谷川清隆 訳

Contemporary Mathematics **81** (1988), 111-116

ポアンカレ・バーコフの定理の変形版
A variation of the Poincaré-Birkhoff theorem

John Franks

要約. この論文では C.Conley の鎖回帰性および完備リャプーノフ関数に関する仕事を解説し、それを用いて P.Carter の定理の次のような特別な場合を証明する.
定理. $f : A \to A$ が円環の同相写像で恒等写像にホモトープであって境界ねじれ条件を満たすなら、f は不動点をすくなくとも１つ持つか、あるいは A になめらかに埋め込まれた基本 (essential) 曲線 C があって $f(C) \cap C = \emptyset$ である.

0. 序

有名なポアンカレ・バーコフの不動点定理 ([B] または [BN] 参照) の主張によれば、円環の面積保存同相写像が境界ねじれ条件を満たせば、不動点を少なくとも 2 つ持つ. 面積保存の仮定をもっと一般の位相条件に置き換えようとして、バーコフ [B2] は、$f : A \to A$ が境界ねじれ条件を満たし、不動点を高々１つ持てば、A の境界の 1 つを境界とする「円環」$S \subset A$ と連続体 C(A を分離する) があって、$f(S)$ は S の真部分集合であることを示した. この結果は P.Carter[Ca] によって改善された. 彼女は同じ仮定のもとで基本 (essential) 単純閉曲線 C で $f(C) \cap C$ がたかだか１点からなるものがあること、および実際１点からなるときにはこの点がこの同相写像のただひとつの不動点であることを示した. 彼女はさらにこのような f の例として、不動点をちょうどひとつ持ち、$f(C) \cap C$ が１点からなるものを与えた. だから f が不動点を少なくとも 2 つ持つか、あるいは $f(C) \cap C = \emptyset$ となるような C があるかということを証明するのは不可能である.

したがって、Carter の定理からただちに言えるとおり、f は不動点を少なくとも１つ持つか、あるいは $f(C) \cap C = \emptyset$ となるような基本単純曲線 C があるかである. 以下の定理 (2.4) でこの結果の新たな証明を与える. 証明は初等的であり、Carter の仕事に比べて分かりやすい. C.Conley[C] の開発した鎖回帰集合および完備リャプーノフ関数の理論を使う. Conley の結果は広く知られておらず、また彼は流れの場合を考えたので、１節では設定を同相写像にしてこの理論の基本結果を簡単に説明する.

1. 鎖回帰性および完備リャプーノフ関数

この節では C.Conley が [C] において展開したアトラクター・リペラーの組および鎖回帰性の初等的理論を簡単に概観する. 以下では、$f : X \to X$ はコンパクト距離空間の同相写像を表わすものとする.

(1.1) **定義.** f の ε–<u>鎖</u>とは X 内の点列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ で

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \quad \text{for} \quad 1 \le i \le n-1,$$

なるものである．

点 $x \in X$ が鎖回帰的といわれるのは、どの $\varepsilon > 0$ に対しても、n(ε に依存する) と $x_1 = x_n = x$ なる $\varepsilon-$ 鎖 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ があるときである．鎖回帰点の集合 $\mathbf{R}$ は f の鎖回帰集合と呼ばれる．

簡単に分かるように、$\mathbf{R}$ はコンパクトで f のもとで不変である．

$A \subset X$ がコンパクトな部分集合であって、A の開近傍 U で $f(\overline{U}) \subset U$ および $\cap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$ なるものがあれば、A はアトラクターと呼ばれ、U は孤立化近傍と呼ばれる．簡単に分かるように、$V = X - \overline{U}$ および $A^* = \cap_{n\geq 0} f^{-n}(\overline{V})$ なら、A^* は f^{-1} のアトラクターであって、V はその孤立化近傍である．集合 A^* は A に双対的なリペラーと呼ばれる．A^* は A に対する孤立化近傍 U の選び方に依存しないことは明確である．明らかに、$f(A) = A$ および $f(A^*) = A^*$ である．

(1.2) **補題．** f のアトラクターの集合は可算である．

証明. X の位相に対して可算基 $B = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ を選ぶ．A が孤立化近傍 U を持つアトラクターであれば、U は B 内の集合の和である．ゆえに、A がコンパクトであることを考えると、$V_{i_1}, \cdots, V_{i_k}$ があって $A \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} \subset U$ である．明らかに、$A = \cap_{n\geq 0} f^n(U) = \cap_{n\geq 0} f^n(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k})$ である．したがって、たかだか B の有限部分集合の数だけアトラクターがある．つまり、アトラクターの集合は可算である． □

(1.3) **補題．** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f のアトラクターであって、$\{A_n^*\}$ が双対的なリペラーなら、鎖回帰集合 $\mathbf{R}(f) = \cap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$ である．

証明. まず $\mathbf{R} \subset \cap(A_n \cup A_n^*)$ を示そう．これは、あるアトラクター A に対して、$x \notin A \cup A^*$ ならば $x \notin \mathbf{R}(f)$ を示すことと同値である．U が A の開孤立化近傍で $x \notin A \cup A^*$ なら、ある n に対して $x \in f^{-n}(U)$ である．m をそのような n のうち最小のものとする．U を $f^{-m}(U)$ で置き換えて、$x \in U - f(U)$ と仮定することができる．そこで $\varepsilon_0 > 0$ を選んで、任意の ε_0- 鎖 $x = x_1, x_2, x_3$ が $x_3 \in f^2(U)$ であるようにする．$\varepsilon_1 = d(X - f(U), \overline{f^2(U)})$ で $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ なら、x から始まりかつ終わる $\varepsilon-$ 鎖はない．というのは、$f^2(U)$ から始まるどの $\varepsilon-$ 鎖も $X - f(U)$ に到達できないからである．だから $x \notin \mathbf{R}(f)$ である．これで $\mathbf{R}(f) \subset \cap(A_n \cup A_n^*)$ を示した．

次に逆の包含関係を示そう．$x \in \cap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$ とする．x が $\mathbf{R}(f)$ に含まれなければ、$\varepsilon_0 > 0$ があって、x からそれ自身への ε_0- 鎖が存在しない．$\Omega(x, \varepsilon)$ は $y \in X$ の集合であって、x から y への $\varepsilon-$ 鎖があるものとする．定義により、集合 $V = \Omega(x, \varepsilon_0)$ は開である．その上、$f(\overline{V}) \subset V$ である．なぜなら、$z \in \overline{V}$ なら $z_0 \in V$ があって $d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon_0$ であり、したがって x から z_0 への ε_0- 鎖は x から $f(z)$ への ε_0- 鎖 $x = x_1, x_2, \cdots, x_k, z_0, f(z)$ を与えるからである．ゆえに、$A = \cap_{n\geq 0} f^n(\overline{V})$ は孤立化近傍 V を持つアトラクターである．仮定により $x \in A$ であるか $x \in A^*$ である．x から x への ε_0- 鎖がないから $x \notin A$ である．一方、$\omega(x)$ を $\{f^n(x) | n \geq 0\}$ の極限点とすると、明らかに $\omega(x) \subset V$ であるが、$x \in A^*$ ならこれは不可能である．なぜなら、A^* は閉じており、$x \in A^*$ は $\omega(x) \subset A^*$ を意味してしまうからである．だから $x \notin \mathbf{R}$ という仮定に矛盾してしまった． □

どの $\varepsilon > 0$ に対しても x から y への $\varepsilon-$ 鎖があり、y から x への別の $\varepsilon-$ 鎖があるとき $x \sim y$ として $\mathbf{R}$ 上の関係 $\sim$ を定義すれば、明らかに $\sim$ は同値関係である．

(1.4) **定義.** $\mathbf{R}(f)$ 内の上記の同値関係 $\sim$ に関する同値類は $\mathbf{R}(f)$ の <u>鎖遷移成分</u> と呼ばれる.

(1.5) **命題.** $x, y \in \mathbf{R}(f)$ のとき、x と y が同じ鎖遷移成分に属するための必要十分条件は、$x \in A, y \in A^*$ または $y \in A, x \in A^*$ なるアトラクター A が存在しないことである.

<u>証明.</u> まず、x と y が同じ鎖遷移成分に属すること、すなわち $x \sim y$ であること、および $x \in A$ を仮定する. U が A の開孤立化近傍なら、$\varepsilon = \mathrm{dist}(X - U < \overline{f(U)})$ と置く. $f(U)$ の点から $X - U$ の点へは $\varepsilon/2-$ 鎖は有り得ない. ゆえに A の点から A^* の点へもない. (1.3) より、$y \in A \cup A^*$ であるが、$x \sim y$ は $y \notin A^*$ を意味するから、$y \in A$ である. これで一方向の証明が済んだ.

逆を示すために、どのアトラクター A に対しても $x \in A$ であるための必要十分条件は $y \in A$(したがって $x \in A^*$ であるための必要十分条件は $y \in A^*$) であると仮定する. $\varepsilon > 0$ が与えられたとき、$V = \Omega(x, \varepsilon) = x$ から z への $\varepsilon-$ 鎖があるような点 $z \in \mathbf{R}$ すべての集合と置く. x は鎖回帰的であるから $x \in V$ である. また (1.3) の証明と同じように、V はあるアトラクター A_0 の孤立化近傍である. $x \in A_0 \cup A_0^*$ および $x \in V$ であるから $x \in A_0$ である. だから $y \in A_0 \subset V$ であり、よって x から y への $\varepsilon-$ 鎖がある. 同様な議論から y から x への $\varepsilon-$ 鎖があることが示せるから $x \sim y$ である. $\square$

完備リャプーノフ関数の存在についての Conley の証明を述べる準備ができた.

(1.6) **定義.** $f : X \to X$ に対する完備リャプーノフ関数とは、次の条件を満たす連続関数 $g : X \to R$ である.

(1) $x \notin \mathbf{R}(f)$ なら $g(f(x)) < g(x)$ である.

(2) $x, y \in \mathbf{R}(f)$ なら $g(x) = g(y)$ であるための必要十分条件は $x \sim y$ である (すなわち、x と y が同じ鎖遷移成分に属する).

(3) $g(\mathbf{R}(f))$ は R のコンパクトな、いたるところ疎な部分集合である.

滑らかな場合との類比により、$g(\mathbf{R}(f))$ の要素は g の <u>臨界値</u> と呼ばれる.

(1.7) **補題.** 連続関数 $g : X \to [0, 1]$ があって、$g^{-1}(0) = A$ かつ $g^{-1}(1) = A^*$ であり、g は $X - (A \cup A^*)$ 内の点の軌道上で狭義単調減少である.

<u>証明.</u> $g_0 : X \to [0, 1]$ を次式で定義する.

$$g_0(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)}.$$

$g_1(x) = \sup\{g_0(f^n(x)) | n \geq 0\}$ とする. このとき $g_1 : X \to [0, 1]$ であり、すべての x に対して $g_1(f(x)) \leq g_1(x)$ である. g_1 が連続であることを示さねばならない. $\lim x_i = x \in A$ なら、明らかに $\lim g_1(x_i) = 0$ であるから g_1 は A の点において連続であり、同じ議論から、これは A^* の点でも連続である. U が上と同様、開孤立化近傍のとき、$N = U - f(\overline{U})$ と置く. $x \in N$ および $r = \inf\{g_0(x) | x \in N\}$ とする. $f^n(N) \subset f^n(\overline{U})$ および $\cap_{n \geq 0} f^n(\overline{U}) = A$ であるから、$n_0 > 0$ があって、$n > n_0$ ならいつも $g_0(f^n(N)) \subset [0, r/2]$ である. ゆえに、$x \in N$ に対して

$$g_1(x) = \max\{g_0(f^n(x)) | 0 \leq n \leq n_0\},$$

であり、したがって g_1 は N 上で連続である．$\cup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(N) = X - (A \cup A^*)$ であるから g_1 は連続である．最後に

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}},$$

とおいて、連続関数 $g : X \to [0,1]$ で $g^{-1}(0) = A, g^{-1}(1) = A^*$ なるものを得る．また

$$g(f(x)) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^{n+1}(x)) - g_1(f^n(x))}{2^{n+1}}$$

である．これは $x \notin A \cup A^*$ のとき負である．なぜなら、すべての y に対して $g_1(f(y)) \leq g_1(y)$ であり、g_1 は x の軌道上で一定でないからである． □

次の定理は本質的に [C] の結果である．設定を流れから同相写像に変えてある．

(1.8) **定理．** $f : X \to X$ がコンパクト距離空間の同相写像なら、f に対する完備リャプーノフ関数 $g : X \to R$ がある．

証明. (1.2) より、f には可算個のアトラクターしかない．(1.7) により、$g_n^{-1}(0) = A_n, g_n^{-1}(1) = A_n^*$ なる $g_n : X \to R$ を見つけることができる．g_n は $X - (A_n \cup A_n^*)$ 上で狭義単調減少である．$g : X \to R$ を

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g_n(x)}{3^n}$$

で定義しよう．この級数は一様に収束するから $g(x)$ は連続である．明らかに、$x \notin \mathbf{R}(f)$ なら $x \notin (A_i \cup A_i^*)$ なる A_i があるから、$g(f(x)) < g(x)$ である．

また、$x \in \mathbf{R}(f)$ なら、どの n に対しても $x \in (A_n \cup A_n^*)$ であるから、すべての n に対して $g_n(x) = 0$ または 1 である．したがって $g(x)$ の 3 進展開は 0 と 2 のみ有し、ゆえに C をカントールの中央 3 分の 1 (middle third) 集合として $g(x) \in C$ である．だから $g(\mathbf{R}(f)) \subset C$ であり、$g(\mathbf{R}(f))$ はコンパクトでいたるところ疎である．これは定義の (3) を証明している．

最後に、$x, y \in \mathbf{R}(f)$ かつ $g(x) = g(y)$ なら、明らかにすべての n に対して $g_n(x) = g_n(y)$ である．なぜなら $2g_n(x)$ は $g(x)$ の 3 進展開の n 桁目の数字であり、上と同様、この展開が 0 と 2 しか含まないための必要十分条件は $x \in A_n, y \in A_n^*$ または $x \in A_n^*, y \in A_n$ となるような n がひとつもないことであるからである．だから、(1.5) より、$g(x) = g(y)$ となるのは x と y が同じ鎖遷移成分に属するとき、しかもそのときのみである． □

2. 境界ねじれ写像

この節では円環 A の同相写像で、恒等写像にホモトープかつ境界ねじれ条件を満たすものを考える．

(2.1) **定義．** 恒等写像にホモトープな同相写像 $f : A \to A$ が境界ねじれ条件を満たすとは、普遍被覆空間 $\tilde{A} = R \times I$ への f の持ち上げ $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ で $\tilde{f}_1(x, 0) < x$ かつ $\tilde{f}_1(x, 1) > x$ なるものが存在するときである．ただし、$\tilde{f}(x, s) = (\tilde{f}_1(x, s), \tilde{f}_2(x, s))$ である．

不動点を見つけるために鍵となる補題は次のものである．これは本質的には [F] による．

(2.2) **補題.** $f: R^2 \to R^2$ が方向保存同相写像であって、鎖回帰集合 $\mathbf{R}(f)$ が空でないなら、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\| f(x) - x \| < \varepsilon$ なる点 $x \in R^2$ がある.

証明. [F] での議論を簡単に思いだそう. 結論が誤りなら、すべての $x \in R^2$ に対して $\| f(x) - x \| \geq \varepsilon_0$ なる ε_0 がある. [Ox] の結果によれば、$\delta > 0$ があって、$||x_i - y_i|| < \delta$ なる組 $\{(x_i, y_i)\}$ の任意の有限集合に対して、x_i から y_i へのそれぞれ互いに素な区分的に線形な孤 γ_i で長さ $< \varepsilon_0/2$ なるものの集合がある. $z \in \mathbf{R}(f)$ なら、$z_1 = z, z_2, \ldots, z_n = z$ を z から z への $\delta-$ 鎖とする. $y_i = z_i, x_i = f(z_{i-1})$ とおけば、$f(z_{i-1})$ から z_i への互いに素な孤 γ_i で長さ $< \varepsilon_0/2$ なるものがあることがわかる. これらの孤の近傍でイソトープすることにより、f の摂動 g で、すべての x に対して $g(z_{i-1}) = g(z_i)$ および $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon_0$ を満たすものを作れる.

さて g は周期点 z を持つ. ゆえに、[Br] または [Fa] の結果より、g は不動点 p を持つ. だから $||f(p) - p|| \leq ||f(p) - g(p)|| + ||g(p) - p|| < \varepsilon_0$ となるが、これは矛盾である. □

(2.3) **命題.** $f: A \to A$ は恒等写像にホモトープな同相写像で、境界ねじれ条件を満たすとする. どの ε に対しても $S^1 \times \{0\}$ から $S^1 \times \{1\}$ への f の $\varepsilon-$ 鎖および $S^1 \times \{1\}$ から $S^1 \times \{0\}$ への f の $\varepsilon-$ 鎖があれば、f は不動点を少なくとも１つ持つ.

証明. f を $S^1 \times [-\delta, 1+\delta]$ の同相写像に拡張して、f が $S^1 \times \{-\delta\}$ および $S^1 \times \{1+\delta\}$ 上の回転であるようにし、また持ち上げ $\tilde{f}: R \times [-\delta, 1+\delta] \to R \times [-\delta, 1+\delta]$ が次を満たすようにできることをまず確認してほしい.

(1) $t \in [-\delta, 0] \cup [1, 1+\delta]$ に対して、$\tilde{f}(x,t) = (\tilde{f}_1(x,t), t)$.

(2) $t \in [-\delta, 0]$ に対して、$\tilde{f}_1(x,t) < x$

(3) $t \in [1, 1+\delta]$ に対して、$\tilde{f}_1(x,t) > x$.

これらの性質から簡単にチェックできるように、$S^1 \times [-\delta, 0]$ は $S^1 \times [1, 1+\delta]$ と同様、単一の鎖遷移成分に含まれる. $S^1 \times [-\delta, 0] \cup [1, 1+\delta]$ 内には不動点は有り得ないから、f が境界上で回転であるような拡張された円環に対して結果を証明するだけでよい. これをするのに、円環を $S^1 \times [-\delta, 1+\delta]$ とするよりもむしろ $A = S^1 \times [0,1]$ とする.

持ち上げ $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{A}(\tilde{A} = R \times [0,1])$ で、ある $r_1, r_2 > 0$ に対して

$$\tilde{f}(x,1) = (x + r_1, 1) \quad \text{および} \quad \tilde{f}(x,0) = (x - r_2, 0)$$

を満たすものを考えよう. $R \times \{0\}$ のどの点も $\tilde{f}$ に関して鎖回帰的であることを示そう. しかしこれをする前に、これで証明が完結することを示しておこう. $t > 1$ に対しては $\tilde{f}(x,t) = (x + r_1, t)$ とおき、$t < 0$ に対しては $\tilde{f}(x,t) = (x - r_0, t)$ とおいて $\tilde{f}$ を R^2 に拡張できる. だから (2.2) により、どの $\varepsilon > 0$ に対しても $||\tilde{f}(x,t) - (x,t)|| < \varepsilon$ なる (x,t) がある. この不等式は f およびコンパクトな円環 A への (x,t) の射影に対しても成り立つから、f は不動点を持つ.

残っているのは、$R \times \{0\}$ の点が鎖回帰的であることを示すことである. $x_0 \in S^1$ とする. 上の注意より、どの ε に対しても $(x_0, 0)$ から $(x_0, 1)$ への $\varepsilon-$ 鎖および $(x_0, 1)$ から $(x_0, 0)$ への $\varepsilon-$ 鎖がある. $(x, 0)$ が $(x_0, 0)$ の持ち上げなら、A 上の $\varepsilon-$ 鎖を持ち上げて $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{A}$ の $\varepsilon-$ 鎖で、ある $a \in Z$ に対して $(x, 0)$ から $(x+a, 1)$ へ行くものが得られる. すべての $y \in R$ に対して $\tilde{f}(y, 1) = (y + r_1, 1)$ であるということは、任意の十分大きな $p \in Z$ に対して $(x, 1)$ から $(x+p, 1)$ への $\varepsilon-$ 鎖があることを意味する. 同様に、ある $b \in Z$ に対して $(x, 1)$ から $(x+b, 0)$ への $\varepsilon-$ 鎖がある. $\tilde{f}(x,t) + (0,1) = \tilde{f}(x+1, t)$ がこれらの $\varepsilon-$ 鎖を平行移動させるという事実

を用いて、$(x,0)$ から $(x+a,1)$ へ、$(x+a+p,1)$ へ、$(x+a+p+b,0)$ への ε-鎖をつなげることができる．p が十分大きければ、$m=a+p+b>0$ である．

また $\tilde{f}(x,0)=(x-r_2,0)$ であるから、ある整数 $n>0$ に対して $(x,0)$ から $(x-n,0)$ への $\varepsilon-$ 鎖があることはわかっている．もう一度つなげて、$(x,0)$ から $(x+m,0)$ へ、$(x+2m,0)$ へ、$\cdots$、$(x+mn,0)$ へ、$(x+mn-n,0)$ へ $\cdots$、$(x,0)$ への $\varepsilon-$ 鎖を得ることができる．だから $(x,0)$ は鎖回帰的である． □

いまや主結果の証明ができる．

(2.4) **定理.** $f:A\to A$ は恒等写像にホモトープな同相写像であって境界ねじれ条件を満たすとする．このとき f は不動点を少なくとも１つ持つか、あるいは滑らかに埋め込まれた基本閉曲線 $C\subset A$ があって $f(C)\cap C=\emptyset$ である．

<u>証明.</u> (2.3) の証明のときと同様、円環を $A_0=S^1\times[-\delta,1+\delta]$ に拡大し、f を拡張して各境界上では回転であるようにし、円 $\{S^1\times\{t\}|t\in[-\delta,0]\cup[1,1+\delta]\}$ が不変であって、不動点を含まないようにする．このとき、$A^+=\{(x,t)\in A_0|t\in[1,1+\delta]\}$ および $A^-=\{(x,t)\in A_0|t\in[-\delta,0]\}$ なら、A^+ と A^- は鎖回帰的であって、各々は鎖遷移成分の部分集合である (すなわち、A^+ の任意の２点の間に $\varepsilon-$ 鎖があるし、A^- についても同様).

A^+ と A^- が f の同じ鎖遷移成分に属せば、(2.3) により、f は不動点を少なくとも１つ持つ．だからこれが成り立たないと仮定する．$g:A_0\to R$ は f に関する完備リャプーノフ関数であるとする．このとき g は A^+ および A^- 上で一定であり、$g(A^+)\neq g(A^-)$ である．g の臨界値でない点 $c\in R$ で、$g(A^+)$ と $g(A^-)$ の間にあるものを選ぶ．集合 $g^{-1}(c)\subset A$ は A と $f(g^{-1}(c))\cap g^{-1}(c)=\emptyset$ を分離する (separate) という性質を持つ．g が C^∞ になるように g を構成できる ([W] 参照)．ただし、これは我々の目的には必要でない．事実、g_0 が g に十分 C^0 近接な C^∞ 関数であるとすれば、$g_0^{-1}(c)$ は A と $f(g_0^{-1}(c))\cap g_0^{-1}(c)=\emptyset$ を分離する．Sard の定理により、g_0 の正則値を c の任意の近くにとれる．正則値 c_0 を、$g_0^{-1}(c_0)$ が A と $f(g_0^{-1}(c_0))\cap g_0^{-1}(c_0)=\emptyset$ を分離するように選ぶ．$g_0^{-1}(c_0)$ の成分は滑らかに埋め込まれた円であり、すくなくともその１つは基本的であ．なぜなら $g_0^{-1}(c_0)$ は A を分離するから．C をそのような基本的成分とする．すると $f(C)\cap C=\emptyset$ である． □

References

[B] G.D. Birkhoff, Proof of Poincaré's last geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14-22.

[B2] G.D. Birkhoff, An extension of Poincaré's last geometric theorem, *Acta Math.* **47** (1925), 297-311.

[Br] M. Brown, A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *Houston Journ. of Math.* **10** (1984), 35-41.

[BN] M. Brown and W.D. Neumann, Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.

[Ca] P. Carter, An improvement of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 285-299.

[C] C. Conley, Isolated invariant sets and Morse index, C.B.M.S. Regional Conference Series in Math. **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.

[Fa] A. Fathi, An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *L'enseignement Mathématique* **33** (1987), 315-322.

[F] J. Franks, Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8** (1988), 99-107.

[Ox] J. Oxtoby, Diameters of arcs and the gerrymandering problem, *Amer. Math. Monthly* **84** (1977), 155-162.

[W] W. Wilson, Smoothing derivatives of functions and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 413-428.