谷川清隆 訳

Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913), 14-22.

ポアンカレの幾何学定理の証明
Proof of Poincaré's geometric theorem

George D. Birkhoff

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 誌 (Vol.33, 1912, 375-407) に最近載った幾何学のある定理 (Sur un théorème de Géométrie) なる題名の論文において、ポアンカレはとくに制限三体問題にとってたいへん重要な意味を持つ定理を発表した．しかし、長い考察の末いくつもの特殊な場合を取り扱うのに成功しただけなので、彼はこの定理を他の数学者たちの考察に任せることにした．

ここ何年かの間、私はこの定理の提起するのに似た性格の問題を考えてきた．このたび私がそこで使った手法が適用できることに気づいた．この論文では私の得た短い証明を示し、その後それから導かれた結果に付いては述べないことにする[1]．

1. 定理の陳述

ポアンカレの定理は次のような簡単な形で述べることができる．半径がそれぞれ a と $b (a > b > 0)$ の 2 つの同心円 C_a および C_b にはさまれた円環領域を R とする．T は R をそれ自身に写す連続な一対一変換であって、C_a の点を正方向に C_b の点を負方向に進め、しかも面積保存であるものとする．このとき不動点が少なくとも 2 つある．

証明にあたって修正極座標 $y = r^2, x = \theta$ を用いる．ただし r は円の中心から点 (x, y) までの距離、θ は円の中心を通るある固定した直線から測った点 (x, y) の方位角である．このとき変換 T は次のように書ける．

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y).$$

関数 $\psi(x, y)$ は (x, y) の連続関数であって、R の各点で一意に決まる．したがって ψ は x に関し周期 2π である．一方 $\varphi(x, y)$ はそれぞれが 2π の整数倍だけ異なる無限個の値をとりうるが、これらの値をグループ分けして連続な分枝をなすようにできる．$(x + 2\pi, y)$ と (x, y) は R の同一点を表わすから、点 $(x + 2\pi, y)$ と点 (x, y) に対する φ の値をそれぞれ 1 つ取って代数差をとると、それは 2π の整数倍である．そしてこの差はすべての x と y に対して 2π の整数倍として同じ値をとるべきである．この差は連続関数だからである．ところが点 (x, y) が円 C_a を正方向に一周すると像 (x', y') も円 C_a を一周する．だからこの道に沿って x が 2π 増加するとき $\varphi(x, y)$ は 2π 増加する．こうして、差は恒等的に 2π に等しい．換言すれば、x が 2π 増加すると関数 $\varphi(x, y)$ はそれ自身 2π 増加する．

$\varphi(x, y)$ と $\psi(x, y)$ の上記の性質から明らかに $x' - x$ と $y' - y$ はともに R の中で一価かつ連続である．

[1] 最近のわたしの結果は、*Bull. Soc. Math. France* 誌に近々でるはずの論文"Quelque théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamique"に書いてある．

定理の詳細な意味は次のとおりである．

$$C_a \text{に沿って } x' > x \quad \text{かつ} \quad C_b \text{に沿って } x' < x,$$

となるような $\varphi(x,y)$ を任意に決めたとき (T に関する条件はこのような選び方を可能にしている)、R 内に

$$x' = x, \quad y' = y,$$

なる点が少なくとも 2 点ある．

2. 証明法について

ポアンカレが指摘した通り (上記論文、 p.377)、不動点が１つあればただちにもう１つの不動点の存在がいえる．だから定理が正しくなければTは不動点を持たないと仮定できる．このとき R のすべての点に対して

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 > d^2 > 0, \tag{1}$$

である．なぜなら円環 R 上で $x'-x, y'-y$ は一価連続であり、また同時には 0 にならないからである．仮定 (1) が矛盾を導くことを示して定理を証明しよう．

3. 補助変換

$0 < \varepsilon < b^2$ のとき、

$$x' = x, \quad y' = y - \varepsilon,$$

なる一対一連続変換 T_ε は円 C_a と C_b をそれぞれ同心円 $C'_a : y = a^2 - \varepsilon$ と $C'_b : y = b^2 - \varepsilon$ に写す．だから C'_a は C_a の内側にあって C_a から $a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}$ の距離にあり、C'_b も同様に C_b の内側にあって C_b から $b - \sqrt{b^2 - \varepsilon}$ の距離にある．この変換は平面を原点に向けて収縮させる．その際、すべての点は同じ動径上の点に写され、しかも面積保存である．なぜなら、dx と dy は変換によって不変で、面積積分は次式で与えられるからである．

$$\int\int r dr d\theta = \frac{1}{2}\int\int dx dy.$$

さて、TT_ε は T を作用した後に T_ε を作用させる変換を意味するとして、$\varepsilon < d$ である限り、補助変換 TT_ε は不動点を持たない．というのは、x, y を円環 R に対応する帯 S :

$$-\infty < x < +\infty, \quad b^2 \leq y \leq a^2,$$

の点の直角座標とすると、点 (x,y) は少なくとも d だけ S 内で T によって移動し、T_ε によってさらに ε だけ y 軸の負の方向に移動するから $\varepsilon < d$ ならどの点も初期位置に戻らないからである．この合成変換 TT_ε を次の形に書こう．

$$\overline{x}' = \varphi(x,y), \quad \overline{y}' = \psi(x,y) - \varepsilon.$$

正数 ε を次のように小さく選んで固定しよう．

$$\varepsilon < b^2, \quad \varepsilon < d, \quad \varepsilon < a^2 - b^2. \tag{2}$$

さて多価関数

$$\omega(x,y) = \arctan \frac{y'-y}{x'-x}, \tag{3}$$

を考えよう．あるいはもっと正確に、この関数の分枝のうち、その値が帯 S 内で点 (x,y) から点 (x',y') に引いたベクトルが x 軸の正方向となす角度となるような分枝を考える (もう一つの分枝はこのベクトルの負ベクトルに対応する)．(1) 式のおかげで、この関数は S のすべての点で連続であり、それゆえ一価の分枝におさまり、S 全体で連続である．

そのうえ、この種の分枝のどれ一つをとっても、C_a および C_b に沿ってそれぞれ π のある決まった偶数倍と奇数倍である．なぜなら、C_a に沿って $x' > x, y' = y$、また C_b に沿って $x' < x, y' = y$ だからである．

すでに見たとおり、関数 $y'-y$ や $x'-x$ は x に関して周期 2π であるから、$\omega(x,y)$ の各分枝は点 $(x+2\pi,y)$ と点 (x,y) で (0 も含めて)2π の整数倍異なる．分枝は連続であるから、この整数値は S 全体で同一である．ところが、C_a に沿って、また C_b に沿ってこれらの分枝はすでに指摘したとおり一定値を有する．だからこの整数値は実際 0 である．だから、$\omega(x,y)$ のこれらの分枝は x に関して周期 2π である．つまり R 内で一価である．

同様に多価関数

$$\overline{\omega}(x,y) = \arctan \frac{\overline{y}'-y}{\overline{x}'-x}, \tag{4}$$

は (x,y) から $(\overline{x}',\overline{y}')$ へのベクトルが x 軸の正の方向となす角度を与える．この関数も同様に一価で連続な分枝にはいる．さらに関数 $\overline{y}'-y = y'-y-\varepsilon$ と $\overline{x}'-x = x'-x$ は x に関し周期 2π である．また $\overline{\omega}(x,y)$ の各分枝は $\omega(x,y)$ と同様 x に関し周期 2π である．つまり R 内で一価である．

$\omega(x,y)$ と $\overline{\omega}(x,y)$ の分枝の組はすべての点 (x,y) における値が次の公式で決まるように調整できる．

$$|\omega(x,y) - \overline{\omega}(x,y)| < \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

幾何学的にはこれは明らかである．というのは、S 内で点 (x',y') は点 (x,y) から少なくとも距離 d 離れており、点 $(\overline{x}',\overline{y}')$ は点 (x',y') から $\varepsilon < d$ だけ離れている．だから 3 点がつくる三角形が点 (x,y) において作る角度は決して $\pi/2$ に等しくならない．だから S のある一点で (5) 式にしたがって 2 つの分枝を関係させておけば、S 内で点を連続的に変化させたとき同じ不等式は S 内のいたるところで成立するはずである．

4. 補助変換のもとで不変な曲線の構築

R の変換 TT_ε によって C_a は C_a' に写る．C_a' は半径 $\sqrt{a^2-\varepsilon}$ であり、$\varepsilon < a^2-b^2$ と選んであるので、C_a と C_b の間にある．もう一度 TT_ε を作用させると、C_a' は単純閉曲線 C_a'' に写る．C_a' と C_b' にはさまれた円環領域を R' として、TT_ε は R を R' に写す一対一連続変換であり、R は T_ε によって縮む．C_a' は R に含まれ C_b を囲むから、その像 C_a'' は R' に含まれ (したがって C_a' の内側にあり)、C_b' を取り囲む．さらに変換 TT_ε によって R 内の円環 C_aC_a' は R' 内の第二の円環 $C_a'C_a''$ に写る．しかも両者は第一の円環の内側の境界 C_a' で互いに接する．C_a'' 全体が R に含まれるなら、これは C_b も C_b' も取り囲み、TT_ε による C_a'' の像 C_a''' は単純閉曲線であって

C''_a の内側にあって C'_b を取り囲む．こうして $C''_aC'''_a$ は第三の円環の境界を構成し、第二の円環 $C'_aC''_a$ に内側の境界 C''_a で接する．この過程を続けていけば、入れ子になった単純閉曲線の列 $C'_a, C''_a, \ldots$ が得られる．また、対応する円環の列 $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots$ が得られる．この過程は閉曲線自体が R に含まれる限り続けることができる．

円環 $C_aC'_a$ の面積は $\pi\varepsilon$ であり、変換 T および T_ε はそれぞれ面積保存であるから、像 $C'_aC''_a, C''_a C'''_a, \ldots$ もみな同じ面積 $\pi\varepsilon$ を有する．円環の列が途切れるのはある曲線 $C_a^{(n)} (n \geq 2)$ の少なくとも一部が円 C_b の内側に入り込んだときである．ところが、すべての l に対して C_a と $C_a^{(l)}$ の間の面積は $\pi l\varepsilon$ であるから l が十分大きければ $\pi l\varepsilon$ は R の面積を超える．だからこのような $C_a^{(n)}$ は存在する．ゆえに、C_a 上にある特定の点 P があってこの点の n 番目の像は円 C_b より内側にくる．

こんどは、帯 S に目を転じて帯の上端 C_a 上で点 P の表現の 1 つをとろう．ここでは C'_a は C_a より ε だけ下に位置する直線であり、$C''_a, C'''_a, \ldots$ はそれぞれ各区間 $2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi$ で合同な形をして右にも左にも無限に延びる単純無限開曲線である．円環 $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots$ は S 内の単純曲線の列にはさまれた層の列として表わされる．P' を P の第一の像とし、P と P' を線分 PP' で結ぼう．この線分は帯 $C_aC'_a$ に完全に含まれる．孤 $P'P''$ を TT_ε による PP' の像、$P''P'''$ を同じく $P'P''$ の像、$\cdots$ とする．このようにして、逐次 $PP', P'P'', \ldots, P^{(n-1)}P^{(n)}$ を構築すれば、これらは S 内でそれぞれ $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots, C_a^{(n-1)}C_a^{(n)}$ に含まれ、しかも最後の孤の端点 $P^{(n)}$ は S の下側の境界 C_b の下側にある．

図

この孤列がはじめて帯の下端 C_b と交わる点を Q とする (図参照)．明らかにこの孤の列から構成される曲線 PQ は単純である．$PP', P'P'', \ldots$ が単純孤の列であり、それぞれ S 内で $C_aC'_a, C'_aC''_a, \ldots$ に含まれているからである．そのうえ PQ は全体が C_a と C_b の間に含まれる．

変換 TT_ε による PQ の像 $P'Q'$ は $P'Q$ とその延長上にある単純孤 QQ' から成る．ただし、Q^{-1} を TT_ε による Q の逆像として QQ' は $Q^{-1}Q$ の像である．孤 QQ' は R 内の点の TT_ε による像であって、完全に直線 C'_a の下にある．とくにこの孤の端点 Q' はもちろん C'_b 上にある．さらに、QQ' の PQ との共通点は Q のみである．なぜなら共通点があれば、それは $P'Q$ 上にあるが TT_ε の逆写像を作用させれば、$Q^{-1}Q$ が Q^{-1} 以外に PQ^{-1} と共通点を有することになるが、これは PQ が多重点を持たないことから有り得ない．だから PQ' は単純曲線である．

変換 TT_ε によって PQ' の孤 PQ は PQ' の孤 $P'Q'$ に写る．その際、PQ 上の各点は PQ' 上で前進する．この意味で曲線 PQ は変換のもとで不変である．

T および T_ε の性質から、図に示されるように、P' の x 座標は P の x 座標より大きく、Q' の x 座標は Q の x 座標より小さい．

5．不変曲線上での補助的点-像ベクトルの回転

点 B が PQ' に沿って P から Q まで動けば、このとき明らかに TT_ε によるその像 $\overline{B}'$ は P' から Q' まで同じ曲線に沿って動く．しかも $\overline{B}'$ は決して B と一致しない．こんどは (直観的にはすでに明らかだが)、対応してベクトル $B\overline{B}'$ の回転角が $-\pi$ に直線 PP' および QQ' が x 軸となす鋭角を加えたものになることを示そう．

はじめに、回転角がこの角度と 2π の整数倍しか違わないことは明白である．回転角がちょうど上に述べた角度であることは、単純な位置解析の考察に依存する．結論を示すために頼る事実は、点 P, P', Q, Q' を含む単純曲線の列を通って曲線 $PP'QQ'$ を連続的に変形して、この曲線を折れ線 $PP'QQ'$ に直すことである (図参照)．

t を単調増加するパラメーターとし、曲線 PQ 上、P, P', Q, Q' でそれぞれ t_0, t_0', t_1, t_1' の値をとるものとする．点 B において t のときに $\overline{B}'$ において t がとる値は $\tau(t)$ とする．明らかに $\tau(t)$ は $t(t_0 \leq t \leq t_1)$ の連続な増加関数であって、$\tau(t) > t$ なる性質を持つ．ここで曲線を変形しよう[1]．ただし、この曲線はつねに P, P', Q, Q' を通り、その点における t の値も前と同様 t_0, t_0', t_1, t_1' であるとする．変形された曲線ともとの曲線上で同じ t に対応する点の距離が一様に小さければ、変形された曲線に沿ってのベクトル $B\overline{B}'$ の全回転角はもとの曲線に沿っての回転角と正確に等しい．なぜなら、初期位置と最終位置はともに等しくて、ベクトル同士の角度の差はすべて中間の位置において一様に小さいからである．

上の論拠により、曲線 $PP'QQ'$ を連続変形し、しかもつねに P, P', Q, Q' を含むような単純曲線であるようにし、変形曲線上でうまくパラメーターを選ぶことによって $B\overline{B}'$ の全回転角を不変にできる．

曲線 PQ は完全に S に含まれるから S の外にある線分 QQ' は曲線 PQ と交わらない．だから孤 QQ' を帯 $C_a'C_b'$ からはみ出さずに直線 QQ' へと連続的に変形できる．なぜなら、C_a' と C_b' にはさまれる連続体に曲線 $P'Q$ によって切れ目を入れても単連結であるから、点 Q と Q' を結ぶ任意の (この連続体に含まれる) 単純曲線を単純曲線の列を通って変形し、しかも Q と Q' 以外は切れ目に触れずにもっていけるからである．

次に、孤 $P'Q$ も P' と Q を結ぶ $C_a'C_b$ 内の単純孤列を通して連続的に線分 $P'Q$ に変形できる．線分 QQ' と PP' は $C_a'C_b$ に点を有しないからである．

だからもとの曲線に沿っての $B\overline{B}'$ の回転は 3 つの直線分 $PP', P'Q, QQ'$ から成る折れ線に沿っての回転角とまったく同じである．初期位置から最終位置までの折れ線に沿っての回転は明らかに $-\pi$ に直線 PP' と QQ' が x 軸となす鋭角を加えたものに等しい．こうしてわれわれの主張は証明された．

もとの曲線上で、$\overline{B}'$ は B に変換 TT_ε を作用して得られた．B の座標を (x, y) とすると、$\overline{B}'$ の座標は $(\overline{x}', \overline{y}')$ であり、$B\bar{B}'$<u>の回転は点</u>(x,y)<u>が不変曲線</u>PQ<u>上を</u>P<u>から</u>Q<u>まで動くときの関数</u>$\varpi(x, y)$<u>の変化で測れる</u>．

ここで $\varpi(x, y)$ の連続な分枝 $\varpi_1(x, y)$ として P において PP' が x 軸となす鋭角の負値をとろう．このように決めると、点 Q においては、$\varpi_1(x, y)$ は $-\pi$ にベクトル QQ' が x 軸となす鋭角を加えた値をとる．

[1] 変形の中には同じ曲線の異なるパラメータづけも含むとする．

6. T による点-像ベクトルの回転

こんどは関数 $\omega(x,y)$ の連続な分枝 $\omega_1(x,y)$ として、S の上端 C_a において 0 をとるものを固定しよう．

2 つの関数 $\overline{\omega}_1(x,y)$ と $\omega_1(x,y)$ は P において $\pi/2$ 未満しか違わない．だから不等式 (5) で結びついた $\overline{\omega}(x,y)$ と $\omega(x,y)$ の分枝もそうであり、これは S 全体で成り立つ．その上、$\overline{\omega}_1(x,y)$ の最終値は Q において $-\pi$ と $\pi/2$ 未満しか違わない．だから Q において $\omega_1(x,y)$ は $-\pi$ と π 未満しか違わない．ところが $\omega(x,y)$ の任意の分枝は C_b 上で π の奇数倍に等しいことがわかっている．だから関数 $\omega_1(x,y)$ は Q において、また C_b 上のすべての点において $-\pi$ でなければならない．

したがって点 (x,y) が C_a 上の点から C_b 上の点へどんな仕方で動いても、$\omega_1(x,y)$ の変化は $-\pi$ である．換言すれば、<u>点</u>B<u>を</u>S<u>内でどんな仕方で</u>C_a<u>から</u>C_b<u>に動かしても</u>、T<u>による</u>B<u>の像</u>B'<u>とでつくるベクトル</u>BB'<u>の全回転角は正確に</u>$-\pi$<u>である</u>．

7. 定理の完結

次に逆変換 T^{-1} を考えよう．この変換は C_a と C_b 上の点を逆方向に動かすという点を除いて T によく似ている．対称性により、B' と T^{-1} による像 B を結ぶベクトル $B'B$ は B と B' が C_a から C_b へ動く間に $+\pi$ だけ回転する．

ここでベクトル $B'B$ は BB' と逆方向を向いている．しかし 2 つのベクトル BB' と $B'B$ の実際の回転はもちろん同じである．だから矛盾が導かれた．こうして定理は完全に証明された．

8. 定理の一般化

ポアンカレは定理を定式化するにあたって、必ずしも面積保存でないある積分不変量

$$\int\int P(x,y)dxdy \quad (P(x,y)>0),$$

の存在を仮定に入れた．しかし (x,y) から (ξ,η) への適当な座標変換によって積分不変量を単純な面積保存量に帰着することができる．

直線 $\eta=\mathrm{const.}$ を C_a および C_b と同心の円とし、各円に対して数 $\eta(y)$ を選んで、点が C_b から C_a に動くにつれて C_b と動点を通る円の間に挟まれる円環上の二重積分が η に等しくなるようにする．すなわち、

$$\eta(y)=\int_{b^2}^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}P(x,y)dx\right\}dy.$$

この関数 $\eta(y)$ は明らかに連続かつ増加で、正の連続微分を持つ．すなわち、

$$\frac{d\eta(y)}{dy}=\int_0^{2\pi}P(x,y).$$

やや不正確に言えば、η 曲線は、η の増加と同じだけ $\int\int P(x,y)dxdy$ が増加するように配置されている．そこで (同じく不正確な意味でだが)、ξ 曲線を選んで、2 つの相続く η 曲線と直線 $x=0$ の間の同じ二重積分の増加が ξ の増加に等しくなるようにする．

曲線 $\xi=\mathrm{const.}$ をこのように選べることは次のようにして分かる．$x=f(y)$ は R 内で C_a を C_b に結ぶ任意の曲線であって、初期直線 $x=0$、この曲線 $x=f(y)$、円 C_b、および円 $y=$ 一定に囲まれる面積がいつも $\eta(y)$ に比例するようにする．つまり、

$$\int_{b^2}^{2\pi}\left\{\int_0^{f(y)}P(x,y)dx\right\}dy=\frac{k}{2\pi}\eta(y).$$

上で述べた $\eta(y)$ の性質から、この方程式は次と同値である．

$$\int_0^{f(y)} P(x,y)dx = \frac{k}{2\pi}\frac{d\eta(y)}{dy}.$$

k が与えられたとき、量 $f(y)$ は明らかに y の一価連続関数である．$P(x,y)$ と $d\eta(y)/dy$ が正で連続だからである．その上、k が増加すれば $f(y)$ は連続的に増加する．だから互いに交わらない曲線 $x = f(y)$ の集合が得られ、これらは $\eta = \text{const.}$ と同じように円環 R を埋めつくす．$x = 0$ は $k = 0$ に対応すること、また $\eta(y)$ の定義より $x = 2\pi$ が $k = 2\pi$ に対応することに注意する必要がある．上の方法で決めた k を曲線 $x = f(y)$ 上の任意の点の座標 ξ と考える．

だから積分不変量が不変量 $\int\int d\xi d\eta$ となるような座標 (ξ,η) を得たことになる．(ξ,η) を新しい平面の点の修正極座標として取れば、この座標で表わした T は定理で指定された性質をすべて持つことがわかる．だから前と同様不動点が少なくとも 2 つあることが結論できる．

もっと一般化するなら、曲線 C_a と C_b は一方がもう一方の内側にあって円環 R の境界となっている任意の単純閉曲線であってよい．この場合も同様の定理を述べることができる．たとえば等角写像を予備変換として使って、これらの曲線を同心円に直し、しかも積分不変量は単に形を変えるだけにできるからである．ただし座標変換の後の境界の近くでの積分不変量の性質には注意する必要があるかもしれない．

最後に、関数 $P(x,y)$ が曲線 C_a および C_b のいくつかの点またはすべての点でゼロになってもよい．ある種の制限のもとでは、この極限的な場合にやはり不動点があることが確実である．

9. ポアンカレの方法

ポアンカレが、積分不変量の存在から出るただひとつの性質、すなわち、R 上の連続体は決して写像 T のもとでそれ自身の一部に写せないこと、のみを使ったことは面白い (上記論文、p.377)．この条件が不変積分が存在するという条件と同値なことはあり得ないように思える．このような不変積分の存在は、この論文でわたしの行なった証明に、もっと本質的に入るべき事実である．積分不変量に代わってもっと弱い条件が成り立つときにポアンカレの定理が修正できるかどうか知らない．