l-1}$ および $\Delta_\varepsilon(\omega) = |q_{l-1}\omega - p_{l-1}|$ であることからただちに出る.

M が実数のとき, $F(M)$ は有理数のうち, その分母 (既約としたとき) が M 以下であるようなものすべての集合を表わすとする.

$$\begin{aligned} F(M) = \ & \{0, 1/1, 2/1, 3/1, \ldots; 1/2, 2/2, 3/2, \ldots; 1/3, 2/3, 3/3, \ldots; \\ & \ldots; 1/M, 2/M, 3/M, \ldots\} \end{aligned}$$

$F(M)$ の補集合の成分のひとつを**高さ M の開ファーレイ区間**とよぶことにする. これは初等数論の「ファーレイ級数」の概念との類比である. このような区間の閉包を**高さ M の閉ファーレイ区間**とよぶ. $n = (\ldots, n_i, \ldots)$ が ε 拘束の双無限整数列であるとき, 高さ ε^{-1} の開ファーレイ区間 $(p/q, p'/q')$ が n にともなう**ファーレイ区間**と言われるのは, $A_n[j,k]$ がすべての $j < k$ に対して $(p/q, p'/q')$ と交わるときである. 簡単にわかるように, どの ε 拘束双無限整数列もそれにともなう (高さ ε^{-1} の) 一意のファーレイ区間を持つ. しかし, この結果は必要ないので証明しない.

必要なのはその逆である. すなわち, 高さ ε^{-1} のファーレイ区間内にいる限り, ε 拘束列を構成して回転数の任意の列を達成できることである. この目的のために, 高さ ε^{-1} のファーレイ区間 $(p/q, p'/q')$ および $(p/q, p'/q')$ の閉部分区間 Ω を考える. $K(\omega,\varepsilon)$ に関する上記の見積もりからすると, $\omega \in \Omega$ に対して, $K(\omega,\varepsilon) \le K$ なる K が存在する. ε 拘束列 $n = (\ldots, n_i, \ldots)$ の単純な例として, $n_i = [\lambda_i]$ の形のものが得られる ($[\cdot]$ はガウス記号). ただし,

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = r_j, \quad jK \le i < (j+1)K$$

であり (r の添字は正しいのだろうか?), r_j は Ω 内の, 分母が $2K$ 以下の有理数であり, $[r_j, r_{j+1}]$ は, 各 j に対して高さ $2K$ のファーレイ区間である. この場合, $jK \leq i < (j+1)K$ に対して $\omega_i = r_j$ として補題 7.3 を適用できる. したがって n は ε 拘束である.

さて, 定理 4.1 と 4.2 の弱い版を述べることができる. このことからすると, 命題 6.1 を使っただけで定理 4.1 と 4.2 の証明にどれほど近づいたかがわかり, 命題 8.1 への動機ともなる.

命題 7.4 と 7.5 において, $a \in \mathbf{R}$, $P > 0$ および開区間 $\Omega \in \mathbf{R}$ を考える. k は $2\theta/P$ より大きな最小の整数とし, Ω 内のどの有理数 p/q に対しても $q > k$ が成り立つとする. どの $\omega \in \Omega$ に対しても $P_\omega(a) > P$ であるとする.

命題 7.4. $\omega_-, \omega_+ \in \Omega$ を考える. $\overline{f}$ 軌道 $\mathcal{O}$ があって, $M_{\overline{f},\omega_-}$ に α 漸近, かつ $M_{\overline{f},\omega}$ に ω 漸近である.

命題 7.5. $\omega_i \in \Omega$ と $\varepsilon_i > 0$ をどの整数に対しても考える. $\overline{f}$ 軌道 $\mathcal{O} = (\ldots, (\theta_i, y_i), \ldots)$ と整数の増大列 $(\ldots, j_i, \ldots)$ があって, どの $i \in \mathbf{Z}$ に対しても,

$$\mathrm{dist}((\theta_{j(i)}, y_j(i)), M_{\overline{f},\omega(i)}) < \varepsilon$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. $\omega^* \in \Omega$ および $\varepsilon^* > 0$ とする. $x^* = (\ldots, x_i^*, \ldots)$ は回転記号 ω^* の極小配置であるとする. a_i^* は, $a_i^* - a_i$ が整数であって, $x_i \in (a_i^*, a_i^* + 1)$ なる一意の数であるとする. 制限条件 $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ を考える. ただし, 整数のある範囲 $i_-^* \leq i \leq i_+^*$ の上で $J_i = [a_i^*, a_i^* + 1]$ であるとする. どの $\mathcal{J}$ 極小配置も自由であるとする. $\mathcal{O} = (\ldots, (\theta_i, y_i), \ldots)$ は $\mathcal{J}$ 極小配置に対応する $\overline{f}$ 軌道であるとする. 10 節において, われわれは以下のことを示す. すなわち, 数 K^* があって, $i_-^* - K^* \leq i \leq i_+^* + K^*$ に対して $\mathrm{dist}((\theta_i, y_i) : M_{\overline{f},\omega^*}) < \varepsilon^*$ を満たす. この数は $\overline{f}, \omega^*$ および ε^* には依存するが, i_-^*, i_+^* には依らない.

だから命題 7.4 と 7.5 は, ある種の性質を持つ制限条件を構成することに帰着する. 命題 7.1 より, このことは, ある種の (k^{-1}, Ω) 拘束の双無限整数列を構成することに帰着する. この型のうまい列を作るには, 命題 7.4 と 7.5 の陳述に先行する議論を行なえばよい. □

8. 半 $\mathcal{J}$ 自由配置ふたたび

命題 7.4 および 7.5 において, 回転数が区間 Ω 内にある軌道に近づく軌道をどのように構成するかを示した. これらの結果には制限がある. それは, 区間

Ω が任意の有理数 p/q で $q \leq 2\theta/P$ なるものを含むことができないことである. ただし, $P = \sup_{a\in\mathbf{R}} \inf_{\omega\in\Omega}\{P_\omega(a)\}$. Ω がこのように小さな分母の有理数を含むなら, 命題 7.4 と 7.5 は適用できない. これら 2 つの命題は命題 6.1 から導かれたものであり, 後者もこのような状況では適用できない.

本節では, 命題 6.1 に似たものを述べて証明する. それによって, この困難を克服する.

p/q を有理数とし, 既約であって $q \geq 0$ であるとする. 本節では, あらっぽく言って, 以下のようなことを示す. すなわち, 軌道切片を構築する. その切片は, はじめは回転数 p/q より少し小さな (または, 少し大きな) 極小軌道に「従い」, 次に回転記号 $p/q-$ (または $p/q+$) の極小軌道に従い, 最後に, 回転数 p/q より少し大きな (または, 少し小さな) 極小軌道に従う. 「従う」の意味は命題 8.1 の陳述に含まれる. この命題は命題 6.1 と似たものである. ここで, 「従う」は発見的な意味でのみ使う. というのは, 精密な定義にを与えるときには使えないからである. 同様に, 命題 6.1 が用意するのは, 無理数回転数または大きな分母の有理数回転数の極小軌道に従う軌道である, と言える.

本節で考えている問題を, $p/q = 0$ の場合へ次のようにして帰着できる. すなわち, $F(x,y) = f^q(x,y) - (p,0)$ とおく. $(\ldots,(x_i,y_i),\ldots)$ が f の軌道なら, 任意の $j \in \mathbf{Z}$ に対して, $(\ldots,(x_{qi+j} - pi, y_{qi+j}),\ldots)$ は F の軌道であり, 各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して, これは f の軌道と F の軌道の間に 1:1 対応を築く. このような対応のどれひとつの下でも, 回転数 p/q の f の軌道は回転数 0 の F の軌道に対応する.

F の軌道は本論文の枠組で考察可能である. なぜなら, F に対する変分原理 H があって, 条件 (H) を満たすからである. すなわち, $*$ は 1 節で議論した「接合作用素」を表わすとする. $h^{*2} = h * h$ および $h^{*(n+1)} = h^{*n} * h$ とおく.

$$H(x,x') = H^{*q}(x,x'-p) - C$$

とおく. ここで, 定数 C は

$$C = \min_{x\in\mathbf{R}} h^{*q}(x,x-p)$$

で与えられる. 1 節では [16] の結果を概観した. それによれば, H は F の変分原理である. 事実, F の変分原理は任意定数を加える不定性を除いて一意に定義される. (ただし, この一意性は証明していない. これを使わない) ここで, 任意定数をきちんと選んで,

$$\min_{x\in\mathbf{R}} H(x,x) = 0 \tag{8.1}$$

が成り立つようにする．任意定数を選んで H がこの方程式を満たすようにすると, 命題 8.1 を証明するのに, 多いに記法が簡便になる．

命題 8.1 を述べる前に, 以下のような事実と記法を思い出そう． $M_{f,p/q} = M_{F,0} \subset \mathbf{R}^2$ は f の極小軌道のうち, (p,q) 型の周期軌道すべての和である．これは F の不動点の集合でもある. $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は第一成分への射影であるとしたとき, $\pi|M_{F,0} : M_{F,0} \to \mathbf{R}$ は proper かつ injective である．とくに, $\pi(M_{F,0})$ は $\mathbf{R}$ の閉集合である． 上添字を使って h への Peierls の障壁の依存性をはっきり示せば, $P^h_{p/q(\pm)} = P^H_{0(\pm)}$ が成り立つ． $(\ldots, x_i, \ldots)$ が h の極小配置なら, $(\ldots, x_{qi+j} - pi, \ldots)$ は H の極小配置である．各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して, h の極小配置と H の極小配置の間に 1:1 対応を設定する．

命題 8.1. (c, c') は $\pi(M_{F,0})$ の補区間であるとする. $a, b \in (c, c')$ とし, $P^H_{0-}(a) > 0$ かつ $P^H_{0+}(a) > 0$ とする．このとき, 非負整数 $K_-, K_+, K, L^0_-, L^0_+$ があって, 以下が成り立つ．すなわち, $L_-, L_+, l_-, l_+, i_-, i_0, i_+$ は整数であって, $L_- \geq L^0_i$, $L_+ \geq L^0_+$, $l_- \geq 1$, $l_+ \geq 1$, $i_- < i_0 < i_+$, $i_0 - i_- > K_-$, $i_+ - i_0 > K_+$, および $i_+ - i_- > K + K_- + K_+$ を満たすとする．

$\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ は束縛 (constraint) であって, J_i は $i_- - L_- l_- - 1 \leq i \leq i_+ + L_+ l_+$ に対して以下の 2 つの仕方のどちらかで定義されているとする．

$$
\begin{aligned}
J_i = \ & [\alpha + \beta - 1, \alpha + \beta] \ \ (\text{resp. } [b - \beta, b - \beta + 1]), \\
& \text{if } i_- - L_- \beta \leq i < i_- - L_- \beta + L_- \ \ \text{and} \ \ 1 \leq \beta \leq l_- \\
& \text{or } \beta = l_- + 1 \ \ \text{and} \ \ i = i_- - L_- l_- - 1, \\
J_i = \ & [c, a] \ \ (\text{resp. } [b, c']), \ \ \text{if} \ \ i_- \leq i < i_0, \\
J_i = \ & [c, b] \ \ (\text{resp. } [a, c']), \ \ \text{if} \ \ i_0 \leq i < i_+, \\
J_i = \ & [b + \beta - 1, b + \beta] \ \ (\text{resp. } [a - \beta, a - \beta + 1]), \\
& \text{if } i_+ - L_+ \beta - L_+ \leq i < i_+ - L_+ \beta \ \ \text{and} \ \ 1 \leq \beta \leq l_+ \\
& \text{or } \beta = l_+ + 1 \ \ \text{and} \ \ i = i_+ + L_+ \beta
\end{aligned}
$$

どちらの場合でも, H の $\mathcal{J}$ 極小配置 $\xi = (\ldots, \xi_i, \ldots)$ は $i_- - L_- l_- + 1 \leq i < i_+ + L_+ l_+ - 1$ に対して, $\xi_i \in \mathrm{int} J_i$ なる条件を満たす．

正整数 K_-, K_+, K, L^0_- および L^0_+ は θ, $P^+_{0+}(b)$, $P^H_{0-}(a)$ および関数 H のみに依存する．これらの数の決め方 (複雑である) は証明の中で行なう．

証明において, 公式

$$
(8.2) \qquad \sum_{i=j}^{k-1} H(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=j}^{k-1} H(x_i, x_i) + \int_{x_j}^{x_k} \partial_2 H(y, y+) dy + \sum_{i=j}^{k-1} \mu_H(\Delta_i),
$$

を繰り返し利用する．ここで, Δ_i は三角形

$$\{(y,z) : x_i \le y \le z \le x_{i+1}\} \quad \text{or} \quad \{(y,z) : x_{i+1} \le z \le y \le x_i\}$$

である．x_i の方が x_{i+1} より大きい場合と小さい場合で使い分ける．μ_H は $\mathbf{R}^2$ 上の一意のボレル測度であって, 任意の $x < \xi$ および $x' < \xi'$ に対して

$$\mu_H([x,\xi] \times [x',\xi']) = H(\xi,x') + H(x,\xi') - H(x,x') - H(\xi,\xi')$$

を満たす．μ_H の存在と一意性は [17, §3] の補題の内容である．また, $\partial_2 H(y,y+)$ は第二変数に関する H の片側第一偏微分である．$\partial_2 H(y,y-)$ も公式 (8.1) において同様に使うことができる．というのは, $\partial_2 H(y,y+)$ は高々可算個の点で $\partial_2 H(y,y-)$ と違うだけだからである．式 (8.2) は初等的に導ける．それは [17, 3.4] でやっている．式 (8.2) は実数の任意列 $(x_j,\ldots,x_k)$ に対して成り立つ．

命題 8.1 の証明は $J_i = [c,a]$ の場合のみ行なう．$i_- \le i < i_0$ その他として．他の場合が同様に証明できるのは明らかである．

証明は一連の補題に基づく．

補題 a. $\widehat{i}$ は $i_- \le i < i_+$ を満たし, ξ_i が極小になるような i の値であるとする．このとき, 列 (ξ_i) は $i_- - L_- l_- + L_- - 1 \le i \le \widehat{i}$ に対して弱く単調減少であり, $\widehat{i} \le i \le i_+ + L_+ l_+ - L_+$ に対して弱く単調増大である．

<u>証明</u>. これらの列のうちひとつが弱く単調でないなら, 添字を並べ替えて単調にできる．これは端の項をいじることなくできる．新しい列は $\mathcal{J}$ 配置の切片のはずである．しかし, 式 (8.2) によれば, $\sum H(\xi_i,\xi_{i+1})$ を適当な範囲で和を取ると, もとの列に比べて新しい列では和が小さいはずである．これは元の列が $\mathcal{J}$ 極小配置であったという仮定に矛盾する．□

$L_-^0 = 2[\varepsilon_-^{-1}] + 1$ とおく．ただし, ε_- は方程式 $2\varepsilon_- + \varepsilon_-^2 = P_0^H(a)/8\theta$ の一意の正の解である．

補題 b. $L_- \ge L_-^0$ なら, $i = i_- - L_-\beta - 1$ または $i = i_- - L_-\beta$ であって β が $1 \le \beta \le l_- - 1$ のとき, $\xi_i \ne a + \beta$ である．

<u>証明</u>. そうでないことを仮定し, 以下のことを示そう．すなわち, 列 η_i があり, i は $i_- - L_-\beta - L_- - 1$ から $i_- - L_-\beta + L_-$ まで走り, $\eta_i = \xi_i$ が端点の添字 (つまり, $i = i_- - L_-\beta - L_- - 1$ または $i = i_- - L_-\beta + L_-$) のひとつで成り立ち, $\eta_i \in J_i$ であり,

$$\sum H(\eta_i,\eta_{i+1}) < \sum H(\xi_i,\xi_{i+1})$$

が成り立つ．ここで, 和は添字の範囲は$i_- - L_-\beta - L_- - 1 \le i \le i_- - L_-\beta + L_- - 1$で取る．このような列$\eta_i$の存在は列$xi_i$の極小性に矛盾する．この矛盾により, $i = i_- - L_-\beta - 1$または$i = i_- - L_-\beta$のとき$\xi_i \neq a + \beta$であることがわかる．

この不等式を得るための第一ステップは$\sum H(\xi_i, \xi_{i+1})$の下界を得ることである．この下界を記述するために, たくさんの記法が必要である．それを以下で導入しよう．

$i = i_- - L_-\beta + L_-$に対して$v_- = \xi_i$とおき, $i = i_- - L_-\beta - L_- - 1$に対して$v_+ = \xi_i$とおく (だから$v_- < a + \beta - 1 < a + \beta + 1 < v_+$である)．$W$は$x \in [a + \beta - 1, a + \beta]$の集合であって, $H(x, x) = 0$を満たすとする．(Hの定義により, $\min_{x \in \mathbf{R}} H(x, x) = 0$が成り立つ.) $\mathbf{R} \backslash W$の各有界成分に対して, $x^J = (\ldots, x_i^J, \ldots)$は回転記号$0-$の ($H$の) 極小配置であって, 全体が区間$J$に含まれるものとする．Aubry 理論 (2 節で議論した) により, このような配置は存在し, $i \to -\infty$のとき$x_i^J \to J_+$を満たし, $i \to +\infty$のとき$x_i^J \to J_-$を満たす．ただし, $J = (J_-, J_+)$である．Jが与えられたとき, このような配置が 2 つ以上あるかもしれない．けれども, 各Jに対してひとつだけそのような配置$(\ldots, x_i^J, \ldots)$を選ぶ．w_-とw_+をWの最小および最大要素とする．$v_- < a + \beta - 1 < w_- < a + \beta < w_+ < a + \beta + 1 < v_+$であることに注意する．$(x_i^-)_{i \le 0}$は次の条件を満たす配置であるとする．すなわち, (a) $x_0^- = v_-$; (b) $i \le -1$に対して$x_i^- \in [a + \beta - 1, a + \beta]$; (c) $i \to -\infty$のとき$x_i^- \to w_-$．さらに, $(\ldots, x_i^-, \ldots, x_0^-)$ は上記 3 条件を満たして (Hの) 極小配置であると仮定する．同様に, $(x_i^+)_{i \ge 0}$は次の条件を満たす配置であるとする．すなわち, (a) $x_0^+ = v_+$; (b) $i \ge -1$に対して$x_i^- \in [a + \beta, a + \beta + 1]$; (c) $i \to +\infty$のとき$x_i^+ \to w_+$．さらに, $(\ldots, x_0^+, \ldots, x_i^+)$ は上記 3 条件を満たして (Hの) 極小配置であると仮定する．

$\mathbf{R} \backslash W$の各有界成分Jに対して, $D_J = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H(x_i^J, x_{i+1}^J)$とおく．$D_+ = \sum_{i=0}^{\infty} H(x_i^+, x_{i+1}^+)$および$D_- = \sum_{-\infty}^{-1} H(x_i^-, x_{i+1}^-)$とおく．式 (8.1) と (8.2) およびこれらの配置が (H に対して, またx^-およびx^+の場合に適当な境界条件に対して) 極小であることより, これらの和が絶対収束であって

$$
\begin{aligned}
D_J &\ge \int_J \partial_2 H(y, y+) dy, \\
D_+ &\ge \int_{w_+}^{v_+} \partial_2 H(y, y+) dy, \\
D_- &\ge \int_{v_-}^{w_-} \partial_2 H(y, y+) dy,
\end{aligned}
$$

が満たされる．ここで, 式 (8.2) の第一と第三の和の中の量が非負であることを利用した．

$D = D_- + \sum_J D_J + D_+$とおく．ここで, $\mathbf{R}$内のWの補集合の有界成分Jの

すべてにわたって和を取る．この和は式 (8.2) より，やはり絶対収束である．その上，配置 x_-, x_+, および x_J の極小性および式 (8.1), (8.2) より，

$$D < \sum_{i=m}^{n-1} H(\zeta_i, \zeta_{i+1})$$

が任意の列 $\zeta_m, \ldots, \zeta_n$ に対して成り立つ．ただし，端の項は $\zeta_m = v_+$, $\zeta_n = v_-$ を満たし，$m < i < n$ に対しては $\zeta_i \in [a+\beta-1, a+\beta+1]$ を満たす．その上，$\zeta_i = a+\beta$ が m と n の間の i で満たされるなら

$$D + P_{0-}^H(a) < \sum_{i=m}^{n-1} H(\zeta_i, \zeta_{i+1})$$

が成り立つ．これは，配置 x_-, x_+, および x_J の極小性および式 (8.1), (8.2), および $v_+ > a+\beta+1$ かつ $v_- < a+\beta-1$ であることから出る．とくに，

$$D + P_{0-}^H(a) < \sum_{i=m}^{n-1} H(\xi_i, \xi_{i+1})$$

が成り立つ．ここで和は $i_- - L_-\beta - L_- - 1 \le i \le i_- - L_-\beta + L_- - 1$ にわたって取る．これで第一段階が完了した．

列 η_i の構築を始めよう．端の添字 (すなわち，$i = i_- - L_-\beta - L_- - 1$ と $i = i_- - L_-\beta + L_-$) として $\eta_i = \xi_i$ とおく．η_i は単調非増加列であって，

$$V = W \cup \bigcup_J \{x_i^J\}_{i\in\mathbf{Z}} \cup \{x_i^-\}_{i\le 0} \cup \{x_i^+\}_{i\ge 0},$$

の部分集合として選ぶ．ここで J は $\mathbf{R}\backslash W$ の全有界成分の上を走る．このとき，式 (8.2) より，

$$D < \sum H(\eta_i, \eta_{i+1}) < D + \Delta D,$$

が成り立つ．ただし，

$$\Delta D = \sum_E \mu_H(\Delta_i),$$

である．Δ_i は三角形 $\{(y,z) : \eta_{i+1} \le z \le y \le \eta_i\}$ であり，和は $i_- - L_-\beta - L_- - 1 \le i \le i_- - L_-\beta + L_-$ を満た，しかも開区間 η_{i+1}, η_i が V の要素を含むような i の集合 E 上で取る．

だから，問題は列 η_i を選んで $\Delta D < P_{0-}^H(a)$ となるようにすることである．このために，[17] の不等式 (3.2) を使う．すなわち，実数 $x < \xi$ に対する

$$\mu_H([x,\xi]^2) \le (\xi - x)\nu_H^2(x,\xi) \tag{8.3}$$

である．ここで，ν_H^2 は $\mathbf{R}$ 上の一意のボレル測度であって

$$\nu_H^2(y,z]=\theta(z-y)+\partial_2 h(y,y+)-\partial_2 h(z,z+)$$

を満たす．(ν_H^1 に関係する対応する不等式を使うことも可能である.) 任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して $\nu_H^2(x,x+1]=\theta$ なる事実も使う．

$V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ も $V\cap[a+\beta,a+\beta+1]$ もこれらの区間の閉部分集合であって，どちらも $a+\beta$ を含まない．というのは，$P_{0+}^H(a+\beta)=P_{0+}^H(a)>0$ だからである．これらの集合の部分集合 V_- と V_+ を以下のように作る．v_1 は $V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ の最小数とする．$i>1$ として v_i を以下のように定義する．$V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ 内に $x>v_{i-1}$ が存在して $\mu_H([v_{i-1},x]^2)\le\varepsilon_-^2\theta$ なら，このような x の最大のものを v_i とする．(量 ε_- は補題 b の陳述の直前に定義しておいた.) このような x が存在しないなら，2 つ可能性がある．$x>v_{i-1}$ なる $x\in V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ があって，そのような x の最小値が $\mu_H([v_{i-1},x]^2)>\varepsilon_-^2\theta$ を満たすか，あるいは，v_{i-1} は $x\in V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ の最大要素である．前者の場合，v_i は $x>v_{i-1}$ なる最小の $x\in V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ とする．後者の場合，プロセスを終了させ，V_- を集合 $\{v_1,\dots,v_{i-1}\}$ と定義する．$[a+\beta,a+\beta+1]$ の部分集合 V_+ も同様に定義する．

e は V_- 内の要素の数であるとする．だから $V_-=\{v_1,\dots,v_e\}$ である．式 (8.3) と列 $v_1,\dots,v_e$ の構成法より，

$$(v_{2i+1}-v_{2i-1})(\nu_H^2(v_{2i-1},v_{2i+1}]/\theta)\ge\mu_H([v_{2i-1},v_{2i+1}]^2)/\theta>\varepsilon_-^2$$

である．したがって，

$$(v_{2i+1}-v_{2i-1}+\nu_H^2(v_{2i-1},v_{2i+1}]/\theta)^2\ge 4(v_{2i+1}-v_{2i})(\nu_H^2(v_{2i-1},v_{2i+1}]/\theta)>4\varepsilon_-^2.$$

だから，

$$(v_{2i+1}-v_{2i-1})+\nu_H^2(v_{2i-1},v_{2i+1}]/\theta)>2\varepsilon_-.$$

が成り立つ．どの $x\in\mathbf{R}$ に対しても $\nu_H^2(x,x+1]=\theta$ であり，$v_1<\cdots<v_e<v_1+1$ であるから，最後の不等式より，V_- 内の要素の数 e は $\le 2[\varepsilon_-^{-1}]+1=L_-^0<L_-$ である．同様に，V_+ は高々L_- 個の要素を持つ．

x_- は $[a+\beta-1,a+\beta]$ の要素であって，$H(x_-,x_-)=0$ を満たすとする．x_+ は $[a+\beta,a+\beta+1]$ の要素であって，$H(x_+,x_+)=0$ を満たすとする．x_- (または x_+) は V_- (または V_+) の最小と最大要素の間にある．というのは，$V\cap[a+\beta-1,a+\beta]$ (または $V\cap[a+\beta,a+\beta+1]$) には最小要素と最大要素があり，x_- (または x_+) はこの集合の要素だからである．

さて，列 η_i の構築を完成させよう．$i_--L_-\beta-L_-\le i<i_--L_-\beta$ に対して η_i を V_+ のメンバーとする．それぞれ一度だけ生じる (?) 加えて，x_+ はこの列

の中に好きな回数だけ生じる．これは列内の要素の数が L_- に属することを要請して (???) 同様に, $i_- - L_-\beta \le i < i_- - L_-\beta + L_+$ に対して, η_i は V_- のメンバーとし, それぞれ一度だけ生じるとする．加えて, x_- はこの列内に好きな回数だけ生じる．これは列内の要素の数が L_- に属することを要請して (???) これらの要素は単調非増加順序に現われる (?).

$\Delta D = \sum_E \mu_H(\Delta_i) < 2(2[\varepsilon_-^{-1}]+1)\varepsilon_-^2\theta \le P_{0-}^H(a)/4$ が成り立つ．最後の不等式は ε_- の定義から出る．最初の不等式は以下の事実からの帰結である．すなわち, E が高々$V_- \cup V_+$ と同じ数, $2(2[\varepsilon_-^{-1}]+1)$ の要素を持つこと, および $i \in E$ が $\mu_H([\eta_{i+1}, \eta_i]) \le \varepsilon_-^2\theta$ が出ることである．というのは, $\mu_H([\eta_{i+1}, \eta_i]) \le \varepsilon_-^2\theta$ なら, 開区間 (η_{i+1}, η_i) は V の要素をひとつも含まないからである．これは V_- と V_+ の定義から出る.

だから $\sum H(\eta_i, \eta_{i+1}) < \sum H(\xi_i, \xi_{i+1})$ となり, 望み通り矛盾に至った. □

$L_+^0 = 2[\varepsilon_+^{-1}]+1$ とおく．ただし, ε_+ は方程式 $2\varepsilon_+ + \varepsilon_+^2 = P_{0+}^H(b)/8\theta$ の一意の正の解である.

補題 c. $L_+ \ge L_+^0$ なら, $\xi_i \ne b+\beta$ が, $i = i_+ + L_+\beta - 1$ または $i = i_+ + L_+\beta$ および $1 \le \beta \le l_+ - 1$ のときに成り立つ.

<u>証明</u>. 補題 b の証明と同じである. □

補題 d. 関数 $H(x,x)$ は極小値を区間 $[\xi_{\hat{i}}, \min(a.b)]$ において $x = \xi_{\hat{i}}$ のときに取る.

<u>証明</u>. ある $\xi_{\hat{i}} < x \le \min(a,b)$ に対して $H(x,x) \le H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}})$ であるとする．補題 a と式 (8.2) より

$$\sum H(\eta_i, \eta_{i+1}) < \sum H(\xi_i, \xi_{i+1})$$

が出る．ここで, 和は添字の範囲 $i_- \le i \le i_+ - 2$ で取る．ところがこれは ξ が極小であるという仮定に矛盾する. □

次のようにおく.

$$\delta = (\min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}/2|b-a|\nu_H^2(I_{ab}))^{1/2}$$

ただし, I_{ab} は端点を a, b とする閉区間である．$a < b$ の場合, $K_- = 1$ および $K_+ = [2\delta^{-1}+1]$ とおく．$b < a$ の場合, $K_+ = 1$ および $K_- = [2\delta^{-1}+1]$ とおく.

補題 e. $H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}}) \le \min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}/2$ であって, $i_- < j < i_+$, $j - i_- \ge K_-$, かつ $i_+ - j > K_+$ であるなら, $\xi_j < \min(a.b)$ である． とくに, $\max(\xi_{i(0)-1}, \xi_{i(0)}) < \min(a,b)$ である.

証明. 最後の陳述は最初のものから言える. これは定理 8.1 の前提 $i_0 - i_- > K_-$ および $i_+ - i_0 > K_+$ を考慮すればよい.

まず, 最初の陳述を証明する. 仮定により, $i_- \leq i < i_0$ に対して $\xi_i \leq a$ であり, $i_0 \leq i < i_+$ に対して $\xi_i \leq b$ である. 補題 a より, ξ_i は, i が i_- から $\hat{i}$ まで走るとき弱単調減少であり, i が $\hat{i}$ から i_+ まで走るとき弱単調増大である. その上, $H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}}) \leq \min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}/2$ という仮定により, $\xi_{\hat{i}} < \min(a,b)$ である. $\min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\} > 0$ である. というのは, a, b はどちらも $\pi(M_{F,0})$ の同じ補区間 (c, c') に属するからであり, $\pi(M_{F,0}) = \{x : H(x,x) = 0\}$ が式 (8.1) より成り立つからである.

$i_- < \hat{i}$ なら $\xi_{i_-+1} < \xi_{i_-}$ である. というのは, そうでないとすると, 補題 a より, $\xi_{i_-+1} = \xi_{i_-}$ となり, 式 (8.2) と補題 d からすると, 列 $\xi_{i_-}, \ldots, \xi_{\hat{i}}$ から ξ_{I_-+1} を削除し, その列の最後に $\xi_{\hat{i}}$ をつなげることにより, $\sum_{i=i_-}^{\hat{i}-1}$ を減少させることができてしまう. 同様に, $\hat{i} < i_+ - 1$ なら $\xi_{i_+-2} < \xi_{i_+-1}$ である.

$a < b$ の場合を考える. $j - i_- \geq K_- = 1$ であるから, $j > i_-$ が成り立つ. だから, $\hat{i} \geq j$ なら, $\xi_j \leq \xi_{i_-+1} < \xi_{i_-} \leq a$ が成り立つ. だから, この場合に補題を証明するには, 部分ケース $j > \hat{i}$ を考えるだけで十分であり, $\xi_j < a$ を証明すればよい.

指数 i が $j \leq i < i_+ - 2$ を満たし, $a \leq \xi_i$ の場合を考える. 式 (8.2) より,

$$H(\xi_i, \xi_{i+1}) + H(\xi_{i+1}, \xi_{i+2}) - H(\xi_i, \xi_{i+2}) \geq H(\xi_{i+1}, \xi_{i+1}) - \mu_H(\Delta)$$

が成り立つ. ただし, $\Delta = \{(y,z) : \xi_i \leq y \leq z \leq \xi_{i+2}\}$ である. 不等式 (8.3) より,

$$\mu_H(\Delta) \leq (\xi_{i+2} - \xi_i)\nu_H^2(\xi_i, \xi_{i+2})$$

が成り立つ. ここで, ξ_{i+1} を列 $\xi_{\hat{i}}, \ldots, \xi_{i_+-1}$ から削除し, 列の先頭に $\xi_{\hat{i}}$ の second instance を繋げることの効果を考察する. 式 (8.2), および不等式 $H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}}) \leq \min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}/2$ と上記の最後の 2 つの不等式からすると, この操作により, 和 $\sum_{i=\hat{i}}^{i_+-2} H(\xi_i, \xi_{i+1})$ は減少する. ただし, $(\xi_{i+2} - \xi_i)\nu_H^2(\xi_i, \xi_{i+2}) < \min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}/2$ とする. よって, ξ の極小性より,

$$(\xi_{i+2} - \xi_i)\nu_H^2(\xi_i, \xi_{i+2}) \geq \min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}/2,$$

が結論できる. ここで, $i_0 \leq i < i_+ - 2$ および $a \leq \xi_i$ である. したがって,

$$\left(\frac{\xi_{i+2} - \xi_i}{b - a} + \frac{\nu_H^2(\xi_I, \xi_{i+2})}{\nu_H^2(a,b)}\right)^2 \geq \frac{2\min\{H(x,x) : x \in I_{ab}\}}{(b-a)\nu_H^2(a,b)}$$

である. したがって,

$$\sum \left(\frac{\xi_{i+2} - \xi_i}{b - a} + \frac{\nu_H^2(\xi_I, \xi_{i+2})}{\nu_H^2(a,b)}\right) \geq 2e\delta$$

が成り立つ．ただし, e は和の中の項数である．したがって, $e > \delta^{-1}$ なら

$$\sum \xi_{i+2} - \xi_i > b - a \quad \text{or} \quad \sum \nu_H^2(\xi_i, \xi_{i+2}) > \nu_H^2(a, b)$$

が成り立つ. $\xi_j \leq \ldots \leq \xi_{i_+ - 1} \leq b$であることを考慮すると, $i_+ - 1 - j > 2delta^{-1}$ なら $\xi_j < a$ であることがわかる.

これが $a < b$ の場合に要請された結果である．$b < a$ の場合も同じように扱うことができる．□

補題 f. $(i_+ - i_-)H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}}) \leq 2\theta$.

証明. $i = i_- - 1$ および $i = i_+$ のときに $\eta_i = \xi_i$ であるとし, $i_- \leq i \leq i_+ - 1$ のとき $\eta_i = c$ とおく．このとき

$$0 \leq \sum_{i_-}^{i_+} (H(\eta_{i-1}, \eta_i) - H(\xi_{i-1}, \xi_i)) \leq 2\theta - (i_+ - i_-)H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}})$$

である．最初の不等式は列 ξ_i が $\mathcal{J}$ 極小であるという仮定の帰結である．第二の不等式は式 (8.2), 補題 d および不等式 (8.3) と, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $\nu_H^2(x, x+1] = \theta$ という事実からでる.

補題 g. どの $\varepsilon > 0$ に対しても, 正整数 K があって, $i_+ - i_- > K + K_+ + K_-$ なら $\mu_H((c, \xi_{\hat{i}})^2) < \varepsilon$ である.

証明. $y \downarrow c$ のとき $\mu_H(c, y)^2 \to 0$ であるから, どの $\delta > 0$ に対しても正整数 K が存在して, $i_+ - i_- > K + K_+ + K_-$ ばらば $\xi_{\hat{i}} - c < \delta$ が成り立つことを証明すれば十分である．その上, $H(c, c) = 0$, また $c < yc'$ のとき $H(y, y) > 0$ であって H は連続であるから, どの $\eta > 0$ に対しても正整数 K が存在して, $i_+ - i_- > K + K_+ + K_-$ ばらば $H(\xi_{\hat{i}}, \xi_{\hat{i}}) < \eta$ が成り立つことを証明すれば十分である．これは補題 f から出る．□

K は $H, c, a,$ および b に依存することに注意する．これは次のふたつの補題でも同じである.

補題 h. 正整数 K があって, $i_+ - i_- > K + K_+ + K_-$ なら, $\xi_j \neq a$ が $j = i_-$ または $j = i_- - 1$ のときに成り立つ.

証明. まず $j = i_- - 1$ の場合を考える．Aubry 理論により, 回転記号 $0-$ の極小配置 $(\ldots, \eta_i, \ldots)$ があって, $i \to -\infty$ のとき $\eta_i \to c'$ かつ $i \to \infty$ のとき $\eta_i b \to c$ を満たす. $\eta_{i_-} < a < \eta_{i_- - 1}$ となるように添字を選ぶことができる.

このとき $j = i_- - L_- - 1$ または $j = i_+$ のとき $\eta_j < \xi_i$ である．これは, ξ が $\mathcal{J}$ 配置であることによる．したがって, $j = i_- - L_- - 1 \leq j \leq i_+$ のとき $\eta_j < \xi_j$ で

ある．これは Aubry の項さ補題を普通に変形して, 配置のひとつが極小であり, もうひとつが $\mathcal{J}$ 極小である場合に適用すればよい．とくに $a < \eta_{i_--1} < \xi_{i_-} - 1$ である．

次にもっと困難な場合 $j = i_-$ を考える．$\xi_{i_-} = a$ と仮定し, 矛盾を導く．すなわち, 列 η_i で, 添字 i が $i_- - L_- - 1$ から $i_+ + L_+$ まで走るものがあって, i が端点のひとつのとき (つまり, $i = i_- - L_- - 1$ または $i = i_+ + L_+$) $\eta_i = \xi_i$ であり, $\eta_i \in J_i$ であり, また

$$\sum H(\eta_i, \eta_{i+1}) < \sum H(\xi_i, \xi_{i+1})$$

を満たす．ここで和は両方共添字の範囲 $i_- - L_- - 1 \leq i \leq i_+ + L_+$ を動く．

この不等式を証明するための最初のステップは, $\sum H(\xi_i, \xi_{i+1})$ の下界を得ることである．このために次のような記法が必要である．

$i = i_- - L_- - 1$ のとき $v_- = \xi_i$ とおき, $i = i_+ + L_+$ のとき $v_+ = \xi_i$ とおく．A は式 $H(x, x) = 0$ を満たす $x \in \mathbf{R}\backslash A$ の集合とする．$\mathbf{R}\backslash A$ の各有界成分に対し, $x_-^J = (\ldots, x_{i_-}^J, \ldots)$ と $x_+^J = (\ldots, x_{i_+}^J, \ldots)$ はそれぞれ回転記号 0− と 0+ の (H の) 極小配置であって, 区間 J に完全に含まれるものとする．w_- (または w_+) は $[c, a+1] \cap A$ (または $[c, b+1] \cap A$) の最大要素とする．$w_- < a+1 \leq v_-$ および $w_+ < b+1 \leq v_+$ に注意する．$x^- = (x_i^-)_{i \geq 0}$ は配置であって, 次の条件を満たすとする．(a) $x_0^- = v_-$, (b) $i \geq 1$ のとき $x_i^- \in [c, a+1]$, (c) $i \to +\infty$ のとき $x_i^- \to w_-$. 加えて, これらの 3 つの条件を満たす配置の集合の中で, x^- は極小であるとする．$x^+ = (x_i^+)_{i \leq 0}$ は配置であって, 次の条件を満たすとする．(a) $x_0^+ = v_+$, (b) $i \geq 1$ のとき $x_i^+ \in [c, b+1]$, (c) $i \to -\infty$ のとき $x_i^+ \to w_+$. 加えて, これらの 3 つの条件を満たす配置の集合の中で, x^+ は極小であるとする．

$\mathbf{R}\backslash A$ の各 J に対して, $D_{J\pm} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H(x_{i\pm}^J, x_{i+1\pm})^J$ とおく．次のようにおく．

$$D_- = \sum_{i=0}^{\infty} H(x_i^-, x_{i+1}^-) + \sum_J D_{J-},$$

ここで J は $[c, a+1]$ に含まれる $\mathbf{R}\backslash A$ の成分すべての上を動く．また次のようにおく．

$$D_+ = \sum_{i=-\infty}^{-1} H(x_i^+, x_{i+1}^+) + \sum_J D_{J+},$$

ここで J は $[c, b+1]$ に含まれる $\mathbf{R}\backslash A$ の成分すべての上を動く．補題 b の証明と同じ論拠で, 式 (8.1), (8.2) および $x_\pm^J$oto $x^\pm$ の極小性より, これらの和がすべて絶対収束であることが出る．

$D = D_+ + D_-$ とする．(8.2) より，

$$\sum_{i_- - L_-}^{i_+ + L_+} H(\xi_{i-1}, \xi_i) > D - \mu_H((c, \xi_{\hat{i}})^2)$$

が出る．その上，$\xi_{i_-} = a$ という仮定により，もっと多くのことが言える．すなわち，

$$\sum_{i_- - L_-}^{i_+ + L_+} H(\xi_{i-1}, \xi_i) > D + P^H_{0-}(a) - \mu_H((c, \xi_{\hat{i}})^2)$$

が成り立つ．これで第一ステップが完了した．これが要請された $\sum H(\xi_i, xi_{i+1})$ の下界である．

さて列 η_i の構築を始めよう．$i = i_- - L_- - 1, \ldots, i_- + L_- - 1$ に対して η_i を選んで単調非増大列であって

$$V_- = (A \cap [c, a+1]) \cup \{x_i^-\}_{i \geq 0} \cup \bigcup_J \{x_{i-}^J\}_{i \in \mathbf{Z}}$$

の部分集合となるように選ぶ．ここで，J は $[c, a+1]$ 内の $\mathbf{R} \backslash A$ の成分の上をすべて動く．この列の最初のメンバーを v_- とし，最後のメンバーを c とする．$i = i_+ - L_-, \ldots, i_+ + L_+$ に対して η_i を選んで単調非減少列であって

$$V_+ = (A \cap [c, b+1]) \cup \{x_i^+\}_{i \leq 0} \cup \bigcup_J \{x_{i+}^J\}_{i \in \mathbf{Z}}$$

の部分集合となるように選ぶ． ここで，J は $[c, b+1]$ 内の $\mathbf{R} \backslash A$ の成分の上をすべて動く．この列の最初のメンバーを c とし，最後のメンバーを v_+ とする．K を十分大きく選んで，命題 8.1 の仮説 $i_+ - i_- > K_- + K_+ + K$ から $i_- + L_- - 1 \leq i_+ - L_-$ が出るようにする．$i_- + L_- - 1 \leq i \leq i_+ - L_-$ に対して $\eta_i = c$ とおく．

次が成り立つ．

$$D \leq \sum H(\eta_i, \eta_{i+1}) < D + \Delta D.$$

ここで，

$$\Delta D = \sum_E \mu_H(\Delta_i)$$

であり，Δ_i は $\eta_{i+1} < \eta_i$ のとき三角形 $\{(y, z) : \eta_{i+1} \leq z \leq y \leq \eta_i\}$ であり，$\eta_i < \eta_{i+1}$ のとき三角形 $\{(y, z) : \eta_i \leq y \leq z \leq \eta_{i+1}\}$ である．和は，$E = E_- \cup E_+$ の上で取る． ただし，E_- は $i_- - L_- - 1 \leq i < i_- + L_- - 1$ を満たす i の集合であって，開区間 (η_{i+1}, η_i) が V_- の要素を含むようなものであり，E_- は

$i_+ - L_- \le i < i_+ + L_+$ を満たす i の集合であって, 開区間 (η_i, η_{i+1}) が V_+ の要素を含むようなものである

こうして, われわれの問題は列 η_i を選んで $\Delta D \le P_{0-}^H(a) - \mu_H((c,\xi_{\hat{i}})^2)$ を満たすようにすることである. もちろん, これはされあに要請 $\eta_i \in J_i$ を満たすべきである.

この列を, 補題 b の対応する列を選んだときと同じようにする. (記号 V, η_i, その他は補題 b の証明のものとは意味が違うことに注意する.) だから, $V_- \cap [a, a+1]$ の部分集合 V_1, $V_- \cap [c, a]$ の部分集合 V_2, $V_+ \cap [c, b]$ の部分集合 V_3, および $V_+ \cap [b, b+1]$ の部分集合 V_4 を選ぶのに, 補題 b の証明において $V \cap [a+\beta-1, a+\beta]$ と $V \cap [a+\beta, a+\beta+1]$ の部分集合 V_- と V_+ を選んだときと同じようにする. 補題 b の証明で使った議論によれば, これら部分集合のそれぞれは L_- 未満の要素を持つ. x_- (または x_+) を $[a, a+1]$ (または $[b.b+1]$) の要素であって $H(x_-, x_-) = 0$ (または $H(x_+, x_+) = 0$) なるものとする. 補題 b の証明の場合と同じ理由により, x_- (または x_+) は V_1 (または V_4) の最小と最大の要素の間にある.

さて, 列 η_i の構成を完成させる. $i_- - L_- \le i_-$ に対して, η_i は V_1 の要素であって, それぞれ 1 回だけ生じるとする. 加えて, x_- はこの列の中で, 列が L_- になるために好きなだけの回数現われるとする (?). $i_- \le i_- + L_-$ に対して, η_i は V_2 の要素であって, それぞれ 1 回だけ生じるとする. 加えて, c はこの列の終りに, 列が L_- になるために好きなだけの回数現われるとする (?). $i_+ - L_- \le i_+$ に対して, η_i は V_3 の要素であって, それぞれ 1 回だけ生じるとする. 加えて, c はこの列の始めに, 列が L_- になるために好きなだけの回数現われるとする (?). $i_+ \le i_+ + L_+$ に対して, η_i は V_4 の要素であって, それぞれ 1 回だけ生じるとする. 加えて, x_+ はこの列の中に, 列が L_- になるために好きなだけの回数現われるとする (?).

補題 b の証明とまったく同じように,

$$\Delta D \le \sum_E \mu_H(\Delta_i) < 4(2[\varepsilon_-^{-1}] + 1)\varepsilon_-^2 \theta < P_{0-}^H(a)/2$$

が成り立つ. だから補題 g より, $\sum H(\eta_i, \eta_{i+1}) < \sum H(\xi_i, \xi_{i+1})$ が K が十分大きく選ばれているとして成り立つ. だから $\mu_H((c,\xi)^2) < P_{0-}^H(a)/2$ である. □

補題 i. 正整数 K があって, $i_+ - i_- > K + K_+ + K_-$ なら $\xi_j \ne b$ が $j = i_+$ または $i_+ - 1$ のときに成り立つ.

<u>証明</u>. 補題 h と同じである. □

補題 j. $\xi_i < a + l_-$ が $i = i_- - L_- l_- + 1$ のときに成り立ち, $\xi_i < b + l_+$ が $i = i_+ + L_+ l_+ - 2$ のときに成り立つ.

証明. $i=i_- - L_- l_- + 1$ の場合を考える. このとき $\xi_{i-1}\in J_{i-1}=[a+l_- -1, a+l_-]$ であるから, $\xi_i<\xi_{i-1}\le a+l_-$ である. $x\in(a+l_- -1, a+l_-)$ は $H(x,x)=0$ を満たすとする. $\xi_{i-1}\le x$ なら要請された不等式が成り立つ. $\xi_i=\xi_{i-1}>x$ なら, 列 $(\ldots,\xi_j,\ldots)$ から ξ_i を削除して x を加えることにより $\sum H(\xi_j,\xi_{j+1})$ を小さくすることができる. その際, 新しい列は補題の単調性が成り立つように添字を調整する. この操作により $H(\xi_j,\xi_{j+1})$ が減少することは, 式 (8.2) からただちに言える. ところがこれは ξ が $\mathcal{J}$ 極小であることに矛盾する.

もうひとつの場合も同じように扱える. □

命題 8.1 の証明. 命題 a, b, c, h, i, および j からただちに出る. □

9. もっと補題を

実数の組の間の以下のような関係を考える. $(\omega,a)\to(\omega',a')$ であるとは, 正整数 K_{-1},K,K_1 があって, 以下が成り立つときである. すなわち, $x^-=(\ldots,x_i^-,\ldots)$ と $x^+=(\ldots,x_i^+,\ldots)$ が極小配置であって, 回転数 $\rho(x^-)=\omega$ および $\rho(x^+)=\omega'$ を持つ. また, $\mathcal{J}^\pm=(\ldots,J_i^\pm,\ldots)$ が $J_i^\pm=[a_i^\pm,a_i^\pm+1]$ によって定義される. ただし, $a_i^- - a\in\mathbf{Z}$, $a_i^+ - a'\in\mathbf{Z}$ および $x_i^\pm\in[a_i^\pm,a_i^\pm+1]$ である. さらに, $i_{-2},i_{-1},i_1,i_2\in\{-\infty\}\cup\mathbf{Z}\cup\{+\infty\}$ が

$$i_{-2}+K_{-1}<i_{-1}<i_{-1}+K<i_1<i_1+K_1<i_2$$

を満たすとき, 整数 l と閉区間の列 $J^*_{i(-2)},\ldots,J^*_{i(2)}$ があって

$$J_i^*=J_i^-,\quad \text{for}\quad i_{-2}\le i\le i_{-1},\quad J_i^*=J_i^+ + l,\quad \text{for}\quad i_1\le i\le i_2,$$

を満たし, また, $x=(x_{i(-2)},\ldots,x_{i(2)})$ が $i_{-2}\le i\le i_2$ に対して $x_i\in J_i^*$ を満たす配置の任意の線分であって, また x が $\mathcal{J}^*$ 極小であるとき, $i_{-2}+K_{-1}\le i\le i_2-K_1$ に対して $x_i\in \mathrm{int}J_i^*$ である.

あらっぽく言えば, 回転数 ω から回転数 ω' へと「近似的に」(切片が) 乗り移る $\mathcal{J}$ 極小軌道がある. その際, a と a' は, それぞれの束縛条件を決める区間の端点の生成役である. 中間に移るための準備期間 $i_{-1}\le i\le i_1$ がある.

明らかに, この関係は推移的である. すなわち, $(\omega,a)\to(\omega',a')$ かつ $(\omega',a')\to(\omega'',a'')$ なら $(\omega,a)\to(\omega'',a'')$ である.

補題 9.1. 実数 ω,ω',a を考える. Ω は端点を ω および ω' とする閉区間であるとする. $P>0$ があって, $P_\lambda(a)>P$ がすべての $\lambda\in\Omega$ に対して成り立つとする. $p/q\in\Omega$ が有理数であって既約であるとして $q>2\theta/P$ であるとする. このとき, $(\omega,a)\to(\omega',a)$ である.

注意. 前提は ω と ω' に関して対称である. だからこの補題から, $(\omega', a) \to (\omega, a)$ である.

<u>証明</u>. x^- と x^+ はそれぞれ回転数 ω と ω' の極小配置であるとする. $\mathcal{J}^\pm = (\ldots, J_i^\pm, \ldots)$ は上と同様, $x^\pm$ と a を使って定義されるとする. だから, $J_i^\pm = [a^\pm, a^\pm + 1]$ である. ここで, $n_i^\pm = a_i^\pm - a_i$ は整数, また $x_i^\pm \in (a^\pm, a^\pm + 1)$ である.

$\varepsilon = P/2\theta$ とおく. 証明の第一段階では, 正整数 K で x^- と x^+ に依らないものと整数 l が存在すること, また $i_{-1} + K < i_1$ に対して, ε 拘束された列 $(\ldots, n_i, \ldots)$ があって, $i \le i_{-1}$ のとき $n_i = n_i^-$ であり, $i \ge i_1$ のとき $n_i = n_i^+ + l$ であることを示す.

命題 7.4 に先行する議論によって, どうすればいいかわかる. 実際, p/q が Ω 内の有理数のとき $q > 2\theta/P$ という前提は, Ω が高さ ε^{-1} のファーレイ区間に含まれることを意味する. すると, 7 節で証明された見積り $K(\lambda, \varepsilon) \le 2/\Delta_\varepsilon(\lambda)$ から, $L \ge 0$ があって, すべての $\lambda \in \Omega$ に対して $K(\lambda, \varepsilon) \le L$ であることが出る. 補題 7.3 より, $n = (\ldots, n_i, \ldots)$ が ε 拘束であるのは $n_i = [\lambda_i]$, $\lambda_{i+1} - \lambda_i = r_i$ であって, 列 $(\ldots, r_i, \ldots)$ が次のような性質を持つときである. すなわち, 各 $i \in \mathbf{Z}$ に対して, $r_{i-L}, \ldots, r_{i+L}$ がすべて高さ $2L$ の同じファーレイ区間に入っているという性質である. 命題 7.4 に先行してそのような例を示した (?). このような ε 列を構成する方法からすると, $i_{-1} + K < i_i$ に対して, ε 拘束列 $(\ldots, n_i, \ldots)$ で, $i \le i_{-1}$ のとき $n_i = n_i^-$, $i \ge i_1$ のとき $n_i = n_i^+ + l$ なるものを用意するのは簡単である.

$i_{-2} \le i \le i_2$ に対して $J_i^* = [a_i^*, a_i^* + 1]$ とおく. ただし, $a_i^* = n_i + a$ である. また i_{-2}, i_2 は整数であって, $i_{-2} \le i_{-1}$ および $i_1 \le i_2$ を満たす. 命題 6.1 より, 正整数 K_{-1}, K_1 があって, $i_{-2} + K_{-1} \le i_{-1}$ かつ $i_1 + K_1 \le i_2$ なら, 任意の拘束 $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ で $i_{-2} \le i \le i_2$ に対して $J_i = J_i^*$ を満たすもの, また任意の $\mathcal{J}$ 極小配置 x に対して, $x_i \in \operatorname{int} J_i$, $i_{-2}+K_{-1} \le i \le i_2 - K_1$ が成り立つ. 実は, 命題 6.1 の証明によれば, この結論を得るためには, $x = (x_{i(-2)}, \ldots, x_{i(2)})$ が $\mathcal{J}^*$ 極小であることを仮定するだけで十分であった. ただし, $\mathcal{J}^*$ は切片 $(J^*_{i(-2)}, \ldots, J^*_{i(2)})$ のことである. これが求めた結果である. □

補題 9.3 の証明において, 補題 9.1 を少し強めた次の結果が必要である.

Addendum. 様々な選択を次のように行なう. すなわち, (上記証明の用語を使って) $\omega < \omega'$ なら, $(\ldots, n_i - n_i^-, \ldots)$ と $(\ldots, n_i^+ - n_i, \ldots)$ は非減少列である. $\omega' < \omega$ なら, 非増加列がある.

<u>証明</u>. 簡単にわかるように, ε 列 $(\ldots, n_i, \ldots)$ を構成する上記のやり方で, この

性質が成り立つようにすることが可能である. □

補題 9.2. ω が無理数であって, $a, b \in \mathbf{R}$, また $P_\omega(a)$ と $P_\omega(b)$ が正のとき, $(\omega, a) \to (\omega, b)$ である.

<u>証明</u>. 命題 6.2 の証明からしたがう. □

補題 9.3. p/q は有理数であり, a も b も $\pi(M_{f,p/q})$ の同じ補区間に入っているとし, $P_{p/q-}(a) > 0$ と $P_{p/q+}(b) > 0$ が満たされるとする. このとき, $\varepsilon > 0$ があって, $p/q - \varepsilon < \omega_- < p/q < \omega_+ < p/q + \varepsilon$ を満たすなら, $(\omega_-, a) \to (\omega_+, b)$ かつ $(\omega_+, b) \to (\omega_-, a)$ である.

<u>証明</u>. $(\omega_-, a) \to (\omega_+, b)$ を証明する. ほかのケースは同様である.

[17, 定理 2.2] において, 次のような見積りを行なった. すなわち, $|P_{p/q+}(\xi) - P_\omega(\xi)| \leq C\theta|\omega q - p|$ と $|P_{p/q-}(\xi) - P_\omega(\xi)| \leq C\theta|\omega q - p|$. ただし, C はすべてから独立である. この見積りから, ε, $P > 0$ が存在して, $(p/q) - \varepsilon < \omega'_- < p/q < \omega'_+ < (p/q) + \varepsilon$ なら, $P_{\omega'_-}(a) > P$ かつ $P_{\omega'_+}(b) > P$ である. $\varepsilon > 0$ は十分小さく選んであるので, $(p/q) - \varepsilon < p'/q' < p/q < (p/q) + \varepsilon$ かつ $p'/q' \neq p/q$ なら $q' > 2\theta/P$ が成り立つとする. このとき, 補題 9.1 より, $(\omega'_-, a) \to (\omega''_-, a)$ かつ $(\omega'_+, b) \to (\omega''_+, a)$ が $(p/q) - \varepsilon < \omega'_-, \omega''_- < p/q < \omega'_+, \omega''_+ < p/q + \varepsilon$ のとき成り立つ.

命題 8.1 の前提が満たされることに注意しよう. というのは, $M_{f,p/q} = M_{F,0}$, $P_{p/q-}(a) = P^h_{p/q-}(a) = P^H_{0-}(a)$, および $P_{p/q+}(b) = P^h_{p/q+}(b) = P^H_{0+}(b)$ だからである. この証明中では, 命題 8.1 の記法を使う. また, ω_-, ω_+ は補題 9.3 の前提を満たす固定した数であるとする. $L_\pm$ は整数であって, 命題 8.1 の条件 $L_\pm \geq L^0_\pm$ 以外に $\omega_- < p/q - 1/qL_-$ および $\omega_+ > p/q + 1/qL_+$ を満たすとする. 本証明では, 命題 8.1 の整数 l_- と l_+ は十分大きく取っておく. その大きさをどれほどにすべきかは, 証明の過程で説明する. 次のようにおく.

$$
\begin{aligned}
\widehat{J}^-_i &= [a + \beta - 1, a + \beta], \quad \text{if} \quad i_- - L_-\beta \leq i < i_- - L_-\beta + L_- \quad \text{and} \quad \beta \in \mathbf{Z} \\
\widehat{J}^+_i &= [b + \beta - 1, b + \beta], \quad \text{if} \quad i_+ + L_+\beta - L_+ \leq i < i_+ + L_+\beta \quad \text{and} \quad \beta \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

$\widehat{\mathcal{J}}^\pm = (\ldots, \widehat{J}^\pm, \ldots)$ とおく. $\xi^\pm = (\ldots, \xi^\pm_i, \ldots)$ は (H に関する) 最大の $\widehat{\mathcal{J}}^\pm$ 極小配置であるとする. 事実, $xi^\pm$ は回転記号 $\pm 1/L_\pm$ の (H に関する) 極小配置である. $\xi^{*\pm}$ は回転記号 $p/q \pm 1/qL_\pm$ のの (H に関する) 極小配置であって $\xi^{*\pm}_{qi} = \xi^\pm_i + \pi$ を満たすとする. J^{*-}_α は閉区間 $[a^{*-}_\alpha, a^{*-}_\alpha + 1]$ であって, 条件 $a^{*-}_\alpha - a\mathbf{Z}$ および $\xi^{*-}_\alpha \in (a^{*-}_\alpha, a^{*-}_\alpha + 1)$ で定義されるとする. 同様に, J^{*+}_α は閉区間 $[a^{*+}_\alpha, a^{*+}_\alpha + 1]$ であって, 条件 $a^{*+}_\alpha - b\mathbf{Z}$ および $\xi^{*+}_\alpha \in (a^{*+}_\alpha, a^{*+}_\alpha + 1)$ で定義さ

れるとする．J_i は命題 8.1 のものとし, 次のようにおく．

$$\begin{array}{lll} J^*_\alpha = J^{*-}_\alpha, & \text{for} & q(i_- - L_- l_- - L_-) \le \alpha < qi_-, \\ J^*_\alpha = J^{*+}_\alpha, & \text{for} & q(i_+ - 1) < \alpha \le q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1), \\ J^*_\alpha = J_i + \pi, & \text{for} & a = qi \ \text{ and } \ i_- \le i < i_+, \\ J^*_\alpha = \mathbf{R}, & \text{for} & \text{all other } \alpha \text{ between } qi_- \ \text{ and } \ q(i_+ - 1) \end{array}$$

だから, $q/(i_- - L_- l_- - L_-) \le \alpha \le q/(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1)$ なる各 α に対して, 閉連結非空集合 J^*_α を定義したことになる．

$\varepsilon > 0$ を選んで, $(p/q) - \varepsilon < \omega'_-$, $\omega'' < p/q < \omega'_+$, $\omega''_+ < (p/q) + \varepsilon$ のときに補題 9.1 の前提がペア (ω'_-, a), (ω''_-, a) および (ω'_+, b), (ω''_+, b) に適用できるようにする．

したがって, $(\omega'_-, a) \to (\omega''_-, a)$ および $(\omega'_+, b) \to (\omega''_+, b)$ であると言える．これを $\omega'_- = \omega_-$, $\omega''_- = p/q - 1/qL_-$, $\omega''_- = p/q + 1/qL_+$, および $\omega''_+ = \omega_+$ として適用する. だから補題 9.1 より, 回転数 ω^- と ω^+ の極小配置 x^- と x^+ が与えられたとき, J^*_α の定義を範囲 $i_{-2} \le \alpha \le i_2$ へと拡張できる．ここで $i_{-2} < q(i_- - L_- l_- - L_-)$ および $i_2 > q(i_+ - L_+ l_+ + L_+ - 1)$ とする．J^-_α と J^+_α は次のように定義する．すなわち, $J^-_\alpha = [a^-_\alpha, a^-_\alpha + 1]$ で, $a^-_\alpha - a \in \mathbf{Z}$ かつ $x^-_\alpha \in (a^-_\alpha, a^-_\alpha + 1)$．$J^+_\alpha = [a^+_\alpha, a^+_\alpha + 1]$ で, $a^+_\alpha - b \in \mathbf{Z}$ かつ $x^+_\alpha \in (a^+_\alpha, a^+_\alpha + 1)$. $i_{-2} \le \alpha \le i_{-1}$ に対して $J^*_\alpha = J^-_\alpha + \lambda^-$ であること, および $i_1 \le \alpha \le i_2$ に対して $J^*_\alpha = J^+_\alpha + \lambda^+$ であることを要請する．ただし, λ^- と λ^+ は適当な整数である．ここで, $i_{-2} + K_{-1} < i_{-1} < q(i_- - L_- l_- - L_-)$, $q(i_+ l_+ l_+ + L_+ - 1) < i_1 < i_2 - K_1$, および i_{-2}, K_{-2}, i_{-1} は, 補題 9.1 を (ω_- の回転数) x^- と ($p/q - 1/qL_-$ の回転数)ξ^{*-} に適用できるように選び, i_1, K_2, i_2 は補題 9.1 を ξ^{*+} と x^+ に適用できるように選ぶ．補題 9.1 を適用するには, l_- と l_+ を十分大きく取らねばならない．拡張 $\mathcal{J}^* = (J^*_{i(-2)}, \ldots, J^*_{i(2)})$ を補題 9.1 にしたがって選ぶことにより, $x = (x_{i(-2)}, \ldots, x_{i(2)})$ が配置の $\mathcal{J}^*$ 極小切片であれば, $i_{-2} + K_{-1} \le \alpha < qi_- - K^*_{-1}$ に対して, また $q(i_+ - 1) + K^*_1 < \alpha \le i_2 - K_1$ に対して $x_\alpha \in J^*_\alpha$ であることがわかる．ここで, K^*_{-1} と K^*_1 は整数であって, 補題 9.1 が適用できるよう適当に大きく選んである．また補題 9.1 への Addendum を $\mathcal{J}^*$ が満たすとする．

次の段階は, $qi_- - K^*_{-1} \le \alpha \le q(i_+ - 1) + K^*_1$ を満たすすべての α に対して $x_\alpha \in \text{int } J^*_\alpha$ であることを示すことである．このために, 命題 8.1 のちょっとした変種を使う．すなわち, 命題 8.1 の結論を次のような結論と置き換える．$(\xi_{i_- - L_- l_- - 1}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+ l_+})$ が $\mathcal{J}$ 配置の切片であって, (両端を固定して?) このような切片の内で極小であるなら, $i_- - L_- l_- + 1 \le i < i_+ + L_+ l_+ - 1$ に対して $\xi_i \in \text{int } J_i$ である, と．命題 8.1 の証明からすると, この結論は成り立つ．

命題 8.1 のこの変種を切片 $(\xi_{i_- - L_- l_- - 1}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+ l_+})$ に適用する．ただし, $\xi_i = x_{qi} - pi$ である．これは $\mathcal{J}$ 配置の切片である．このことは x が $\mathcal{J}^*$ 配置で

あること, および

$$J^*_{qi} = J_i + pi, \quad \text{for} \quad i_- - L_-l_- - 1) \le i \le i_+ + L_+l_+ - 1$$

という簡単に確かめることのできる事実から明らかである. 命題 8.1 のこの変種を適用するためには, 切片 $(\xi_{i_- - L_-l_- -1}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+l_+})$ が (両端を固定した) $\mathcal{J}$ 配置の切片の間で極小であることを示す必要がある.

これを証明するために, $\mathcal{J}$ 配置の切片 $(\widehat{\xi}_{i_- - L_-l_- - L_-}, \ldots, \widehat{\xi}_{i_+ + L_+l_+ + L_+ - 1})$ を考える. ただし, $i = i_- - L_-l_- - L_-$ および $i = i_+ - L_+l_+ + L_+ - 1$ のとき $\widehat{\xi}_i = \xi_i$ であり, 両端を固定して, (H に対して) 極小であるとする. 命題 5.1 によれば, このような配置は存在する. $i_- - L_-l_- - L_- \le i \le i_+ + L_+l_+ - 1$ に対して $\widehat{x}_{qi} = \widehat{\xi}_i + pi$ とおく. $i_- - L_-l_- - L_- \le i \le i_+ + L_+l_+$ に対して $(\widehat{x}_{qi}, \ldots, \widehat{x}_\alpha, \ldots, \widehat{x}_{q(i+1)})$ は (h に対して) 極小な切片であるとする. $\widehat{x}$ は切片 $(\widehat{x}_{q(i_- - L_-l_- - L_-)}, \ldots, \widehat{x}_{q(i_+ + L_+l_+ - 1)})$ を表わすとする. 以下で証明するのは, $\widetilde{x}$ が $\mathcal{J}^*$ 配置の切片なることである. つまり, $(\xi_{i_- - L_-l_- - L_-}, \ldots, \xi_{qi_+ + L_+l_+ + L_+ - 1})$ は (両端を固定して, H に関して) 極小であり, したがって, その制限 $(\xi_{i_- - L_-l_- - 1}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+l_+})$ は同じ極小性を持つ. というのは, $(\xi_{i_- - L_-l_- - L_-}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+l_+ + L_+ - 1})$ は (h に関する)$\mathcal{J}^*$ 極小配置 x の制限として定義されるからである. すると, $\widetilde{x}$ が $\mathcal{J}^*$ 極小配置であるという事実から

$$\sum H(\xi_i, \xi_{i+1}) \le \sum h(x_\alpha, x_{\alpha+1}) \le \sum h(\widehat{x}_\alpha, \widehat{x}_{\alpha+1}) = \sum H(\widehat{\xi}_i, \widehat{\xi}_{i+1})$$

が言え, したがって, $\widehat{\xi}$ の極小性より, 等式が得られる.

$\widehat{x}$ が $\mathcal{J}^*$ 配置の切片であることを証明するために, 配置 $\eta^\pm$, $\eta^{*\pm}$ を次のように定義する. $\eta^\pm$ (または $\eta^{*\pm}$) は回転記号 $\pm 1/L_\pm$ (または $p/q \pm 1/qL_\pm$) の (H に対する, または h に対する) 最小の極小配置であって, $\xi^\pm$ (または $\eta^{*\pm}$) より大きいとする. 明らかに, $\eta^{*\pm}_{qi} = \eta^\pm_i + pi$ である.

$$\begin{array}{lll}
a + \beta - 1 < \xi^-_i < \alpha + \beta < \eta^-_i, & \text{if } i = i_- - L_-\beta & \text{and} \quad \beta \in \mathbf{Z}, \\
a + \beta - 1 < \xi^-_i < \eta^-_i < \alpha + \beta, & \text{all other } i \in \mathbf{Z}, & \\
b + \beta - 1 < \xi^+_i < b + \beta < \eta^+_i, & \text{if } i = i_+ + L_+\beta - 1 & \text{and} \quad \beta \in \mathbf{Z}, \\
b + \beta - 1 < \xi^+_i < \eta^+_i < b + \beta, & \text{all other } i \in \mathbf{Z}, &
\end{array}$$

および $\eta^{*\pm}_\alpha \in \operatorname{int} J^{*\pm}_\alpha$ がすべての α に対して成り立つ. ただしその際, α は $q(i_- - L_-\beta)$ なる形をしていないものとする (または α は $q(i_+ + L_+\beta - 1)$ なる形をしていないものとする). $\beta \in \mathbf{Z}$ である. 定義より, $\xi^\pm$ は (H に関する) 最大の $\widehat{\mathcal{J}}^\pm$ 配置であり, $\eta^\pm$ は回転記号 $\pm 1/L_\pm$ の (H に関する) 最小の極小配置であって $\xi^\pm$ より大きなものである, 等々.

すべての α に対して $xi^{*\pm}_\alpha \leq x_\alpha$ が成り立つ. なぜなら, ξ^{*-} は $|calJ^{*-}$ 配置であるから, x は $\mathcal{J}^*$ 極小配置であり, どの α に対しても (対応する端点がこの不等式を満たすという意味で) $J^{*-}_\alpha \leq J^*_\alpha$ であり, J^{*-}_α は大きいか十分小さな α に対して厳密に J^*_α の左にある (?) だから, 不等式 $\xi^{*-}_\alpha \leq x_\alpha$ は, 極小配置 ξ^{*-} と $\mathcal{J}^*$ 極小配置 x に相対 Aubry 交差補題を適用して得られる.

すべての α に対して $\xi^{*+}_\alpha \leq x_\alpha$ の特別の場合として, すべての i に対して $\xi^\pm_i \leq \xi_i$ が成り立つ. $\widehat{\xi}_i = \xi_i$ が $i = i_- - L_- l_- - L_-$ および $i = i_+ + L_+ l_+ - 1$ に対して成り立つから, これら 2 つの i に対して $\xi^\pm_i \leq \widehat{\xi}_i$ が成り立つ. ふたたび相対 Aubry 交差補題を用いて, $i_- - L_- l_- - L_- \leq i \leq i = i_+ + L_+ l_+ - 1$ に対して $\xi^\pm_i \leq \widehat{\xi}_i$ が成り立つ. これと Aubry 交差補題から

$$\xi^{*-}_\alpha \leq \widehat{x}_\alpha, \quad \text{for} \quad q(i_- - L_- l_- - L_-) \leq \alpha \leq q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1)$$

が出る. また, $\widehat{\xi}_i \leq a + \beta < \eta^-_i$ が $i = i_- - L_- \beta$, $\beta \in \mathbf{Z}$ かつ $1 \leq \beta \leq l_- + 1$ なら成り立つ. η^- に関して得た不等式と, $\widehat{\xi}$ が $\mathcal{J}$ 配置の切片であるという仮定から (文章になっていないぞ). だから, $\widehat{\xi}$ が $\mathcal{J}$ 配置の切片であるという仮定と相対 Aubry 交差補題より, $i_- - L_- l_- - L_- \leq i \leq i = i_- - L_-$ に対して $\widehat{\xi}_i \leq \eta^-_i$ が成り立つ. $\widehat{x}$ の定義と Aubry 交差補題から

$$\widehat{x}_\alpha \leq \eta^{*-}_\alpha, \quad \text{for} \quad q(i_- - L_- l_- - L_-) \leq \alpha \leq q(i_- - L_-)$$

が出る. 同様な議論により

$$\xi^{*+}_\alpha \leq \widehat{x}_\alpha \leq \eta^{*+}_\alpha, \quad \text{for} \quad q(i_+ + L_+ - 1) \leq \alpha \leq q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1)$$

が出る. だから, $\widehat{x}$ は $\mathcal{J}^*$ 配置の切片である. $\widehat{x}_\alpha \in J^*_\alpha$ を示すのに, 以下の事実を使う. すなわち, $\widehat{\xi}$ が $\mathcal{J}$ 配置の切片であること (これは $\alpha = qi$ のとき $\widehat{x} \in J^*_\alpha$ を意味する), そして上記の不等式である. その不等式は $\widehat{x}_\alpha \in J^*_\alpha$ が, α が qi の形でないとき, そして上の範囲のひとつに入っていないときに成り立つことを示す. 残りの場合, $J^*_\alpha = \mathbf{R}$ であるから証明すべきことは何もない.

まとめると, $\widehat{x}$ が $\mathcal{J}$ 配置であることが証明された. 上で議論したように, このとき, $(\xi_{i_- - L_- l_- - L_-}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+ l_+ + L_+ + 1})$ は, $\mathcal{J}$ 配置の切片の中で (端点を固定して) 極小である.

だから, 命題 8.1 の変型版を $\xi_{i_- - L_- l_- - L_-}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+ l_+})$ に適用できる. この変形版から, $i_- - L_- l_- + 1 \leq i \leq i_+ + L_+ l_+ - 2$ なる $\alpha = qi$ のとき, $x_\alpha \in \mathrm{int} J^*_\alpha$ が得られる. また

$$\begin{aligned} \xi^{*-}_\alpha \leq x_\alpha \leq \eta^{*-}_\alpha, &\quad \text{for} \quad q(i_- - L_- l_- - L_-) \leq \alpha \leq q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1) \\ \xi^{*+}_\alpha \leq x_\alpha \leq \eta^{*+}_\alpha, &\quad \text{for} \quad q(i_+ + L_+ - 1) \leq \alpha \leq q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ. これらの不等式は $\hat{x}$ に関する対応する不等式を証明したのと同じやり方で証明できる. (われわれが使ったのは, $\hat{\xi}$ が極小という性質だけであった. いま証明したばかりのこの性質は, $(\xi_{i_- - L_- l_- - L_-}, \ldots, \xi_{i_+ + L_+ l_+ + L_+ + 1})$ でも成り立つ)

qi という形でない α の場合, 上記不等式のひとつより, $J^*_\alpha = \mathbf{R}$ または $x_\alpha \mathrm{int} J^*_\alpha$ が成り立つ. まとめると,

$$\begin{aligned} x_\alpha \in \mathrm{int}\ J^*_\alpha, \qquad &\text{for} \qquad i_{-2} + K_{-1} \le \alpha \le qi_- - K^*_{-1} \\ &\text{and for} \quad q(i_+ - 1) + K^*_1 \le \alpha \le i_2 - K_1. \end{aligned}$$

が証明できた. だから, 十分大きな l_-, l_+ をとれば,

$$x_\alpha \in \mathrm{int}\ J^*_\alpha, \quad \text{for} \quad i_{-2} + K_{-1} \le \alpha \le i_2 - K_1$$

が成り立つ. これらがどれほど大きくなければいけないかは, K^*_{-1} と K^*_1 に依存する. さらに, K を十分大きくとって $i_{-1} + K < i_1$ となるようにすれば, i_- と i_+ を見つけて, 命題 8.1 の ($i_+ - i_-$ のサイズに関する) 前提を満たすできるし, 条件 $i_{-1} < q(i_- - L_- l_- - L_-)$ および $q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1) < i_1$ を満たすことができる. この条件は, 証明の最初の段階で必要なものであった. このような選び方をして, 求める結果が得られる. □

われらが主結果はバーコフの不安定ゾーン R 内の軌道に関するものである. 4 節で, R の下と上の境界を Γ_- と Γ_+ で表わした. 補題 9.1 - 9.3 を併せて, 次が得られる.

補題 9.4. $\rho(\Gamma_-) < \omega_-$, $\omega_+ < \rho(\Gamma_+)$, ω_-, ω_+ が無理数であり, a, b が実数であって $P_{\omega_-}(a) > 0$, $P_{\omega_+}(b) > 0$ を満たすなら, $(\omega_-, a) \to (\omega_+, b)$ である.

<u>証明</u>. 有理数 p/q と $\pi(M_{p/q})$ の補区間 (c, c') を考える. $(c, \gamma), (c', \gamma') \in M_{p/q}$ とする. $P_{p/q+}$ (または $P_{p/q-}$) が (c, c') 上で恒等的にゼロになるなら, $M_{p/q+}$ (または $P_{p/q-}$) 内にリプシッツ曲線 $\Gamma_{c,c'}$ があって, (c, γ) と (c', γ') を結ぶ. その上, $\widetilde{\Gamma}_{c,c'} = \Gamma_{c,c'} \cup f(\Gamma_{c,c'}) \cup \cdots \cup f^{q-1}(\Gamma_{c,c'})$ は f の下で不変である.

$\pi(M_{p/q})$ の各補区間 (c, c') に対して, $P_{p/q-}$ または $P_{p/q+}$ のうちの少なくともひとつが (c, c') 上で恒等的にゼロになるなら, 回転数 p/q の不変曲線がある. これは曲線 $\widetilde{\Gamma}_{c,c'}$ の和として構成される.

したがって, $\rho(\Gamma_-) < p/q < \rho(\Gamma_+)$ なら, $\pi(M_{p/q})$ の補区間 (c, c') が少なくともひとつ存在し, その上で $P_{p/q-}$ と $P_{p/q+}$ のどちらも恒等的にゼロになることはない. 補題 9.3 より, $\varepsilon > 0$ が存在して, $p/q - \varepsilon < \omega_- < p/q < \omega_+ < p/q + \varepsilon$ のときに $(\omega_-, a) \to (\omega_+, b)$ かつ $(\omega_+, b) \to (\omega_-, a)$ が成り立つ.

P_ω が恒等的にゼロになるなら回転数 ω の不変円が存在する．したがって，$\rho(\Gamma_-) < p/q < \rho(\Gamma_+)$ なら，$a \in \mathbf{R}$ があって，$P_\omega(a) > 0$ を満たす．補題 9.2 より，$\varepsilon > 0$ が存在して，$\omega - \varepsilon < \omega_-$, $\omega_+ < \omega + \varepsilon$ のときに $(\omega_-, a) \to (\omega_+, a)$ が成り立つ．

補題 9.4 は，今述べた注意および補題 9.2 および推移関係から出る． □

補題 9.4 の結論は ω_- と ω_+ が有理数である場合でも，多くの場合に成り立つ．それらが成り立つための条件を述べるために，以下の概念を導入しよう．実数の組 (ω, a) が**良い**とは，(a) ω が無理数であって $P_\omega > 0$ である; (b) $\omega = p/q$ が既約有理数なら，$P_\omega > 0$ かつ $q > 2\theta P_\omega(a)$ を満たす; (c) $\omega = p/q$ であって，$P_{p/q+}(a) > 0$ または $P_{p/q-}(a) > 0$ である．

補題 9.5. $(\omega_-, a), (\omega_+, b)$ が良い組であって，$\rho(\Gamma_-) < \omega_-$, $\omega_+ < \rho(\Gamma_+)$ なら，$(\omega_-, a) \to (\omega_+, b)$ である．

証明．組 (ω_-, a), (ω_+, b) のそれぞれが条件 (a) または (b) を満たす場合，補題 9.4 の証明を修正なしで適用できる．だから，(ω_-, a) または (ω_+, b)，あるいは両方が条件 (c) を満たす場合を考えればよい．

たとえば，(ω_-, a) が条件 (c) を満たし，(ω_+, b) が条件 (a) または (b) を満たす場合を考えれる．はっきりさせるために，$\omega_- = p/q$ で $P_{p/q+}(a) > 0$ とする．ω は $p/q+$ より少し大きな無理数であるとする．すると，[17, 定理 2.2] で与えられる見積り $|P_{p/q+}(a) - P_\omega(a)| \le C\theta|\omega q - p|$ より，$P_\omega(a) > 0$ を得る．したがって，(ω, a) は (a) を満たすから $(\omega, a) \to (\omega_+, b)$ が成り立つ．だから，$\to$ の推移性より，$(\omega_-, a) \to (\omega, b)$ を証明すれば十分である．これは，命題 8.1 と補題 9.3 を証明したのと同じやり方で行なえる．詳細は読者に任せる．

残りの場合は同様に扱うことができる． □

10. 近接遭遇

補題 10. ω は無理数であるとする．$a \in \mathbf{R}$ は $P_\omega(a) > 0$ なるものとする．$y < x < z$ は回転数 ω の極小配置であるとする．各 $i \in \mathbf{Z}$ に対して，a_i は $a_i - a \in \mathbf{Z}$ および $x_i \in (a_i, a_i + 1)$ を満たす唯一の実数であるとする．$K > 0$ が存在して，$\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ は $j_0 - K \le i \le j_1 + K$ に対して $J_i = [a_i, a_i + 1]$ なる束縛条件ならば，任意の $\mathcal{J}$ 極小配置 $\xi = (\ldots, \xi_i, \ldots)$ は $j_0 \le i \le j_1$ に対して $y_i < \xi_i < z_i$ を満たす．

証明．K が十分大きければ，$j_0 - K \le i_0 \le j_0$ および $j_1 \le i_1 \le j_1 + K$ を満たす i_0, i_1 があって，$i = i_0, i_1$ に対して $a_i + 1 < z_i$ が成り立つ．(実際，

ϕ_ω が Percival のラクランジュ関数を極小にし (6 節参照), $x_i = \phi_\omega(t+\omega i\pm)$, $z_i = \phi_\omega(s+\omega i\pm)$ なら, K をうまく選んで $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の区間 (t,s), $(t+\omega), s+\omega), \ldots$, $(t+(K-1)\omega), s+(K-1)\omega)$ が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を被覆するようにできる.) ξ は $\mathcal{J}$ 配置であるから, $i=i_0,i_1$ に対して $\xi_i < z_i$ が成り立つ. したがって, ξ が $\mathcal{J}$ 極小で z が極小であるから, Aubry の交差補題より, $i_0 \le i \le i_1$ に対して $\xi_i < z_i$ が成り立つ. $y_i < \xi_i$ の証明も同様である. □

系. ω, a, a_i は上のとおりとする. $\varepsilon > 0$ とする. 任意の $i_0 \in \mathbf{Z}$ に対して, $K, K_1 > 0$ が存在して, $\mathcal{J} = (\ldots, J_i, \ldots)$ が $i_0 \le i \le i_1$ (または $i_{-1} \le i \le i_0$) に対して $J_i = [a_i, a_i+1]$ なる束縛条件であり, ξ は $\mathcal{J}$ 極小かつ $\mathcal{J}$ 自由な配置であって, $(\ldots,(x_i,y_i),\ldots)$ と $(\ldots,(\xi_i,\eta_i),\ldots)$ は $(\ldots,x_i,\ldots)$ と $(\ldots,\xi_i,\ldots)$ に対応するなら,

$$|\xi_i - x_i| + |\eta_i - y_i| < \varepsilon$$

を, $i_0 + K \le i \le i_1 - K_1$ $(i_{-1} + K_1 \le i \le i_0 - K)$ に対して満たす.

この補題により, ω が無理数の場合に, $\rho(\Gamma_-) < \omega < \rho(\Gamma_+)$ を満たす回転数を持つ, あらかじめ指定した極小軌道への近接遭遇が用意できた. ω が無理数であるという前提がはずされると, この系は成り立たない. けれども, ω が有理数の場合にも似たような結果がある. これは 8 節の補題 f から出る. 補題 f より, どの $\varepsilon > 0$ に対しても, $i_+ - i_- \ge I$ なる I が存在して $\xi_i - c < \varepsilon$ が成り立つ. だから, I を十分大きく取ることにより, 配置 $(\ldots,\xi_i,\ldots)$ に対応する軌道が, 配置 $(\ldots,c,\ldots)$ に対応する軌道のいくらでも近くを通るように塩梅することができる.

11. 主結果の証明とさらなる結果

<u>定理 4.1 の証明</u>. まず, $\rho(\Gamma_-) < \omega_-$, $\omega_+ < \rho(\Gamma_+)$ とし, ω_- も ω_+ も無理数であるとする. $a, b > 0$ があって, $P_{\omega_-}(a)$, $P_{\omega_+}(b) > 0$ を満たす. いま, この $P_{\omega_-}(a)$, $P_{\omega_+}(b) > 0$ の意味がわからない. 6 節まで戻る必要あり. 補題 9.4 によると, $(\omega_-, a) \to (\omega_+, b)$ が成り立つ. この関係が束縛条件 $\mathcal{J}^* = (\ldots.J_i^*,\ldots)$ の存在を主張するのは, $i_{-2} = -\infty$ かつ $i_2 = \infty$ と関係 $\to$ の定義 (9 節のはじめ) において採用したときである. 関係 $\to$ の定義によると, x は $\mathcal{J}^*$ 自由であり, したがって (命題 5.2 より), f 軌道に対応する. 補題 10 の系により, この軌道は $M_{\overline{f},\omega_-}$ に α 漸近であり, $M_{\overline{f},\omega_+}$ に ω 漸近である.

$\rho(\Gamma_-) < \omega_-$, $\omega_+ < \rho(\Gamma_+)$ で, ω_- または ω_+ (あるいは両方) が有理数の場合, 命題 8.1 の構成法に似た構成法を使って, $M_{\bar{f},\omega_-}$ に α 漸近かつ $M_{\bar{f},\omega_+}$ に ω 漸近

な軌道を作る．たとえば, ω_- が有理数であるとしよう．$\omega_- = p/q$ は既約とする．そして ω_+ は無理数であるとする．8 節と同じ reduction を行なう．とくに変分原理 h を使って．たとえば, $P^h_{p/q+}(b) = P^H_{0+}(b) > 0$ なる数 b から始めて, 束縛条件 $\mathcal{J}^*$ を構築する．すなわち, $\mathcal{J}^*$ 極小配置が $\mathcal{J}^*$ 自由であり, 対応する軌道は, $M_{\omega_-,\bar{f}}$ に α 漸近かつ $M_{\omega_+,\bar{f}}$ に ω 漸近な軌道を作る．構築法は以下のとおりである．まず, 命題 8.1 の構築法を修正する．

$$
\begin{aligned}
J_i = \ & [c,b], && \text{if } i < i_+ \\
= \ & [b+\beta-1, b+\beta], && \text{if } j_+ + L_+\beta - L_+ \le i < i_+ + L_+\beta \text{ and} \\
& && 1 \le \beta \le l_+, \text{ or } \beta = l_+ + 1 \text{ and } i = i_+ + L_+ l_+
\end{aligned}
$$

とおく．ここで, (c,c') は $\pi(M_{F,0}) = \pi(M_{f,p/q})$ の補区間であって, $b, i_+ \in \mathbf{Z}$, $L_+ \ge L_+^0$ を含む．ここで, L_+^0 は十分大きく (命題 8.1 におけるように大きい), $l_+ \ge 1$ である．

このとき, 補題 9.3 の構成法を次のように修正する．

$$
i_+ + L_+\beta - L_+ \le i \le i_+ + L_+\beta \quad \text{かつ} \quad \beta \in \mathbf{Z} \quad \text{のとき} \quad \widehat{J}_i^+ = [b+\beta-1, b+\beta],
$$

と置き, $\widehat{\mathcal{J}}_i^+ = (\ldots, \widehat{J}_i^+, \ldots)$ と置く．$\xi^+ = (\ldots, \xi_i^+, \ldots)$ は (H に関する) 最大の $\widehat{\mathcal{J}}^+$ 極小配置であるとする．(だから, ξ^+ は回転記号 $1/L_+$ の極小配置である.) ξ^{*+} は (h に関する) 回転記号 $p/q + 1/qL_+$ の極小配置であって, $\xi^{*+}_{qi} = \xi^+_I + pi$ なるものとする．J^+_α は条件 $a^{*+}_\alpha - b\mathbf{Z}$ および $\xi^{*+}_\alpha \in (a^{*-}_\alpha, a^{*-}_\alpha + 1)$ で定義される閉区間 $[a^{*+}_\alpha, a^{*+}_\alpha + 1]$ であるとする．

$$
\begin{aligned}
J^*_\alpha &= J^{*+}_\alpha, && \text{for } q(i_+ - 1) < \alpha \le q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1), \\
J^*_\alpha &= J_i + pi, && \text{for } \alpha = qi \text{ and } i_- \le i < i_+, \\
J^*_\alpha &= \mathbf{R}, && \text{for all other } \alpha \le q(i_+ - 1)
\end{aligned}
$$

と置く．無理数 $\widehat{\omega}$ を $p/q + 1/qL_+$ より少し大きくとる．補題 9.1 を使って, $\alpha \le i_2$ に対して定義されるように J^*_α を拡張する．ただし, $i_2 > q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1)$ である．J^*_α は次の性質を持つようにする．$J^+_\alpha = [a^+_\alpha, a^+_\alpha + 1]$ とする．ただし, $a^+_\alpha - b \in \mathbf{Z}$ であり, 回転数 $\widehat{\omega}_+$ のある配置 $\widehat{x}^+$ に対して $\widehat{x}^+_\alpha \in (a^+_\alpha, a^+_\alpha + 1)$ である．$i_1 \le \alpha \le i_2$ に対して $J^*_\alpha = J^+_\alpha + \lambda^+$ であることを要請する．ここで, λ^+ は適切な整数である．ここで, $q(i_+ + L_+ l_+ + L_+ - 1) < i_1 < i_2 - K_1$ および i_1, K_1, i_2 は補題 9.1 を ξ^{*+} および $\widehat{x}^+$ に適用できるように選ぶ．拡張 $\mathcal{J}^* = (\ldots, J^*_i, \ldots, J^*_{i(2)})$ を補題 9.1 にしたがって選ぶことにより, $x = (\ldots, x_i, \ldots, x_{i(2)})$ がある配置の $\mathcal{J}^*$ 極小切片なら, $\alpha \le i_2 - K_1$ に対して $x_\alpha \in \mathrm{int} J^*_\alpha$ が成り立つ．この証明は, かなりの考察を必要とする．ただし, それは補題 9.3 の証明ですでに説明した．もう一度それを繰り返す必要はないだろう．

a は $P_{\omega_+}(a)>0$ を満たすとする．補題 9.4 によれば, $(\hat{\omega}_+, b)\to(\omega_+, a)$ が成り立つ．したがって, $(\ldots, J_I^*, \ldots, J_{i(2)}^*)$ を, どの $\mathcal{J}^*$ 極小配置も $\mathcal{J}^*$ 自由であって, 対応する軌道が $M_{\bar{f},\omega_+}$ に ω 漸近 (補題 10 の系より) であるように, 束縛条件 $\mathcal{J}^*=(\ldots, J_I^*, \ldots)$ へと拡張できる．

ω_+ が有理数で, ω_- が無理数, あるいはともに有理数の場合も同様に扱うことができる．

いままでのところ, 定理 4.1 を証明したのは, $\rho(\Gamma_-)<\omega_-$, $\omega_+<\rho(\Gamma_+)$ の場合に対してであった．こんどは, $\omega_-=\rho(\Gamma_\pm)$ または $\omega_+=\rho(\Gamma_\pm)$ または両方の場合を考える．たとえば, $\omega_-=\rho(\Gamma_-)$ とする．無理数列 $(\omega_j)_{j\le 0}$ を選んで, $j\ge-\infty$ のとき $\omega_j\downarrow\omega_-$ とし, 数列 a_j を選んで $P_{\omega(j)}(a_j)>0$ とする．補題 9.4 によれば, $j+1\le 0$ に対して $(\omega_j, a_j)\ge(\omega_{j+1}, a_{j+1})$ である．つまり, $j\le 0$ に対して整数 $K_j, \widetilde{K}_j$ があって, 以下を成り立たせる．すなわち, $x^j=(\ldots, x_i^j, \ldots)$ は $j\le 0$ に対して, 回転数 $\rho(x^j)=\omega_j$ の極小配置であるとする．ただし, 束縛条件 $\mathcal{J}^j=(\ldots, J_i^j, \ldots)$ は $J_i^j=[a_i^j, a_i^j+1]$ によって定義される．ここで $a_i^j-a_i\in\mathbf{Z}$ であり, $x_i^j\in(a_i^j, a_i^j+1)$ である．また $i_j, \tilde{i}_j$ は

$$i_j+K_j<\tilde{i}_j<\tilde{i}_j+\widetilde{K}_j<i_{j+1}$$

を満たす整数であって, $\tilde{i}_0=0$ である．このとき, 整数 l_j $(j\le 0)$ が存在し, また閉区間の列 $(\ldots, J_j^*, \ldots, J_0^*)$ が存在して

$$J_i^*=J_i^j+l_j, \quad \text{for} \quad i_j\le i\le\tilde{i}_j$$

を満たし, さらに, $x=(\ldots, x_i, \ldots, x_0)$ が $i\le 0$ に対して $x_i\in J_i^*$ を満たす配置の任意の切片であって x が $\mathcal{J}^*$ 極小なら, $i\le -K_0$ に対して $x_i\in \mathrm{int}J_i^*$ である．(谷川: 何かおかしい)

その上, 補題 9.4 の証明によれば, 区間 $J_i^*=[a_i^*, a_i^*+1]$ をうまく選んで

$$\lim_{i\to-\infty} a_i^*/i=\omega_-.$$

とすることができる．

$\rho(\Gamma_-)<\omega_+<\rho(\Gamma_+)$ の場合は, 以前述べた議論によれば, $\mathcal{J}^*$ を次のような仕方で束縛条件 $\widetilde{J}^*=(\ldots, \widetilde{J}_i^*, \ldots)$ へと拡張できる．すなわち, $\widetilde{J}^*$ 極小配置は $\widetilde{J}^*$ 自由であり, 対応する $\overline{f}$ 軌道は $M_{\bar{f},\omega_+}$ へ ω 漸近である．

この $\overline{f}$ 軌道は, $\rho(\Gamma_-)=\omega_-$ が成り立つとして, $M_{\bar{f},\omega_-}$ へ α 漸近である．なぜなら, $\lim_{i\to-\infty} a_i^*/i=\omega_-$ だからである．だから, 定理 9.1 を次の 2 つの場合に証明したことになる． すなわち, $\rho(\Gamma_-)<\omega_-$, $\omega_+<\rho(\Gamma_+)$ のときと, $\rho(\Gamma_-)=\omega_-<\omega_+=\rho(\Gamma_+)$ かつ ω_- が無理数のときである．残りの場合は同様な仕方で証明できる． $\square$

さて, 定理 4.1 とその証明に関するコメントをいくつか述べる. $\omega_-=\rho(\Gamma_-)$ (または $\omega_+=\rho(\Gamma_+)$) なら ω_- (または ω_+) は無理数である, という前提は不思議だ. 実際, この条件が成り立たないときでも同様な陳述が成り立つ. ただ, 少し複雑になる. たとえば, $\omega_-=\rho(\Gamma_-)$ であって, この数が有理数である場合を考える. Γ_- は不変曲線であるから, 極小軌道から成り立っている. ひとつの可能性は, これらの軌道がすべて回転記号 ω_- または ω_-+ を持つことである. この場合, 上で述べた構築法から, Γ_- へ α 漸近な軌道は得られるが, $M_{\bar{f},\omega_-}$ へ α 漸近な軌道は得られない. 一般に後者は, 前者の部分集合に過ぎない. 事実, この場合, $M_{\bar{f},\omega_-}\neq\Gamma_-$ なら $M_{\bar{f},\omega_-}$ へ α 漸近な軌道を構築することは不可能である.

もう一つの可能性は, Γ_- 内のいくつかの軌道が回転記号 ω_-- を持つことである. この場合, $P_{\omega_-+}(a)>0$ が, ある $a\in\mathbf{R}$ に対して成り立ち, 上で, $\rho(\Gamma_-)=\omega_-<\rho(\Gamma_+)$ かつ ω_- が無理数の場合に証明に使われた構築法がここでも有効である. したがって, 定理 4.1 の結論は, ω_+ が前提を満たす限り, この場合も成り立つ.

$\omega_-=\rho(\Gamma_+)$ であって ω_+ が有理数の場合, あるいは, これらの条件が 2 つとも満たされる場合が同様に取り扱えるのは明らかである.

定理 4.1 およびその証明から, 次の問題が生じる. すなわち, バーコフ不安定領域内に極小 $\overline{f}$ 軌道 $\mathcal{O}_-$ と $\mathcal{O}_+$ が与えられたとき, $\mathcal{O}_-$ に α 漸近で $\mathcal{O}_+$ に ω 漸近な $\overline{f}$ 軌道 $\mathcal{O}$ は存在するか? $\rho(\Gamma_-)<\rho(\mathcal{O}_-)$, $\rho(\mathcal{O}_+)<\rho(\Gamma_+)$ であって, $\rho(\mathcal{O}_-)$ と $\rho(\mathcal{O}_+)$ がともに無理数なら, そのような $\overline{f}$ 軌道は存在する. というのは, 補題 9.4 によると, $(\omega_-,a)\to(\omega_+,b)$ である. 関係式の (9 節の先頭の) 定義が関係 $\to$ であるための定義において x_- と x_+ を $\mathcal{O}_-$ と $\mathcal{O}_+$ の第一成分と取れば (??), 補題 10 の系から要請された結論が出る.

一方, $\rho(\mathcal{O}_-)$ と $\rho(\mathcal{O}_+)$ のひとつが, $\rho(\Gamma_-)$ と $\rho(\Gamma_+)$ のひとつであって, その数が無理数なら, この結論を得るためにわが方法は不十分であり, 答はわからない.

いつもどおり, $\rho(\mathcal{O}_-)$ または $\rho(\mathcal{O}_+)$ の両方またはひとつが, 有理数の場合はもっと込み入っている. たとえば, $\rho(\mathcal{O}_-)$ が既約有理数 p/q で, $\rho(\mathcal{O}_+)$ が無理数, そして, $\rho(\Gamma_-)<\rho(\mathcal{O}_-)$, $\rho(\mathcal{O}_+)<\rho(\Gamma_+)$ とする. $\mathcal{O}_-$ が周期的でなければ, それは周期軌道に α 漸近であり, $\mathcal{O}_-$ に α 漸近な軌道が存在するか否かは, そん周期軌道の α 漸近な軌道が存在するか否かと同値である.

だから, $\mathcal{O}_-$ が周期的であると仮定できる. $\pi(M_{\bar{f},p/q})$ が有限で, $\pi(M_{\bar{f},p/q-})$ も $\pi(M_{\bar{f},p/q+})$ も内点を含まない場合, 軌道 $\mathcal{O}$ が存在して, $\mathcal{O}_-$ に α 漸近かつ $\mathcal{O}_+$ に ω 漸近である. このことは, 定理 4.1 の証明において, ω_- が有理数で, ω_+ が無理数で, $\rho(\Gamma_-)<\omega_-$ かつ $\omega_+<\rho(\Gamma_+)$ の場合の議論を少しだけ修正して証明できる. $\pi(M_{\bar{f},p/q})$ の適当な補区間 (c,c') を選び前と同様な議論をすればよい. $\mathcal{O}_-=(\ldots,(x_i,t_i),\ldots)$ なら, $c=x_0$ と取れば十分である. $\pi(M_{\bar{f},p/q})$ が内点を持

たないという前提は, $P_{p/q+}(b) > 0$ なる $b \in (c, c')$ が存在することを意味する. (c, c') と b をこのように選べば, 定理 4.1 の証明中に構築した束縛条件 $\mathcal{J}^*$ (ω_- が有理数で, ω_+ が無理数で, $\rho(\Gamma_-) < \omega_-$ かつ $\omega_+ < \rho(\Gamma_+)$ の場合) は (前と同様) $\mathcal{J}^*$ 極小配置は $\mathcal{J}^*$ 自由であるという性質を持ち, さらに, 対応する軌道が $\mathcal{O}_-$ に α 漸近であるという性質も持つ. (ω_- も ω_+ も無理数の場合に) すでに説明したように, $\mathcal{J}^*$ 極小配置で, 対応する軌道が $\mathcal{O}_+$ に ω 漸近であるようなものを構築できる.

残りの場合 ($\rho(\mathcal{O}_+)$ または両方が有理数の場合) も同様に扱うことができる.

<u>定理 4.2 の証明</u>. まず, ω_i はすべて無理数であって, $\rho(\Gamma_-) < \omega_i < \rho(\Gamma_+)$ を満たすとする. 各 i に対して, $P_{\omega(i)}(a_i) > 0$ なる a_i を選ぶ. 補題 9.4 によれば, すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対して $(\omega_j, a_j) \to (\omega_{j+1}, a_{j+1})$ である. つまり, 整数 $K_j, \widetilde{K}_j$ があって, 以下が成り立つ. すなわち, $x^j = (\ldots, x_i^j, \ldots)$ が $\rho(x^j) = \omega_j$ なる極小配置であって, 束縛条件 $\mathcal{J}^j = (\ldots, J_i^j, \ldots)$ は $J_i^j = [a_i^j, a_i^j + 1]$ により定義されるとする. ただし, $a_i^j - a_i \in \mathbf{Z}$, $x_i^j \in (a_i^j, a_i^j + 1)$ であり, $i_j, \tilde{i}_j$ は整数であって

$$i_j + K_j < \tilde{i}_j < \tilde{i}_j + \widetilde{K}_j < i_{j+1}$$

を満たす. このとき, 整数 l_j $(j \leq 0)$ が存在し, またる閉区間の列 $(\ldots, J_j^*, \ldots)$ で

$$J_i^* = J_i^j + l_j, \quad \text{for} \quad i_j \leq i \leq \tilde{i}_j$$

を満たすものが存在する. これはまた $x = (\ldots, x_i, \ldots)$ が $x_i \in J_i^*$ を満たす配置の任意の切片であって, x が $\mathcal{J}^*$ 極小ならば, $x_i \in \text{int } J_i^*$ がすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して成り立つ.

このような $\mathcal{J}^*$ 極小配置 $(\ldots, x_i, \ldots)$ をひとつ考え, $\mathcal{O} = (\ldots, (x_i, y_i), \ldots)$ が対応する軌道であるとする. 補題 10 より, K_j が十分大きく選ばれているとして, $\mathcal{O}$ は $M_{\bar{f},\omega(i)}$ の ε 以内に近づく. だから, 定理 4.2 はこの場合証明された.

事実, $\mu_{\bar{f},\omega(i)}$ を回転数 ω_j の唯一の極小測度とすると, この構築法から $\mu_{\bar{f},\omega(i)}$ の ε 以内に近づく軌道 $\mathcal{O}$ が生じる. これを見るためには, x^j を選んで, 対応する軌道が回帰的である (したがって $\mu_{\bar{f},\omega(i)}$ 内にある) ようにすればよい.

残りの場合はこの場合に帰着できる. たとえば, ω_j のどれかひとつが有理数なら, それを ω_j にいくらでも近い無理数 ω_j' に置き換えることができる. $\mu_{\bar{f},\omega(i)'}$ 上に, $M_{\bar{f},\omega(i)}$ に近い点がある. ω_j' を ω_j に十分近く選ぶことにより, この距離をいくらでも小さくすることができる. さらに, $\mu_{\bar{f},\omega(i)'}$ 内の任意の軌道は $M_{\bar{f},\omega(i)}$ の近くを通る. なぜなら, 前者の軌道は前者内で稠密だからである. したがって, $\mu_{\bar{f},\omega(i)'}$ の十分近くを通る軌道は $M_{\bar{f},\omega(i)}$ の十分近くを通る. そこで, $M_{\bar{f},\omega(i)}$ の近くを通る軌道を構築する問題は, $\mu_{\bar{f},\omega(i)'}$ の近くを通る軌道の構築に帰着される. これはすでに, 以前の構築法で行なったことである.

$\omega_j = \rho(\Gamma_-)$ または $\omega_j = \rho(\Gamma_+)$ の場合も，$\rho(\Gamma_-) < \omega_j' < \rho(\Gamma_+)$ を満たす無理数 ω_j' を使って扱うことができる．ここで ω_j' は ω_j を近似する数であり，この場合はすでに取り扱った場合に帰着できる． $\square$

ここでのバーコフの定理は次のものである．

定理. U は $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\mathbf{R}$ の開部分集合であるとし, $A < B \in \mathbf{R}$ があって, $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times(-\infty, A) \subset U$ かつ $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times(B,\infty)\cap U = \emptyset$ であるとする．U は円環に同相であるとし, $\overline{f}$ の下で不変であるとする．このとき, U のフロンティアはリプシッツ関数 $u : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ のグラフである．

これに似たものを, バーコフは少なくとも 3 回は述べている [4, pp. 195 - 196, 422 - 426, 447]. 最初の 2 つには証明がついているが, 不完全であるように思われる．もっと最近, 完全な証明がねじれ微分同相写像, すなわち, $\overline{f} \in \mathcal{T}^1$ に対して証明された [6,7]. 自由度の高い系への興味深い一般化が [8] に与えられている．

[6] または [7] の手法が $f \in \mathcal{P}^1$ に対して有効であることは明らかでない．本補遺では, バーコフの定理の証明を $f \in \mathcal{P}^1$ に対して行なう．この証明はバーコフのやり方に沿ったものである．

C^1 曲線 $\gamma : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$ を考える． この γ は C^1 埋め込み (つまり 1 対 1 であって γ' はゼロにならない) であって, $\gamma_2(t)$ ($\gamma(t)$ の第二座標) は, $t \to -\infty$ のとき $-\infty$ に向かうとする．γ の傾き (tilt) τ_γ を以下のように定義する． $\tau_\gamma(t) \equiv \text{arc cot }(\gamma_1'(t)/\gamma_2'(t)) \pmod{2\pi}$ であって, $s \le t_0$ のとき $\gamma_2(s) \le \gamma_2(t_0)$ なら, $|\tau_\gamma(t_0)| \le \pi/2$ である．簡単にわかるように, ただひとつの実数値関数 τ_γ が $(-\infty, 0]$ 上にあって, これら 2 つの条件を満たす．

これを示すための最初の 1 段として, t が十分小さいとき, $\gamma'(t) = 0$ の場合を考える．この場合, t が十分小さいとして $\tau_\gamma(t) = 0$ を定義する．$\gamma_2(s) \le \gamma_2(t_0)$ $(s \le t_0)$ のときに $|\tau_\gamma(t_0)| \le \pi/2$ であることを証明するために, $t_1 < t_0$ を取り, $s \le t_1$ なら $\gamma_1'(s) = 0$, $t_1 \le s \le t_0$ なら $\gamma_2(t_1) < \gamma_2(s) < \gamma_2(t_0)$ となるようにする．A を円環 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\cap[t_1, t_0]$ とし, $\Gamma = \gamma[t_1, t_0] \subset A$ とする．微分位相幾何学の標準的な結果によれば, Γ から直線への C^1 イソトピーがある．要請された結果, すなわち, $|\tau_\gamma(t_0)| \le \pi/2$, はただちに従う．

一般の状況をこのケースに帰着できることを以下で示そう．明らかに, $(-\infty, 0]$ 上の連続関数 τ_γ で

$$\tau_\gamma(t) \equiv \text{arc cot } \gamma_1'(t)/\gamma_2'(t) \pmod{2\pi}$$

なるものが存在する．このような関数は $2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ の不定性を除いて定義される．要請された性質を持つ τ_γ を選ぶことができることを示すには, $t_0 < t_1$ が条件 $s < t_0$ を満たし, $\gamma_2(s) < \gamma_2(t_0)$ $(s < t)$ を意味し (?), $\gamma_2(s) < \gamma_2(t_1)$ および $\gamma_2'(t_0)$, $\gamma_2'(t_1) > 0$, を意味するなら, $|\tau_\gamma(t_0) - \tau_\gamma(t_1)| < \pi$ であることを示すこ

とである (??). このために, (微分位相幾何学の標準的結果を使って) t が十分小さいときに, γ を $\gamma'(t)=0$ なる曲線にイソトープし, しかも, その際 $\gamma|[t_0,t_1]|$ を変えずにおける. 新しい γ に対して, 要請された性質を持つ τ_γ をすでに定義した. 新しい γ に対して tau_γ を定義するイソトピーを使うことも出来る. イソトピーは $\gamma|[t_0,t_1]|$ を変えないから, $\tau_\gamma|[t_0,t_1]|$ も変えない. だから元の τ_γ は要請された性質を持つ.

γ が**正方向に傾いている**とは, τ_γ がいたるところ正のときであり, γ が**負方向に傾いている**とは, τ_γ がいたるところ負のときである.

$\overline{f}\in\mathcal{P}^1$ という事実より簡単に証明できるように, γ が正方向に傾いていると, $\overline{f}\circ\gamma$ も正方向に傾いており, γ が負方向に傾いていると, $\overline{f}^{-1}\circ\gamma$ も負方向に傾いている.

点 $x\in U$ が正 (あるいは負に) に到達可能とは, 正に (または, 負に) 傾いた C^1 曲線 $\gamma:(-\infty,0]\to U$ があって $\gamma(0)=x$ のときである. U_+ (または, U_-) は U 内の, 正に (または, 負に) 到達可能な点の集合であるとする. 前段落の結果と, U が $\overline{f}$ 不変であるという仮定から, $\overline{f}U_+\subset U_+$ および $\overline{f}^{-1}U_-\subset U_+$ が成り立つ.

点 $(x_1,x_2)\in U$ が**鉛直に到達可能**であるとは, $y\le x_2$ なる点 (x_1,y) が U に属するときである. 鉛直に到達可能な点の集合を U_0 と書く. 本補遺末に, $U_0=U_-\cap U_+$ であることの証明の概略を書く. 本質的に同じ結果が [9, 命題 1.2] で述べられている. そこでは, 文献 [10] と [4,pp. 422 - 425] が引用されている. しかし, 本著者は, それらの引用文献のどこにも証明を見つけることはできなかった. ただし, 似たようなことが証明されてはいた. 本証明は, それらの証明を見た読者ならできるはずのことである.

$U_0=U_-\cap U_+$ から, $U_0\neq U$ なら $U_+\neq U$ または $U_-\neq U$ が成り立つ. $U_+\neq U$ なら簡単にわかるように, $\overline{f}U_+$ は U_+ の真部分集合である. ところが, これは $\overline{f}$ が完全面積保存であることに矛盾する. 同様に, $U_-\neq U$ なら簡単にわかるように, $\overline{f}^{-1}U_-$ は U_- の真部分集合である. こんども, これは $\overline{f}$ が完全面積保存であることに矛盾する.

この矛盾により $U_0=U$ が出る.

$(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対して, $h_\varepsilon(x,y)=(x,y+\varepsilon x)$ とし, $\overline{h}_\varepsilon$ は $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$ の誘導微分同相写像であるとする. $\varepsilon>0$ が十分小さいと, $\overline{h}_\varepsilon\circ\overline{f}\circ\overline{h}_\varepsilon^{-1}$, $\overline{h}_\varepsilon^{-1}\circ\overline{f}\circ\overline{h}_\varepsilon\in\mathcal{P}$ である. だから, いま得られた結果をこれらの微分同相写像に適用できる. ただし, 第一の場合は U を $\overline{h}_\varepsilon(U)$ で置き換え, 第ニの場合は $\overline{h}_\varepsilon^{-1}(U)$ で置き換える.

直上で得られた結果より, $\overline{h}_\varepsilon(U)_0=\overline{h}_\varepsilon(U)$ および $\overline{h}_\varepsilon^{-1}(U)_0=\overline{h}_\varepsilon^{-1}(U)$ であることがわかる. ここで, 添字 0 は, どちらの場合も鉛直に到達可能な点の集合を表わす.

このことは十分小さな $\varepsilon>0$ すべてに対して成り立つから, U のフロンティ

アはリプシッツ関数のグラフである. $\square$

上の議論はバーコフによる. しかし, バーコフは $U_0 \neq U$ なら $U_- \neq U$ または $U_+ \neq U$ であることを明らかであるとした. この点に関して困難があったので, 以下でこれを証明する.

$U_0 = U_- \cap U_+$ **の証明.**

明らかに, $U_0 \subset U_- \cup U_+$ である. 逆方向の包含関係を示すために, $U \backslash U_0$ 内の点 P を考え, これが $U_- \cap U_+$ 内にないことを示す. W は $U \backslash U_0$ の連結成分のうち P を含むものとする. L は V 内の W のフロンティアであるとする. U_0 の定義より, L は鉛直線分の和である.

実は, L は単一の鉛直線分である. すなわち, 連結成分ひとつからなる. というのは, L_0 と L_1 が L 内の 2 つの連結成分であるとすると, 以下のように矛盾が出る. L_0 の点 P_0 と L_1 の点 P_1 を結ぶ単純弧 Λ_0 で, (端点を除いて)W に含まれるものを選ぶことができてしまう. 同様に, (端点を除いて)V_0 に属する P_0 と P_1 を結ぶ単純弧 Λ_0 を選ぶことができてしまう. このとき, $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ は $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ 内の単純閉曲線となり, $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ を 2 つの領域に分けてしまう. そのうちのひとつ R は U に属するはずである. しかし L_0 の端点は (L の定義により)U の補集合内にあり, ひとつは R 内にあるはずである (なぜなら, $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ は L_0 と 1 回だけ交わるからである). これは矛盾である. この矛盾からすると, L は単一の鉛直線分である.

明らかに, L の片側の近くの点は U_0 内にあり, 反対側の点はそうではない. たとえば, L の右側に近い点が U_0 に含まれる場合を考えよう.

この場合, $P \notin U_+$ であることを言いたい. そうでないとする. すると, 正に傾いた弧 $\gamma : (-\infty, 0] \to (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ で, $\gamma(0) = P$ なるものが存在する.

さて, 普遍被覆内で図を考える. $\widetilde{P}$ は普遍被覆への P の持ち上げを表わすとする. $\tilde{\gamma}$ は普遍被覆への γ の持ち上げであって, $\tilde{\gamma}(0) = \widetilde{P}$ を満たすものとする. $\widetilde{W}$ は普遍被覆内の W の逆像の成分のうち, $\widetilde{P} \in \widetilde{W}$ なるものとする. $\widetilde{L}$ は U の逆像内の $\widetilde{W}$ のフロンティアを表わすとする. だから, $\widetilde{L}$ は普遍被覆への L の持ち上げであり, 単一の鉛直線分である. $\widetilde{L}^*$ は $\widetilde{L}$ 上のすべての点または $\widetilde{L}$ の直下の点の集合を表わすとする (だから $\widetilde{L}^*$ は $\mathbf{R}^2$ の鉛直 ray である). $\widetilde{L}^{**}$ は $\widetilde{L}^*$ を含む鉛直線であるとする.

$\widetilde{Q}_0 = \tilde{\gamma}(t_0)$ は $\widetilde{L}^{**}$ の最高点であって, そこで $\tilde{\gamma}(-\infty, 0]$ が $\widetilde{L}^{**}$ と交わるとする (?). [9, 4.3] での議論によれば, $\tilde{\gamma}(-\infty, t_0)$ は全体が $\widetilde{L}^{**}$ の左にある. というのは, そうでないとすると, $\tilde{\gamma}$ は正の傾きを持たないことになってしまう. ($\tilde{\gamma}(-\infty, 0]$ は $\widetilde{L}$ と交わる. というのは, $\widetilde{P} = \tilde{\gamma}(0) \in \widetilde{W}$ であり, $\widetilde{L}$ は U の逆像の中の $\widetilde{W}$ のフロンティアであり, 十分小さな t に対して $\gamma(t) \in U$ だからである.) だから最小の t_1 があって $\tilde{\gamma}(t_1) \in \widetilde{L}^*$ および $t_1 \geq t_0$ を満たす.

さて, 小さな $\delta > 0$ に対して, $\tilde{\gamma}(t_1-\delta)$ が $\tilde{L}^*$ の左にあるか, 右にあるかによって 2 つのい場合を考えよう. $\tilde{\gamma}(t_1-\delta)$ が左にある場合, [9, 4.3] の議論によれば, $\tilde{Q}_1 = \tilde{\gamma}(t_1)$ は $\tilde{L}^{**}$ の最高点であって, そこで $\tilde{\gamma}(-\infty, 0]$ が $\tilde{L}^{**}$ と交わる. というのは, そうでないとすると, $\tilde{\gamma}$ は正の傾きを持たないことになるからである. $\tilde{\gamma}(-\infty, 0]$ が $\tilde{L}$ と交わること, および $\tilde{L}^*$ 上の点がすべて $\tilde{L}$ 上またはそれより下にあることから, $\tilde{Q} \in \tilde{L}$ が出る. ところが, このとき $\tilde{\gamma}(t_1-\delta) \in \widetilde{W}$ である. なぜなら, U の逆像内の点のうち, $\tilde{L}$ の左にあるものは $\widetilde{W}$ 内にある. しかし, このとき $\tilde{\gamma}(t)$ は, ある $t < t_1 - \delta$ において $\tilde{L}$ と交わる. これは t_1 の定義に矛盾する (t は $\tilde{\gamma}(t) \in \tilde{L}^*$ を満たす最小のものであった). この矛盾によれば, $\tilde{\gamma}(t_1-\delta)$ は $\tilde{L}^*$ の左にない.

$\tilde{\gamma}(t_1-\delta)$ は $\tilde{L}^*$ の右にある場合, $\tilde{L}'$ を, $\tilde{\gamma}(t_1-\delta)$ から下りる鉛直 ray とする. $\tilde{\gamma}(t_1-\delta) \in U_0$ であるから, $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ への $\tilde{L}'$ の射影 L' は U 内にある. だから, $\Lambda = \tilde{\gamma}(-\infty, t_1-\delta) \cup \tilde{L}'$ は U の逆像内にある. これは単純閉曲線であり, $\mathbf{R}^2$ を 2 つの部分に分ける. そのうちのひとつは, 十分大きな B に対して $\mathbf{R} \times [B, \infty)$ を含み, もうひとつは $\tilde{L}$ を含み, U の逆像に含まれる. しかし, $\tilde{L}$ の端点は U の逆像に含まれないから, これは矛盾である.

この矛盾により, L の右側近くの点が U_0 に含まれるとき $P \notin U_+$ が出る. だから, いずれの場合も, $P \notin U_- \cap U_+$ である. これは主張通りである. □

参考文献

[1] S. Aubry and P.Y. Le Daeron, the discrete Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase, *Physica* **D7**, 240 - 258, 1983.

[2] S. Aubry, P.Y. Le Daeron, and G. André, Classical ground states of a one-dimensional model for incmmensurate structures, preprint, 1982.

[3] V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, *Dynamics Reported* **1**, 1 - 54, 1988.

[4] G.D. Birkhoff, *Collected mathematical papers*, vol. II, Amer. Math. Soc., Province, RI, 1950.

[5] C. Carathéodory, *Variationsr4echnung und partielle Differentialgleichung erster Ordnung*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1935.

[6] A. Fathi, Appendix to Chapter I of [7].

[7] M.R. Herman, *Sur les courbes invariantes par les diffeomorhpismes de l'anneau*, vol. 1, As'erisque, nos. 103 - 104, soc. Math. France, Paris, 1983.

[8] M.R. Herman, *Inequalités a priori pour des tores lagrangiens invariants par des diffeomorphismes symplectiques*, preprint, September 1989.

[9] P. Le Calvez, Proprietes generales des applications deviant la verticale, *Bull. Soc. Math. France* **117**, 69 - 102 (1989).

[10] P. Le Calvez, Proprietes des attracteurs de Birkhoff, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8**, 241 - 310 (1988).

[11] R.S. MacKay, J.D. Meiss, and I.C. Percival: Transport in Hamiltonian systems, *Physica* **D13**, 55 - 81 (1984).

[12] J.N. Mather, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, *Topology* **21**, 457 - 467 (1982).

[13] J.N. Mather, A criterion for the non-existence of invariant circle, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **63**, 153 - 204 (1986).

[14] J.N. Mather, Letter to MacKay, Feb. 21, 1984.

[15] J.N. Mather, More Denjoy minimal sets for area preserving homeomorphisms, *Comment. Math. Helv.* **60**, 508 - 557 (1985)

[16] J.N. Mather, Modulus of continuity for Peierls's barrier, in *Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics* (Rabinowits et al., eds.), NATO ASI Series C, vol. 209, Reidel, Dordrecht, 1987, pp.177 - 202.

[17] J.N. Mather, Destruction of invariant circles, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8**, 199 - 214 (1988).

[18] J.N. Mather, Minimal measures, *Comment. Math. Helv.* **64**, 375 - 394 (1989).

[19] I.C. Percival, Variational principles for invariant tori and cantori, *Sympos. on Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interactions* (M. Month and J.C. Herrara, eds.), American Inst. of Phys. Conf. Proc., no. 57, 1980, pp.302 - 310.

[20] I.C. Percival, A variational principle for invariant tori of fixed frequency, *J. Phys. A* **12**, L57 - L60 (1979).

[21] I.C. Percival, Definite paths and upper bounds on regular regions of velocity phase space, *Physica D* **6**, 249 - 259 (1982/83).

[22] E.C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Clarendon Press, Oxford, 1932