谷川清隆 訳

*Dynamics Reported* **1** (1988), 1-56

# ねじれ写像のマザー集合とトーラス上の測地線

# Mather sets for twist maps and geodesics on tori

V. Bangert

**目次.**



## 序

この論文のタイトルは 3 つの異なる分野, 微分幾何学, 力学系および固体物理における独立な研究, しかも最近の数年間ますます興味を惹き活発になっている研究を頭に描いている. この理論の対象はそれぞれ次の通りである.

(1) リーマン計量 (または対称フィンスラー計量) を持つ 2 次元トーラス上の測地線.
(2) 円環の単調ねじれ写像の力学.
(3) 離散 Frenkel-Kontorova モデル.

ケース (1) の結果はそれぞれ 1932 年および 1924 年の Hedlund[26] および Morse[43] にまで遡るが, ケース (2) では Mather[35] により, ケース (3) では Aubry-LeDaeron[4] により, 最近独立に結果が得られたばかりである.

この論文の主目的は, 完全な証明も含めてこれらの結果を概観することであり, また (1)-(3) の問題の関係と相違点を記述することにある. 証明を同じ根に属するようにするため, 変分問題を導入し, これをそれぞれの場合に解釈する. ここで述べる結果の大部分はすでに発表され

た文献に記載されているが, ひとつだけ特記すべき例外がある．すなわち, 測地線の結果に関する部分, とくに定理 (6.9) と (6.10) は新しい．これによって Morse および Hedlund の仕事はある程度完成した．(1) と (3) の関係が判れば, これらの結果は Aubry-LeDaeron[4] から出る．

歴史的な観点からすれば, 幾何学的な問題設定において, Hedlund と Morse は 50 年後に Aubry や Mather がそれぞれの分野で得た結果の多くを予期していたと思われる．しかし Hedlund の結果はまったく広まらなかった．おそらく, いまや問題の核心部分と思われている軌跡の順序性 (測地線の場合は自己交差のないこと) がかれの仕事にあからさまに現われて来なかったからであろう．

ケース (1) では測地線を調べる．これをトーラスの普遍被覆上で考えると, その任意の 2 点の間の孤長は極小である．幾何学的には, この極小測地線はもっとも自然で興味深いものである．Hedlund[26] と Morse[43] の結果を記述してそれを拡張し, 極小測地線の集合を詳しく記述する．平坦な場合, 普遍被覆はユークリッド平面であり, 極小測地線はアフィン直線である．幾何学的に面白いのは直線の性質の多くが極小測地線へ一般化できることである．

ケース (2) では境界成分を保存する面積保存単調ねじれ写像 $\varphi : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ を調べる．このような写像は自由度 2 のハミルトン系の横断面写像としてしばしば現われる．タイトル中の「マザー集合」は $S^1 \times [0,1]$ の特別な $\varphi$ 不変部分集合である．この集合の面白さを説明するために, このような写像の基本的力学問題を簡単に概観しよう．$S^1 \times \{0\}$ と $S^1 \times \{1\}$ を分ける $\varphi$ 不変な閉曲線を見つけたい．このような曲線 $C$ の存在は系 $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ の安定性に関係する．つまり $\varphi$ のどの軌道も $C$ の一方の側にいて, 軌道は決して一方の境界からもう一方へは行かない．実のところ逆も成り立つ．つまり, このような不変曲線がなければ, $p \in S^1 \times (0,1)$ があって $\varphi^n(p)$ は $n \to -\infty$ のとき $S^1 \times \{0\}$ に収束し, $n \to +\infty$ のとき $S^1 \times \{1\}$ に収束する．バーコフの定理 (例えば [28], I, 3 節参照) のこの拡張は Mather が変分的発想を改良して証明した．これもこの論文で記述する．もっとも単純なねじれ写像は可積分ねじれ写像である．この場合, 円環は閉不変曲線が葉層を為し, 各曲線の上で $\varphi$ は回転として作用する．KAM 理論によれば, 可積分な $\varphi_0$ に十分 $C^k$ 近接な写像 $\varphi$ では不変曲線の多くが生き残っている．もっと詳しく言うと, $\alpha$ が有理数によって急速に近似されない限り, 不変曲線があって $\varphi$ はこの曲線の上で $\alpha$ の回転に共役である．厳密な定式化に関しては [44], p.52($k \geq 5$) または [28], IV, 5 節 ($k \geq 3+\varepsilon$) を参照されたい．一方両側の境界を分離する不変曲線がないような例もある (たとえば (7.10) 参照)．だから積分可能系から離れすぎると不変曲線は破壊され, 無理数回転数 $\alpha$ の不変曲線の残骸としてマザー集合 $M_\alpha$ がもっとも重要なものである．これらは「リプシッツ・カントール曲線」である．詳しく言えば, $M_\alpha = \{(\xi, \Psi_\alpha(\xi)) \mid \xi \in A_\alpha\}$ である．ただし, $A_\alpha$ はカントール集合であり, $\Psi_\alpha : A_\alpha \to (0,1)$ はリプシッツである．[35] の結果 ([31] も参照) のもう一つの証明を与える．9 節では, [36] で得られたものに強く関係する例を構成する．

(3) の場合, 固体物理の 1 次元モデルの極小エネルギー配置 Frenkel-Kontorova モデルを調べる．8 節で簡単な導入を行なう．3 - 5 節で述べる結果は [4] で証明されたものと一致する．証明は異なるが精神は同じである．やや弱い仮定を使う．

いくつかの技術的な問題を除いて (2) と (3) の力学の同値性はよく知られている．[4] および [40] 参照．母関数による (2) の軌道の記述に基づいている．(1) と (2) あるいは (3) の関係はそれほど明らかでなく, よく知られていない．一般に円環の面積保存写像によってトーラスの測地流を記述できるような断面を見つけることができない．しかし, (3) のものに似た変分原理によって極小流れを特徴づけることはできる．詳しいことおよびそれに関するコメントについ

ては1節, 6節や7節の終わりを参照して欲しい.

これらの結果の証明はすべて初等的ではあるが, 分かりやすくないし, ときにトリックを用いる. 鍵となる材料は変分原理の $\mathbf{Z}^2$ 周期性であり, また軌道が配位空間において余次元1であるために順序の議論ができる事実である.

最後に論文の構成について述べよう. 1節で基本的変分原理を定義し, それを応用 (1) - (3) とどのように適合させるかを概説する. 2節では Denjoy の円同相写像理論からいくつか初等的事実をもってくる. 3 - 5節では変分原理の極小軌跡に関する結果を証明する. これらの結果を6節で極小測地線に適合させ, 7節でねじれ写像のマザー集合に適合させる. 8節では Frenkel-Kontorova モデルを簡単に記述し3 - 5節の結果を物理用語に翻訳するための辞書を用意する. 9節では幾何学的な例および関係する結果を与える. 最後の節では最近の発展のいくつかを簡単に概観する. 1 - 5節は初等的であって, 2節の円写像に関する簡単な事実を除いて自己充足的である. 6, 7および9節では測地線および面積保存写像に関する知識が少し必要である.

## 1. 変分問題

この節では3 - 5節で調べる変分問題を定義する. それに続いて, 抽象的な問題設定を動機づけるため, 序で述べたもっと具体的な問題をこの枠組みにどのように合わせるかを手短かに示す.

いくつかの記法を固定することから始めよう. 積位相を有する実数の両無限列の空間 $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}} = \{x | x : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}\}$ を考える. 要素 $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ を $(x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ とも書き, ときに軌跡と呼ぶ. 列 $x^n \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ が $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ に収束するとはすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$ が成り立つことである. チホノフの定理の以下のような単純版をしばしば利用する. その証明は対角線論法でできる.

(1.1) どの $a \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ に対しても集合 $\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} \mid$ すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $|x_i| \le a_i\}$ はコンパクトである.

関数 $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が与えられたとき, 軌跡 $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ の任意の有限切片 (segment) $(x_j, \ldots, x_k)$, $j < k$ へと

$$H(x_j, \ldots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} H(x_i, x_{i+1})$$

によって $H$ を拡張する. 切片 $(x_j, \ldots, x_k)$ が $H$ に関して <u>極小</u> であるとは,

$$H(x_j, \ldots, x_k) \le H(x_j^*, \ldots, x_k^*)$$

が $x_j = x_j^*$ かつ $x_k = x_k^*$ なるすべての $(x_j^*, \ldots, x_k^*)$ に対して成り立つときである. われわれに興味があるのは以下の「大域的」極小条件である.

(1.2) **定義.** $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ が ($H$ に関して) <u>極小</u> であるのは $x$ のどの切片も ($H$ に関して) 極小のときである.

極小軌跡 $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ の集合を $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$ と書く. 3 - 5節の目的は $\mathcal{M}$ をかなり完全に記述することである.

明らかに, 結果を得るためには $H$ にいくつか条件を課す必要がある. 全体を通して $H$ は連続であるとし, 以下の条件 $(H_1) - (H_4)$ を満たすとする. これらの条件の動機づけもすぐに述

べる．

$(H_1)$ 「周期性条件」: すべての $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$ に対して $H(\xi+1,\eta+1)=H(\xi,\eta)$.

$(H_2)$ 「無限遠での条件」: $\xi$ に関して一様に $\lim_{|\eta|\to\infty} H(\xi,\xi+\eta)=\infty$.

$(H_3)$ 「順序性条件」: $\underline{\xi}<\overline{\xi},\underline{\eta}<\overline{\eta}$ なら

$$H(\underline{\xi},\underline{\eta})+H(\overline{\xi},\overline{\eta})<H(\underline{\xi},\overline{\eta})+H(\overline{\xi},\underline{\eta}).$$

$(H_4)$ 「横断性条件」: $(x_{-1},x_0,x_1)\neq(x^*_{-1},x^*_0,x^*_1)$ がともに極小で $x_0=x^*_0$ なら $(x_{-1}-x^*_{-1})(x_1-x^*_1)<0$.

(1.3) **注意．** $H$ が $C^2$ で $(H_1)$ を満たし $D_2D_1H\le-\delta<0$ なら $(H_2)$ - $(H_4)$ は $D_2D_1H\le-\delta$ から出る．すなわち
$(H_2)$ を得るには頂点を $(\xi,\xi),(\xi,\xi+\eta),(\xi+\eta,\xi+\eta)$ とする三角形の上で積分すればよく, $(H_3)$ を得るには四角形 $(\underline{\xi},\underline{\eta}),(\overline{\xi},\underline{\eta}),(\underline{\xi},\overline{\eta}),(\overline{\xi},\overline{\eta})$ 上で積分すればよい．$(H_4)$ は $\eta\to D_1H(\xi,\eta)$ および $\xi\to D_2H(\xi,\eta)$ の単調性から出る．

**定義．** $H\in C^2$ なら, $x\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ が停留 (stationary) であるとはすべての $i\in\mathbf{Z}$ に対して $D_2H(x_{i-1},x_i)+D_1H(x_i,x_{i+1})=0$ のときである．

明らかに各 $x\in\mathcal{M}$ は $H$ に関して停留である．
次の例は応用上, 平坦または可積分の状況に対応する.

(1.4) **例．** $H(\xi,\eta)=h(\xi-\eta)$ とする．ただし $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は狭義凸, すなわち $h''>0$ である．このとき $x=(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ が停留なのは

$$h'(x_{i-1}-x_i)=h'(x_i-x_{i+1})\quad\text{for all}\quad i\in\mathbf{Z},$$

のときである．ゆえにどの $x_0\in\mathbf{R}$ および $\alpha\in\mathbf{R}$ に対しても, 停留軌跡 $x_i=x_0+i\alpha$ があり, またどの停留軌跡もこの型である．これから容易にすべての停留軌跡が実は極小であることが出る (定理 (7.7) 参照).

われわれの結果はすべて極小軌跡の順序性に依存し, また極小性を保存する $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ 上の $\mathbf{Z}^2$ 作用に依存する．関係する概念を定義する．以下によって $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ は半順序づけられる．

$$x<x^*\text{であるための必要十分条件はすべての}\,i\in\mathbf{Z}\,\text{に対して}\,x_i<x^*_i.$$

(1.5) **定義．** $x\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ と $x^*\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ は
(a) $x_i=x^*_i$ かつ $(x_{i-1}-x^*_{i-1})(x_{i+1}-x^*_{i+1})<0$ なら $i\in\mathbf{Z}$ で交わる．
(b) $(x_i-x^*_i)(x_{i+1}-x^*_{i+1})<0$ なら $i$ と $i+1$ の間で交わる．

横断性条件 $(H_4)$ によれば, 軌跡 $x,x^*\in\mathcal{M}$ は交わるか比較可能 ($x<x^*$ または $x=x^*$ または $x>x^*$) である．次のような描像を持つことは有益である．すなわち, 各 $x\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ はそのグラフ $\{(i,x_i)\mid i\in\mathbf{Z}\}\subset\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\subset\mathbf{R}^2$ と同一視できる．
$x\in\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ のグラフの相続く点を $\mathbf{R}^2$ の線分で結べば $\mathbf{R}^2$ 内の曲線が得られる．$x$ と $x^*$ が交わるのは, 対応する曲線が交わるときかつそのときのみである (図 1).
とくに, どのように交点の数を数えるかは明らかである．関係する概念として次がある．

図 1

(1.6) **定義.** $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ と $x^* \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ は

$\lim_{i\to-\infty} |x_i - x_i^*| = 0$ なら$\alpha$漸近であり,
$\lim_{i\to\infty} |x_i - x_i^*| = 0$ なら$\omega$漸近であり,
$\alpha$漸近かつ$\omega$漸近なら漸近である.

順序保存同相写像による $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ 上の群 $\mathbf{Z}^2$ の作用 $T$ がある．すなわち, $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ および $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ なら次が成り立つ.

$$T_{(a,b)}x = x^* \quad \text{ただし} \quad x_i^* = x_{i-a} + b$$

$x$ への $T_{(a,b)}$ の作用は $\mathrm{graph}(x) \subseteq \mathbf{R}^2$ の $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ だけの平行移動に対応する．同様に, 切片間の交差について, また $T_{(a,b)}$ が $j$ から $k$ への切片を $j+a$ から $k+a$ への切片に写すことについて語ることができる.

応用では, $T$ 軌道 $\{T_{(a,b)}x | (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$ の要素は同一視される．このことは次を動機づける.

(1.7) **定義.** $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ が周期 $(q,p) \in (\mathbf{Z}\backslash\{0\}) \times \mathbf{Z}$ で周期的なのは $T_{(q,p)}x = x$ のときである.

周期的 $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ の周期は $\mathbf{Z}^2$ の巡回 (cyclic) 部分群の非自明な要素である．その生成子は $x$ の素周期と呼ばれる.

ここでいくつかの初等的事実を述べよう．これは定義から直ちに得られ, 今後引用なしに利用する．周期性条件 $(H_1)$ の帰結として, どの切片 $x = (x_j, \ldots, x_k)$, $k > j$ およびどの $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ に対しても $H(x) = H(T_{(a,b)}(x))$ である．とくに $T_{(a,b)}$ は極小切片を極小切片に写し, $\mathcal{M}$ をそれ自身の上に写す．$H$ の連続性から $\mathcal{M}$ は $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ 内で閉じている．無限遠での条件 $(H_2)$ を使えば, すべての $(\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2$ およびすべての $j < k$ に対して, $x_j = \xi, x_k = \eta$ なる極小切片 $(x_j, \ldots, x_k)$ が存在することを証明できる．$(x_j, \ldots, x_k)$ が極小なら, $l \geq j, m \leq k$ なる部分切片 $(x_l, \ldots, x_m)$ はどれも極小である.

次に序で述べた問題がどのように $(H_1)$ – $(H_4)$ を満たす関数を生じるかを記述する．詳細は 6-8 節に譲る．もっとも直観的ではあるが技術的にもっとも込み入った場合から始めよう.

### トーラス上の測地線

$g$ はトーラス $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ のリーマン計量であるとする．すなわち, $g$ は $\mathbf{R}^2$ 上の $\mathbf{Z}^2$ 周期的リーマン計量であるとする．非定数測地線 $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ が <u>極小</u> と言われるのはどの区間

$[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ に対しても $c$ の切片 $c|[a,b]$ が $c(a)$ と $c(b)$ を結ぶ最短曲線のときである．だから定義より, $\tilde{d}$ を $g$ によって誘導される $\mathbf{R}^2$ 上の距離として, $\mathrm{length}_g(c|[a,b]) = \tilde{d}(c(a), c(b))$ である．極小測地線は最初に Morse[43](種数 $> 1$ のコンパクトな曲面を覆う計量に対して) によって研究され, いま考えている場合は Hedlund[26] によって研究された．$g$ がユークリッド的 (つまり $g =$ 一定) なら, 測地線 (直線) はすべて極小であって, これから示すように, 直線の定性的性質の多くが任意の $\mathbf{Z}^2$ 周期的 $g$ に関する極小測地線に持ち込まれる．$(H_1) - (H_4)$ を満たす関数 $H$ を捜して, $\mathcal{M}$ が極小測地線集合に対応するようにする．最初の段階で, $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上の新しい座標を導入して座標線 $s \to (i,s), i \in \mathbf{Z}$ が極小測地線になるようにできることを示す．これはそれほど明らかではない．6 節の議論を参照して欲しい．このとき次を定義する．

$$H(\xi, \eta) = \tilde{d}((0, \xi, ), (1, \eta)). \tag{1.7}$$

ここで $p, q \in \mathbf{R}^2$ に対して次が成り立つ．

$$\tilde{d}(p,q) = \inf\{\mathrm{length}_g(\gamma) \mid \gamma \text{は } p \text{ から } q \text{ までの曲線}\}.$$

この $H$ は連続であるが, 一般に必ずしもいたるところ微分可能ではない．すなわち, $\{0\} \times \mathbf{R}$ を $\{1\} \times \mathbf{R}$ に結ぶ測地線上の共役点の存在から $H$ の 1 階微分に不連続性がもたらされる．ユークリッド的な場合, $H(\xi, \eta) = h(\xi - \eta) = \sqrt{[1 + (\eta - \xi)^2]}$ である．一般に, $H$ は $(H_1)$ を満たす．$(0,1) \in \mathbf{Z}^2$ だけの平行移動は $g$ の等長写像 (isometry) だからである．性質 $(H_2) - (H_4)$ は座標系の選択の仕方からでる (6 節参照)．次式に注意しよう．

$$H(x_j, \ldots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} \tilde{d}((i, x_i), (i+1, x_{i+1})). \tag{1.8}$$

これが成り立つのは, $\mathbf{Z}^2$ 不変性より, $\tilde{d}((i, x_i), (i+1, x_{i+1})) = \tilde{d}((0, x_i), (1, x_{i+1}))$ だからである．ゆえにどの極小軌跡 $x \in \mathcal{M}(H)$ も, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して点 $(i, x_i)$ を通る極小測地線を決める．(1.8) より, $(i, x_i)$ から $(i+1, x_{i+1}), i \in \mathbf{Z}$ への極小測地線の切片 $c_i$ はひとつのつながった極小測地線 $c$ をなす．

逆に, 極小測地線 $c(s) = (\xi(s), \eta(s))$ と直線 $\{i\} \times \mathbf{R}, i \in \mathbf{Z}$ との交点は, $\xi(s)$ が全射であるとして, ある $x \in \mathcal{M}(H)$ を決める．この最後の条件はなんらかの座標変換 $(\xi, \eta)$ によってつねに満たされる (図 2).

図 2

だから極小測地線の研究は$\mathcal{M}(H)$の研究と同値である．この測地線的解釈では, 3-5 節の証明の大部分は, 測地線の切片を角度$\neq \pi$でつなぎ合わせてできた曲線は両端をつなぐ最短の道では有り得ないという単純な事実に依存している．

**単調ねじれ写像**

多かれ少なかれ定義より, 面積保存単調ねじれ写像$\varphi : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$は次のような仕方で母関数$H : D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$によって記述できる．

$$\varphi(x_0, y_0) = (x_1, y_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -D_1 H(x_0, x_1) = y_0 \\ \quad D_2 H(x_0, x_1) = y_1 \end{cases} \tag{1.9}$$

ここで$D$は$\mathbf{R}^2$内の閉帯であって, $(1,1) \in \mathbf{Z}^2$だけの平行移動で不変であり, $H \in C^2$は$(H_1)$を満たし$D_2 D_1 H \leq -\delta < 0$である．$H$を$\mathbf{R}^2$全体に$C^2$拡張して$(H_1) - (H_4)$を満たすようにできる ((1.3) および 7 節参照)．(1.9) は次を意味する．すなわち, 軌道$(\varphi^i(x_0, y_0))_{i \in \mathbf{Z}}$は$H$に関する停留軌道$x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$で$(x_0, x_1) \in D$を満たすものに 1-1 対応である．$\varphi$の軌道で極小軌道に対応するものをこれから議論する．これらは$S^1 \times \{0\}$を$S^1 \times \{1\}$から分離する$\varphi$不変な円を成すか, あるいは序で述べたカントール集合を成す．$H(\xi, \eta) = h(\xi - \eta)$なら, 第二の座標が$\varphi$の積分であること, つまり, すべての$y \in [0,1]$に対して$\varphi(S^1 \times \{y\}) = S^1 \times \{y\}$であることを意味する．ゆえに$S^1 \times [0,1]$は不変円によって葉層されている ((7.5)(a) 参照)．この場合, 変分原理は興味深い軌道を整頓する (sort out) 単なる道具であって, ほかの場合には極小性それ自身に意味がある．

**離散 Frenkel-Kontorova モデル**

これは 1 次元結晶の簡単なモデルである．すなわち, 1 次元両無限粒子ばねが$i$番目の粒子の位置$x_i \in \mathbf{R}$で記述される．だから$\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$は「モデルの状態」すべての集合である．すべての$i \in \mathbf{Z}$に対して, $i$および$i+1$番目の粒子はばねポテンシャル$\frac{1}{2} C (x_{i+1} - x_i)^2$で結合している．ここで$C > 0$は$i \in \mathbf{Z}$に依らない．その上, 周期ポテンシャル$V(\xi) = V(\xi + 1)$が粒子に$-V_i(x_i)$なる力を及ぼす．次を定義する．

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(C(\xi - \eta)^2 + V(\xi) + V(\eta)). \tag{1.10}$$

すると$H$に関する停留軌道は, まさにモデルの平衡状態である．明らかに$H$は$(H_1)$を満たしまた$D_2 D_1 H = -C < 0$であるから, (1.3) より$(H_1) - (H_4)$を満たす．物理の言葉で言えば, 調べたい極小軌跡$x \in \mathcal{M}(H)$は「極小エネルギー配置」である．ゆえにこの場合, 状態が極小エネルギー配置にあるのは, 相隣る粒子の距離が$i \in \mathbf{Z}$に依存しないときまたそのときのみである．

## 2．円同相写像の基本事実

3 節では, どの極小軌跡も円同相写像の軌道であることを証明する．この節では極小軌跡をもっと詳しく記述するために使われる円同相写像に関する初歩的な結果のいくつかを与える．

まず Denjoy 理論の基礎を概観する．詳しい定式化は以下で与える．$G_+$は円$S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$の方向保存同相写像の群を表わすとする．どの$\varphi \in G_+$に対しても, ポアンカレ回転数$\alpha(\varphi) \in S^1$を定義する．これは幾何学的には$\varphi$が$S^1$を「回転」させる「平均角度」と解釈できる．無理数の$\alpha(\varphi)$を持つ同相写像$\varphi \in G_+$は有理数の$\alpha(\varphi)$を持つものとは激しく異なる．$\alpha(\varphi) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$のた

めの必要十分条件は $\varphi$ が周期点を持つことである．$\alpha(\varphi)$ が無理数なら, どの軌道 $\{\varphi^i(z)|i \in \mathbf{Z}\}$ の極限集合も一意の最小の空でない $S^1$ の $\varphi$ 不変部分集合である．すなわち, $\varphi$ の一意の極小集合である．これを $\mathrm{Rec}(\varphi)$ と表わし, 点 $z \in \mathrm{Rec}(\varphi)$ を回帰的と呼ぶ．2 つの可能性がある．

(i) どの軌道も $S^1$ 内で稠密である．すなわち $\mathrm{Rec}(\varphi) = S^1$．これが生じるのは, $h \in G_+$ があって $h \circ \varphi \circ h^{-1}$ が $\alpha(\varphi)$ だけの回転であるとき, またそのときのみである．
(ii) $\mathrm{Rec}(\varphi)$ はカントール集合である．

Denjoy の定理 ([19] 参照) より, ケース (i) が起こるのは $\varphi$ が $C^1$ 微分同相写像であって $\varphi'$ が有界変動のときである．しかし, われわれの応用の場合, 第二の場合の頻度が多い．

ここでも, また 4, 6, 7 節でも回帰性に関するバーコフ [9] の概念 (コンパクトな場合, これは極小集合の要素を意味する) は今日ほとんどの場合に使われる (一般にもっと弱い) 回帰性の概念と一致することに注意しよう．今日では, 点 $p$ が回帰的であるとは, $p$ が $\mathrm{orbit}(p)\backslash\{p\}$ の閉包に属するときである．

これからこれらの結果のいくつかをわれわれの応用にふさわしい形に詳しく定式化する．もっと詳しくまた証明を知りたい場合には [1], 3. 11 節または [21], 27.2 を参照されたい．実は, 以下の補題 (2.3) の証明はこれらの陳述のいくつかをも証明している．

$$\tilde{G}_+ = \{f | f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ は連続, 狭義単調で}, f(x+1) = f(x) + 1\}$$

は同相写像 $\varphi \in G_+$ の $\mathbf{R}$ への持ち上げ群を表わすとする．ポアンカレ回転数 $\alpha : G_+ \to S^1$ は次式で定義される持ち上げ $\tilde{\alpha} : \tilde{G}_+ \to \mathbf{R}$ を持つ．

$$\tilde{\alpha}(f) := \lim_{|i| \to \infty} \frac{f^i(x)}{i}. \tag{2.1}$$

この極限は存在し $x \in \mathbf{R}$ に依存しない．もっと正確に言うと, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して, 周期関数 $r_i(x) := f^i(x) - x - i\tilde{\alpha}(f)$ は次を満たす．

$$|r_i(x)| < 1 \quad \text{および} \quad r_i(x_0) = 0 \text{ なる } x_0 \in \mathbf{R} \text{ が存在する}. \tag{2.2}$$

とくに (2.1) と (2.2) は $\tilde{\alpha}(f) = (p/q) \in \mathbf{Q}$ のための必要十分条件は, $x_0 \in \mathbf{R}$ が存在して $f^q(x_0) = x_0 + p$ であることを意味している．$\tilde{\alpha}(f) \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ なら次を定義する．

$$\mathrm{Rec}(f) = \{f^i(x) + k | (i,k) \in \mathbf{Z}^2\} \text{ の集積点の集合}.$$

$\mathrm{Rec}(f)$ は $x \in \mathbf{R}$ の選び方に依らず, $(i,k)$ が $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ に属するように制限すれば同じ集合を得る．$\mathrm{Rec}(f)$ は周期的カントール集合であるか, $\mathrm{Rec}(f) = \mathbf{R}$ である．$f$ が $\varphi \in G_+$ の持ち上げなら, $\mathrm{Rec}(f)$ は $\mathrm{Rec}(\varphi)$ に射影される．

次の補題は 4 節で決定的に使われる．

(2.3) **補題．** $f_0 \in \tilde{G}_+, f_1 \in \tilde{G}_+$ および $\tilde{\alpha}(f_0) = \tilde{\alpha}(f_1) = \alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ を仮定する．このとき $\mathrm{Rec}(f_0) = \mathrm{Rec}(f_1)$ および $f_0|\mathrm{Rec}(f_0) = f_1|\mathrm{Rec}(f_1)$ であるか, あるいは $x_0 \in \mathrm{Rec}(f_0)$ および $x_1 \in \mathrm{Rec}(f_1)$ が存在して軌道 $(f_0^i(x_0))_{i \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ と $(f_1^i(x_1))_{i \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ は無限回交わる．

証明. 無理数回転角 $\alpha$ を持つ同相写像 $f \in \tilde{G}_+$ の以下の基本的性質を使う. すなわち, どの $x_0 \in \mathbf{R}$ に対しても, 写像

$$j\alpha + k \to f^j(x_0) + k \quad (j,k) \in \mathbf{Z}^2$$

は狭義単調である ([21], 系 27.2.2 参照). 対応する $\varphi \in G_+$ に対して, $\varphi$ の各軌道が, 角度 $\alpha$ の $S^1$ の回転軌道と同じ順序で並んでいることをこれは意味する. 関数 $x^+(f, x_0) = x^+ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ および $x^- : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を次式で定義する.

$$x^+(t) = \inf\{f^j(x_0) + k \mid j\alpha + k > t\},$$
$$x^-(t) = \sup\{f^j(x_0) + k \mid j\alpha + k < t\}.$$

$\{j\alpha + k | (j,k) \in \mathbf{Z}^2\}$ が $\mathbf{R}$ 内で稠密であることを使えば, $x^+$ と $x^-$ の以下の性質を証明することは容易である.

(a) $x^+$ と $x^-$ は狭義単調である.
(b) $x^+$ は右から連続であり, $x^-$ は左から連続である.
(c) $x^+$ と $x^-$ は同じ点で連続であり, その点で一致する.
(d) $x^\pm(t+1) = x^\pm(t) + 1$.
(e) $f \circ x^\pm(t) = x^\pm(t + \alpha)$.
(f) $\mathrm{Rec}(f) = x^+(\mathbf{R}) \cup x^-(\mathbf{R})$.

$x^+$ と $x^-$ が連続でなければ, (a) と (e) より, $\mathbf{R}$ の可算稠密な部分集合上で跳びを持つ. $x^+ = x^- =: x$ が連続なら, (a), (d), (e) より, $x \in \tilde{G}_+$ かつ $(x^{-1} \circ f \circ x)(t) = t + \alpha$ である. すなわち, $x$ は $f$ を $\alpha$ の回転 (の持ち上げ) に共役にする.
そこで $f_0$ および $f_1$ に対して上のような $x_0^\pm$ と $x_1^\pm$ を選ぶ. 2 つの可能性がある.

(1) $c \in \mathbf{R}$ があって $x_0^-(t+c) - x_1^-(t)$ は符号を変える.
(2) すべての $c \in \mathbf{R}$ に対して, 関数 $x_0^-(t+c) - x_1^-(t)$ は符号を変えない. すなわち, $t_0 \in \mathbf{R}$ および $x_0^-(t_0+c) < x_1^-(t_0)$ ならすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $x_0^-(t+c) \le x_1^-(t)$ である.

(1) の場合, $f_0$ と $f_1$ の軌道があって無限回交わる. (b) と (d) より, 開区間 $I_1 \neq \emptyset$ と $I_2 \neq \emptyset$ があって次を満たす.

$$(*) \qquad \begin{array}{l} x_0^-(t+c) < x_1^-(t) \quad \text{if} \quad t \in I_1 \mod \mathbf{Z} \\ x_0^-(t+c) > x_1^-(t) \quad \text{if} \quad t \in I_2 \mod \mathbf{Z} \end{array}$$

$x_0 = x_0^-(c)$ および $x_1 = x_1^-(0)$ を定義する. (f) より, $x_0 \in \mathrm{Rec}(f_0)$ および $x_1 \in \mathrm{Rec}(f_1)$ を得る. (e) より次を得る.

$$f_0^j(x_0) = x_0^-(c + j\alpha), \quad f_1^j(x_1) = x_1^-(j\alpha),$$

$\{j\alpha + k | (j,k) \in \mathbf{Z}^2\}$ が $\mathbf{R}$ 内で稠密であるから, 無限に多くの $j \in \mathbf{N}$ があって $j\alpha \in I_1 \mod \mathbf{Z}$ であり, 無限に多くの $j \in \mathbf{N}$ があって $j\alpha \in I_2 \mod \mathbf{Z}$ である. $(*)$ によれば, これは $(f_0^j(x_0))_{j\in\mathbf{Z}}$ と $(f_1^j(x_1))_{j\in\mathbf{Z}}$ が無限回交わることを意味する.
最後に, (2) の場合, 関数 $x_0^\pm$ と $x_1^\pm$ が位相の不定性を除いて一致することを証明しよう. 次のように置く.

$$c_0 = \sup\{c \mid x_0^-(t+c) \le x_1^-(t) \text{ for all } t \in \mathbf{R}\}.$$

(b) によれば, すべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $x_0^-(t+c_0) \le x_1^-(t)$ である．$x_0^-$ が $t_0+c_0$ において連続で $x_0^-(t_0+c_0) < x_1^-(t_0)$ なら, $c_1 > c_0$ があって $x_0^-(t_0+c_1) \le x_1^-(t_0)$ である．(2) より, これは $c_0$ の定義に矛盾する．ゆえに $x_0^-$ が $t+c_0$ に関し連続である限り, $x_0^-(t+c_0) = x_1^-(t)$ である．すると (a), (b) および (c) より, $x_0^\pm(t+c_0) = x_1^\pm$ がすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して成り立つ．最後に, (e) と (f) によれば, この場合, 主張のうち, 最初のものが成り立つ． □

## 3．極小軌跡の回転数

この節では, どの周期 $(q,p) \in (\mathbf{Z}\backslash\{0\}) \times \mathbf{Z}$ に対しても周期的 $x \in \mathcal{M}$ が存在することをまず証明する．すると, どの $x \in \mathcal{M}$ もなんらかの円写像 $f \in \tilde{G}_+$ の軌道であることがわかる．これにより, どの $x \in \mathcal{M}$ に対しても回転数を定義できる．最後に, どの実数もある $x \in \mathcal{M}$ の回転数になっていることを証明する．

証明は, 次に示す性質 $(H_3)$ および $(H_4)$ の簡単な, しかし基本的な帰結に決定的に依存する．

(3.1) **補題．** 極小軌跡同士は高々一度しか交わらない．$x \in \mathcal{M}$ および $x^* \in \mathcal{M}$ が $i \in \mathbf{Z}$ で一致するなら, $x$ と $x^*$ は $i \in \mathbf{Z}$ で交わる．

注意. (1) 極小切片に関しても同様の主張が成り立つ．

(2) 測地線に関しては, (3.1) の最初の主張は以下のよく知られた事実に対応する．すなわち, 同一点から出て交わる 2 本の測地線は最初の交点を越えて最短では有り得ない．

証明. 第二の主張は横断性条件 $(H_4)$ から出る．最初の陳述を証明するために $x$ と $x^*$ が $j$ と $j+1$ の間および $k$ と $k+1, j<k$ の間で交わるとする (Fig.3).

Fig.3

片方または両方の交差が整数点で生じる場合も同様に取り扱える (補題 (3.9) の証明参照). 切片 $(x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_k, x_{k+1})$ と $(x^*_j, x_{j+1}, \ldots, x_k, x^*_{k+1})$ を考える. 順序性条件 $(H_3)$ を使えば次が判る.

$$
\begin{aligned}
H(x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_k, x_{k+1}) &+ H(x^*_j, x_{j+1}, \ldots, x_k, x^*_{k+1}) \\
&= H(x_j, x^*_{j+1}) + H(x^*_{j+1}, \ldots, x^*_k) + H(x^*_k, x_{k+1}) \\
&\quad + H(x^*_j, x_{j+1}) + H(x_{j+1}, \ldots, x_k) + H(x_k, x^*_{k+1}) \\
&< H(x^*_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_{k+1}) + H(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k+1})
\end{aligned}
$$

これは切片 $(x_j, \ldots, x_{k+1})$ $(x^*_j, \ldots, x^*_{k+1})$ のうち少なくとも一方の極小性に矛盾する. □

補題 (3.1) の簡単な帰結として次を得る.

(3.2) **系.** $x \in \mathcal{M}$ および $x^* \in \mathcal{M}$ が同じ周期で周期的なら $x$ と $x^*$ は交わらない. $x \in \mathcal{M}$ が極小周期 $(q, p)$ で周期的なら $q$ と $p$ は互いに素である.

証明. $x$ と $x^*$ が同一の周期を持ち, 一度交わるなら, $x$ と $x^*$ は無限回交わる. これは (3.1) に矛盾する. $x \in \mathcal{M}$ が極小周期 $(q, p)$ で周期的であって, $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ および $n > 1$ として $(q, p) = n(a, b)$ なら, $T_{(a,b)}x \neq x$ である. $x$ と $T_{(a,b)}x$ は交わらないから, $T_{(a,b)}x < x$ または $T_{(a,b)}x > x$ である. 帰納法により, $T_{(q,p)}x < x$ または $T_{(q,p)}x > x$ を得るが, これは仮定に反する. □

次に, 我々の興味の対象がまったく自明ではないことを証明しよう.

(3.3) **定理.** すべての $(q, p) \in (\mathbf{Z}\backslash\{0\}) \times \mathbf{Z}$ に対して, 周期 $(q, p)$ の $x \in \mathcal{M}$ が存在する.

証明. $q > 0$ と仮定できる. 証明の発想は, 周期 $(q, p)$ の軌跡の集合 $P_{q,p} = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} | T_{(q,p)}x = x\}$ を考え, 関数

$$H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbf{R}, H_{q,p}(x) = H(x_0, \ldots, x_q)$$

を極小にすることである. $H_{q,p}$ の極小の $x$ の任意の切片が極小であること, つまり $x \in \mathcal{M}$ を証明する. $H_{q,p}$ の極小のどのふたつも交差しないことを証明すれば, このことは容易に出る.

性質 $(H_1)$ と $(H_2)$ から明らかに, $H_{q,p}$ は $P_{q,p}$ 上で下限値 $H^{\min}_{q,p}$ を取る. $H_{q,p}$ の極小 $x$ と $x^*$ が交わるとする. これは $q \geq 2$ のときのみ生じ得る. $x^+ \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ および $x^- \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ を $x^+_i = \max\{x_i, x^*_i\}$ および $x^-_i = \min\{x_i, x^*_i\}$ で定義する. すると $x^+$ も $x^-$ も $(q, p)$ 周期である. $(H_3)$ を使えば判るように,

$$H_{q,p}(x^-) + H_{q,p}(x^+) \leq H_{q,p}(x) + H_{q,p}(x^*) = 2H^{\min}_{q,p} \tag{3.4}$$

が成り立つ. $x$ と $x^*$ がある $0 \le i < q$ に対して $i$ と $i+1$ の間で交われば, 等号なしの不等式が成り立つ. $x^-, x^+ \in P_{q,p}$ であるから, (3.4) で等式が成り立ち, $x$ と $x^*$ は任意の $0 \le i < q$ に対して $i$ と $i+1$ の間で交わることができない. 周期性により, $x$ と $x^*$ は任意の $i \in \mathbf{Z}$ に対して $i$ と $i+1$ の間で交わることができない. ゆえに $x$ と $x^*$ が交わるならある $i$ において交わるはずである. $T_{(i-1,0)}x$ も $T_{(i-1,0)}x^*$ も $H_{q,p}$ の極小であるから $i = 1$ で交わると仮定できる. この場合, $(H_4)$ より, $(x_0^-, x_1^-, x_2^-)$ と $(x_0^+, x_1^+, x_2^+)$ がともに極小であることはあり得ない. だから $x_1^-$(または $x_1^+$) を動かして $H(x_0^-, x_1^-, x_2^-)$ (または $H(x_0^+, x_1^+, x_2^+)$) を小さくできる. $q \ge 2$ であるから, $P_{q,p}$ 内に $\tilde{x}^-$(または $\tilde{x}^+$) を見つけることができて, $i = nq+1, n \in \mathbf{Z}$ 以外では $x^-$(または $x^+$) に一致し, 次を満たすようにできる.

$$(3.5) \qquad H_{q,p}(\tilde{x}^-) < H_{q,p}(x^-) \quad (\text{または } H_{q,p}(\tilde{x}^+) < H_{q,p}(x^+))$$

ところが (3.4) は $x^-$ と $x^+$ が $H_{q,p}$ の極小であることを云っているから, これは (3.5) と矛盾する. ゆえに $x$ と $x^*$ は決して交わることができない. とくに,

(3.6) $x$ が $H_{q,p}$ の極小なら, $x$ は自分自身の任意の平行移動 $T_{(j,k)}x, (j,k) \in \mathbf{Z}^2$ と交わらない.

最後に, (3.6) からわれわれの主張が出ることを証明する. $n \ge 1$, $(q^*, p^*) = n(q,p)$ とし, $x \in P_{q^*,p^*}$ が $H_{q^*,p^*}$ の極小であると仮定する. だから (3.6) が $(q,p)$ を $(q^*,p^*)$ に置き換えて $x$ に適用できる. (3.2) の証明と同じように, これから $x \in P_{q,p}$ が出る. これから次が結論できる.

$$(3.7) \qquad H^{\min}_{q^*,p^*} = nH^{\min}_{q,p}.$$

なぜなら, すべての $\tilde{x} \in P_{q,p}$ に対して $H_{q^*,p^*}(\tilde{x}) = nH_{q,p}(\tilde{x})$ だからである. 方程式 (3.7) によれば, $H_{q,p}$ のどの極小 $x$ も, $(q^*,p^*) = n(q,p)$ なる $H_{q^*,p^*}$ の極小である. とくに $x \in P_{q,p}$ が $H_{q,p}$ の極小なら,

(3.8) $\qquad (x_0, \ldots, x_{nq})$ はすべての $n \ge 1$ に対して極小切片である.

$x$ の周期性を使えば判るように, (3.8) により, $x$ の任意の切片は極小である. つまり $x \in \mathcal{M}$ である. □

次の補題により, $\alpha$ または $\omega$ 漸近的であることは交わるのとほぼ同じことであることが判る.

(3.9) **補題.** $x \in \mathcal{M}$ と $x^* \in \mathcal{M}$ が $\alpha$ または $\omega$ 漸近的であるとし, $|x_{i+1} - x_i|$ が $i \to -\infty$ または $i \to \infty$ のとき有界であるとする. このとき $x$ と $x^*$ は交わらない.

注意. 系 (3.16) で見るように, $x \in \mathcal{M}$ なら $|x_{i+1} - x_i|$ は必ず有界である.

図 4

証明. $x$ と $x^*$ が $i \in \mathbf{Z}$ で交わるという仮定の下で $x$ と $x^*$ が $\omega$ 漸近的である場合を扱う. 残りの場合は同様に扱える.

$(H_4)$ と $(x_{i-1} - x^*_{i-1})(x_{i+1} - x^*_{i+1}) < 0$ より, $(x_{i-1}, x_i, x^*_{i+1})$ と $(x^*_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ がともに極小になることはない. ゆえに $\overline{x}_i$ と $\tilde{x}_i$ があって次を満たす.

$$H(x_{i-1}, \overline{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) < H(x_{i-1}, x_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

$x_i = x^*_i$ を使って次を得る.

$$H(x_{i-1}, \overline{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) < H(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + H(x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}). \tag{3.10}$$

一方, $(x_{i-1}, \dots, x_{j+1})$ と $(x^*_{i-1}, \dots, x^*_{j+1})$ の極小性は次を意味する.

$$\begin{aligned} &H(x_{i-1}, \overline{x}_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i+1}, \dots, x^*_j) + H(x^*_j, x_{j+1}) \\ &\qquad \geq H(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + H(x_{i+1}, \dots, x_j) + H(x_j, x_{j+1}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

および

$$\begin{aligned} &H(x^*_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}) + H(x_{i+1}, \dots, x_j) + H(x_j, x^*_{j+1}) \\ &\qquad \geq H(x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}) + H(x^*_{i+1}, \dots, x^*_j) + H(x^*_j, x^*_{j+1}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.11) と (3.12) を加えると,

$$\lim_{j\to\infty} |H(x^*_j, x_{j+1}) - H(x^*_j, x^*_{j+1})| = 0 = \lim_{j\to\infty} |H(x_j, x^*_{j+1}) - H(x_j, x_{j+1})|$$

が成り立つという条件の下で (3.10) と矛盾する結果を得る. 上式の最初の等式に対する証明を与えよう. $(H_1)$ を使うと次のように書ける.

$$|H(x^*_j, x_{j+1}) - H(x^*_j, x^*_{j+1})| = |H(x^*_j - k_j, x_{j+1} - k_j) - H(x^*_j - k_j, x^*_{j+1} - k_j)|.$$

ただし $k_j \in \mathbf{Z}$ は $0 \leq x^*_j - k_j < 1$ を満たす. 前提より, $|x_{j+1} - k_j|$ と $|x^*_{j+1} - k_j|$ は $j \to \infty$ のとき有界である. そこで

$$\lim_{j\to\infty} |H(x^*_j, x_{j+1}) - H(x^*_j, x^*_{j+1})| = 0$$

は $\lim_{j\to\infty} |x_j - x^*_j| = 0$ であることとコンパクト集合上での $H$ の一様連続性から従う. □

次の定理は極小軌跡の基本的性質の一つを述べる.

(3.13) **定理.** $x \in \mathcal{M}$ とする. このとき $x$ と $T_{(a,b)}x$ は任意の $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ に対して交わらない.

注意. (3.13) は次のようにも表せる. すなわち, $x \in \mathcal{M}$ とする. このとき $B_x = \{T_{(a,b)}x | (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$ は全順序である.

証明. $a = 0$ なら陳述は自明に成り立つ. $x$ と $x^* = T_{(a,b)}x$ が交わると仮定する. 交点が 0 または 0 と 1 の間で起こるとしても一般性は失わない. 補題 (3.1) によれば $x$ と $x^*$ は二度と交わらない. 必要なら $x$ と $x^*$ を取り替えて, 次が成り立つと仮定できる.

$$x^*_j < x_j \quad \text{for} \quad j < 0 \quad \text{かつ} \quad x^*_j > x_j \quad \text{for} \quad j > 0.$$

$a > 0$ の場合を証明する．$a < 0$ の場合は同様に扱える．

上の式は次を意味する．どの $j \leq 0$ に対しても, 列

$$v \in \mathbf{N} \to x_{j-va} + vb$$

は減少列であり, どの $j > 0$ に対しても, 列

$$v \in \mathbf{N} \to x_{j+va} - vb$$

は減少列である．

$x$ を, 周期 $(a, b)$ かつ $\overline{x}_0 < x_0$ なる $\overline{x} \in \mathcal{M}$ と比較する．このような $\overline{x}$ を得るには (3.3) を使い, 必要なら平行移動 $T_{(0,j)}$ を行なう．($a < 0$ の場合, 増大列になるから, 周期 $(a, b)$ で $\overline{x}_0 > x_0$ を満たす $\overline{x} \in \mathcal{M}$ と比較する．) 補題 3.1 より, $j \leq 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ であるか, $j \geq 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ である．

$j \leq 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ の場合を扱おう．$j \geq 0$ に対して $\overline{x}_j < x_j$ の場合もまったく同様である．$j \leq 0$ のとき, 列 $v \to x_{j-va} + vb$ は減少列であって, 下から $\overline{x}_{j-va} + vb = \overline{x}_j$ によって抑えられている．ゆえに

$$\tilde{x}_j : \lim_{v\to\infty}(x_{j-va} + vb) = \lim_{v\to\infty}(T_{(va,vb)}x)_j$$

が $j \leq 0$ に対して存在し, $\tilde{x}_{j-a} + b = \tilde{x}_j$ である．$(\tilde{x}_j)_{j\leq 0}$ の周期性より, $x$ も $x^*$ も $(\tilde{x}_j)_{j\leq 0}$ に $\alpha$ 漸近であること, また $|x_{i+1} - x_i|$ は $j \to -\infty$ のとき有界であることが簡単に結論できる．いまや (3.9) は $x$ と $x^*$ が交わるという仮定に矛盾する．

図 5

$B_x = \{T_{(a,b)}x \mid (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ の閉包を $\overline{B}_x$ で表し, 射影 $x \to x_i$ を $p_i : \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} \to \mathbf{R}$ で表す．明らかに $p_i$ は連続, 開かつ順序保存である．

(3.14) **補題.** $x \in \mathcal{M}$ とする．このとき $\overline{B}_x$ は全順序集合である．射影 $p_0$ は $\overline{B}_x$ を同相的に $\mathbf{R}$ の閉部分集合の上に写す．

証明. 最初の主張は (3.13) から容易に出る．ゆえに $p_0|\overline{B}_x$ は 1 対 1 であり, $p_0|\overline{B}_x : \overline{B}_x \to p_0(\overline{B}_x)$ は同相写像である．残るのは $p_0|\overline{B}_x$ が閉であることを示すことである．$x^n \in \overline{B}_x$ が列であっ

て, $x_0^n = p_0(x^n)$ が収束するとする. $a \in \mathbf{Z}$ と $b \in \mathbf{Z}$ を選んで, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $x_0 + a < x_0^n < x_0 + b$ とする. $\overline{B}_x$ は全順序であるから, これはすべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $T_{(0,a)}x < x^n < t_{(0,b)}x$ を意味する. ところでチホノフの定理の簡易版 (1.1) から $x^n$ の収束部分列が与えられる. その極限 $x^*$ は $\overline{B}_x$ 内にあり, $p_0(x^*) = \lim_{n\to\infty} p_0(x^n)$ である. □

さてこの節の主結果を証明する段になった.

(3.15) **定理.** どの $x \in \mathcal{M}$ に対しても, 円写像 $f \in \tilde{G}_+$ があって, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $x_{i+1} = f(x_i)$ である.

$\tilde{G}_+$ の定義は 2 節を参照

証明. はじめに閉集合 $A := p_0(\overline{B}_x)$ 上で $f$ を $f := p_1 \circ (p_0|\overline{B}_x)^{-1}$ で定義する. あるいは同じことであるが, $x^* \in \overline{B}_x$ のとき $f(x_0^*) := x_1^*$ とする. (3.14) より, $f$ は $A$ からそれ自身の上への狭義増加同相写像である. 明らかに, $f$ はすべての $t \in A$ に対して $f(t+1) = f(t) + 1$ を満たす. $f$ を $A$ から $\mathbf{R}$ へ affine 的に拡張する. すなわち, $\mathbf{R}\backslash A = \cup(a_n, b_n)$ なら, $t \in [0,1]$ に対して $f((1-t)a_n + tb_n) := (1-t)f(a_n) + tf(b_n)$. 簡単にわかるように, $f \in \tilde{G}_x$ および $f(x_i) = f((T_{(-i,0)}x)_0) = x_{i+1}$ である. □

(3.15) を円写像の結果 (2.1) および (2.2) と合わせて次を得る.

(3.16) **系.** 次の性質を持つ連続写像 $\tilde{\alpha} : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ が存在する.

(a) すべての $x \in \mathcal{M}, i \in \mathbf{Z}$ に対して, $|x_i - x_0 - i\tilde{\alpha}(x)| < 1$ である. とくに $\tilde{\alpha}(x) = \lim_{|i|\to\infty} x_i/i$ である.

(b) $x \in \mathcal{M}$ が $(q,p)$ 周期的なら, $\tilde{\alpha}(x) = p/q$ である.

(c) $\tilde{\alpha}$ は $T$ の下で不変である. すなわち, すべての $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ に対して $\tilde{\alpha}(T_{(a,b)}x) = \tilde{\alpha}x$ である.

注意. $\tilde{\alpha}(x)$ を $x \in \mathcal{M}$ の回転数と呼ぶ.

証明. $x \in \mathcal{M}$ に対して, (3.15) に応じて $f \in \tilde{G}_+$ を選び, $\tilde{\alpha} := \tilde{\alpha}(f)$ を定義する. すると, (a) は (2.1) および (2.2) から出る. とくに $\tilde{\alpha}(x)$ はよく定義されている. $\tilde{\alpha}$ の連続性や (b),(c) は (a) からただちに出る. □

(3.16) と結ぶと, 存在性の結果 (3.3) から簡単に次が出る.

(3.17) **定理.** すべての $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して, 集合 $\mathcal{M}_\alpha := \{x \in \mathcal{M} \mid \alpha(x) = \alpha\}$ は空でない.

証明. (3.3) および (3.16)(b) より, $\alpha \in \mathbf{Q}$ なら $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ であることを知っている. 列 $\alpha_n \in \mathbf{Q}$ を選んで, $\lim \alpha_n = \alpha$ かつ $x_0^n \in [0,1]$ として $x^n \in \mathcal{M}_{\alpha_n}$ を満たすようにする. すると, ある $C > 0$ に対して $|\alpha_n| \leq C$ である. (3.16)(a) より次の見積もりを得る.

$$|x_i^n| \leq 2 + |i|C \quad \text{for all} \quad n \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}.$$

さて (1.1) から列 $x^n$ の集積点 $x^* \in \mathcal{M}$ が与えられる. $\tilde{\alpha}$ の連続性より, $\tilde{\alpha}(x^*) = \alpha$ を得る. □

(3.16) のさらに 2, 3 の帰結に注意する．(a) によれば, どの $x \in \mathcal{M}_\alpha$ も傾き $\alpha$ でほぼ線形に増大する．とくに, $x \in \mathcal{M}, x^* \in \mathcal{M}$ で $\tilde{\alpha}(x) \neq \tilde{\alpha}(x^*)$ なら, $x$ と $x^*$ はちょうど一度交わる．(3.17) の証明によれば,

(3.18)
どの $C > 0$ に対しても,
集合 $\{x \in \mathcal{M} \mid |x_0| \leq C$ および $|\tilde{\alpha}(x)| \leq C\}$
はコンパクトである．

最後に, (3.15) に出てくる円写像 $f \in \tilde{G}_+$ は, $H$ が $C^2$ であって $(H_1)$ を満たし, $D_2 D_1 H < 0$ なら双リプシッツであることを注意しておく．実は, これが成り立つのは極小軌跡に対してだけではない． すなわち, $\mathcal{N}$ は軌跡 $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ の $T$ 不変集合であって, 各軌跡は $H$ に関して停留, つまり $D_2 H(x_{i-1}, x_i) + D_1 H(x_i, x_{i+1}) = 0$ がすべての $x \in \mathcal{N}$ およびすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して成り立つとする．$\mathcal{N}$ のどのふたつの要素も交わらないとする．すると, $p_0|\mathcal{N} : \mathcal{N} \to p_0(\mathcal{N}) =: B \subseteq \mathbf{R}$ は 1 対 1 であって, $p_1 \circ (p_0|\mathcal{N})^{-1} : B \to B, x_0 \to x_1$ が定義される．次を証明しよう．

(3.19) 写像 $f := p_1 \circ (p_0|\mathcal{N})^{-1} : B \to B$ は双リプシッツである．

証明．まず, $|x_1 - x_0|$ と $|x_0 - x_{-1}|$ がすべての $x \in \mathcal{N}$ に対して一様有界であることに注意する．ある $\tilde{x} \in \mathcal{N}$ を固定すると, $|x_1 - x_0| \leq |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0| + 1$ および $|x_0 - x_{-1}| \leq |\tilde{x}_0 - \tilde{x}_{-1}| + 1$ である．そこで $x$ と $\tilde{x}$ を $\mathcal{N}$ の任意の要素とする．$(H_1)$ と $\mathcal{N}$ の $T$ 不変性より, $0 \leq x_0 \leq \tilde{x}_0 < 2$ の場合を考えれば十分である．このとき $x_{-1} < \tilde{x}_{-1},\ x_1 < \tilde{x}_1$ であり, 上で述べた一様有界性より, 点 $x_{-1}, x_0, x_1, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1$ はすべてあるコンパクトな区間 $I$ に含まれる．仮定により, $\delta > 0$ および $L > 0$ が存在して, $I \times I$ 上で $D_2 D_1 H \leq -\delta < 0$ であり, $I \times I$ 上で $D_1 H, D_2 H$ は定数 $L$ を持つリプシッツ関数である．このとき次のように見積もることができる．

$$\begin{aligned}
&\delta((\tilde{x}_{-1} - x_{-1}) + (\tilde{x}_1 - x_1)) \\
&\qquad \leq D_2 H(x_{-1}, x_0) - D_2 H(\tilde{x}_{-1}, x_0) + D_1 H(x_0, x_1) - D_1 H(x_0, \tilde{x}_1) \\
&\qquad = -D_2 H(\tilde{x}_{-1}, x_0) + D_2 H(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0) + D_1 H(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) - D_1 H(x_0, \tilde{x}_1) \\
&\qquad \leq 2L(\tilde{x}_0 - x_0).
\end{aligned}$$

これで主張が証明された． □

## 4. 無理数回転数を持つ極小軌跡集合の構造

この節では, $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ に対して $\mathcal{M}_\alpha$ を調べる．定理 (3.17) によれば, $\mathcal{M}_\alpha$ は空でない．一見, $\mathcal{M}_\alpha$ の構造が次の意味で複雑であるように見える．$\mathcal{M}_\alpha$ 内にたくさんの極小軌跡があってそれらの $T$ 軌道の閉包 $\overline{B}_x$ はペアごとに素である。 各 $\overline{B}_x$ の構造は, $\overline{B}_x$ が円写像の軌道の閉集合であることにより単純であるが, $\mathcal{M}_\alpha$ 全体の構造は非常に複雑であろう．しかし, こういうことがすべて起こるわけではない．$\mathcal{M}_\alpha$ は単一の円写像によって記述可能であり, とくにどの $\overline{B}_x \subseteq \mathcal{M}_\alpha$ も $\mathcal{M}_\alpha$ 内の回帰軌跡の集合 $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ を含む.

$$\mathcal{M}_\alpha^{rec} := \left\{ x \in \mathcal{M}_\alpha \mid k_i \in \mathbf{Z}^2 \backslash \{0\} \text{ が存在して } x = \lim_{i \to \infty} T_{k_i} x \right\}.$$

決定的な結果は次のとおりである．

(4.1) **定理.** $\alpha$ は無理数であるとする. このとき $\mathcal{M}_\alpha$ は全順序集合である.

証明. (3.15) にしたがって $x \in \mathcal{M}_\alpha$ と $f \in \tilde{G}_+$ を選ぶ. すなわち, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $x_i = f^i(x_0)$. まず $f$ のどの回帰軌道も $\mathcal{M}_\alpha$ 内にあること, つまり, $x_0^* \in \mathrm{Rec}(f)$ なら $x_i^* = f^i(x_0^*)$ が $\mathcal{M}_\alpha$ の要素を定義することを示したい. 2 節によれば, 列 $(i_n, k_n) \in \mathbf{Z}^2$ があって次を満たす

$$x_0^* = \lim_{n\to\infty}(x_{i_n} + k_n).$$

すると

$$x_i^* = f^i(x_0^*) = \lim_{n\to\infty} f^i(x_{i_n} + k_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{i_n+i} + k_n)$$

であるから, $x^* = \lim_{n\to\infty} T_{(-i_n,k_n)}x \in \mathcal{M}_\alpha$ である. さて $x^0$ と $x^1$ が $\mathcal{M}_\alpha$ 内にあるとし, $f_0, f_1$ は $\tilde{G}_+$ 内の対応する写像とする. 補題 (3.1) より, 極小軌跡は一度だけ交わる. だからいままでの議論からわかるように, $f_0$ と $f_1$ の回帰軌道はどのふたつも一度より多くは交われない. ゆえに, 補題 (2.3) から $f_0$ と $f_1$ は $\mathrm{Rec}(f_0) = \mathrm{Rec}(f_1)$ において一致する. だから, $x_0^0 \in \mathrm{Rec}(f_0)$ かつ $x_0^1 \in \mathrm{Rec}(f_1)$ なら, 軌跡 $x^0$ と $x^1$ は交わらない. 一般の場合, $x_0^\pm, x_1^\pm : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は (2.3) において軌道 $x_j^0 = f_0^j(x_0^0)$ および $x_j^1 = f_1^j(x_0^1)$ から構成した狭義増加写像を表すとする. (2.3) の証明によれば, $c \in \mathbf{R}$ が存在して, すべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $x_0^\pm(t+c) = x_1^\pm(t)$ である. $x_0^\pm$ と $x_1^\pm$ の定義より,

$$x_0^-(j\alpha) \le x_j^0 \le x_0^+(j\alpha)$$

および

$$x_1^-(j\alpha) \le x_j^1 \le x_1^+(j\alpha).$$

ゆえに $x^0$ と $x^1$ は $c = 0$ のときのみ, つまり $x_0^\pm = x_1^\pm$ のときのみ交わることができる. ところが, この場合 $x^0$ と $x^1$ は漸近的である. というのは

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |x_j^1 - x_j^0| \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} (x_0^+(j\alpha) - x_0^-(j\alpha)) \le x_0^+(0) - x_0^+(0) = 1$$

だからである. だから補題 (3.9) より $x^0$ と $x^1$ は交わらない. □

定理 (4.1) の帰結のいくつかを挙げよう. これらによって $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ に対する $\mathcal{M}_\alpha$ の詳しい描像が得られる.

(4.2) $\tilde{\alpha}(f) = \alpha$ なる円写像 $f \in \tilde{G}_+$ および閉 $f$ 不変集合 $A_\alpha \subseteq \mathbf{R}$ があって, $\mathcal{M}_\alpha$ は $A_\alpha$ 内に含まれる $f$ の軌道からなる. つまり, $x \in \mathcal{M}_\alpha$ のための必要十分条件は $x_0 \in A_\alpha$ およびすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $x_i = f^i(x_0)$ なることである. 射影 $p_0$ は $\mathcal{M}_\alpha$ を同相的に $A_\alpha$ の上に写す.

$f$ の構築については (3.15) および (3.14) 参照.

(4.3) 極小軌跡 $x \in \mathcal{M}_\alpha$ が回帰的であるための必要十分条件は $x_0$ が $f$ の回帰点であることである. つまり, $p_0(\mathcal{M}_\alpha^{rec}) = \mathrm{Rec}(f)$ なることである. 次の二者択一がある.

(a) $\mathrm{Rec}(f) = \mathbf{R}$. このときどの $\xi \in \mathbf{R}$ に対しても $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ があって, $x_0 = \xi$ である. その上, $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ 内の列 $x^n$ が $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ に収束するなら, この収束は一様

である．つまり，どの $\varepsilon > 0$ に対しても，$n_0 \in \mathbf{N}$ があって，すべての $n \geq n_0$ およびすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $|x_i^n - x_i| < \varepsilon$ である．

(b) $\mathrm{Rec}(f)$ がカントール集合．この場合，$\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ 内に 3 種類の異なる軌跡が存在する．

$\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ の要素によって上からも下からも近似できる $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ の集合がある．この集合は連続濃度を持ち，$\mathrm{Rec}(f)$ 内の点で $\mathbf{R}\backslash\mathrm{Rec}(f)$ の成分の端点でないものに対応する．最後に，$\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ の要素によって上からのみあるいは下からのみ近似できる $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ の集合がある．これらは可算集合であって，$\mathbf{R}\backslash\mathrm{Rec}(f)$ の成分の右または左の端点に対応する．$x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ および $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ が漸近的であるための必要十分条件は $x_0$ と $x_0^*$ が $\mathbf{R}\backslash\mathrm{Rec}(f)$ のある成分の端点になっていることである．この場合，$\sum_{i\in\mathbf{Z}} |x_i - x_i^*| \leq 1$ が成り立つ．$\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ 内の収束は決して一様でない．

これらの事実は (4.1),(4.2) を 2 節の最初の部分で記述した円写像の結果と合わせて得られる．9 節で見るように，すべての $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ に対して $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ がカントール集合であることは決して例外的なことではない．(4.3) の最後の陳述をもっと詳しく述べよう．

(4.4) $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ がカントール集合に同相であるとする．次を定義する．

$$a_\alpha := \max\{|x_i - x_i^*| \mid x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec} \text{ と } x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{rec} \text{が漸近的},\ i \in \mathbf{Z}\}.$$

$\underline{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$, $\overline{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ が漸近的でなく，$\underline{x} < \overline{x}$ なら

$$\inf(\overline{x}_i - \underline{x}_i) > 0, \quad \limsup_{i\to\infty}(\overline{x}_i - \underline{x}_i) > a_\alpha \quad \text{および} \quad \limsup_{i\to-\infty}(\overline{x}_i - \underline{x}_i) > a_\alpha$$

証明．$f$ に対して (2.3) と同じように関数 $x^\pm$ を選ぶ．すると $a_\alpha = \max(x^+(t) - x^-(t))$ である．$\underline{c} \in \mathbf{R}, \overline{c} \in \mathbf{R}$ が存在して次を満たす．

$$\underline{x}_i = x^+(i\alpha + \underline{c}) \quad \text{または} \quad \underline{x}_i = x^-(i\alpha + \underline{c})$$

および

$$\overline{x}_i = x^+(i\alpha + \overline{c}) \quad \text{または} \quad \overline{x}_i = x^-(i\alpha + \overline{c}).$$

われわれの前提より $\underline{c} < \overline{c}$ である．$x^\pm$ の性質 (2.3)(a), (c) および (d) を使えば，$x^-(t+\overline{c}) - x^+(t+\underline{c})$ が下からある $\delta > 0$ によって抑えられていると言える．ゆえに，$\inf(\overline{x}_i - \underline{x}_i) \geq \delta > 0$ である．$t_0 \in \mathbf{R}$ を選んで $x^+(t_0) - x^-(t_0) = a_\alpha$ とする．$\{i\alpha + k \mid (i,k) \in \mathbf{N}\times\mathbf{Z}\}$ は $\mathbf{R}$ 内で稠密であるから，列 $(i_n, k_n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ があって，$i_n \to \infty$, $i_n\alpha - k_n + \underline{c} < t_0 < i_n\alpha - k_n + \overline{c}$, および $\lim(i_n\alpha - k_n + \underline{c}) = t_0$ を満たす．このとき次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{x}_{i_n} - \underline{x}_{i_n}) \geq a_\alpha + \delta.$$

$i \to -\infty$ の場合の証明も同様である．□

(4.5) どの $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ も周期的極小軌跡で近似できる．

証明. $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha \subseteq \mathcal{M}_\alpha$ は近似可能な $x \in \mathcal{M}_\alpha$ の集合を表すとする．このとき $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha$ は閉かつ $T$ 不変である．(3.17) で実際 $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha \neq \emptyset$ であることを証明した. ゆえに $\mathcal{M}_\alpha^{rec} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_\alpha$ である. □

(4.6) どの $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \tilde{\mathcal{M}}_\alpha$ に対しても, $\underline{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ および $\overline{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ があって $\underline{x} < x < \overline{x}$ であり, また $x$ と $\overline{x}$ は漸近的である.

これが可能であるから, 図 6 は $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ および $p_0(\mathcal{M}_\alpha) \neq \mathbf{R}$ の場合の $\mathcal{M}_\alpha$ を描いている. 破線は $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ を表す.

$\mathcal{M}_\alpha$ のこの定性的記述に欠けているのは, $\mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ の大きさに関して多くを語らないことである．生成的な $H$ の場合にほとんどの $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ に対して $\mathcal{M}_\alpha^{rec} = \mathcal{M}_\alpha$ であることが期待できる．9 節の最後参照.

Fig.6

この時点で, 序で述べた不変曲線の問題について簡単に注意しよう. 我々の設定では, 不変曲線の存在は $p_0(\mathcal{M}_\alpha) = \mathbf{R}$ の場合に対応する．可積分の場合は $\overline{H}(\xi, \eta) = h(\xi - \eta)$ の形の関数 $\overline{H}$ に対応する．(1.4) 参照. 序で述べた KAM 理論の結果によれば, $p_0(\mathcal{M}_\alpha) = \mathbf{R}$ かつ $\mathcal{M}_\alpha^{rec} = \mathcal{M}_\alpha$ であるのは $H$ が可積分の $\overline{H}$ に十分 $C^{k+1}$ 近接のときであり, また $\alpha$ が有理数によって急速に近似されないときである.

一般の場合, J. Mather[38] の判定条件があって, 物理学的動機の「Peierl のエネルギー障壁」([40], §14 参照) に深く関係している．これはいまの設定に適応させることができる．すなわち, $r = (p/q) \in \mathbf{Q}$ とし, $p$ と $q$ は互いに素であるとする．(3.3) で導入した記法を使って, $\Delta H_r$ は, どの周期的 $x^0, x^1 \in \mathcal{M}_r$ も, $H_{q,p}(x^t) \leq H_{q,p}(x^0) + \varepsilon$ を満たす $(q,p)$ 周期的要素 $x^t \in P_{q,p}$ の連続族 $x^t$ によって結ぶことができるような $\varepsilon > 0$ の下限を表すとする (?). (5.1) より $H_{q,p}(x^0) = H_{q,p}(x^1)$ であることに注意する．このときどの $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ に対しても, 極限 $\lim_{r \to \alpha} \Delta H_r := \Delta H_\alpha$ が存在し, $p_0(\mathcal{M}_\alpha) = \mathbf{R}$ であるための必要十分条件は $\Delta H_\alpha = 0$ なることである.

## 5. 有理数回転数を持つ極小軌跡集合の構造

この節では $\alpha$ が有理数の場合, つまり $p$ と $q$ を互いに素として $\alpha = p/q$ の場合の $\mathcal{M}_\alpha$ を調べる. $\mathcal{M}_\alpha$ 内の周期軌跡の集合 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ から始める. $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ の基本的性質は 3 節の結果から出る.

(5.1) **定理.** $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ は空でなく, 閉全順序集合である．どの $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ も極小周期 $(q,p)$ を持つ．$x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ なら $x$ は $H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbf{R}$ の極小である．とくにすべての $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ に対して $H_{q,p}(x) = H_{q,p}^{min}$ である.

$P_{q,p} = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} \mid T_{(q,p)} x = x\}$, $H_{q,p}(x) = H(x_0, \ldots, x_q)$ であったことを思い出そう.

証明. (3.3) によれば $\mathcal{M}_\alpha^{per} \neq \emptyset$ である. (3.2) の第二の主張によれば, どの $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ も極小周

期 $(q,p)$ を持つ. (3.2) の第一の主張より, $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ は全順序集合である. (5.1) の最後の主張は背理法で証明する. $x \in P_{q,p}$ および $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ があって次を満たすとする.

$$\varepsilon := H(x_0^*, \ldots, x_q^*) - H(x_0, \ldots, x_q) > 0.$$

$n \in \mathbf{N}$ を十分大きく選んで $n\varepsilon > H(x_0^*, x_1) - H(x_0, x_1) + H(x_{q-1}, x_q^*) - H(x_{q-1}, x_q)$ にする. $H(x_{q-1}, x_q^*) = H(x_{nq-1}, x_{nq}^*)$ および $H(x_{q-1}, x_q) = H(x_{nq-1}, x_{nq})$ を使って次を得る.

$$H(x_0^*, x_1, \ldots, x_{nq-1}, x_{nq}^*) < H(x_0, x_1, \ldots, x_{nq-1}, x_{nq}) + n\varepsilon = H(x_0^*, \ldots, x_{nq}^*)$$

これは $x^*$ の極小性に反する. □

$\mathcal{M}_\alpha^{per}$ のふたつの要素が隣り合うと言われるのはこのふたつの間に $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ の要素がないときである.

(5.2) **定義.** $x^- < x^+$ を $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ の隣り合う要素とする. このとき

$$\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+) := \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid x \text{ は } x^- \text{ に} \alpha \text{漸近的かつ } x^+ \text{ に} \omega \text{漸近的}\}.$$

$$\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+) := \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid x \text{ は } x^- \text{ に} \omega \text{漸近的かつ } x^+ \text{ に} \alpha \text{漸近的}\}.$$

$\mathcal{M}_\alpha^+$(または $\mathcal{M}_\alpha^-$) は隣り合う要素の組 $(x^-, x^+)$ すべてにわたる集合 $\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ (または $\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$) の和を表すとする.

注意: (3.9) より, どの $x \in \mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+) \cup \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ も $x^- < x < x^+$ を満たす.

次にどの $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{per}$ も隣り合う周期的極小に $\alpha$(または $\omega$) 漸近的であることを証明しよう.

(5.3) **定理.** $\alpha$ が有理数なら, $\mathcal{M}_\alpha$ は $\mathcal{M}_\alpha^{per}, \mathcal{M}_\alpha^+$, および $\mathcal{M}_\alpha^-$ の素な和 (disjoint union) である.

<u>証明</u>. $x \in \mathcal{M}_\alpha \backslash \mathcal{M}_\alpha^{per}$ とする. 隣り合う $x^-$ と $x^+$ を得るために, (5.3) に対応する有理数回転数を持つ円写像の性質を利用する. (3.15) によれば, $f \in \tilde{G}_+$ があって $f(x_i) = x_{i+1}$ を満たす. このとき $\tilde{\alpha}(f) = \alpha = p/q$ である. (2.2) におけるように, 周期関数 $r_q := f^q(t) - t - p$ を考える. $x \notin \mathcal{M}_\alpha^{per}$ であるから, $r_q(x_0) \neq 0$, たとえば $r_q(x_0) > 0$ を得る. (2.2) に従うと, $x_0^-$ および $x_0^+$ が存在して $r_q(x_0^-) = r_q(x_0^+) = 0$, $x_0 \in (x_0^-, x_0^+)$ および $r_q|(x_0^-, x_0^+) > 0$ である. これは列 $\{f^{nq}(x_0) - np\}_{n \in \mathbf{Z}}$ が狭義増加であること, および $\lim_{n\to\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^+$, $\lim_{n\to-\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^-$ を意味する. $x^+$ および $x^-$ を $x_i^+ := f^i(x_0^+)$ および $x_i^- := f^i(x_0^-)$ で定義すると, $T_{(q,p)}x^+ = x^+$, $T_{(q,p)}x^- = x^-$ および $\lim_{n\to\infty} T_{(-nq,-np)}x = x^+$, $\lim_{n\to-\infty} T_{(-nq,-np)}x = x^-$ が成り立つ. ゆえに, $x^- \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$, $x^+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ かつ $x^- < x < x^+$ である. その上, すべての $0 \leq j \leq q$ に対して次が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} |x_{j+nq} - x_{j+nq}^+| = \lim_{n\to\infty} |x_{j+nq} - np - x_j^+| = \lim_{n\to\infty} |(T_{(-nq,-np)}x)_j - x_j^+| = 0.$$

ゆえに $x$ は $x^+$ に $\omega$ 漸近であり, 同様に $x$ は $x^-$ に $\alpha$ 漸近である. $r_q(x_0) < 0$ なら, 同様の証明法によって $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 内で $x^- < x^+$ が与えられ, $x$ は $x^-$ に $\omega$ 漸近, $x^+$ に $\alpha$ 漸近となる. 残るのは,

$x^-$ と $x^+$ が隣り合っていることを証明することである．$x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ が存在して $x^- < x^* < x^+$ であると仮定する．このとき $x$ と $x^*$ は, たとえば $i-1$ と $i$ の間で交わる (図 7 参照). $x$ と $x^*$ がある $i \in \mathbf{Z}$ で交わる場合は同様に証明できる.

$j > i$ に対して, 切片 $(\tilde{x}_{i-1}, \ldots, \tilde{x}_{j+q})$ を $\tilde{x}_{i-1} := x_{i-1}$, $\tilde{x}_m := x_m^*$, $i \le m \le i+q-1$, $\tilde{x}_m := x_{m-q} + p$, $i+q \le m \le j+q-1$ および $\tilde{x}_{j+q} := x_{j+q}$ と定義する．示したいのは, 十分大きな $j$ に対して, $x$ の極小性に反して次が成り立つことである.

$$H(\overline{x}_{i-1}, \ldots, \overline{x}_{j+q}) < H(x_{i-1}, \ldots, x_{j+q}) \tag{5.4}$$

上の定義に従えば,

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}_{i-1}, \ldots, \tilde{x}_{j+q}) = \ & H(x_{i-1}, x_i^*) + H(x_i^*, \ldots, x_{i+q}^*) - H(x_{i+q-1}^*, x_{i+q}^*) \\ & + H(x_{i+q-1}^*, x_i + p) + H(x_i, \ldots, x_{j-1}) + H(x_{j-1} + p, x_{j+q}). \end{aligned}$$

$x$ と $x^*$ は $i-1$ と $i$ の間で交わり, また $x^*$ は $(q,p)$ 周期的であるから, 次を得る.

$$H(x_{i-1}, x_i) > H(x_{i-1}, x_i^*) + H(x_{i-1}^*, x_i) - H(x_{i+q-1}^*, x_{i+q}^*)$$

これをひとつ前の式に入れると, ある $\varepsilon > 0$ に対して次が成り立つ.

Fig.7

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}_{i-1}, \ldots, \tilde{x}_{j+q}) = \ & H(x_{i-1}, \ldots, x_{j-1}) + H(x_i^*, \ldots, x_{i+q}^*) \\ & + H(x_{j-1} + p, x_{j+q}) - \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.5}$$

$x$ は $x_+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ に $\omega$ 漸近であるから, 簡単にわかるように,

$$\lim_{j \to \infty} |H(x_{j-1}, x_j) - H(x_{j-1} + p, x_{j+q})| = 0. \tag{5.6}$$

および

$$\lim_{j \to \infty} |H(x_j, \ldots, x_{j+q}) - H(x_0^+, \ldots, x_q^+)| = 0.$$

(5.1) の最後の主張より, $H(x_0^+, \ldots, x_q^+) = H(x_i^*, \ldots, x_{i+q}^*)$ であるから

$$\lim_{j \to \infty} |H(x_j, \ldots, x_{j+q}) - H(x_i^*, \ldots, x_{i+q}^*)| = 0. \tag{5.7}$$

さて (5.5), (5.6), および (5.7) は $j$ が大きいとき (5.4) が成り立つことを意味する．ゆえに $x^* \in \mathcal{M}^{per}$ で $x^- < x^* < x^+$ なるものは存在し得ない. つまり, $x^-$ と $x^+$ は相隣る. □

最後に存在の問題を考えよう.

(5.8) **定理.** $x^- < x^+$ は $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ の相隣る要素とする．このとき $\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ も $\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$ も空でない.

<u>証明</u>. $\alpha_n \in \mathbf{R}$ を選んで $\alpha_n > \alpha$, $\lim \alpha_n = \alpha$ かつ $x^n \in \mathcal{M}_{\alpha_n}$ とする．$x^n$ の平行移動をうまく選んで $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ に収束するようにさせたい．$\varepsilon := \min_{i\in\mathbf{Z}}(x_i^+ - x_i^-)$ と置く．次を満たす $i(n) \in \mathbf{Z}$ を選ぶ.

$$x_i^n \leq x_i^- + \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad i < i(n) \quad \text{および} \quad x_{i(n)}^n > x_{i(n)}^- + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

これが可能なのは $\alpha_n > \alpha$ だからである ((3.16)(a) 参照)．$k(n) \in \mathbf{Z}$ を $j(n) := i(n) + k(n)q \in \{0, \ldots, q-1\}$ で定義し, $\tilde{x}^n := T_{k(n)(q,p)}x^n$ と置く．このとき次を得る.

$$\tilde{x}_i^n = x_{i-k(n)q}^n + k(n)q \leq x_i^- + \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad i < j(n),$$

および

$$\tilde{x}_i^n > x_i^- + \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad i > j(n).$$

(3.18) より, $\tilde{x}^n$ の収束部分列があって $x \in \mathcal{M}_\alpha$ を極限とすると結論できる．$j \in \{0, \ldots, q-1\}$ がこの部分列において $j(n)$ として無限回現れるなら, 次が成り立つ.

$$x_i \leq x_i^- + \tfrac{\varepsilon}{2} < x_i^+ \quad \text{for} \quad i < j \quad \text{および} \quad x_j \geq x_j^- + \tfrac{\varepsilon}{2} > x_j^-.$$

(5.3) によれば, これは $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)$ を意味する．列 $\alpha_n < \alpha$, $\lim \alpha_n = \alpha$ から出発して $x \in \mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$ を得る. □

定理 (5.1), (5.3) および (5.8) より, $\alpha = (p/q) \in \mathbf{Q}$ なる $\mathcal{M}_\alpha$ に対して次のような描像を得る. 射影 $p_0$ によって $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ を閉部分集合 $A_\alpha^{per} \subseteq \mathbf{R}$ と同一視できる. 例外的な場合 $A_\alpha^{per} = \mathbf{R}$, すなわち, どの $\xi \in \mathbf{R}$ に対しても $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ があって $x_0 = \xi$ となる場合がある．このとき $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^{per}$ は全順序である．そうでなければ, $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 内に隣り合う要素が存在して $\mathcal{M}_\alpha^+$ 内のヘテロクリニック軌道と $\mathcal{M}_\alpha^-$ 内のヘテロクリニック軌道で結べる．$x \in \mathcal{M}_\alpha^+$ と $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^-$ が $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ の隣り合う同じ組の間にあるなら, $x$ と $x^*$ は交わる．$\mathcal{M}_\alpha$ 内のふたつの軌跡が交わる唯一の場合がこれである．とくに, $\mathcal{M}_\alpha^{per} \cup \mathcal{M}_\alpha^+$ と $\mathcal{M}_\alpha^{per} \cup \mathcal{M}_\alpha^-$ は $\tilde{\alpha}(f^+) = \tilde{\alpha}(f^-) = \alpha$ なる $\tilde{G}_+$ 内の円写像 $f^+$ および $f^-$ の軌道の閉集合として記述できる. 9 節の例の示すところによれば, これらは集合 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$, $\mathcal{M}_\alpha^+$ および $\mathcal{M}_\alpha^-$ に関する唯一の制限である．生成的に次のような状況が期待できる．$\mathcal{M}_\alpha^{per}$, $\mathcal{M}_\alpha^+$ および $\mathcal{M}_\alpha^-$ はそれぞれひとつの $T$ 軌道からできている (9 節の終り参照).

## 6. 測地線への応用

この節では, 2 次元トーラス上の, あるいは同じことだが, その普遍被覆 $\mathbf{R}^2$ 上の, 測地線に関する 3-5 節の結果を解釈する．3-5 節で我々が取った手法からすると, 必要な測地線の性質を抽象的に定式化するのが自然である．そのあとで, $T^2$ 上のリーマン計量あるいは対称フィンスラー計量の測地線に特殊化する. 得られる結果は [26] に述べられたをすべて含む．また Morse や Hedlund の仕事を越えたかなりの進歩も得られる.

以下の概念は [13] および [24] から取ってきた．それを再録するのは便宜のためである．完備，局所コンパクト距離空間 $(X, d)$ で対称な距離関数 $d(x, y) = d(y, x)$ を持つものから始める．連続曲線 $\gamma : [a, b] \to X$ の長さ $L_d(\gamma) \in [0, \infty]$ は次式で定義できる．

$$L_d(\gamma) = L(\gamma) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid n \in \mathbf{N}, a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b\}$$

この長さは普通の性質を持つ ([24, 1 章] 参照)．<u>極小測地線切片</u> とは，曲線 $c : [a, b] \to X$ で，すべての $s, s' \in [a, b]$ に対して次を満たすものである．

$$d(c(s), c(s')) = |s - s'|.$$

<u>測地線</u> とは，曲線 $c : \mathbf{R} \to X$ で，すべての $s \in \mathbf{R}$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在して $c|[s-\varepsilon, s+\varepsilon]$ が極小測地線切片となっているものである．我々の興味の対象は測地線 $c$ で $c|[a, b]$ がすべてのコンパクトな区間 $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ に対して極小測地線切片になっているものである．明らかにこのような測地線は $X$ が非コンパクトのときのみ存在し得る．これらは文献中でいろいろな名前で呼ばれている．我々は <u>極小測地線</u> と呼ぶ．最初に調べたのは Morse[43] であって，$X$ が種数が 1 より大きなコンパクトリーマン面の普遍被覆の場合であった．

$(X, d)$ に関する我々の前提は [24] の意味で，length space であることである．すなわち，すべての $x, y \in X$ に対して次が成り立つ．

$$(G_1) \qquad d(x, y) = \inf\{L_d(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to X \text{ は連続}, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

アルツェラ・アスコリの定理を $(G_1)$ と合わせると，$(X, d)$ の完備性と局所コンパクト性から Hopf-Rinow の定理の一部の変形版が次のように得られる ([24] 参照)．

(6.1) **定理.** 任意の 2 点 $x, y \in X$ は極小測地線切片で結べる．

第二の前提は測地線切片の延長 (prolongation) に関する事柄である．

$(G_2)$ $c$ および $\overline{c}$ は $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ 上で定義された極小測地線切片であるとする．ある $\varepsilon > 0$ に対して $c|[a, a+\varepsilon] = \overline{c}|[a, a+\varepsilon]$ なら $c = \overline{c}$ である．

明らかに，$(G_2)$ は局所的条件である．すなわち，任意に小さな $b - a$ に対して $(G_2)$ を要請すれば十分である．以下では，極小測地線切片と $X$ 内のその像とを同一視する．$(G_2)$ の帰結として次が有用である．

(6.2) **補題.** ふたつの極小測地線切片が 2 点 $p_1 \neq p_2$ を共有するとする．このときこれらの共通部分は極小測地線切片であるか，あるいは $p_1$ と $p_2$ は両切片の端点である．

<u>証明</u>. $c : [a, b] \to X$, $\tilde{c} : [a, \overline{b}] \to X$ は極小測地線切片であって，$c(a) = \tilde{c}(a)$ およびある $s, a < a \leq \min\{b, \overline{b}\}$ に対して $c(s) = \tilde{c}$ を満たすとする．$s = b = \overline{b}$ でなければ，たとえば $s < \overline{b}$ ならば，極小測地線切片 $c|[a, s]$ と $\tilde{c}|[s, \overline{b}]$ はつながって，$\overline{c}(a)$ から $\tilde{c}(b)$ への別の極小測地線切片を構成する．両方の切片を逆に動けば，$(G_2)$ より，$c$ と $\tilde{c}$ が $[a, \min\{b, \overline{b}\}]$ 上で一致することがわかる．

最後に，被覆を扱う．$(X, d)$ が完備，局所コンパクト距離空間で $(G_1)$ を満たし，$\pi : \tilde{X} \to X$ が連結な $\overline{X}$ による (位相) 被覆なら，$\tilde{X}$ 上に一意の計量 $\tilde{d}$ があって，$\pi$ は局所等長変換であり，

$(G_1)$ が満たされる．$\tilde{X}$ 上の曲線の長さを $X$ へのその射影の長さで定義し, $(G_1)$ を $\tilde{d}$ の定義として採用する．$d$-球 $B(x,2r) \subseteq X$ が $\pi$ および $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ によって evenly 被覆されるなら $\pi : (\tilde{B}(\tilde{x},r),\tilde{d}) \to (B(x,r),d)$ は等長変換である．とくに, $\tilde{d}$ に関する長さは射影の長さと一致し, だから $\tilde{d}$ の場合 $(G_1)$ が満たされる．その上, $\tilde{d}$ は $\tilde{X}$ の位相を生成し, $(\tilde{X},\tilde{d})$ は完備である．$\pi : \tilde{X} \to X$ の被覆変換は $(\tilde{X},\tilde{d})$ の等長変換である．局所条件 $(G_2)$ は $(X,d)$ に対して成り立つなら $(\tilde{X},\tilde{d})$ に対して成り立つ．

我々の一般的前提は, $(X,d)$ が $(G_1)$ と $(G_2)$ を満たし, $(X,d)$ が $T^2$ に同相であること, あるいは同じことだが $T^2$ 上に距離関数 $d$ があって通常の位相を生成し, $(G_1)$ と $(G_1)$ を満たすことである．完備性と局所コンパクト性はこの場合明らかである．測地線の延長可能性を要請していないことに注意しよう．とくに, 円錐的特異性を持つリーマン計量を許しているし, それが面白い例を生じることを 9 節で見る．$(\mathbf{R}^2,\tilde{d})$ 上の極小測地線を記述したい．ただし $\tilde{d}$ はある被覆 $\pi : \mathbf{R}^2 \to T^2$ によって $d$ から誘導される．被覆変換は平行移動 $T_k : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $q \to q+k$, $k \in \mathbf{Z}^2$ であると常に仮定する．これは若干記法の乱用である．というのは, 1 節および 3-5 節では文字 $T$ が $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ 上の $\mathbf{Z}^2$ の作用を表した．しかし, 極小測地線の $k \in \mathbf{Z}^2$ だけの平行移動は対応する $x \in \mathcal{M}$ への $T_k$ の作用に対応するから (図 2 参照), この乱用は自然である．

このような空間 $(T^2,d)$ の最も重要な例はリーマンあるいは対称フィンスラー計量で与えられる．$H_{yy} > 0$ のハミルトン系が「運動エネルギー + 位置エネルギー」ハミルトン関数の古典系を一般化するのとほぼ同じように, フィンスラー計量はリーマン計量を一般化する ((7.11) 付近の注意も参照). 完全を期すため, 関連する概念を定義し, 前に定義されたものとの関連を記述し, 証明を引用する．できるだけ初等的にするため, $\mathbf{R}^2$ から始める．$\mathbf{R}^2$ 上のフィンスラー計量 $F$ とは $\mathbf{R}^2$ の接バンドル $T\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ 上の非負の連続関数であって, ゼロ断面 $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ 以外では滑らかであり, 次の条件を満たす．

$(F_1)$ 一様性: すべての $(q\dot{q}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ およびすべての $\lambda > 0$ に対して $F(q\lambda\dot{q}) = \lambda f(q,\dot{q})$ である．

$(F_2)$ ルジャンドル条件: すべての $(q,\dot{q}) \in \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 \backslash \{0\})$ に対して

$$\left(\frac{\partial^2(F^2)}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}(q\dot{q})\right)_{1\le i,j\le 2}$$

は正定値.

フィンスラー計量 $F$ は, すべての $(q,\dot{q}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ に対して $F(q,\dot{q}) = F(q,-\dot{q})$ のとき対称である．対称フィンスラー計量の有名な類がリーマン計量であって, 定義により $\dot{q}$ に関して 2 次, つまり, $F^2(q,\dot{q}) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ である．ここで $(g_{ij}(q))$ は対称かつ正定値である．$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上のフィンスラー計量を得るのに, すべての平行移動 $T_k, k \in \mathbf{Z}^2$ が $F$ と等長であること, つまり, 以下を要請する．

$(F_3)$ $(q,\dot{q}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ およびすべての $k \in \mathbf{Z}^2$ に対して $F(q+k,\dot{q}) = F(q\dot{q})$ が成り立つ．

区分 $C^1$ 曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ の $F$ 長さは次式で定義される．

$$L_F(\gamma) := \int_a^b F(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))dt.$$

$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 内の区分 $C^1$ 曲線の $F$ 長さは $\mathbf{R}^2$ へのその持ち上げの $F$ 長さである．さて, $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上に対称フィンスラー計量 $F$ が与えられたとき, $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上の距離関数 $d$ を定義することができる．すなわち,

$$d(p,q) = \inf\{L_F(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2\backslash\mathbf{Z}^2 \text{は区分線形,} \ \gamma(a) = p, \gamma\}$$

また同様に, $\mathbf{R}^2$ 上の距離関数 $\tilde{d}$ を定義できる．このとき $d$ と $\tilde{d}$ は上で述べて持ち上げ操作で関係がついており, 通常の位相を生成する．この $d$ が $(G_1)$ と $(G_2)$ を満たすかどうかは明らかでもないし自明でもない．これを証明するには, 積分 $\int F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$ を極小にする曲線の局所存在および正則性の理論が必要である ([22], Kap. V または [16], §§383-93 参照). $\tilde{d}$ 測地線はオイラー・ラグランジュ方程式

$$(F^2)_q(c,\dot{c}) - \frac{d}{dt}\left((F^2)_{\dot{q}}(c,\dot{c})\right) = 0$$

の極大解であって, $F(c,\dot{c}) = 1$ を満たすものに他ならない．これを知れば, 一意延長性 $(G_2)$ は常微分方程式の解がその初期データで決まることの簡単な帰結であることがわかる．

さて, $(G_1)$ と $(G_2)$ を満たすトーラス $(T^2, d)$ が与えられたとき 1 節の性質 $(H_1) - (H_4)$ を持つ関数 $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ をどうやって作るか説明しよう．$\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \simeq T^2$ を被覆とし, $\tilde{d}$ は $\mathbf{R}^2$ に誘導された距離関数とする．当面, $\mathbf{R}^2$ 上の座標は, 座標線 $s \to (0,s)$ が極小 $\tilde{d}$ 測地線であるように選ばれているとする．$T_k, k \in \mathbf{Z}^2$ は等長変換であるから, すべての線 $s \to (i,s), i \in \mathbf{Z}$ は極小 $\tilde{d}$ 測地線であり, 仮定した対称性より, $s \to (i,-s)$ についても同じことが成り立つ．上で行なった仮定の下で, $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を次式で定義する．

$$H(\xi,\eta) := \tilde{d}((0,\xi),(1,\eta)).$$

$H$ が性質 $(H_1) - (H_1)$ を持つことの証明を始める前に次を述べておく．

(6.3) **補題.** $(x_j, \ldots, x_k), k - j \geq 2$ は $H$ に関する極小切片であるとする．このとき一意の極小測地線切片 $c : [0,L] \to \mathbf{R}^2$ があって, 点 $(i,x_i), j < i < k$ を通って $(j,x_j)$ を $(k,x_k)$ に結ぶ．逆に, 直線 $\{i\} \times \mathbf{R}, i \in \mathbf{Z}$ の一部でないどの極小測地線切片も各線 $\{i\} \times \mathbf{R}$ と高々いちど交わり, 交点は $H$ に関する極小切片のグラフをなす．

証明. これは (6.1), (6.2) およびすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $\tilde{d}((0,\xi),(1,\eta)) = \tilde{d}((i,\xi),(i+1,\eta))$ であることからただちにしたがう．

(6.4) **補題.** $H$ は $(H_1) - (H_4)$ を満たす．

証明. $T_{(0,1)}$ は $\tilde{d}$ 等長変換であるから, $(H_1)$

$$H(\xi+1,\eta+1) = H(\xi,\eta).$$

を得る．無限遠での条件 $(H_2)$ は以下のように確認できる．

$$H(\xi,\xi+\eta) \geq \tilde{d}((1+\xi),(1+\xi+\eta)) - \tilde{d}((1,\xi),(0,\xi)).$$

$s \to (1,s)$ は極小測地線であるから, 次が成り立つ．

$$\tilde{d}((1,\xi),(1,\xi+\eta)) = |\eta|.$$

これから $(H_2)$ が出る．というのは, $\xi \to \tilde{d}((1,\xi),(0,\xi))$ は連続周期関数だからである．$(H_3)$ のためには次を証明しなければならない．すなわち,

$$\underline{\xi} < \overline{\xi} \text{および} \underline{\eta} < \overline{\eta} \text{のとき} \quad H(\underline{\xi},\underline{\eta}) + H(\overline{\xi},\overline{\eta}) < H(\underline{\xi},\overline{\eta}) + H(\overline{\xi},\underline{\eta}).$$

(6.1) によれば, $(0,\underline{\xi})$ から $(1,\overline{\eta})$ への極小測地線切片 $c_0$ および $(0,\overline{\xi})$ から $(1,\underline{\eta})$ への極小測地線切片 $c_1$ を選ぶことができる．(6.3) より, 両切片は端点を除いて $(0,1)\times\mathbf{R}$ に含まれる．$\underline{\xi} < \overline{\xi}$ および $\underline{\eta} < \overline{\eta}$ であるから, これらの切片は $(0,1)\times\mathbf{R}$ の内部で交わる．ゆえに, $c_0$ と $c_1$ の一部を結んで $(0,\underline{\xi})$ から $(1,\underline{\eta})$ への曲線 $\underline{\gamma}$ と $(1,\overline{\xi})$ から $(1,\overline{\eta})$ への曲線 $\overline{\gamma}$ を得ることができる (図 8).

このとき $L(\underline{\gamma}) + L(\overline{\gamma}) = L(c_0) + L(c_1) = H(\underline{\xi},\overline{\eta}) + H(\overline{\xi},\underline{\eta})$ である．ところで $L(\underline{\gamma}) + L(\overline{\gamma}) \le H(\underline{\xi},\underline{\eta}) + H(\overline{\xi},\overline{\eta})$ であるのは $\underline{\gamma}$ と $\overline{\gamma}$ が極小測地線切片のときのみである．ところがこれは $(G_2)$ と矛盾する．ゆえに $(H_3)$ が成り立つ.

$(H_4)$ を証明するために, $H$ に関するふたつの極小切片 $(x_{-1},x_0,x_1) \ne (x^*_{-1},x^*_0,x^*_1)$ で, $x_0 = x^*_0$ を満たすものを考える．$(x_{-1}-x^*_{-1})(x_1-x^*_1) < 0$ を示したい.

図 8

(6.3) によれば, 極小測地線切片 $c, c^*$ が $[-1,1]\times\mathbf{R}$ 内にあって, 初期点がそれぞれ $(-1,x_{-1})$ と $(-1,x^*_{-1})$, 終点がそれぞれ $(1,x_1)$ と $(1,x^*_1)$ であって, $c$ と $c^*$ が $(0,x_0)$ で交わる．$(x_{-1}-x^*_{-1})(x_1-x^*_1) > 0$ と仮定し, $\overline{c}$ を $(-1,x_{-1})$ から $(1,x^*_1)$ への極小測地線切片とする．(6.3) より, 切片 $\overline{c}$ は $[-1,1]\times\mathbf{R}$ に含まれ, (6.2) より, $(-1,1)\times\mathbf{R}$ の内部で $c$ または $c^*$ と交わらない．簡単なトポロジーの議論によれば, これは不可能である．だから $(H_4)$ が証明された.

最後に,「$s \to (0,s)$ が極小測地線」であるという仮定が一般性を制限していないことを示さねばならない.

ここで, われわれの手法はぐるぐる回りの観を呈す．というのは本質的には定理 3.3. を証明し直なねばならないからである．極小 $\tilde{d}$ 測地線 $c$ があって平行移動 $T_{(0,1)}$ の下で不変であることを示す．このとき $c$ はその平行移動 $T_{(k,0)}c,\ k \ne 0$ のどれとも交わらない．トポロジーでよく知られているように, 同相写像 $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ があって, すべての $p \in \mathbf{R}^2, k \in \mathbf{Z}^2$ に対して $\Phi(0,s) = c(s)$ および $\Phi(p+k) = \Phi(p) + k$ を満たす ([50], Thm 6.2.5 参照). ゆえに, $s \to (0,s)$ は被覆 $\overline{\pi} = \pi \circ \Phi : \mathbf{R}^2 \to T^2$ による $d$ の持ち上げ計量 $\tilde{d}(p,q) := \tilde{d}(\Phi(p),\Phi(q))$ に関して極小測地線である．このような極小 $\tilde{d}$ 測地線 $c$ を得るために, 関数 $(x,y) \to \tilde{d}((x,y),(x,y+1))$ の絶

対極小となっている点 $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$ を選ぶ．$c$ は平行移動 $T_{(0,j)c_0}$，$j\in\mathbf{Z}$ のすべてから形成される曲線とする．ただし $c_0$ は $(\xi,\eta)$ から $(\xi,\eta+1)$ への極小測地線切片である．この曲線 $c$ が極小測地線であることの証明は [14]($G$ 空間の場合) にあり, その証明法はいまの状況に持ち込める．発想は, (3.3) を証明するときのものと同じである．

(6.3) から明らかなように, 極小軌跡 $\mathcal{M}=\mathcal{M}(H)$ は極小 $\tilde{d}$ 測地線 $c:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ に対応する．もっと詳しくは, どの $x\in\mathcal{M}$ に対しても, 点 $(i,x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ を通る極小測地線 $c$ が存在する．$c$ はパラメータづけの不定性を除いて一意である．一方, $c(s)=(\xi(s),\eta(s))$ は極小測地線で, $\xi(s)$ が全射なら, $c$ は, ある $x\in\mathcal{M}$ のグラフにおいて $\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\subseteq\mathbf{R}^2$ と交わる．

ここで我々の手法が不変でないことに感謝すべきである．つまり, $\xi(s)$ が全射でない極小測地線 $c(s)=(\xi(s),\eta(s))$ は特別な手当が必要である．$c$ が各直線 $\{i\}\times\mathbf{R}, i\in\mathbf{Z}$ と高々いちど交わるから, この場合 $\overline{\xi}(s):=\xi(s)+\eta(s)$ は全射である．

ゆえに, 異なる被覆 $\pi:\mathbf{R}^2\to T^2$ に対応する $\mathbf{R}^2$ 上の新しい座標 $(\overline{\xi},\overline{\eta}):=(\xi+\eta,\eta)$ では $c$ はもはや特別ではない．実は, (5.3) によれば, $i\in\mathbf{Z}$ が存在して $c(s)=(\xi(s),\eta(s))$ は $[i,i+1]\times\mathbf{R}$ に含まれる．

さていまや, 3-5 節の結果を極小 $\tilde{d}$ 測地線の陳述として解釈する準備が整った．ただし $\tilde{d}$ は $(G_1)$ と $(G_2)$ を満たす $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上の計量 $d$ の持ち上げである．とくに, 以下で述べる陳述のすべては対称フィンスラー計量の場合に正しい． 陳述は, すべての $p\in\mathbf{R}^2, k\in\mathbf{Z}^2$ に対して $\Phi(p+k)=\Phi(p)+k$ を満たす座標変換 $\Phi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ の下で不変である．(3.13), (3.16) および (3.17) より次を得る．

(6.5) **定理.** $c(s)=(\xi(s),\eta(s))$ を $(\mathbf{R}^2,\tilde{d})$ 内の極小測地線とする．$c$ とその平行移動 $T_kC, k\in\mathbf{Z}^2$ が共通点を持てば, $c$ と $T_kc$ はパラメータの不定性を除いて一致する．$\xi(s)$ が全射なら, 平均傾き $\alpha(c):=\lim_{|s|\to\infty}\eta(s)/\xi(s)$ が $(-\infty,\infty)$ で存在する．どの $\alpha\in\mathbf{R}$ に対しても, $\alpha(c)=\alpha$ なる極小測地線が存在する．

注意. (1) $\xi(s)$ が全射でなければ $\xi(s)$ は有界である．この場合, $\alpha(c)=\infty$ と定義する．
(2) 実は, (3.16)(a) は (6.5) に極限が存在すること以上のことを意味する．コンパクト性の議論を使って, [26] の定理 VII を得る．$\tilde{d}$ を $\mathbf{R}^2$ 上の計量で, $(G_1)$ と $(G_2)$ を満たす $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上の計量 $d$ の持ち上げになっているものとする．このとき, 定数 $D>0$ が存在して, どの極小 $\tilde{d}$ 測地線も $\mathbf{R}^2$ の 2 本の平行線に挟まれる幅 $D$ の帯に含まれる．

一見, 任意に大きな平均傾き $\alpha$ に対して成り立つような $D$ を得るには問題があるように思える．しかし, この困難は鉛直軸が異なるホモトピー類に属する閉測地線に射影されるような第二の座標を使えば消滅する．
(3) (6.5) の第一の陳述の言うところは, $T^2=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ への極小測地線の射影は横断的自己交差を持たないことである．
(4) 不変な立場からすると, 数 $\alpha(c)$ は $H_1(T^2,\mathbf{Z})$ の基底の取り方に依存する．基底は被覆 $\pi:\mathbf{R}^2\to T^2$ ($\mathbf{Z}^2$ 平行移動を deck 変換として) 上と同じように座標変換 $\Phi$ の不定性を除いて決定する．とくに, $\alpha(c)$ の有理数性または無理数性は $T^2$ 上の対応する測地線の完全不変な性質である．

発見の歴史的順序を尊重して, 5 節の結果の続きを述べる． 測地線 $c:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ が周期 $(q,p)\in\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}$ で周期的なのは, $T_{(q,p)}c$ と $c$ がパラメータづけの不定性を除いて一致するときである．だから周期的測地線は $T^2$ のホモトピー非自明な閉測地線に対応する．(3.2) を使い,

(3.3) および (5.1) の証明を使って, 次が結論できる.

(6.6) **定理.** 周期的極小測地線は, 自由ホモトピー類における極小長さを持つ $T^2$ 上の閉測地線の持ち上げそのものである. 同じ周期を持つふたつの異なる周期的極小測地線は交わらない. 周期的極小測地線の極小周期 $(q,p)$ は互いに素である.

(5.3) より次の結論を得る.

(6.7) **定理.** $\alpha(c) \in \mathbf{Q}$ なる極小測地線 $c$ は周期的であるか, あるいは $\alpha(c^-) = \alpha(c^+) = \alpha(c)$ なるふたつの周期的極小測地線 $c^-, c^+$ の間の帯に含まれる. 各方向において, $c$ は $c^-$ および $c^+$ のひとつだけに漸近的である. $c^-$ と $c^+$ の間の帯には周期的極小測地線はない.

最後に, 存在に関する結果 (5.8) の言うところによれば,

(6.8) **定理.** ほかの周期的極小測地線を含まない, ふたつの周期的極小測地線 $c^-$ と $c^+$ の間の帯には, 極小測地線 $c$ と $c^*$ があって, $c$ は $c^-$ に $\alpha$ 漸近かつ $c^+$ に $\omega$ 漸近である ($c^*$ の場合は逆).

Hedlund の結果 [26] は (6.5) と (6.6) に含まれ, (6.7), (6.8) は本質的に Morse[43] による. 曲面上の測地線でホモトピー類の中で極小長さを持つもの同士の交差は [23] で調べられた.
さて 4 節の結果にまで来た. これを測地線に応用するといままでの知識を越える. 平均傾き $\alpha$ の極小測地線の集合も $\mathcal{M}_\alpha$ で表すことにする. $\mathcal{M}_\alpha$ 内の測地線のうち, $T^2$ 上で考えたとき回帰的ばものの集合は $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ で表す. $\mathbf{R}^2$ 上で, これらは $c \in \mathcal{M}_\alpha$ であって, その平行移動 $T_k, k \in \mathbf{Z}^2$ で近似できる. [26] と [41] で解けなかった主たる問題は以下のように述べることができる. $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ のとき $\mathcal{M}_\alpha$ 内の $c$ と $c'$ は交わることができるか? もし交わるなら, $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ のときの $\mathcal{M}_\alpha$ の構造は非常に複雑な可能性がある. しかし, 定理 4.1 によれば,

(6.9) **定理.** $\mathcal{M}_\alpha, \alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ 内のふたつの異なる測地線は交わらない.

4 節の残りの結果を合わせて,

(6.10) **定理.** $\alpha$ は無理数であるとする. $\mathbf{R}^2$ のどの点をも通る $c \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ ($c$ はパラメータづけの不定性を除いて一意である) があるか, あるいは $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ はカントール集合内でどの周期的極小測地線とも交わる. どの $c \in \mathcal{M}_\alpha\backslash\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ も $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ 内のふたつの漸近測地線に挟まれた帯に含まれる. どの $c \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ も周期的極小測地線で近似できる.

手短かに言えば, $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ は $\mathbf{R}^2$ の葉層であるかあるいは lamination である. lamination の (もちろんスケッチ風であるが) 絵柄を図 6 に示した. ユークリッド的な状況と驚くほど似ていることに気づく. すなわち, 集合 $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$, $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ は平行線の族に対応し, $\alpha \in \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ のとき $\mathcal{M}_\alpha^{rec} = \mathcal{M}_\alpha^{per}$ である. 同じ族のふたつの要素は交わらず, 異なる族のふたつの要素はちょうど一度だけ交わる.
9 節で, すべての $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ に対して $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ がカントール集合に対応する $T^2$ 上の滑らかなリーマン計量の例を示す. ある $c \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ の $T^2$ への射影に接するベクトルの集合は $T^2$ の単位接バンドル上の測地流の極小集合をなす. これは (3.15) および円写像の対応する性質の帰結である. だからトーラスの滑らかな測地流の複雑な極小集合の例をたくさん見つける. 高い種数の曲面の測地流のこのような極小集合を構成することは [42] の主結果のひとつである.
(3.19) の類似物のひとつを挙げよう. すなわち, $\mathcal{N}$ は曲面上のフィンスラー計量の測地線の

集合であって, $\mathcal{N}$ のどのふたつの要素も交わらないとする. $N$ は $\mathcal{N}$ の要素が通る点の集合とする. このとき $\mathcal{N}$ の測地線げの接ベクトルの集合は $N$ の上の単位接バンドル内のリプシッツ断面を形成する. 十分短い測地線切片がその端点に滑らかに依存することを使ってまったく初等的なやりかたでこのリプシッツ連続性を証明できる.

最後に, Zaustinsky[51] が Morse[43] および Hedlund[26] の結果の多くを, もっと一般のまたとくに非対称計量へと一般化したことを指摘しておく. ここで与えた手法ではこのような一般化は不可能である. 円写像によって非自己交差極小測地線を記述するためには, どちらの方向にたどっても極小な周期的な測地線が必要である. もともと, (6.9) と (6.10) が非対称の場合に成り立つかどうか明らかでない. しかし, 円写像に依らないで非自己交差極小測地線の回転数を定義する道がある ([5], 4 節参照). この概念と Zaustinsky の結果を使えば, (6.9) と (6.10) を非対称計量の場合に一般化できるはずである.

## 7. ねじれ写像への応用

この節では, 3-5 節の結果から単調ねじれ写像の不変集合の Mather の理論を導こう. 単調ねじれ写像の母関数は 1 節の関数 $H$ の役割を果たす. 用語「単調ねじれ写像」の定義において, 正則性と定義域は応用に応じて異なる. 技術的な難しさを最小にするために, 以下のたいへん制限的な条件を使う. 後で, それをどのように緩めるか議論する.

(7.1) **定義.** 単調ねじれ写像は円環の方向保存 $C^1$ 微分同相写像 $\varphi : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ であって, 次の性質を持つ持ち上げ $\tilde{\varphi} = (f,g) : \mathbf{R} \times [0,1] \to \mathbf{R} \times [0,1]$ を許す.

(a) $\tilde{\varphi}$ は (リュベーグ) 面積を保存する.

(b) ねじれ条件: $D_2 f > 0$.

(c) $g(\xi,0) = 0,\ g(\xi,1) = 1$.

注意. (a) の代わりに $\det(\tilde{\varphi}') = 1$ を要請してもよい. 条件 (c) は, $\varphi$ が境界成分を入れ換えないことを意味する. 平行移動 $T_{(1,0)}, T_{(1,0)}(\xi,y) = (\xi+1,y)$ が被覆変換群を生成することを仮定する. このとき $f(\xi+1,y) = f(\xi,y)+1, g(\xi+1,y) = g(\xi,y)$ である.

単調ねじれ写像はさまざまな機会に自由度 2 のハミルトン系のポアンカレ写像であることがわかる (?)([44], II.4 章参照). (7.5) で 3 つの具体的な例を挙げる. そのひとつは狭義凸有界領域のビリヤードである.

単調ねじれ写像の基本的性質は, 「母関数」

$$H : D \to \mathbf{R} \quad ただし \quad D = \{(\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2 \mid f(\xi,0) \le \eta \le f(\xi,1)\}$$

によって大域的に記述できることである. 定数を加えることの不定性を除いて $H$ は

$$\tilde{\varphi}(x_0,y_0) = (x_1,y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -D_1 H(x_0,x_1) = y_0 \\ \quad D_2 H(x_0,x_1) = y_1 \end{cases} \tag{7.2}$$

によって一意に決まる. $H$ を構成するために $a, b : D \to \mathbf{R}$ を次式で定義する.

$$a(\xi, f(\xi,y)) := y,\ b(\xi,\eta) := g(\xi, a(\xi,\eta)).$$

このとき (7.2) は次式と同値である.

$$dH = -a d\xi + b d\eta.$$

$\det(\tilde{\varphi}') = 1$ より, 1-形式 $\omega = -ad\xi + bd\eta$ が閉じていると言える. $D$ は単連結であるから, $H : D \to \mathbf{R}$ が存在して (7.2) が成り立つ. $H$ は $D$ の内部で $C^2$ であり, $D_1H, D_2H$ および $D_2D_1H$ は連続的に $D$ に拡張される. その上, (7.1)(b) によればある $\delta > 0$ に対して $D_2D_1H = -D_2a \le -\delta$ である. 最後に, $H(\xi+1, \eta+1) = H(\xi, \eta)$, つまり, $\omega$ は円筒「$D$ modulo 平行移動 $T_{(j,j)}, j \in \mathbf{Z}$」上で完全 (exact) である. $\omega$ は $(0, f(0,0))$ から $(1, f(0,0)+1)$ への曲線 $\xi \to (\xi, f(\xi, 0))$ に沿ってゼロである. いまや $H$ を $\mathbf{R}^2$ 上の $C^2$ 関数へ次を満たすように拡張することは簡単である.

$$(H_1) \qquad H(\xi+1, \eta+1) = H(\xi, \eta)$$

および

$$D_2D_1H \le -\delta/2 < 0.$$

ゆえに, (1.3) によれば, 拡張された $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は 1 節の $(H_1) - (H_4)$ を満たす. (7.2) を定義として, $\tilde{\varphi}$ または $\varphi$ を $\mathbf{R}^2$ または $S^1 \times \mathbf{R}$ に拡張できる. 列 $(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ が $H$ に関して停留であるとは, $D_2H(x_{i-1}, x_i) + D_1H(x_i, x_{i+1}) = 0$ がすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して成り立つことであったことを思い出そう ((1.3) 参照).

(7.3) $(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ が $H$ に関して停留なら, $(x_i, y_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, $y_i = -D_1H(x_i, x_{i+1})$ は $\tilde{\varphi}$ の軌道である. すなわち, $\tilde{\varphi}(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ である. 逆に, $(x_i, y_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ が $\tilde{\varphi}$ の軌道なら, $(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ は $H$ に関し
して停留である.

$(x_i)_{i\in\mathbf{Z}} \in \mathcal{M}(H)$ は $H$ に関して停留であるから, 極小軌跡に関するどの陳述も拡張された $\tilde{\varphi}$ のある型の軌道に関する陳述と解釈できる. 以下の仕方で元の $\tilde{\varphi} : \mathbf{R} \times [0,1] \to \mathbf{R} \times [0,1]$ に戻ることができる. すなわち, $f_0, f_1 \in \tilde{G}_+$ は $f_0(\xi) = f(\xi, 0), f_1(\xi) = f(\xi, 1)$ で定義されるとし, $\alpha_0, \alpha_1$ は $f_0, f_1$ の回転数であるとする. 区間 $[\alpha_0, \alpha_1]$ は $\tilde{\varphi}$ のねじれ区間と呼ばれる. (7.9) で, $\alpha_0 < \alpha_1$ であることを見る.

(7.4) **補題.** $x \in \mathcal{M}_\alpha$ および $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ とする. つまり, $\alpha$ は $\tilde{\varphi}$ のねじれ区間の内部にある. このとき軌道 $(x_i, y_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, $y_i = D_1H(x_i, x_{i+1})$ は $\mathbf{R} \times (0,1)$ に含まれる.

(7.4) の証明は (7.7) のあとで行なう.

(7.5) **例.**

(a) 可積分の場合: $r' > 0$ なるある関数 $r : [0,1] \to \mathbf{R}$ に対して $\tilde{\varphi}(\xi, y) = (\xi + r(y), y)$ と置く. このとき, 第二座標は $\tilde{\varphi}$ の積分である. 母関数は (1.4) で議論した $H(\xi, \eta) = h(\xi - \eta)$ 型である. ここで $h$ は $h'(r(y)) = y$ を満たす. ねじれ区間は $[r(0), r(1)]$ である.

(b) よく調べられている問題が「標準微分同相写像」

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta) = (\xi + y + s(\xi), y + s(\xi))$$

である. ただし $s$ は $s(\xi+1) = s(\xi)$ および $\int_0^1 s(\xi)d\xi = 0$ を満たす ([28], [34], [39] 参照). $s \not\equiv 0$ の場合, この $\tilde{\varphi}$ は $\mathbf{R} \times [0,1]$ を不変にしない. けれども (7.1)(a) と (b) を満たす. (7.2) の意味の $\tilde{\varphi}$ の母関数は

$$H(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(\xi - \eta)^2 + S(\xi) \quad ただし \quad S'(\xi) = s(\xi).$$

だから $\mathcal{M}(H)$ 内の極小軌跡はこの場合も $\tilde{\varphi}$ の軌道を生じる．

(c) 有界凸領域 $C \subseteq \mathbf{R}^2$ 内のビリヤードは単調ねじれ写像で記述できる魅惑的な系である．$C$ 内を等速直線運動し，「入射角 = 反射角」の法則にしたがって $\partial C$ で反射するする粒子の可能な軌道に興味がある．$c : S^1 \to \partial C$ は弧長による $\partial C$ の $C^3$ パラメータづけであるとし，$\partial C$ は直線分を含まないとする．「単調ねじれ写像」$\varphi : S^1 \times (-1, 1) \to S^1 \times (-1, 1)$ を次のように定義する．粒子が $\partial C$ に $c(s_0)$ および $c(s_1)$ で相次いで跳ね返ったとする．$c(s_0)$ または $c(s_1)$ において跳ね返った粒子の運動方向と $\dot{c}(s_0)$ または $\dot{c}(s_1)$ との角度を $\tau_0$ または $\tau_1$ とする．このとき

$$\varphi(s_0, -\cos\tau_0) := (s_1, -\cos\tau_1).$$

$\varphi$ は $\varphi | S^1 \times \{-1, 1\} = \mathrm{id}$ によって連続的に $S^1 \times [-1, 1]$ に拡張される．初等幾何によれば，

$$H(\xi, \eta) := -|c(\xi) - c(\eta)|$$

は，集合 $\mathring{D} = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \eta - \xi < 1\}$ 上で $\tilde{\varphi}$ の母関数であり，(7.1)(b) が満たされる．これはつまり $S^1 \times [-1, 1]$ への拡張が $C^1$ でないことを除いて $\varphi$ が (7.5) の意味で単調ねじれ写像であることを意味する．しかし (7.9) の後の注意が示すように，3-5 節の結果はここでも適用できる．これ以上の情報については [18], [20] および [37] を参照されたい．

ビリヤードの軌道は，$\partial C$ に沿った端を持ち，$C$ を二重に被覆する平坦化したリーマン球の測地線として解釈できる．平坦化した球やトーラスのある種の測地線を同じ方法で記述できることは驚きである．

さて，3-5 節の結果を単調ねじれ写像の軌道に関する陳述として解釈しよう．有理数の $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ に対して，定理 (3.3) からいわゆる極小型のバーコフ周期軌道が生じる．$x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ で $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$ なら，$\tilde{\varphi}$ の対応する軌道 $(x_i, y_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ は $(x_{i+q}, y_{i+q}) = (x_i + p, y_i)$ を満たす．定理 (5.8) は隣合う極小型のバーコフ周期軌道を結ぶヘテロクリニック (またはホモクリニック) 軌道の存在を証明する．無理数 $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ の場合，Mather 集合の存在が得られる ([35] 参照)．

Figure 9.

(7.6) **定理.** どの無理数 $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ に対しても，$\varphi$ 不変集合 $M_\alpha \subseteq S^1 \times (0, 1)$ があって次を満たす．

(a) $M_\alpha$ は閉集合 $A_\alpha \subseteq S^1$ 上で定義されるリプシッツ関数 $\psi_\alpha : A_\alpha \to (0,1)$ のグラフである.

(b) $\varphi$ は $M_\alpha$ 上で回転数 $\alpha(\mathrm{mod}\ \mathbf{Z})$ を持つ. つまり, $\alpha(h) \equiv \alpha\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{Z})$ なる $h \in G_+$ があって, $h(A_\alpha) = A_\alpha$ を満たし, また次を満たす.

$$\varphi(\xi, \psi_\alpha(\xi)) = (h(\xi), \psi_\alpha(h(\xi))) \quad \text{for all} \quad \xi \in A_\alpha$$

(c) $M_\alpha$ 内の回帰点の集合 $M_\alpha^{rec}$ は $S^1$ のカントール集合に射影されるかあるいは $S^1$ 全体に射影される. 後者の場合, $M_\alpha$ は $\varphi$ 不変リプシッツ曲線であって, 円環 $S^1 \times [0,1]$ を一度巻き, また $\varphi|M_\alpha$ は回転に位相共役である.

<u>証明</u>. $\varphi$ の代わりに $\tilde{\varphi}$ に対して (a)-(c) を証明する. すべては $(\xi, \eta) \to (\xi + 1, \eta)$ の下で不変である. (7.4) を考慮して次を定義する.

$$\tilde{M}_\alpha = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R} \times (0,1) \mid x \in \mathcal{M}_\alpha \text{が存在して} \xi = x_0, \eta = -D_1 H(x_0, x_1)\}$$

(7.2) および (7.3) によれば, 集合 $\tilde{M}_\alpha$ は $\tilde{\varphi}$ 不変である. (4.1) および (4.2) より, 集合 $\tilde{M}_\alpha$ は閉集合 $\tilde{A}_\alpha \subseteq \mathbf{R}$ の上に 1 対 1 で射影される. (3.19) によれば, 回転数 $\alpha$ のリプシッツ連続な $\tilde{h} \in \tilde{G}_+$ があって, すべての $x \in \mathcal{M}_\alpha$ に対して $\tilde{h}(x_0) = x_1$ を満たす. ゆえに, $\xi \in \tilde{A}_\alpha$ に対して $\tilde{\psi}_\alpha(\xi) = -D_1 H(\xi, \tilde{h}(\xi))$ はやはりリプシッツである. これで (a) と (b) が証明された. 次に (c) は 2 節で述べた円写像の性質の帰結である. □

ある固定した $\alpha$ に対して (7.6)(a) および (b) を満たす互いに素な $\varphi$ 不変集合の連続体があるが ([36] および (9.15) 参照), $A_\alpha = S^1$ なら $M_\alpha$ は (a) と (b) によって一意に決定される. すなわち,

(7.7) **定理.** $C$ が $S^1 \times [0,1]$ を 1 回巻く $\varphi$ 不変曲線で, $\varphi|C$ の回転数が $\alpha$ なら, $C \subseteq M_\alpha$ であり, $\alpha$ が無理数なら $C = M_\alpha$ である.

<u>証明</u>. バーコフの定理 [8], §44 によれば, $C$ は (リプシッツ) 関数 $\psi : S^1 \to [0,1]$ のグラフである. ゆえに

$$\text{回転数}\alpha\text{なるある}\ h \in G_+ \text{に対して} \quad \varphi(\xi, \psi(\xi)) = (h(\xi), \psi(h(\xi))).$$

次のように置く.

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} \mid x_{i+1} = f(x_i, \tilde{\psi}(x_i)) = \tilde{h}(x_i) \text{ for all } i \in \mathbf{Z}\}.$$

ここで $\tilde{\psi}, \tilde{h}$ は $\mathbf{R}$ への $\psi, h$ の持ち上げである. $\mathcal{C}$ は $H$ に関する停留軌跡の閉全順序集合である ((7.3) 参照). どの $\xi \in \mathbf{R}$ に対しても, ちょうどひとつの $x \in \mathcal{C}$ があって $x_0 = \xi$ を満たす. これが $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(H)$ を意味することを証明しよう. そうすれば我々の主張は証明されたことになる. $(x_i, \ldots, x_j)$ をある $x \in \mathcal{C}$ の切片とする. $(\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j)$ を $\tilde{x}_i = x_i$ から $\tilde{x}_j = x_j$ への極小切片とする. 極大の $x^* \in \mathcal{C}$ があって $(x_i^*, \ldots, x_j^*) \leq (\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j)$ を満たす. このときある $k, i \leq k \leq j$ に対して $x_k^* = \tilde{x}_k$ である. (1.3) のときと同じ論拠によれば, $H \in C^2$ および $D_2 D_1 H < 0$ なら

停留切片に対しても $(H_4)$ が成り立つ．ゆえに $x_k^* = \tilde{x}_k$ および $(x_i^*, \ldots, x_j^*) \leq (\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j)$ から $x_i^* = \tilde{x}_i$ または $x_j^* = \tilde{x}_j$ が出る．$\mathcal{C}$ に関する仮定より $x = x^*$ が得られ, ゆえに

$$(x_j, \ldots, x_j) \leq (\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j).$$

同様に, $(x_j, \ldots, x_j) \geq (\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j)$ であるから, $(x_j, \ldots, x_j) = (\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j)$ は極小である．$\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ なら, $\mathcal{M}_\alpha$ は全順序であるから ((4.1) 参照)$\mathcal{C} = \mathcal{M}_\alpha$ である． □

いまや (7.4) の証明はほぼ明らかである．

(7.7) より $s = 0, 1$ に対して

$$\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} \mid x_{i+1} = f_s(x_i) \text{ for all } i \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathcal{M}_\alpha. \tag{7.8}$$

$x \in \mathcal{M}_\alpha$ および $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ とする．$\underline{x} \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$, $\overline{x} \in \mathcal{M}_{\alpha_1}$ を $\underline{x}_i = f_0^i(x_0), \overline{x}_i = f_1^i(x_0)$ で定義する．$\underline{x}, x$ および $\overline{x}$ は $0$ でのみ交わり, $\tilde{\alpha}(\underline{x}) = \alpha_0 < \tilde{\alpha}(x) = \alpha < \tilde{\alpha}(\overline{x}) = \alpha_1$ であるから, $\underline{x}_1 < x_1 < \overline{x}_1$ を得る．ゆえに

$$0 = -D_1 H(\underline{x}_0, \underline{x}_1) < y_0 = -D_1 H(x_0, x_1) < -D_1(\overline{x}_0, \overline{x}_1) = 1.$$

(7.8) の右辺は $s = 0$ および $s = 1$ に対して素であることに注意しよう．ゆえに (7.8), (7.7), (5.1) および (5.3) の帰結として次を得る．

(7.9) **補題.** どの単調ねじれ写像に対しても, ねじれ区間は空でない内部を持つ．

これはバーコフ ([10], §4 参照) が初めて証明した．定理 7.7 を使って不変曲線がまったく存在しない簡単な例を挙げることができる．(7.7) およびその証明は (7.5)(b) で考察した写像にも当てはまることに注意する．以下の観察は, Aubry[3], Mather[39] や Mackay-Percival[34] のもっと精密な見積りの特別な場合である．

(7.10) **系.** (7.5)(b) の標準微分同相写像 $\varphi : S^1 \times \mathbf{R} \to S^1 \times \mathbf{R}$ に対して, 関数 $s$ を選んで, ある $\xi_0 \in \mathbf{R}$ に対して $s'(\xi_0) < -2$ とする．このとき $S^1 \times \mathbf{R}$ を巻く $\varphi$ 不変な曲線はない．

証明. (7.7) より, $S^1 \times \mathbf{R}$ を巻く $\varphi$ 不変曲線が存在すれば $x_0 = \xi_0$ なる $x \in \mathcal{M}(H)$ が存在することを我々は知っている．ただし $H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - \eta)^2 + S(\xi),\ S' = s$ である．ところで

$$D_{22} H(x_{-1}, x_0, x_1) = D_{22} H(x_{-1}, x_0) + D_{11} H(x_0, x_1) = 2 + s'(\xi_0) < 0.$$

ところがこれは切片 $(x_{-1}, x_0, x_1)$ の極小性に反する． □

最後に, この節の結果 ((7.6) のリプシッツ連続性を除いて) は, 単調ねじれ写像に関する条件 (7.1) を以下のように緩めても成り立つ．

(a) $\varphi$ は $C^1$ 微分同相写像でなくて同相写像でも十分である．

(b) $D_2 f > 0$ の代わりに, $y \to f(\xi, y)$ がすべての $\xi \in \mathbf{R}$ に対して狭義増加でも十分である．

$f_0$ と $f_1$ が回転でないときに $H$ または $\varphi$ をこの弱い仮定の下でどのように拡張したらよいのか著者は知らない．このような前提の下でこの節の結果を得るための一番簡単な道は前に与えた証明法を修正することであろう．

(1) $C^1$ 級の母関数 $H : D \to \mathbf{R}$ を得るには, (7.1)(a) を微分せずに直接使う．1-形式 $\omega$ は $(\xi, f(\xi, 0))$ に沿ってゼロである．$\xi \to (\xi, f(\xi, 0))$ は rectifiable であるから, これは $H(\xi+1, \eta+1) = H(\xi, \eta)$ を意味する．

(2) $H$ を, すべての $i$ に対して $(x_i, x_{i+1}) \in D$ を満たす切片および列 $(x_i)$ に拡張する．このとき $(H_3)$ と $(H_4)$ が成り立つことを証明できる．極小軌跡 $(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ が $\partial D$ 上に切片 $(x_j, x_{j+1})$ をひとつ持って, たとえば $x_{j+1} = f(x_j, 0)$ なら, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $x_{i+1} = f(x_i, 0)$ である．

(3) 最後に, (3.1), (3.3), (3.9) および (3.13) の証明が小さな修正で済むことを納得する必要がある．もちろん (3.1) において $p/q \in [\alpha_0, \alpha_1]$ のときに $(q,p)$ 周期的極小軌跡の存在を証明することだけはできる．すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $(x_i, x_{i+1}) \in D$ なる $(q,p)$ 周期的列 $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ の存在を保証する簡単な見積りが必要である．

単調ねじれ写像と 6 節の変分問題の間の技術的でない関係を述べる J. Moser の指摘を付け加えておこう．本質は, 単調ねじれ写像とその母関数の間の関係はルジャンドル変換の離散版であることである．$\mathbf{R}^2$ 上のフィンスラー計量 $F$ の非パラメータ版

$$L(t, x, \dot{x}) := F((t,x), (1, \dot{x}))$$

を見てみよう．このとき $\int L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ の極値になっている曲線 $(t, x(t))$ は, 弧長で再パラメータづけされれば $F$-測地線となる．ルジャンドル変換により, $\int L$ を極値にする関数は時間依存ハミルトン系の解に対応する．

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \quad H_y(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -H_x(t, x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{7.11}$$

系 (7.11) は次式により面積保存写像 $\varphi_{n,i}$ を誘導する．

$$\varphi_{n,i}\left[x\left(\frac{i}{n}\right), y\left(\frac{i}{n}\right)\right] = \left[x\left(\frac{i+1}{n}\right), y\left(\frac{i+1}{n}\right)\right]$$

ここで $(x(t), y(t))$ は (7.11) の解である．$n \to \infty$ の極限では, ルジャンドル条件 $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ は, $\varphi_{n,i}$ が単調ねじれ写像であること (つまり (7.1)(ii) を満たすこと) を意味する．だから $\int L$ を極値にする関数は単調ねじれ写像の積 (これは一般に単調ねじれでない) の軌道に対応する．しかし, この記述は $\dot{t} = 0$ なる点を持つ $F$-測地線 $(t(s), x(s))$ では役に立たないことに注意しよう．もっと詳細な情報や逆問題, つまり単調ねじれ写像をハミルトン系でどのように補間するか, については [45] を参照されたい．

最後に, Percival の提案した変分原理を略説しよう．これはこの節の結果を別の仕方で証明する．[35] で Mather が利用した．[35] では以下の陳述が厳密に証明された．

増加関数 $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ すべてにわたる汎関数

$$I_\alpha = \int_0^1 H(x(t), x(t+\alpha))dt \tag{7.12}$$

の極小を捜す．ただし, $x$ は左連続で $x(t+1) = x(t) + 1$ を満たす．形式的に (7.12) のオイラー方程式は

$$D_1 H(x(t), x(t+\alpha)) + D_2 H(x(t-\alpha), x(t)) = 0. \tag{7.13}$$

$y(t) = -D_1H(x(t), x(t+\alpha))$ を定義すれば, (7.13) と (7.12) は次を意味する.

$$\tilde{\varphi}(x(t), y(t)) = (x(t+\alpha), y(t+\alpha)).$$

(7.13) を満たす極小 $x$ の存在を仮定して, 無理数の $\alpha$ に対して次を得る: $x$ が連続なら, 集合 $\{(x(t), -D_1H(x(t), x(t+\alpha))) \mid t \in \mathbf{R}\}$ は $S^1 \times [0,1]$ を巻く $\varphi$ 不変曲線である. そうでなければこの集合は $\varphi$ 不変カントール集合である. だから定理 (7.6) が得られた. $x$ が連続の場合, $h \in G_+$ を $h(x(t)) = x(t+\alpha) \bmod \mathbf{Z}$ により定義でき, しかもこれは (7.6)(b) に現れた $h$ そのものである. だから $x$ は $h$ を回転に共役にする円写像である. $x$ が連続でなければ, $A_\alpha^{rec} =$ 値域 $(x)$ の閉包 に関して類似の陳述が成り立ち, 位相の不定性を除いて $x$ は (2.3) に現れた写像 $x^-$ に対応する. とくに, $x$ の跳びは $A_\alpha^{rec}$ の間隙に対応する.

これらの発想に関連する技術的問題を克服するもうひとつの手法が Moser[46] によって提案されている:

Percival の変分原理を正則化し,

$$I_{\alpha,\varepsilon}(x) = I_\alpha(x) + \int_0^1 |x'(t)|^2 dt$$

を, $\tilde{x}(t) = x(t) - t \in H^{1,2}(S^1)$ なる関数 $x(t)$ に対して極小化する. すると, $I_{\alpha,\varepsilon}$ は通常の方法で処理でき, $\varepsilon \to 0$ のときに Mather の解が得られるはずである.

## 8. 離散 Frenkel-Kontorova モデル

この節では手短かに Aubry & LeDaeron の仕事 [4] との関係を記述する. 彼らの結果はもっと強い前提のもと異なる形をしているが, 3-5 節と同じ結果を含んでいる. 離散 Frenkel-Kontorova モデルは次のようなものである. 1 次元の粒子の両無限鎖が $i$ 番目 ($i \in \mathbf{Z}$) の粒子の位置 $x_i \in \mathbf{R}$ で記述される. だからモデルの配位空間は $\mathbf{R}^\mathbf{Z}$ である. すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $i$ 番目と $i+1$ 番目の粒子はばねポテンシャル $\frac{1}{2}C(x_{i+1} - x_i)^2$ で結合している. ただし $C > 0$g は定数である. その上, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して, 周期ポテンシャル $V(\xi) = V(\xi+1)$ が力 $-V'(x_i)$ を $i$ 番目の粒子におよぼす. 配位 $x \in \mathbf{R}^\mathbf{Z}$ が停留であるのは, すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $i$ 番目の粒子に作用する力の和がゼロのときである. つまり,

$$-C(x_i - x_{i-1}) + C(x_{i+1} - x_i) - V'(x_i) = 0 \quad \text{for all} \quad i \in \mathbf{Z}$$

のときである. (1.3) で導入した記法を使えば, 配位が停留であるための必要十分条件はそれが $H$ に関して停留であるときである. ただし,

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\Big(C(\eta - \xi)^2 + V(\xi) + V(\eta)\Big) \tag{8.1}$$

$H$ が $H(\xi+1, \eta+1) = H(\xi, \eta)$ および $D_2D_1H = -C < 0$ を満たすから 3-5 節の結果が適用できることに注意しよう. 実は, [4] では (8.1) の型のものばかりでなく, $(H_1)$ と $D_2D_1H < 0$ を満たす $C^2$ 関数 $H$ の一般の場合を扱っている.

ここで, 3-5 節で使った記法と [4] で使われた物理用語を結ぶ辞書を用意しよう. こうすれば, 3-5 節の陳述を [4] の陳述に, またその逆に翻訳することができる. 物理的解釈については [4] を参照されたい.

配位 $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ が $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$ に属するのは $x$ のどの切片 $(x_j, \ldots, x_k)$ も同じ京かい条件 $\overline{x}_j = x_j, \overline{x}_k = x_k$ を満たすすべての切片 $(\overline{x}_j, \ldots, \overline{x}_k)$ に比べてエネルギー

$$\sum_{i=j}^{k-1} \frac{1}{2} C(x_{i+1} - x_i)^2 + \sum_{i=j}^{k} V(x_i).$$

を極小にするときである．配位 $x \in \mathcal{M}(H)$ は明らかに停留であり，極小エネルギー (m.e. と略記する) 配位である．3-5 節では m.e. 配位の集合の構造についてかなり完全な描像を与えた．$H(\xi, \eta) = H(\eta, \xi)$ であるから，$\tilde{x}_i = x_{-i}$ として，$x \in \mathcal{M}_\alpha \to \tilde{x} \in \mathcal{M}_{-\alpha}$ によって $\mathcal{M}_\alpha$ を $\mathcal{M}_{-\alpha}$ に写すことができる．ゆえに $\alpha \geq 0$ に対して $\mathcal{M}_\alpha$ を考えればよい．$x \in \mathcal{M}$ の回転数 $\tilde{\alpha}(x) \geq 0$ は配位 $x$ の平均原子間距離と解釈できる．というのは，(3.16)(a) より

$$\tilde{\alpha}(x) = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{2i}(x_i - x_{-i})$$

だからである．物理用語で言えば，(3.17) の意味するところは，どの $\alpha \in \mathbf{R}$ に対しても，平均原子間距離が $\alpha$ の m.e. 配位が存在することである．回帰 m.e. 配位 $x \in \mathcal{M}^{rec}$ はモデルの基底状態 (ground state) と呼ばれる．一方，非回帰 $x \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}^{rec}$ は初等欠陥 (elementary defect) と呼ばれる．m.e. 配位 $x \in \mathcal{M}$ が尽数関係にある (commensurate) のは $\tilde{\alpha}(x) \in \mathbf{Q}$ のときであり，非尽数関係にあるのは $\tilde{\alpha}(x) \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ のときである．定理 (5.3) および (5.8) で記述した尽数関係にある初等欠陥は集合 $\mathcal{M}_\alpha^+$ と $\mathcal{M}_\alpha^-$ は advanced あるいは delayed 初等 discommensurations と呼ばれる．

## 9. 例およびさまざまな結果

省略

### 9.1 平坦なトーラス.

省略

### 9.2 等長変換の 1 パラメータ群を持つトーラス.

省略

## 10. 最近の文献への案内

この論文で述べた理論の最近の発展方向とここで述べなかった方向について手短かに紹介する．Mather の結果は Hall[25], Bernstein[6] および Boyland-Hall[12] によって，面積保存の代わりに位相的条件を満たす単調ねじれ写像へと拡張された．これらの場合，変分原理がない．Mather[40] は，カントール Mather 集合 $M_\alpha$ が，関係する性質を持つ不変カントール集合によって近似できることを示した．$M_\alpha$ 内の軌道は変分原理の極小に対応するが，これらの新しい軌道は局所極小に対応する．この現象についての粗っぽい例は [39] および (9.15) に記述されている．$n$ 自由度で $\mathbf{Z}^n$ 周期性 $(n \geq 3)$ を持つ場合の 1 次元問題，つまりリーマン $n$ トーラス上の測地線の場合，Bernstein & Katok[7] の摂動結果がある．この場合，軌跡の順序について語ることはできず，ここで述べた結果は完全な一般性をもって一般化することははできない ([26] の Hedlund の例参照)．しかし別の枠組では，「順序」の概念は高次元でも有効であることが知れている．Moser[47] は関数 $u : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ の $\mathbf{Z}^n$ 周期的変分問題の極小解を考えた．Moser[47] および Bangert[5] はここで述べた発想の多くをもっと一般の場合へと拡張した．

この論文の主題の一部に関するもっと短い概説はChenciner[17], Mackay-Stark[33] および Moser[46], [48] にある.

## 9. 参考文献


[1] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Grundlehren der math. Wissenschaften 250. New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

[2] V.I. Arnold and A. Avez, *Problémes Ergodiques de la Mécanique Classique.* Paris: Gauthier-Villars, 1967.

[3] S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and devil's Staircase. *Physica*, **7D**(1983), 240-258.

[4] S. Aubry and P.Y. LeDaeron, The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions I: exact results for the ground states. *Physica.* **8D**(1983), 381-422.

[5] V. Bangert, A uniqueness theorem for $\mathbf{Z}^n$-periodic variational problems. *Comment. Math. Helv.*, **62**(1987), 511-31.

[6] D. Bernstein, Birkhoff periodic points for twist maps with the graph intersection property. *Erg. Th. Dynam. Sys.*, **5**(1985), 531-7.

[7] D. Bernstein and A. Katok, Birkhoff periodic orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonians. *Invent. math.*, **88**(1987), 225-41.

[8] G.D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, **43**(1922), 1-119.

[9] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems.* Am. Math. Soc. Colloq. Publ. IX. Providence RI: Am. Math. Soc., 1927.

[10] G.D. Birkhoff, Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bull. Soc. Math. France*, **60**(1932), 1-26.

[11] J.S. Birman and C. Series, Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed. *Topology*, **24**(1985), 217-25.

[12] P.L. Boyland and G.R. Hall, Invariant circles and the other structure of periodic orbits in monotone twist maps. *Topology*, **26**(1987), 21-35.

[13] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics.* New York: Academic Press, 1955.

[14] H. Busemann and F.P. Pedersen, Tori with one-parameter groups of motions. *Math. Scand.*, **3**(1955), 209-20.

[15] P. Buser, Riemannsche Flächen und Längenspektrum vom trigonometrischen Standpunkt aus. *Habilitationsschrift.* Bonn, 1980.

[16] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order. Part II: Calculus of Variations.* San Francisco: Holden Day, 1967.

[17] A. Chenciner, La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptic conservatif; de Poincaré

et Birkhoff á Aubry et Mather. Sém. Bourbaki, Exposé 622, Vol. 1983/84. *Astérisque*, 121/122(1985), 147-70.

[18] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin and Ya.G. Sinai, *Ergodic Theory.* Grundlehren der Math. Wissenschaften 245. New York: Springer, 1982.

[19] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentialles á la surface de tore. *J. de Math. Pure et Appl.*, Sér. 9, **11**(1932), 333-75.

[20] R. Douady, Applications du théoréme des tores invariants. Thése 3éme Cycle. Université Paris VII, 1982.

[21] B. A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov, *Modern Geometry-Methods and Applications, Part II.* Graduate Texts in Math. 104. New York: Springer, 1984.

[22] A. Duschek and W. Mayer, *Lehrbuch der differentialgeometrie.* Leipzig-Berlin: Teubner, 1930.

[23] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Closed geodesics on surfaces. *Bull. London Math. Soc.*, **14**(1982), 385-91.

[24] M. Gromov, Structures métriques pour les variétés Riemanniennes. *Rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu.* Paris: CEDIC, 1981.

[25] G.R. Hall, A topological version of a theorem of Mather on twist maps. *Erg. Th. Dynam. Sys.*, **4**(1984), 585-603.

[26] G.A. Hedlund, Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients. *Ann. of Math.*, **33**(1932), 719-39.

[27] G.A. Hedlund, The dynamics of geodetic flows. *Bull. Am. Math. Soc.*, **45**(1939), 241-60.

[28] R. Herman, Introduction á l'étude des courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. *Astérisque*, **103/104**(1983).

[29] E. Hopf, Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom instabilen Typus II. *Math. Ann.*, **116**(1940), 590-608.

[30] E. Hopf, Closed surfaces without conjugate points. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **34**(1948), 47-51.

[31] A. Katok, Some remarks on the Birkhoff and Mather twist theorems. *Erg. Th. Dynam. Sys.*, **2**(1982), 183-94.

[32] B.F. Kimball, Geodesics on a toroid. *Am. J. Math.*, **52**(1932), 29-52.

[33] R.S. Mackay and J. Stark, Lectures on Orbits of Minimal Action for Area-Preserving Maps. Preprint, University of Warwick, May 1985.

[34] R.S. Mackay and I.C. Percival, Converse KAM: theory and practice. *Comm. Math. Phys.*, **98**(1985), 469-512.

[35] J.N. Mather, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. *Topology*, **21**(1982), 457-67.

[36] J.N. Mather, Non-uniqueness of solutions of Percival's Euler-Lagrange equation. *Comm. Math. Phys.*, **86**(1982), 465-76.

[37] J.N. Mather, Glancing billiards. *Egr. Th. Dynam. Sys.*, **2**(1982), 397-403.

[38] J.N. Mather, A criterion for the non-existence of invariant circles. *Publ. Math. IHES*, **63**(1986), 153-204.

[39] J.N. Mather, Non-existence of invariant circles. *Egr. Th. Dynam. Sys.*, **4**(1984), 301-9.

[40] J.N. Mather, More Denjoy minimal sets for area preserving diffeomorphisms. *Comment. Math. Helv.*, **60**(1985), 508-57

[41] J.N. Mather, Existence of asymptotic orbits for area-preserving monotone twist diffeonorphisms. Manuscript, 1985.

[42] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22**(1921), 84-100.

[43] M. Morse, A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26**(1924), 25-60.

[44] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Ann. of Math. Studies 77. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1973.

[45] J. Moser, Monotone twist mappings and the calculus of variations. *Erg. Th. Dynam. Sys.*, **6**(1986), 325-33.

[46] J. Moser, Break-down of Stability. In J.M. Jowett, M. Month, S. Turner(eds), *Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators.* Lect. Notes in Physics 247, 492-518. Berlin-New York: Springer, 1986.

[47] J. Moser, Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. Henri Poincaré-Analyse no linéaire*, **3**(1986), 229-72.

[48] J. Moser, Recent developments in the theory of Hamiltonian systems. *SIAM Review*, **28**(1986), 459-85.

[49] I.C. Percival, Variational principles for invariant tori and cantori. In M. Month, J.C. Herrara(eds), *Non-linear Dynamics and the Beam-Beam Interaction. Am. Inst. Phys. Conf. Proc.*, **57**(1980), 310-20.

[50] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory.* Graduate Texts in Math. 72. New York: Springer, 1980.

[51] E.M. Zaustinsky, Extremals on compact E-surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102**(1962), 433-45.