谷川清隆 訳

Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo **33** (1912), 375-407.

幾何学のある定理について

Sur un théorème de géométrie

H. Poincaré

目次

1. 序.

わたしはかつて未完成の論文を公表したことはない．したがって、この論文を公表するに至った理由を説明し、またなによりもこれを企てる決心をした理由を説明する必要がある．ずっと以前に三体問題の周期解の存在を示した．しかしその結果はまだ物足りないものであった．質量が小さいときに各種 (sorte) の解の存在が確立されても、もっと大きな質量のときにもこれらの解が存在するのか、またどういう順序でこれらが消えていくのか分からないからである．この問題を考えるにあたって、少なくとも制限三体問題や自由度 2 の力学の問題に関しては、非常に簡単に述べることのできるある幾何学的な定理が正しいか間違っているかに答えが依存することを納得するに至った．

それゆえ、わたしはこの定理が正しいか間違っているかを調べることにしたが、予期せぬ困難にぶつかってしまった．そこでわたしは多くの特殊な場合を個々に調べざるを得なかった．しかし、すべてを調べ上げるには場合の数が多すぎる．調べた範囲のすべての場合に定理が正しいことが分かった．2 年の間努力したが、一般的な証明法を見つけることにも、定理が成り立たないことを示す例を見つけることにも成功しなかった．

定理が正しいという確信は日に日に強くなったが、しっかりした基礎の上にそれを置くことができないでいる．

このような条件のもとでは、問題を解決するまで出版を控えるべきかもしれない．何ヵ月にもわたる不毛な努力の後であっても、何年かこれを横に置いて問題が熟すのを待つ方が賢いようにも見えた．いつかこの問題を再び取りあげることができるならたいへんよいことである．けれども今のわたしの年齢ではこれはできない．一方、主題は非常に重要で(以下でこれを理解してもらうつもりでいる)、得られた結果もすでにかなりのものであり、それを捨ててしまうのは惜しい．この問題に興味を持つ幾何学者でわたしより好運な人がなんらかの方策を考えだし、それを使って進む道を見つけてくれるのを期待する．

以上の考察はわたしを正当化するに足ると思われる．

2．定理の陳述．

x および y で点の極座標を表わし、外側の円 $x = a$ および内側の円 $x = b$ に挟まれる円環を考える．この円環からそれ自身への一対一の点変換 T を考える．x および y で点 M の座標を表わし、X および Y で変換後のその座標を表わす．また以下の 2 つの仮定をおく．

条件 1.— T は円環をそれ自身に変換するから、2 つの境界円 $x = a$ と $x = b$ はそれ自身に変換される．だから、$x = a$ または $x = b$ なら $X = x$ である．ただし、$x = a$ 上では $Y < y$ かつ $x = b$ 上では $Y > y$ またはその逆である．すなわちこの変換は各境界円をそれ自身の上で回転させる．一般にはその回転量は各点で等しくないけれども、それぞれの円のすべての点は同じ方向に進み、2 つの円では方向が逆である。y や Y には 2π の不定性があるから、上の陳述はなんの意味も持たないと考える人がいるかもしれない．けれども、円環のどれか一点で $Y - y$ の値を任意の仕方で正確に決めておけば連続性により、円環のすべての点で $Y - y$ の値を完全に決めることができる．

条件 2.— 変換は面積保存である．あるいはもっと一般に、正の積分不変量を許す．すなわち、正の関数 $f(x, y)$ が存在して

$$\int\int f(x,y)dxdy = \int\int f(X,Y)dXdY,$$

を満たす。ここで 2 つの積分はなんらかの面積およびその変換後の面積の上で行われる．

<u>これら 2 つの条件が満たされれば、円環の内部に、変換で位置を変えない点が 2 つあることが言える</u>．

簡単のため、一般に変換は解析的であると仮定する．ただし、この仮定は本質的ではない．

以下のやり方で証明するのが良さそうに見える．$f(x, y) = 1$ の場合を説明すれば十分であろう．このとき X と Y は x と y の関数として、偏微分方程式

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = 1,$$

を満たすはずである．すなわち、

$$dZ = (X - x)dy - dX(Y - y),$$

は完全微分 (différential exacte) である．

容易に分かるように、Z は x と y の一価関数であり、y に関して周期的である．これは最大と最小を取るはずであり、それは両端の円周の上では実現され得ない．したがってもし x と y が X と y の一価関数なら、最大は

$$X = x, \quad Y = y$$

においてしか達成され得ず、$X = x, Y = y$ なる 2 点が、すなわち不動点が 2 つ、円環の内部に存在すると結論できる．しかし、いつもそうとは限らず、最大は

$$\frac{\partial X}{\partial x} = [(X - x) - (Y - y)\frac{\partial X}{\partial y}] = 0,$$

を満たす点でも生じる．というわけで、これが証明が無限小変換にしか適用できない理由である．

定理を別の形で述べることができる．それは同値ではあるが、上の述べ方の逆である．変換 T が上の条件 1 を満たし、条件 2 を満たす代わりに次の条件を満たすとする．

条件 3.— 円環上に不動点はない．

<u>もしそうなら、変換 T は条件 2 を満たさない、すなわち正の積分不変量を持たない</u>．

明らかに 2 つの陳述は同値である．条件 1 と 3 を満たす変換がどれも条件 2 を満たさないなら、条件 1 と 2 を満たす変換はどれも条件 3 を満たすことは有り得ない．したがって変換は不動点を少なくとも 1 つ持ち、それゆえ少なくとも不動点を 2 つ持つ．なぜなら位置解析 (analysis situs)(およびとくにクロネッカーの定理) によりただちに偶数個なければならないからである．

次に条件 1 と 3 が満たされるとき条件 2 が満たされないことを見るために、以下の性質を満たす閉曲線 C を構成できることを示そうと思う．1° この曲線 C は内側の境界円 $x = b$ を取り囲み、これを一回りしたときに y が 0 から 2π まで変わる．2° この曲線は自分の像 C' と交わらず、全体がその内側にあるか外側にある．この場合、C と $x = b$ に挟まれる円環の面積は変換によって C' と $x = b$ に挟まれる面積に写る．

さて 2 つの面積のうち 1 つはもう一方の一部である．たとえば、C' が全体として C の外にあれば、C' と $x = b$ に挟まれる面積は C' と C の間の面積と C と $x = b$ の間の面積の和である．したがって変換は面積を保存できない．また正の積分不変量を許し得ない．

以下で証明を試みるにあたって、定理を第二の形のものと考える．したがって変換が条件 1 と 3 を満たすものと考える．わたしは変換の分類をするつもりである。その分類の各類に対して、上で定義した閉曲線 C を構成したい．逆に応用上は定理を最初の形で考えた方が使いやすい．

3．定理の応用．

定理が確立されたなら、ただちにいくつもの一般化の余地がある．

実際、まず内側の境界円 $x = b$ が一点に縮まり、はじめの円環が円盤になったとする．このとき外側の円 $x = a$ においては常に $Y > y$ かつ中心の近傍では $Y < y$ であるか、またはその逆である．その上、変換が積分不変量を持てば、円盤の内部に変換の不動点が少なくとも 2 つある．一方、同じ原理を T のべき T^n に適用できる．

次に、これが自由度2の力学の問題にどのように応用できるかを見よう．説明を簡単にするために、とくにこれらのうち最も簡単な問題、凸面の測地線の問題、を考える．この主題に関してわたしは論文を書いている．[1] まずわれわれの目的に都合のよい幾何学的表現を捜す必要がある．要素 なるものを定義しよう．そして各要素に空間の点を対応させよう．要素とは1本の測地線とこの測地線上のある点の組である．同一の測地曲線はある方向にその上を動いた場合ともう一方の方向に動いた場合は2本の異なる測地線とみなされる．各要素には以下のように定義される三角錐 (trièdre) が対応する．まず考えている点における面への法線で面の外側に向いているものがある．第二に、この測地線の進む方向への接線、最後にこの2つの直線に直交し、やはりある決まった方向に引かれた直線がある．次にこの三角錐を頂点が原点に来るように平行移動させる．こうして頂点を原点に置いた三直角の三角錐に1つのしかもただ1つの要素が対応する．面が凸であるから、接平面が三角錐の最初の稜線に直交するするような点は2つしかない．また、これら2点のうち、外向き法線がその稜と同じ向きに平行であるような点は1つしかない．

第二に、接線が三角錐の第二の稜線に平行な測地線はこの点を1本しかもただ1本しか通らない．この測地線に沿って進む方向も同様に定義される (確定する?)．

このように置けば、各三角錐は四元数 $\lambda, \mu, \nu, \rho (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1)$ で定義される．これらの量は三角錐を初期位置から現在の位置に向けるために必要な回転を定義する．このときこれらの回転角の値の半分は余弦をとれば λ であり、正弦をとれば $\sqrt{\mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$ である．また回転軸の方向余弦は μ, ν, ρ に比例する．

ただし、2種類の四元数 λ, μ, ν, ρ および $-\lambda, -\mu, -\nu, -\rho$ は同じ回転を表わすから同じ三角錐および同じ要素を表わすことを指摘しておく．

次のようにおこう．

$$\lambda = \frac{1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \mu = \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \nu = \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \rho = \frac{2\zeta}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

そしてわれわれの要素を直交座標が ξ, η, ζ なる空間の点で表わそう．この空間のすべての点に1つしかもただ1つの要素が対応する．すべての要素には空間の2点が対応する．片方の点からもう一方を導くのは原点を極とし、べきを -1 とする反転でできる．

同じような要素無限個から出来た測地線は、この空間内で曲線で表わされる．この空間の各点を、これらのうち1つしかも1つだけ曲線が通り、この曲線に沿って動く方向も同様に決まる．これを曲線 C と呼ぼう．

球の場合、測地線は大円であり、曲線 C は円の族を構成し、その円の面は原点を通り、原点に関するべきが -1 である．このような円 C の2本は出会うことができず、つねに絡み合っている．一般の場合、この問題の周期解のすべてに、すなわち閉じた測地線のすべてに閉じた曲線 C が対応する．

第二の例として 制限三体問題 として知られる三体問題の特別の場合を取り上げる．三体系を通常どおり回転系に帰着させ、Jacobi 積分 (または相対運動のエネルギー積分) を次の形に書ける．

$$J = c.$$

[1] Sur les ligne géodesiques des surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), 237-274.

ここで c は定数であり、J は以下の 4 つの変数の関数である: 被摂動天体の座標 x および y と、その速度 x' と y' である．c が与えられた定数なら、これらの変数のうち 3 つだけが独立である．

次のように書ける．

$$J = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + H.$$

ここで H は x と y のみに依存する．この条件のもとで次を得る．

$$H < c.$$

この不等式は平面のある領域を定義し、以下でわれわれの考えるある場合には、この領域 β は閉曲線 α で限られる．領域 β の各点において速度の大きさは Jacobi の式から決まる．ただ方向は任意である．曲線 α の各点で速度はゼロになり、速度の方向はどうでもよい．したがって β の各点に無限個の要素が対応し、α の各点にはただ 1 つの要素が対応する．以下のような幾何学的表示を行なう．

点対応で、領域 β にある円の内側 β' を対応させ、また曲線 α にその円周 α' を対応させることができる．こうした上で、円 β' の面に垂直な円 γ で、β' の中心に関する「方べき」(puissance) が β' の半径の 2 乗になっているものを考える．これは β' の面を 2 点で横切る．1 点は円周 α' の内側、もう 1 点は外側にある．M を内側の点とし、x, y を面積 β の対応する点とする．このときいろいろな要素を空間の点によって次のような仕方で表わすことができる．代表点が円 γ を描くとき、x と y は点 M に対応する一定の値を保存する．速度の方向を定義する角度 $\arctan \dfrac{y'}{x'}$ は 0 から 2π まで変わる．したがって β の各点に、円 γ のいろいろな点で表わされる無限個の要素が対応する．M が α' の上にあるとき、したがって対応する点が α 上にあるときは、円 γ は 1 点に帰着し、都合がよい．というのは α の点には唯一の要素が対応するからである．

したがってすべての要素に空間の 1 点しかも 1 点だけが対応し、その逆も成り立つ．

軌跡は空間曲線 C によって表わされ、空間の各点をこれらの曲線の 1 つしかもただ 1 つが通る．この曲線を巡る方向は同様に決まる．閉じた曲線 C は周期解を表わす．

次に、上の 2 つの例において周期解を表わす曲線 C_0 およびこの曲線によって限られる面積 A を考える．

この面積 A が単連結であって自分自身と交わらず、さらに 非接触 であること、すなわち、この面積のどの点においてもなんらかの曲線 C がこの面積を含む曲面に接触しないとする．

このとき P を A の点とする．この点をただ 1 本の曲線 C が通る．この曲線に沿って、P' においてあらたに A と出会うまで進む．点 P' は P の 後継点 と呼ばれる．ある点からその後継点に移る変換 T は面積 A からそれ自身への点変換である．P が連続的に変わると P' も連続的に変わることに注意することが大切である．実際は、変化は以下の状況のどれかで不連続とも考えられる．1° C と A との交点の列 $P, P', P'', P''', \ldots$ を考えると、ある瞬間に P' と P'' が一致し、その後虚になってしまって、この瞬間から C と A の第一の交点は P' でなく P''' になってしまう．2° 逆に、ある瞬間新しい交点 P_1 と P_2 が現われて、C と A との第一の交点がその後 P' でなく P_1 になってしまう．3° ある与えられた瞬間に P' が面積 A からはずれてしまって、第一の交点が P' でなく P'' になる．または逆に新しい交点 P_1 が面積 A に入って P と P' の間に加わる．

ところが、これらの状況のどれ1つも生じ得ない．最初の2つが生じないのは、曲線CがAと接触しないのでAの接線にならないからであり、最後が生じないのは、C_0以外のいかなる曲線CもAを限る曲線であるC_0の点を通ることはありえないからである．

点Pがその第一の後継点P'と一致するか、何回目かの後継点と一致するなら、曲線Cは閉じ、解は周期的である．さらに、他の機会に示した原理[2] により、変換Tは正の積分不変量を許すことを確認してほしい．

次に特性指数および周期解の安定性の概念に訴えることにしよう．周期解はすべて符号の異なる2つの特性指数を持つことがわかっている(上記文献2、巻I、IV章; 上記文献1、255ページ)．周期解が安定なら、2つの特性指数は共役な複素数である．

この場合、還元引数(argument réduit)(上記文献1、256ページ; 上記文献2、巻III、n° 347)および運動学的焦点(foyer cinétique)の概念を導入することができる．これによって、点Pが極限曲線C_0の非常に近くにあるとき、点P'がどのように変わるかを知ろう．はたして、運動学的焦点とは何か? C_0と少ししか違わない曲線C_1を考える．これはC_0が表わす軌跡または測地線と少ししか違わない軌跡または測地線を表わす．G_0とG_1は2本の測地線つまり2本の軌道であって、それぞれC_0およびC_1で表わされるとする．

曲線C_1の方程式を書くために、次のような仕方で特別な座標系u, v, wをとろう．1° 今考えている軌跡または測地線の点の座標がuとvのみに依存し、一方接線の方向はu, v, wすべてに依存する．2° 曲線C_0の表式は$v = w = 0$であって、閉曲線C_0を一周するとuは0から2πまで変わる．この条件のもとで、曲線C_0が安定な軌跡に対応すれば、C_0とほんの少ししか違わない曲線C_1の表式は次のように書けることがわかる(上記文献1および2)．

$$\frac{v}{a} = \rho \sin(\theta + h), \quad \frac{w}{a} = \rho_1 \sin(\theta + h) + \rho_2 \cos(\theta + h).$$

ここでaとhは積分定数であって、前者は非常に小さい．ρ, ρ_1, ρ_2はuの周期関数、θはuの単調増加関数であってその微分は周期的である．次のように書ける．

$$\theta = \alpha u + \varphi(u).$$

ここで$\varphi(u)$は周期的である．またこのとき$i\alpha$は特性指数とわれわれが呼ぶ量を表わす．

G_1とG_0の交点はvが消えるとすれば得られて、次のようになる．

$$\theta + h = K\pi.$$

Kは整数である．MがG_0とG_1の交点で、M'がそれに続く交点なら、M'はMの最初の運動学的焦点(foyer cinétique)と呼ばれ、このときθとθ'が対応するθの値なら次を得る．

$$\theta' - \theta = \pi.$$

次に面積Aの式を次の形に書こう．

$$F(u, v, w) = 0.$$

[2] Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. = Tome I (1892): Solutions périodique. Non-existence des intégrales uniformes. solutions asymptotiques. - Tome II (1893): Méthodes de Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. - Tome III et dernier (1899): Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxiéme genre. Solutions doublement asymptotiques. [Paris, Gauthier-Villars].

第一変数を v と w のべきで展開すれば、ゼロ次 (degree) の項は消える．なぜなら面積 A が曲線 C_0 を通るからである．v および w に非常に小さな値を与えるべきであるから、1 次 (order、階?) より大きい項を無視できる．その結果、次が残る．

$$gv + g_1 w = 0.$$

ここで g と g_1 は u の周期関数である．v と w をそれらの値で置き換えれば、次のようになる．

$$p\sin(\theta + h) + p_1 \cos(\theta + h) = 0.$$

ここで p と p_1 は u の新しい周期関数である．次のように置く．

$$\frac{p_1}{p} = \tan\lambda.$$

すると λ は u の関数であってその微分は周期的であり、また λ は u の周期関数と u の倍数分しか違わないのでそれを mu と書く．このとき上の方程式は次のようになる．

$$\sin(\theta + \lambda + h) = 0.$$

したがって、C_1 と A の相続く交点はこの正弦関数がゼロになるとして得られる．正弦関数の引数は π の倍数でなければならない．しかし面積 A は C_0 によって限られており、この曲線の外側にまで達していない．だから偶数倍だけがあてはまって次のように書けるはずである．

$$\theta + \lambda + h = 2k\pi.$$

このとき P と P' が相続く交点であって、θ, λ と θ', λ' が θ, λ の対応する値であるとすれば次を得る．

$$(\theta' + \lambda') - (\theta + \lambda) = 2\pi.$$

$\theta + \lambda$ が u に関してつねに増加する関数であることを指摘しておく．実際、v と w が非常に小さいとき、次のように書ける．

$$F(u, v, w) = R\sin(\theta + \lambda + h).$$

ここで $R = \sqrt{p^2 + p_1^2}$ は u の周期関数である．このとき C_1 と A の交点は F がゼロになるとして得られ、

$$F = F' = 0,$$

として C_1 と A の接点が得られる．ここで F' は u に関する F の微分である．これらは次のように与えられる．

$$\begin{aligned} &F = R\sin(\theta + \lambda + h) = 0, \\ &F' = R'\sin(\theta + \lambda + h) + R(\theta' + \lambda')\cos(\theta + \lambda + h) = 0. \end{aligned}$$

$\theta' + \lambda' = 0$ なら、$h = -\theta - \lambda$ とすることができ、条件は満たされる．ところで、これは不可能である．なぜなら面積 A は非接触と仮定してあったから．したがって $\theta + \lambda$ の微分はゼロになれず、$\theta + \lambda$ はいたるところ同じ向きに変わる．これがいつも増加であるように調整できる．

関数

$$\frac{\theta+\lambda}{\alpha+m},$$

は上の概念を少し一般化して、還元引数 (argument réduit) と呼ぶことができる．量 $\alpha+m$ は α と整数

$$m=\frac{\lambda(u+2\pi)-\lambda(u)}{2\pi},$$

しか違わない．上で選んだ 2 つの例の場合にはこれはゼロである．還元引数は C_0 を一周すると 2π 増える．またこれは u の増加関数であるから、C_0 上の点の位置を定義するのに使える．P は C_0 に非常に近いから、点 P の還元引数とその変換像 P' の還元引数は

$$\frac{2\pi}{\alpha+m},$$

だけ異なる．

このように置くと、位置解析の視点からは面積 A を円の面積と同一視できる．したがってこの面積の点の位置を極座標に似た座標 x と y の座標系で定義することができ、C_0 の方程式を次のように表わせる．

$$x=a.$$

しかもこの曲線上で y は還元引数に等しい．したがって、われわれの変換 T は曲線 $x=a$ を保存し、次のようである．

$$Y-y=\frac{2\pi}{\alpha+m}=\text{const.}$$

クロネッカーの定理によれば、このとき A の内部に変換の不動点が奇数個ある．この各点に周期軌道が対応する．そのうち少なくとも 1 つは安定である．

P_0 を対応する点とする．座標系を選んでこの点が原点になるようにできる．

$$x=0.$$

変換 T はこのとき $x=a$ を保存するばかりでなく、内側の極限円 $x=0$ も保存する．ただし後者は 1 点に縮んでいる．

C_0' は閉曲線 C のうち P_0 を通るものとする．座標系 u',v',w' を導入する．これは系 u,v,w が C_0 に対応したのと同じく C_0' に対応する．その上、この座標系で A の表式が $u'=0$ であるとする．こうすることは可能である．ただし u,v,w に関して行なった仮定の一番目を放棄する条件のもとでである (すなわち u と v を変えずに w を変えると、接線の方向だけが変わり、測地線または軌跡の点は変わらない)．実を言えば、この仮定は本質的な役割は何もせず、運動学的焦点の定義の記述を簡単にするためだけのものであった．この条件のもとで C_0' の近くの曲線 C の方程式は次のように書ける．

$$\frac{v'}{a'}=\rho'\sin(\theta'+h'),\quad \frac{w'}{a'}=\rho_1'\sin(\theta'+h')+\rho_2'\cos(\theta'+h').$$

また次を得る．

$$\theta'=\beta u'+\varphi'(u').$$

ここで φ' は周期関数、$i\beta$ は特性指数であり、それゆえ u' が 2π 増えると θ' は $2\beta\pi$ 増える．座標系 x, y を選んで、P_0 の近くでは鋭敏であるようにできる．すなわち x が非常に小さいとき、$u' = 0$ のときの関数 ρ', ρ_1', ρ_2' の値を与えて

$$\frac{v'}{x} = \rho' \sin y, \quad \frac{w'}{x} = \rho_1' \sin y + \rho_2' \cos y.$$

このとき u' が 2π 増えると、すなわち、点 P から点 P' に移ると、$y = \theta' + h'$ は $2\beta\pi$ 増える．というよりは、むしろ (2π の整数倍の不定性があるから)

$$2\pi(\beta + n),$$

だけ変わる．ここで n は整数である．したがってこのとき次を得る．

$$Y - y = 2\pi(\beta + n).$$

m は任意でないけれども n は任意であるように見える．しかし、面積 A 全体を動き回ると、差 $Y - y$ は連続的に変わるから、これによって n が決まる．

こうした上で、T を p 回繰り返した変換 T^p を考えよう．この変換は $x = a$ と $x = 0$ を保存し、T と同様、わたしの本 (上記参考文献 2) で示した原理によって正の積分不変量を許す．一方この変換により $x = a$ の上で

$$Y - y = 2\pi \frac{p}{\alpha + m},$$

を得、また $x = 0$ において

$$Y - y = 2\pi p(\beta + n),$$

を得る．

これは q を整数として Y を $Y + 2q\pi$ に置き換えたときに得られるものと本質的に違わない．なぜなら Y は 2π の整数倍不定だからである．この新しい変換に関して、$x = a$ の上で次を得る．

$$Y - y = 2\pi \left(\frac{p}{\alpha + m} + q \right).$$

また $x = 0$ の上で次を得る．

$$Y - y = 2\pi[p(\beta + n) + q].$$

等式

$$(\beta + n)(\alpha + m) = 1,$$

が成り立たなければ、整数の組 p と q で次を満たすものを無限個見つけることができる．

$$\left(\frac{p}{\alpha + m} + q \right) [p(\beta + n) + q] < 0.$$

すなわち、

$$\frac{1}{\alpha + m} > -\frac{q}{p} > \beta + n,$$

または

$$\frac{1}{\alpha + m} < -\frac{q}{p} < \beta + n.$$

したがって定理が適用でき、われわれの変換のもとで不変な点が少なくとも 2 つある．これら 2 点から同じ数の周期解が得られる．

p と q は無限個の値を取ることができるから、無限個の周期解が得られる (今までのところこれは質量が小さい値のときにのみ示されただけである)．

この問題のあるデータの値に対して、曲線 C_0 と C_0'、したがって面積 A を構成したとしよう．次にこの問題のデータを変化させよう．C_0 は連続的に変化する．A も連続的に変化させることができ、その際その本質的な性質、とくに非接触性を保存するようにできる．この点を考慮すると、C_0 が存在する限りこれはずっと続く．したがって、C_0 と C_0' が存在する限り、われわれの言ったことはすべて保たれる．整数 p, q に対応する周期解は C_0 あるいは C_0' と一致して

$$-\frac{q}{p} = \frac{1}{\alpha + m} \quad \text{または} \quad \beta + n,$$

が満たされるまでは決してなくならない．

これによって周期解の相互の関係について情報が得られ、またこれは第二類 (genre) の周期解の研究にも応用できる．

たいへん漠然としてはいるが、これは周期解がいたるところ稠密であることを示すのに使えるのではないかと思われる．

冒頭に引用した 2 つの特別な例で達成されたことを理解しよう．まず測地線について考える．曲面が球からほんの少しだけ違っているとする．このときすでに見たように、二重点を持たない閉測地線 (上記参考文献 1、249 ページ) はある種の量の極大、極小およびミニマックスに対応する．この量は「天文大円」の長さそのものである．

この極大その他は、n を整数として $4n+2$ 個ある．しかし、巡る向きだけが異なる測地線を同一と考えれば、奇数 $2n+1$ 個の測地線が得られる．これは引用した論文 (参考文献 1) で構成したものである．巡る方向だけが異なる 2 つの測地線から 2 つの異なる曲線 C が与えられる．したがってこのカテゴリーの閉曲線 C の数は偶数である．A を限る C_0 は別にしてこれらはすべてある点で A を横切る．したがって A を横切る曲線 C の数は奇数であり、これは都合がよい (?)．C_0 と C_0' が巡る方向だけが異なる 2 つの測地線であるように C_0' を選ぶこともできる．

曲面 S が球に帰着すれば、曲線 C_0 は円であり、A としてこの円に限られる面積を採ることができる．

制限三体問題の場合、摂動天体の質量がゼロである場合からはじめる．このとき被摂動天体に対して、Jacobi の式 (上を見よ) に矛盾しない 2 つの円軌道がある．これは C_0 と C_0' に対応する 2 つの軌道である． **4．定義と記法.**

定理が正しいとして、それを導く方策を説明した以上、なぜそれが正しいと考えるに至ったか、その理由を述べるべきであろう．その際、定理を第二の形にとることにする．すなわち、変換 T はどの点も不変にしないと仮定し、この変換が積分不変式を持たないことを示すことにする．

ある便宜上の理由で、2 つの表示法を用いる．あるときは円環それ自身を用いる．すると x と y は極座標である．これを <u>円表示</u> と呼ぶことにする．あるときは、x と y を <u>直交</u> 座標と考える．ただし、通常と違って、x 軸を鉛直方向に、y 軸を水平方向にとる．これを <u>直交表示</u> と呼ぶことにする．ひとつの表示から別の表示へは簡単に移れる．曲線 $x =$ 一定は円表示では円であり、もう一つの表示では水平線である．曲線 $y =$ 一定は円表示では半径であり、もう一

つの表示では鉛直線である．

しかし指摘しておくべき重要なことは、円表示の点は直交表示の無数の点 $(x, y; x, y+2\pi; x, y+4\pi; \ldots)$ に対応することである．

そこで <u>大域的</u> に閉じている曲線と <u>局所的</u> に閉じている曲線を区別する気になる．前者は円表示で閉じていて直交表示では閉じておらず、後者はどちらの表示でも閉じている．

変換 T はいつも一対一であるとする．点 M の座標は x と y であるとし、その変換後の点 M' の座標は X と Y とする．逆変換 T^{-1} による像の座標は (X) と (Y) とする．

円環は 2 つの境界円 $x = X = a$ と $x = X = b$ によって限られているとする．ただし、前者は外側に、後者は内側にあって、ともに変換で不変に保たれる．

これから考察すべき注目すべき曲線は以下のものである．

1° 円 (または水平線) $x = c$;

2° 曲線 $X = c$．これを変換したものが曲線 $x = c$ である．これは局所的な意味で閉じている曲線に関しても同様である;

3° 曲線 $X = x$．この曲線を 2 本考えたとき、たとえ同じ方程式で表わされていても、同じ方程式を満たす連続線で一方から他方に移ることができなければ、これらは異なる 2 つの曲線と見なす.

4° 上を変換した曲線 $(X) = x$.

3 本の曲線 $X = x, X = c, x = c$ を考えると、これらの内の 2 本に属する点はすべて三番目にも属し、これらのうち 2 本が接触していれば、三番目も接している．

曲線 $X = x$ 上には $Y = y$ なる点はない．なぜなら、この点で $X = x, Y = y$ となり、これは T のもとで不変であるが、われわれはそのような点はないと仮定した．それゆえ同一の曲線 $X = x$ に沿って $Y - y$ は符号を変えない．このことから二種類の曲線 $X = x$ を区別することにしよう．$Y - y$ が正か負かに応じて <u>正</u> の曲線および <u>負</u> の曲線である．仮定により、片方の境界円上では $Y - y$ はいたるところ正であり、もう一方では負である．片方の境界に達する曲線 $X = x$ はすべて正であり、もう一方に達するものは負である．曲線 $X = x$ は決して片方の境界からもう一方へは行かない.

したがって曲線 $X = x$ は次の 3 つのカテゴリーに分かれる.

1° 両端点を同一の境界円上に持つ開曲線.

2° 大域的に閉じている曲線.

3° 局所的に閉じている曲線.

一般性を失うことなく、これらの曲線が二重点を持たないと仮定できる．

直交表示を考え、曲線 $X = x$ の点で、その接線が水平線になっているものを考える．高度 (座標 x で測って) が極大または極小であるに応じて <u>底点</u> または <u>頂点</u> と呼ぶことにする．相続く底点と頂点の間に挟まれる曲線 $X = x$ の部分、すなわち、その間に他の底点や頂点がない部分を曲線 $X = x$ の <u>分枝</u> と呼ぶことにする．以後、分枝はこの意味でのみ使う．

M を $X = x$ の点とする．それを変換した点 M' は同じ高度にある (これがまさに式 $X = x$ の意味するところである)．この点は変換後の曲線 $(X) = x$ 上にある．このことから次のことが出る．1° $X = x$ のすべての底点または頂点は、変換のもとで曲線 $(X) = x$ の底点または頂点になり、しかも同じ高度にある．2° $X = x$ のすべての分枝を、たとえば上昇しながら端から端まで巡ると、$(X) = x$ の対応する分枝も上昇しながら巡る.

$X = x$ のある分枝が正なら、その変換曲線 $(X) = x$ はそれと交わらず、全体が右にある (つ

ねに直交表示で考える)．この曲線も正と呼ばれる．曲線 $X=x$ が負なら、変換曲線は逆に全体が左にある．

5．2 本の閉曲線の交差．

円 $x=c$ と逆変換によるその像 $X=c$ を考える．後者も大域的に閉じた曲線である．この 2 本の曲線は円表示では偶数 m 個の交点を持つ．ただし、直交座標では、交点の数は無限になってしまう．曲線 $X=c$ に沿って Y が増加する方向に、これらの点に番号を振ることから始めよう．$x=c$ に沿って y が増加する方向に巡ってもすべての交点に出会う．ただし、出会う順序は一般に異なる．まったく番号の順に出会うとき、分布は正規であるということにする．

すでに述べたように、異なる交点の数 m はつねに偶数である．$y=y_0$ から始めて、$y=y_0+2\pi$ まで $x=c$ を巡ったとき、以下の番号の点に相次いで出会う．

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m. \tag{1}$$

数列 (1) は交点の分布の様態 (mode) を定義している．これは次と置き換えることができる．

$$\alpha_1+m, \alpha_2+m, \cdots, \alpha_m+m.$$

これは $y=y_0+2\pi$ から始めて、$y=y_0+4\pi$ まで $x=c$ を巡ったときに出会うの点の番号である．分布が正規なら、数列 (1) は相続く m 個の整数である．すべての場合に、偶数と奇数が交互に現われる．

$X=c$ の孤で 2 つの交点に挟まれるものは、その両端点が $x=c$ 上にあって、それ以外に $x=c$ と交わらないとき基本的と言われる．基本孤は、円表示で円 $x=c$ の外側にあるか内側にあるかに従って、外部孤または内部孤と呼ばれる．外部基本孤の 2 つの端点が $2n-1$ および $2n$ と番号付けられ、内部基本孤の両端点が $2n$ および $2n+1$ と番号付けられると考えることができる．

基本孤は、直交座標で右にある端点が左の端点より番号が大きければ順であり、そうでない場合は逆である．別の言葉で言えば、孤が順なら、1 つの端点からもう 1 つの端点に向かって動くとき Y と y は同じ向きに変わる．

二重点を持たない曲線 $x=c$ を逆変換して得た曲線 $X=c$ も二重点を持たない．その結果、基本孤はどの 2 つも互いに交われない．これは次のように表現できる．A, B と C, D を 2 本の外部基本孤 (または内部基本孤) の 2 つの端点とすれば、直線分 AB と CD(直交表示で $x=c$ 上にとる) は互いに重なることができない．すなわち、C と D は両方とも区間 AB の内側にあるか外側にあるかどちらかである．

この条件はさらに別の仕方で述べることができる．数列 (1) を考え、これに数 α_1+m を加えて閉じたサイクルになるようにする (実際、数 α_1 の点と数 α_1+m の点は直交表示では同じでないにしても円表示では同一である)．この列をこのように完成させた上で、$\frac{m}{2}$ 個の相続く奇数と偶数の組を区別する．このとき、これらの組を任意に 2 つ考えたとき、1 つの組の 2 つの数はもう一方の組の 2 つの数の間にあるか、またはどちらも互いに含まれないはずである．(可能でない組は、たとえば 14 と 52 である)．同じようにこの数列には最初の数が偶数で次が奇数の組も $\frac{m}{2}$ 個存在する．上と同じ条件がふたたび任意の 2 つの組に対して満たされるはずである．

したがって、上に述べた 2 つが、数列 (1) が可能であるための必要十分条件である．この 2 つの陳述は同値であって、二重点を持たない任意の 2 本の閉曲線の交点にも応用できる．最初の陳述において、2 つの (大域的な) 閉曲線 $X = c$ と $x = c$ を考え、$X = c$ が基本孤に分解されていると仮定する．第二の陳述においては、2 つの曲線の役割を逆にして $x = c$ が基本孤に分解されているとする．

2 本の外部基本孤 AB と CD を考えよう．端点 C と D が直交表示で水平線 $x = c$ の線分 AB に含まれており、しかも孤 CD は孤 AB と弦 AB に囲まれる面積内に含まれているとき、CD は AB に 覆われている という．内部孤に関しても同じ定義が自然に適用できる．

基本孤は、他の孤に覆われていないとき 一次的 と呼ばれ、他のどの孤も覆わないとき 最終的 と呼ばれる．孤 CD を覆いかつ AB に覆われる他の基本孤がないとき、孤 CD は AB に 直接 覆われていると言われる．

上の定義から、容易に以下の命題を導ける．

1° 2 つの孤が直接覆い合っていれば、一方は順であり、他方は逆である．

2° 一次孤はすべて順である．

3° 分布が正規なら、基本孤はすべて一次的であると同時に最終的である．

4° k を正または負の整数として、α_i を $\alpha_i + km$ に変えたものを加えて数列 (1) を無限に延長する．または同じことだが、水平線 $x = c$ を $y = -\infty$ から $y = +\infty$ まで動いたときに相次いで出会うすべての点の番号を書いて列 (1) の延長を構成する．

この延長の際に、一次外部基本孤の端点に対応する番号を考えると、この番号は増大する順序で並んでいる．

5° 一次孤の (ましてなんらかの孤の) 両端点の番号の差は高々 $m - 1$ に等しい．

図 1

交点の 席次(rang) とは、定義より、列 (1) 上で占めるその番号のことである．何が最終孤を特徴づけるかというと、それは 2 つの端点の席次、したがってその番号が相続いていることである．正規分布を何が特徴づけているかというと、席次が番号と同じ順序で並んでいることであり、ある点の席次をその番号とつねに一致させることができることである．

上のことは図 1 でよく説明できる．この図は円表示である．2 つの境界円 $x = a$ と $x = b$

は実線で示した．曲線 $X = c$ も実線で示した．一方、円 $x = c$ は点線で示した．外部基本孤が $12, 34, 56$ および 78 であること、内部基本孤が $23, 45, 67$ および 81 であることがわかる．孤 $12, 78, 67, 23$ は一次的であり、孤 $34, 78, 45, 81$ は最終的である．34 は 56 に覆われ、56 は 12 に覆われている．

6．分枝の番号付け．

直交表示で $X = x$ の異なる分枝を考えよう．各分枝 (A) に数 $n(A)$ を対応させる．その際以下のような条件をつける．

水平線 $x = c$ が 2 つの分枝 (A) と (B) を横切り、(A) との交点が (B) との交点の左にあるなら、次のように書く．

$$n(A) < n(B).$$

簡単に示せるように、この仮説は何の矛盾ももたらさず、この種のすべての不等式を同時に満たすように数 $n(A)$ を選ぶことができる．数 $n(A)$ は分枝 (A) の席次 (rang) と呼ばれる．この数を $-\infty$ から $+\infty$ までの整数のすべてを 隙間なし に取るような仕方で選ぶことができる．隙間があれば「隊列をつめる」やり方で埋めれば十分である．

直交表示で、分枝の数は無限であり、席次は $-\infty$ から $+\infty$ まで続く．しかしこの分枝は円表示では有限個の分枝にしか対応しない．なぜなら円表示のすべての点は直交表示の無限個の点に対応するからである．したがって直交表示の $y = y_0$ と $y = y_0 + 2\pi$ の間に挟まれ、有限個の分枝を含む部分を表わすだけで十分である．直交表示では y が 2π 増えたとき周期的に変わるだけだからである．

同様の仕方で $(X) = x$ の分枝の 席次 を定義できる．分枝 $X = x$ の 番号(numéro) はその変換後の分枝 $(X) = x$ の席次である．分枝 $(X) = x$ の 番号 はその逆変換後の分枝 $X = x$ の席次である．

分枝 $X = x$ の番号づけと前節で調べた $X = c$ と $x = c$ の交点の番号づけの関係は簡単に説明できる．

直交表示では水平線になる円 $x = c$ を考えよう．これと $X = c$ との交点は $X = x$ のある分枝上にある．

水平線 $x = c$ は $X = x$ のすべての分枝と交わることはない．しかし、この分枝との交点は $X = c$ 上にある．$X = c$ との交点の番号および席次は、対応する $X = x$ の分枝の番号および席次とまったく同じ順序で並んでいる．しかし $X = c$ と $x = c$ の交点の番号 (または席次) 列に隙間がないとしても、対応する $X = x$ の分枝の番号 (または席次) 列にはあり得る．というのは $x = c$ はすべての分枝と交わるわけではないからである．第二の列から第一の列に移るには「隊列をつめれ」ば十分である．「隊列をつめる」際に番号の偶奇は変わらない (席次についても同じ) ことを指摘しておく．

2 つの分枝の番号 (または席次) が 与えられた水平線$x = c$の高さで相続いている といわれるのは、この水平線がこれら 2 つの分枝の番号 (または席次) の間に挟まれているような番号 (または席次) の分枝とは交わらないときである．

以上の約束のあとでは、分枝 $X = x$ の番号、その席次、また $X = c$ と $x = c$ の間の対応する交点の番号はつねに同じ偶奇性を示す．

曲線 $X = x$ は円環 (またはその直交表示) を領域に分ける．ある領域では $X > x$ であり、別の領域では $X < x$ である．この節と前の節の約束から、$X > x$なる領域は左から偶数番号の分枝

によって限られ、右から奇数番号の分枝によって限られている．これは領域 $X < x$ では逆になっている．

2 つの分枝がつながっている底点 (または頂点) を考えよう．α_0 と β_0 を左の分枝の番号と席次とし、α_1 と β_1 を右の分枝の番号と席次とする．2 つの番号 α_0 と α_1 は 2 つの席次 β_0 と β_1 と同様、底点 (または頂点) の高さで相続いている．α_0 が奇数ならこの底点 (または頂点) を奇底点(または奇頂点) と呼び、α_0 が偶数なら偶底点(または偶頂点) と呼ぶ.

$\alpha_0 < \alpha_1$ なら底点 (または頂点) は順であり、$\alpha_0 > \alpha_1$ なら底点 (または頂点) は逆であるという.

7. 禁止領域.

直交表示で 2 本の曲線 $x = c$ と $X = c$ およびそれらが決める各種の領域を考えよう．$X - c$ の符号が $x - c$ の符号と等しい許容領域と、これら 2 つの符号が異なる禁止領域を区別しよう．後者には曲線 $X = x$ が入り込めない．$X = c$ の基本孤 HK とそれに (5 節の意味で) 直接覆われている孤に含まれる領域が許容であるのは、HK が逆のときで、HK が順のときは禁止である．

こうした上で、S をある曲線 $X = x$ のある頂点とする．$x = c$ はこの頂点の下に位置する水平線であって、$X = x$ を頂点に非常に近い 2 点 A と B で横切るとする．AMB は A と B を含む曲線 $X = c$ の基本孤とする．また R はこの孤と水平線 AB に挟まれる領域とする．この孤が逆なら (すなわち、頂点 S が逆なら)、領域 R は許容であり、隣接する領域は禁止であるから、曲線 $X = x$ の孤 ASB がこの領域を横切るはずであり、この領域は 2 つの部分領域 $AMBS$ と $ASBA$ に分割される．

図 2

第一の領域上で $x > X > c$ であり、第二の領域上で $X > x > c$ である．このとき領域 $X > x$ を左に限る分枝 AS は偶数番号である．すなわち、頂点 S の番号も偶数である．したがって奇数の逆頂点はあり得ない．また同様に偶数の逆底点はあり得ない.

一方、簡単にわかるように、曲線$X = x$の最も高い頂点はつねに順である．最も低い底点についても同じである．

実際、R は曲線 $X = x$ が局所的な意味で閉じているならこの曲線によって囲まれる領域とし、そうでなければこの曲線と水平線 $x = b$(これは円表示で内側の境界円に対応する) に挟まれる領域とする．R' を R の像とする．S はわれわれの曲線の最も高い頂点とする．その像 S' は R' を限る曲線 $(X) = x$ の最も高い頂点である．M は R のコントアを R を右に見ながら動く点とする．その像 M' は R' のコントアを R を右に見ながら動く．M が S に達したとき、これは左から右に動く．なぜなら S は R のコントアの最も高い点であるから．この瞬間に M' は S' に達しており、同じ理由で左から右に動く．この 2 つの動点は同じ方向に動いていると言える．すなわち頂点は順である． C.Q.F.D.

8．可能条件．

変換 T は以下のデータによって特徴づけられることが、直交表示では簡単に分かる．

1° 曲線 $X = x$ の 形、その各々の分枝の番号と位置、異なる頂点や底点の相対的な高さ．これらの曲線の形が与えられると、各分枝の 席次 は決まる．というのは、これはこれらの分枝に相対的な幾何学的位置のみにしか依存しないからである．

2° 各分枝の 番号．

3° 曲線 $X = x$ のそれぞれの 符号．これは 4 節の意味で正または負であり得る．

しかしながらこれらのデータは任意に選ぶことはできない．これらは以下で述べるある数の条件を満たす必要がある．

1° いま考えている曲線 $X = x$ を水平線 $x = c$ で切ったとする．この水平線はこの曲線のすべての分枝を横切ることはできない．しかし、横切る分枝の番号を出会う順番に、または同じことだが、その席次の順を書けば無限列を得る．

こうして横切られる各分枝に $X = c$ と $x = c$ との交点が対応する．この分枝の番号はこの交点の番号とは一般に一致しない．なぜなら分枝の番号の列には、$x = c$ によって横切られない分枝に対応する隙間があり得る一方、交点の番号列には隙間はないからである．しかしこの 2 つの番号列は同じ順序で並んでいる (そのため片方からもう一方へは「隊列をつめる」やり方で移れる)．したがってこれらのうち第一の列は第二の列と同様 5 節の条件を満たす．それはふたたび次のように述べることができる．

偶数と奇数が交互に並ぶこの番号列を考えよう．相続く番号の 2 つの組を区別する．ただし各組で最初の番号が偶数で二番目が奇数であるようにとる．この 2 つの組は 5 節の意味で一方がもう一方の上に跨ることはない．またこれは最初が奇数で二番目が偶数の相続く番号の 2 組についても同じである．

2° 頂点または底点でつながっている 2 本の分枝の番号と席次は、6 節の意味でこの頂点または底点と同じ高さで 相続いている はずである．

3° 偶数逆底点 も 奇数逆頂点 もあり得ない．

4° 境界水平線 $x = a$ および $x = b$ の近くでは、いろいろな分枝の番号は、その席次と同じ順序で並んでいるはずである．また実際、たとえば $X = a$ は $x = a$ と一致する．したがって c が a の近くにあれば、$X = c$ は $x = c$ とほんの少しだけ離れており、$X = c$ への接線は水平線 $x = c$ といつも非常に小さな角度をなし、また 2 つの閉曲線は互いに少ししか離れていないから、これらの交点の分布は 5 節の意味で正規である．

5° 同一の曲線に属する 2 本の分枝、また特に同一の頂点または同一の底点でつながっている 2 本の分枝は 同符号 のはずである．

6° すでに見たとおり、分枝 $X = x$ が正ならその変換曲線 $(X) = x$ はその右に位置するはずである．そこで A と B を $X = x$ の 2 つの分枝とする．これらは「あべこべ」であるとする．すなわち、A の番号は B の番号より大きく、A の席次は B の席次より小さいとする．その上これらは逆の符号を持っているとする．このとき、A が正で B が負でなければならない．A が負で B が正であることはできない．実際 A が負で B が正であるとすると、A は像 A' の右にあり、B は像 B' の左にある．これは不可能である．というのは、A は席次が小さいから B の左にあり、A の番号の方が大きいから、A' は B' の右にあるからである．

9．正負の孤．

さらに進むために新しい概念を導入しよう．閉じたコントア C を考え、その上を決まった方向に動きまわる点 P とある点 M を考える．コントアの係数とは、P がこのコントアを一周したときにベクトル MP の角度がある固定方向から測って $2m\pi$ 増えたときの数 m のことである．角度は幾何学的な方向とは逆に計算する．平面の任意の点に関するこのコントアの係数がつねに正またはゼロのとき、このコントアは正と言われる．このコントアの係数がつねに負またはゼロのとき、コントアは負と言われる．コントアが正または負のとき、コントアは確定的と言われる．

$ABCDA$ と $ECBFE$ を2つの閉コントアとする．この2つを結合して新しいコントア $ABFECDA$ を作れる．その際、もとの2つのコントアの部分のうち、反対方向に巡る共通の BC と CB を省略する．このとき次のように書ける．

$$ABCDA + ECBFE = ABFECDA$$

または

$$ABCDA = ABFECDA - ECBFE.$$

こうして2つのコントアの和および差が定義できる．2つより多いコントアについてもおなじように和と差を定義する．明らかに、コントアが複数個のコントアの和なら、任意の点 M に関するその係数は成分コントアの係数の和である．

次に孤 $X = x$ または孤 $X = c$ の符号を定義しよう．孤 $X = x$ が正といわれるのは、上昇するときに正である分枝に属するか、下降するときに負の分枝に属するときである．これが負といわれるのは、登るときに負である分枝に属するか、下るときに正の分枝に属するときである．したがって正という語は、分枝の場合と孤の場合とで意味が異なる．なぜなら、分枝の場合 (4 節参照)、符号は動く方向には依存しなかった．

図 3.

AB は正の分枝 $X = x$ に属する正の孤であって、図の矢印で示されるように上昇する方向に巡るとする．したがってその像 $A'B'$ はその右にある．水平線 BB' と $A'A$(これは直交表示での水平線で、$x = \mathrm{const.}$ なる式で表わされる) を引いてコントア $ABB'A'A$ を構成する．このように定義されたコントアは正であることが分かる．これは孤が正であるという名称を正当化している．

これを一般化して $X = x$ の孤が正または負あることを相殺法により導入できる．

孤 $DCBA$ は正の曲線 $X = x$ に属するとし、逆頂点 C と逆底点 B を持つとし、A は D の上にあり、一方 C と B が中間の高さにあるとする．この孤を矢印の方向に巡る．このとき変換後の孤 $D'C'B'A'$ で図に示されるものを構成でき、水平線 AA' と $D'D$ によって両者を閉じることができる．このとき明らかにコントア $DCBAA'B'C'D'D$ は正で、孤 $DCBA$ は

相殺法によって正と言われる．しかし以下では相殺法による正の孤というような使い方はしない．

孤 $X=c$ に移ろう．AMB はこれらの孤の 1 つで AMB の方向に巡る孤であるとする．

図 4.

直交表示でこの孤の弦 BA を考えると、われわれが仮定するとおり両端点 A と B が $X=c$ と $x=c$ の交点なら、これは水平線 $x=c$ に属する．この孤とその弦から構成されるコントア $AMBA$ を考えよう．このコントア自身が確定的で、正または負のとき、孤は確定的で、正または負と呼ばれる．

基本孤は常に確定的である．孤 AMB の符号は積

$$\alpha\beta\gamma$$

の符号と同じである．ここで

A の番号と席次が奇数なら $\alpha=+1$ であり、偶数なら -1 である．

A の席次が B の席次より小さければ $\beta=+1$ であり、逆なら -1 である．

A の番号が B の番号より小さければ $\gamma=+1$ であり、逆なら -1 である．また実際、$\beta=+1$ なら孤 AMB は左から右に巡り、$\alpha\gamma=+1$ なら孤は弦の上にある．

第二の例として、いま考えている高さで A と B の席次が相続いているように孤 AMB を取る．同様の孤はつねに確定的である．その符号はやはり積 $\alpha\beta\gamma$ の符号と同じである．

10. コントア C.

大域的な意味で閉じているコントア C を考える．ただしこれは $X=x$ の孤と $X=c$ の孤のみからできていて、孤はすべて正であるかすべて負であるとする．C を巡る方向は与えられているとする．C' は C の変換曲線とする．これは $(X)=x$ の孤と $x=c$ の孤からできている．

この論文の目標の定理を確立するためには、コントアCの存在を確立すれば十分であるといえる.

このために、平面のある点に関するコントア $C-C'$ の係数を決定しよう．ただしコントア C と C' が閉じるように円表示を利用する．

このとき

$$A_1B_1M_1A_2B_2M_2\cdots A_nB_nM_nA_1,$$

をコントア C とし、

$$A_1'B_1'M_1'\cdots M_n'A_1',$$

をその変換曲線 C' とする．考えをはっきりさせるため孤 A_iB_i はすべて $X = x$ の 正 の孤であるとし、孤 $B_iM_iA_{i+1}$ も同様に $X =$ 一定 の正の孤とする．孤 $A'_iB'_i$ は $(X) = x$ の孤であり、孤 $B'_iM'_iA'_{i+1}$ は $x = c$ の孤とする．点 A_i と A'_i(または B_i と B'_i) は直交表示で同じ高さにあり、したがって、孤 $A_iA'_i$ と $B_iB'_i$ を描ける．これらは $x = c$ の孤である．すなわち、直交表示では水平線、円表示では円である．このとき次を得る．

$$\begin{aligned} C - C' = \ & A_1B_1B'_1A'_1A_1 + B_1M_1A_2A'_2M'_1B'_1B_1 + A_2B_2B'_2A'_2A_2 \\ & +B_2M_2A_3A'_3M'_2B'_2B_2 + \cdots + B_nM_nA_1A'_1M'_nB'_nB_n. \end{aligned}$$

実際、右辺のさまざまな項を考えると、第一項の孤 $B_1B'_1$ は第二項の孤 B'_1B_1 によって相殺され、第二項の孤 $A_2A'_2$ は第三項の A'_2A_2 によって相殺され、以下同様にして、最終項の孤 $A_1A'_1$ は第一項の A'_1A_1 によって相殺される．

コントア $A_1B_1B'_1A'_1A_1$ は (直交表示で見れば) 図のコントアに似ている．コントア $B_1M_1A_2$ $A'_2M'_1B'_1B_1$ は孤 $B_1M_1A_2$ とその弦から構成されている (つねに直交表示で)、等々．これらのコントアはすべて正である．孤 A_1B_1、$B_1M_1A_2$、等々が正だからである．

したがってコントア $C - C'$ は正である．これで 正の積分不変量がない ことが言えた．実際、I をそのような不変量とする．$I(R)$ は領域 R で積分したこの不変量とする．

コントア C と C' は (直交表示で) 平面をいくつかの領域 R_k に分割する．次のように置こう．

$$I(C) = \Sigma N_k I(R_k), \quad I(C') = \Sigma N'_k I(R_k).$$

ここで N_k は領域 R_k 内の点に関するコントア C の係数であり、N'_k はコントア C' の係数である (明らかにこの係数は、同一の領域 R_k に属する 2 つの点では同じである)．I は不変であるから次が成り立つはずである．

$$I(C) = I(C').$$

一方、コントア $C - C'$ は正であるから次を得る．

$$N_k \geq N'_k.$$

2 つのコントアは一致しないから、等式は領域すべてでは成り立たない．一方、不変量は正であるから次を得る．

$$I(R_k) > 0.$$

したがって、

$$I(C) > I(C').$$

これは矛盾である．

とくにコントア C が (円表示で) 二重点を持たなければ、その像 C' と交われない．それゆえ一方のコントアはもう一方のコントアの内部にある．これが、以下に述べる例の大部分において起こったことである．

コントア C と C' の他に、以下のように定義される別のコントア C'' と C''' を考えよう．コントア C'' は $X = c$ の孤を (直交表示で) その弦で置き換えてコントア C から得られる．コントア C''' はその変換曲線である．したがって次を得る．

C は $X = x$ の孤と $X = c$ の孤から成る．

C' は $(X) = x$ の孤と $x = c$ の孤から成る．
C'' は $X = x$ の孤と $x = c$ の孤から成る．
C''' は $(X) = x$ の孤と $(X) = c$ の孤から成る．

したがって、C と C' が T で結びついていたのと同様、コントア C''' と C'' は逆変換 T^{-1} で結びついている．実際、一方からもう一方に移るには X の役割を (X) がすればよいし、またその逆をすればよい．

次に、C を構成する孤がすべて同じ符号、たとえば正なら、C''' を構成する孤はすべて同じ符号であると言える．これが負であると言いたい．

A が C の孤で、たとえば正の曲線 $X = x$ に属していて上に巡るなら、その像 A' は C''' の一部であって上に巡る．しかし、T^{-1} に関してこれは負の曲線 $(X) = x$ に属する．実際 T による A の像 A' が A の右にあれば、T^{-1} による A' の像 A は A' の左にある．

次に AMB を $X = c$ の孤で C の一部をなすものとし、AB はその弦で C'' の一部であるとする．$A'M'B'$ および $A'B'$ をそれらの像でそれぞれ C' と C''' の一部をなすものとする．このとき AB と $A'M'B'$ は $x = c$ の一部であり、$A'B'$ は $(X) = c$ の一部である．それゆえ、直交表示で AB は AMB の弦であり、一方 $A'M'B'$ は $A'B'$ の弦である．このとき AMB とその弦によって構成されるコントア $AMBA$ が正であれば、像 $A'M'B'A'$ も正であり、孤 $A'B'$ とその弦で構成される逆コントア $A'B'M'A'$ は負である．

したがって、$C - C'$ が正なら $C'' - C'''$ も正であることが分かった．したがって C, C' と T を考えても、C''', C'' と T^{-1} を考えても同じである． **11．網目．**

以下のような仕方で構成される網目を考えよう．円表示で考える．曲線 $X = x$ に (頂点または底点において) 接する円 $x = c$ で境界円でないものを描く．このような円のそれぞれはさまざまな曲線 $X = x$ を横切り、そのうちのあるものに接する．各交点または各接点に網目の <u>駅</u> が対応する．この駅同士を確定孤に対応する道で結ぶ．確定孤については 9 節で述べた．例として、ある円 $x = c$ をこれから描いて考えよう．対応する曲線 $X = c$ の正および負の孤に対応する道をすべて描く．(したがってこの曲線のすべての基本孤に対応する道がある．これはすでに述べたようにすべて確定的である．この曲線の孤で端点がいま考えている高さで相続いている番号の孤すべてに対応する道がある．しかし一般に確定孤は他にもあるから別の道もある)．これは網目の <u>水平道</u> である．加えて、$x = c$ の駅を直接外側または直接内側の円の駅に曲線 $X = x$ の確定孤で端点の 1 つがこれらの駅のどれかにあるものに対応する <u>斜道</u> によって結びつける．

これらの道のそれぞれは一方向のみに巡ることができるように決める．つまり、正の孤に対応する向きかあるいは逆の向きに巡るかである．この 2 つのうちどちらを選ぶかは以下の通りである．$X = x$ の分枝で外側の境界円 $x = a$ に達するものはすべて同一符号であり (3 節参照)、一方 $x = b$ に達するものは逆の同一符号である．前者がすべて正なら道はすべて正の孤の向きに巡ると決める．反対符号の場合には逆向きとする．

したがって、$x = b$(直交表示で最も低い水準、円表示では内側の境界円に対応する) に達する斜道はすべて上昇方向に巡らねばならず、$x = a$ に達する斜道は下降方向に巡らねばならない．

われわれの定理が成り立つためには、すなわちコントア C が存在するためには、<u>指定された方向に網目の道を巡って出発点に戻れることを示せば十分である</u>．

以上のことから次の規則が得られる．網目の駅のうち、いくつかの道が到達するが、そこから道が出ていかないものを袋小路と呼ぶ．われわれの網目の上で袋小路をそれに到達する道とともにすべて取り去ってしまおう．このように修正された網目が元の網目にない袋小路を生じる可能性がある．誘導された袋小路にも元の網目の袋小路にしたのと同じ操作を行い、この操作が終わるまで繰り返し行なう．終わり方に 2 種類ある．

1° 誘導されたものであろうと元のものであろうと、もはやどんな袋小路もない網目に到達して止まる．この場合、いま考えている変換 T に関してわれわれの定理は成り立つ．実際、どれかの駅から出発してみよう．これは袋小路でないから、出発することは可能である．第二の駅に到着し、そこを出発することができる．すでに訪れた駅を再び訪れるまで、これを繰り返す．駅の数は有限なので、2 度目の訪問がある．こうして、道を指定された方向に巡って、閉じたコントアを描いた。このコントアがコントア C である．

2° 駅をすべて取り去って止まる．このとき、われわれの定理が成り立たないような変換 T を構成することができる．

したがって、われわれのすべき操作は以下の通りである．8 節の条件に従う曲線 $X = x$ をすべての可能な仕方で構成する．次に、いましがた定義した網目を構成し、この網目の上でいましがた述べた操作を行なう．このすべての場合に第一の状態に到達すれば、われわれの定理は成り立つ．ひとつでも例外があれば定理は成り立たない．

12．特別な場合．

第一の特別な場合．これから調べる第一の特別な場合は分布が正規な場合、すなわち、各曲線 $x = c$ とそれに対応する曲線 $X = c$ の交点が 4 節の意味で正規に分布している場合である．または、同じ事であるが、各分枝の番号がその席次と一致する場合である (したがって逆底点も逆頂点もない)．

この場合、われわれの網目は袋小路を持たず、したがって、コントア C を構成できることが言える．実際、ある曲線 $X = c$ を考えると、この曲線が含むのは、同時に一次的かつ最終的な基本弧であって交互に正と負であるような確定孤のみである (ただし $X = c$ を Y が増加する方向に巡ると約束して)．曲線 $x = c$ が曲線 $X = c$ に接しているとき、したがって曲線 $X = x$ に底点または頂点で接しているときは例外である．実際この場合、2 つの交点は一致し、この 2 点を結ぶ基本孤は消えてしまい、そのため同じ符号の弧が続くことになる．底点または頂点を横切る 2 本の水平道のうちひとつは遠ざかり、ひとつは近づくことが言える (?)

したがって底点でも頂点でもない駅上には袋小路はあり得ない (?)．なぜなら 2 つの斜道のうち 1 つは遠ざかっていくからである (?)．また水平道のうち 1 つは遠ざかっていくから底点にも頂点にも袋小路はない (?)． C.Q.F.D.

第二の特別な場合．2 種類の曲線 $X = x$ だけがあるとしよう．そのうち曲線 L は外側の境界円 $x = a$ に達し、曲線 K は $x = b$ に達しているとする．

曲線 L を端から端まで巡ったときに、出会う分枝の席次がいつも増加し、K を巡ったときも同様であるとする．(とくに直交表示で、L や K のどの点でも接線が鉛直にならないときにこうなる)．

このように仮定したとき、次のようにコントア C' を構成できる．L' と K' を曲線 L と K の像とする．曲線 L を左から右へ (直交表示で) 巡ったとき、たとえば下向きに巡れば分枝はすべて偶数であり (すなわち番号と席次が偶数)、上向きなら奇数である．これは曲線 K の場合

には逆である．

曲線 L は偶底点と奇頂点しか持ち得ない．したがって逆底点も逆頂点も持ち得ない．すなわち相続く番号は席次と同じ順番である．逆に、曲線 L 上で下降分枝が奇数で、曲線 K 上で偶数なら、曲線 K 上では番号が席次と同じ順番で並んでいる．ただし、第一の場合を考えよう．

このとき (つねに直交表示で) 曲線 L' は輝いていて、曲線 K' は不透明であるとする．曲線 L' は輝いているが、その各点はどちらの方向へも光を送り出せない．水平にだけ送り出せる (曲線 L が負で曲線 K が正のとき右へ、逆の場合左へ)．あたかも各点が小さな放物反射鏡を持っていて、平行光線の束を放射するようにすべてが起こる．この条件のもとで、平面の一部が照らされ、一部は影になる．影の境界がまさにコントア C' である．証明は長いのでここでは述べない．

第三の特別な場合．二種類の曲線 $X = x$ だけがある．曲線 L は $x = a$ に達し、曲線 K は $x = b$ に達する．これらの曲線のそれぞれの上を左から右に巡ると、出会う分枝の 番号 は増加する．

第二の場合が T に対してであったと同様、この第三の場合は T^{-1} に対するものである．したがって、たとえば曲線 K が不透明で、一方、曲線 L は水平方向適当な向きに光束を放射すると考えてコントア C'' を構成することができる (それから C と C' を導くことができる)．影の境界がコントア C'' である．

13．図の説明．

前節で調べた 3 つの場合は一般的な正確を持っていたが、それ以外にもたくさんの特別な場合を研究し、いつもコントア C, C', C'', C''' を構成するに至った．それをここですべて再現することは考えられない．いくつかの例を添付した図に示したが、説明が必要であろう．

直交表示で考える．この表示では y が $y + 2\pi$ に変わったとき同じ図が得られるから、曲線は周期的に現れる．ここでは 1 周期分しか表示しないが、補足するのは簡単である．

各図に示されるコントアはコントア C'' であって、水平線分で表される $X = x$ および $X = c$ の弧から成る．境界水平線 $x = a$ と $x = b$ はコントア C'' と同様実線で書いてある．一方、曲線 $X = x$ の部分で C'' の一部になっていないものは点線で書いてある．$X = x$ の各分枝のそばに書いてある数字はその番号である．$X = x$ の各曲線のそばに符号 $+$ または $-$ が書いてあるが、これは弧が正か負に応じている．

簡単に示せるように、8 節の 6 個の条件が各図において満たされている．1 番目の条件に関して言えば、なんらかの水平線で切れば、この水平線によって切られる分枝だけを考慮に入れると、ある順序の番号列が得られる．その結果、この番号の順番にしたがってこの水平線を横切る曲線を追っていけば、この曲線は自分自身と交わらない．

2 番目の条件に関して言えば、たとえば 14 図において、頂点 63 は分枝 6 および 3 とつながっているが、頂点 45 は高度が低く頂点 63 の水平線は分枝 4 および 5 と出会わず、そのためこの水準では番号 6 と 3 が相続いていることがわかる．

3 番目の条件の場合、たとえば 8 図に見るように、逆底点 98 は奇数であるが、逆頂点 87 は偶数である．

4 番目も 5 番目の条件も証明が簡単とは言えない．6 番目の条件の場合、例として 21 図を採ろう．分枝 8 と 7 は正であり、分枝 3、6、5、4 は負である．前者 2 つの席次はより小さい．けれどもこれは番号がもっとも大きな (また席次がもっとも小さい) 正の分枝であるから条件は

満たされている．

左から右へわれわれのコントアを巡ったとしてみよう．この条件の下で、C'' の一部をなす孤 $X = x$ と同じコントアの孤 $x = c$、あるいはむしろ対応する孤 $X = c$ はすべて確定的であり、同じ符号である．すなわち、

5 図から 7 図、10 図、11 図、18 図、20 図、23 図では正、

8 図から 9 図、12 図から 17 図、19 図、21 図、22 図、24 図では負．

実際、たとえば図 5 では正の分枝 $X = x$ は上昇方向に巡り、負の分枝は下降方向に巡ることがわかる．

一方、孤 $x = c$、またはむしろ対応する孤 $X = c$ はすべて確定的である．たとえば 5 図を考えよう．3 本の水平線がある．第一のものを 12 と呼ぶことにして、これは分枝 1 から 2 へ行く．2 番目は分枝 3 から 4 へ、3 番目は分枝 5 から出発する．そして、これを延長して、図に見える番号 0 の分枝と 1 周期異なる番号 6 の分枝 (図には示されていない) に行かせる．この水平線は図で A に達するが、これを完成させるには、これを 1 周期異なる別の水平線で、図で分枝 0 の点 B に達するものをつなぐ必要がある．これらの水平線はすべて基本孤に対応するから、確定的である．というのは、それらの端点の番号は相続いているから．これは図 8 でも同じである．たとえば水平線 25 の場合、分枝 3 と 4 を横切らないから番号 2 と 5 がこの高さで相続いている．

次に図 9 上で水平線 69 を考えよう．これを延長すれば、$X = x$ の分枝を横切るが、その交点はどれも 6 と 9 の間にない．したがって端点の席次はこの高さで相続いている．したがって対応する孤は確定的である．19 図では、分枝 1 と 1 周期異なる分枝を 13 として、分枝 10 から 13 に行く水平線 10.13 はふたたび確定孤に対応する．実際、端点 10 と 13 の間には交点 5 と 4 があるが、これらの番号は 10 と 13 の間に含まれない．その結果、対応する孤 $X = c$ は (直交表示で) その弦を横切らない．

これらのいろいろな弧の符号を決めることが残っている．例として 8 図を取り上げよう．孤 25 が負であるのは左から右に巡るからであり、2 が偶数で 5 より小さいからである．67 が負なのは右に向かって巡るからであり、6 が偶数で 7 より小さいからである．78 が負なのは左に向かって巡るからであり、7 が奇数で 8 より小さいからである．最後に 10，11 が負なのは 25 や 67 と同じ理由である．

5 図から 7 図は 12 節の 1 番目の特別な場合に対応する (正規分布)．8 図と 9 図は 12 節の 3 番目の特別な場合に対応する．この節で定義した影のコントアを容易に認めることができる．10、11、および 20 図は 12 節の 2 番目の場合に対応する．10、11 図は T から T^{-1} に移れば 8、9 図から導かれる．最後に、12、13 図は 島、すなわち、局所的に閉じた曲線 $X = x$ が邪魔をするときにどのように 12 節の影のコントアを修正すべきかを示している．

パリ、1912 年 3 月 7 日

図

図

図

図