谷川清隆 訳

Ergodic Theory and Dynamical Systems **4** (1984), 585-603

ねじれ写像のマザーの定理の位相版
A topological version of a theorem of Mather on twist maps

G.R.Hall
Department of Mathematics, Boston University
Boston, MA 02215, USA

Abstract

円環のねじれ写像 (twist map) に回転数 p/q の周期点があれば回転数 p/q のバーコフ周期点もあることを示す．トポロジー的な手法を使う．だから面積保存、円交差性といった性質を仮定するは必要はない．写像が面積保存ならここで証明する定理とバーコフの不動点定理とから Aubry-Mather の最近の定理が出る．ねじれ写像の最小周期の周期軌道はバーコフ周期軌道であることも示す．

序.

円環からそれ自身の上への微分同相写像 f がねじれ条件を満たすとは、f のもとでのある点の像の角度座標が、その点の動径座標が大きくなるにつれて増えるときである (正確な定義に関しては 2 節参照)．このような写像はポアンカレが三体問題との関係で最初に研究した．この文脈では写像は自然な不変測度を持つ．バーコフ [4]、[5] はこのような面積保存ねじれ写像の場合、多くの周期軌道があることを示した．ただし、バーコフの定理からは軌道の性質に関して何の洞察も得られない．最近、Aubry[2] と Mather[15]([14] も参照) は面積保存ねじれ写像 f には点の角度座標の順序 (angular ordering) が保存するような軌道が存在することを示した．これらはバーコフ周期軌道と呼ばれる ([14] および 2 節参照)．そのうえ、かれらは面積保存ねじれ写像に「準周期軌道」が存在することを示した．Mather の利用した変分法の技術は面積保存ねじれ写像の他の性質を研究するのにも役立つ (たとえば [16] 参照)．

ねじれ写像は面積保存でない写像としてもしばしばあらわれる．例えば、Hopf 分岐を起こした平面の写像の不動点の近傍ではねじれ条件が満たされる．このような散逸写像では不変測度は存在しない．

このレポートでは、ある回転数の周期軌道を持つ円環のねじれ写像が、同じ回転数のバーコフ周期軌道を持つことを示す．これは面積保存の仮定が周期軌道の存在の仮定に置き変わったものと考えてよい．だからこの定理は散逸写像にも適用できる ([9]、[10] 参照)．面積保存ねじれ写像が与えられたとき、上で述べたバーコフの定理により多くの周期軌道の存在が与えられ、ゆえに Aubry-Mather の定理はその系として導かれる．

証明の発想はねじれ条件を利用してバーコフ周期軌道でない周期軌道が位相的に複雑であることを示すことにある．たとえばねじれ写像を懸垂し (suspend)、非バーコフ周期軌道を見る

と、これらは非自明な組み紐を構成する．ねじれ条件の下でこれらの軌道の絡まり方を利用すれば、幾何学的手法または組み紐と周期軌道に関する Matsuoka[17] の定理を用いて新しい周期点の存在が出せる．とくにもしねじれ写像に同じ回転数を持つバーコフ周期軌道と非バーコフ周期軌道があれば、その回転数を持つ異なった 2 つのバーコフ周期軌道があるはずである．

2 節では、論文を通して用いる記号を導入する．3 節では、主結果を述べる．その証明は 4 節の補題を用いて 5 節で行なう．6 節では、ねじれ写像に関連したいくつかの定理を述べる．これらの定理では、基本的には与えられたねじれ写像の他のどの周期軌道の周期より（ずっと）小さい周期を持つ周期軌道はバーコフ周期軌道でなければならないことを述べる．

2. 定義と記法.

$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ とし、 $\pi_1(\text{resp. } \pi_2) : A \to \mathbf{R} : (x, y) \to x(\text{resp. } y)$ を通常の射影とし、各 $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して次のようにおく．

$$l_\alpha = \{(\alpha, y) \in A : 0 \leq y \leq 1\}.$$

定義. 写像 $f : A \to A$ が ねじれ写像 と呼ばれるのは次の条件が満たされるときである:

(1) f は C^2 微分同相写像であって、境界成分および方向を保つ.

(2) すべての $(x, y) \in A$ に対して、$f((x, y)) + (1, 0) = f((x + 1, y))$.

(3) $\delta > 0$ があって、すべての $z \in A$ に対して、$\partial(\pi_1 \circ f)(z)/\partial y > \delta$.

1 図

注意. 条件 (2) は f が A を普遍被覆とするような円環上の写像の持ち上げになっていることを述べている．条件 (3) は「ねじれ条件」である．これの意味するところは、任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して、$f(l_\alpha) \cap l_\beta$ が高々一点であることである（1 図参照）．これはときに「単調」ねじれ条件とも呼ばれる．

定義. ねじれ写像 $f : A \to A$ のもとでの点 $z \in A$ の 軌道 は集合 $\mathcal{O}(f, z) = \{f^k(z) + (l, 0) : k, l \in \mathbf{Z}\}$ と定義される．

定義. 点 $z \in A$ がねじれ写像 $f : A \to A$ の $p/q-$周期点 と呼ばれるのは次が成り立つときである．

$$f^q(z) - (p, 0) = z.$$

同様に、点 $z \in A$ がねじれ写像 f の $p/q-$バーコフ周期点 と呼ばれるのは z が $p/q-$ 周期点で

あって、しかも任意の $z_1, z_2 \in \mathcal{O}(f,z)$ に対して次が成り立つときである．

$$\pi_1(z_1) < \pi_1(z_2) \Rightarrow \pi_1(f(z_1)) < \pi_1(f(z_2)).$$

注意. f は円環写像の持ち上げであるから、上で定義された「軌道」および $p/q-$ 周期点の定義は円環上の通常の軌道および周期点の持ち上げに対応していることに注意しよう．$p/q-$ バーコフ周期点とは $p/q-$ 周期点 z のうち、$\mathcal{O}(f,z)$ に制限した f が x 座標に関して「順序保存」になっているようなものである．

定義. $f : A \to A$ がねじれ写像であって $z \in A$ なら、z における f の回転数 は、存在するとすれば次式で与えられる:

$$\rho(f,z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\pi_1(f^n(z))).$$

記法. 写像 $f\,|_{\{(x,i):x\in\mathbf{R}\}},\ i = 0,1$ は円微分同相写像の持ち上げであるから、次のように書く:

$$\rho_0(f) = \rho(f(x,0)) \quad \text{および} \quad \rho_1(f) = \rho(f(x,1)).$$

ただし、これらの定義は $x \in \mathbf{R}$ に依存せず、極限が存在する ([12] 参照)．

3. 主定理の陳述.

この論文では次の定理を証明する．

定理 **1.** $f : A \to A$ がねじれ写像で f に p/q-周期点があれば、$p/q-$ バーコフ周期点がある．

この定理は f が面積保存であろうとなかろうと成り立つ．f が面積保存なら、これと以下に述べる 2 つの結果を結びつけて Aubry-Mather の定理を得る．

定理 **2**(バーコフ [4],[5]. Chenciner[9] も見よ). $f : A \to A$ が面積保存ねじれ写像で $p/q \in [\rho_0(f), \rho_1(f)]$ なら、f に p/q-周期点がある．

注意. バーコフの定理 (ポアンカレの最後の幾何学定理として知られている) は実際はもっと弱いねじれ条件でも成り立つ．

補題 **0**(Katok[14]). $f : A \to A$ がねじれ写像で、$\{p_n/q_n\}_{n\geq 0}$ が $n \to \infty$ のとき $p_n/q_n \to \alpha \notin \mathbf{Q}$ なる有理数列で、各 n に対して f に $(p_n/q_n)-$ バーコフ周期点 z_n があれば、$\{z_n\}_{n\geq 0}$ の任意の極限点 z は $\rho(f,z) = \alpha$ を満たす．

注意. 実のところ、$\{z_n\}_{n\geq 0}$ の極限点 z の軌道に関しては、もっとたくさんのことが成り立つ．この軌道に制限した写像 f は x 座標に関して順序保存であり、軌道は周期的リプシッツ関数のグラフ上にある ([15],[14],[13] 参照)．これら付加的な事実はねじれ写像の幾何学のみから出る．

定理 **3**(Aubry[2] および Mather[15]). $f : A \to A$ が面積保存ねじれ写像で $\alpha \in [\rho_0(f), \rho_1(f)]$ なら、$\rho(f, z_\alpha) = \alpha$ なる $z_\alpha \in A$ がある．

定理 3 の証明. バーコフの定理 (定理 2) により、各有理数 $p/q \in [\rho_0(f), \rho_1(f)]$ に対して、$z_{p/q} \in A$ があって f の $p/q-$ 周期点である．定理 1 より、このとき $p/q-$ バーコフ周期点があ

るはずということがわかる．補題 0 をバーコフ周期点列に適用すれば、$[\rho_0(f), \rho_1(f)]$ 内の任意の無理数に対して無理数回転数の点が得られる．これで定理の証明が完了した． □

(これら「バーコフ点」の軌道のそのほかの性質に関しては、上の注意や Mather[15]、Katok[14]、および Herman[13] の論文を見よ．)

定理 1 の証明は次のように進む: $p/q-$ 周期点を持つねじれ写像 $f : A \to A$ があるとする．このとき、f が $p/q-$ バーコフ周期点を持つねじれ写像 $g : A \to A$ にホモトープであることを示す．その際、ホモトピーにおける各写像は $p/q-$ 周期点を持つものにする．すると、$p/q-$ バーコフ周期点を持つ写像の集合は、このホモトピーのパラメーター中で開かつ閉の集合から成ることがわかる．閉じていることはバーコフ周期点の定義から容易に出るし (下の補題 1 を見よ)、開であることは次節の不動点補題 (補題 4) から出る．基本的には、この補題は、$p/q-$ バーコフ周期軌道および別の $p/q-$ 周期軌道を持つ写像が実は 2 つの $p/q-$ バーコフ周期軌道を持ち、そのうえこの第二の軌道は小さな摂動のもとで生き残るはずであることを述べている．

次節には 5 節で述べる定理 1 の証明に必要ないくつかの補題がある．6 節では同様のしかももっと簡単な技術を使って、以下のことを示す．$f : A \to A$ がねじれ写像で、f が或る互いに素な整数 p, q に対して、条件

$$(\dagger) \quad f \text{ のどの } r/s - \text{周期点も } s = q \text{ または } s > (3/2)q$$

を満たすとき、f のどの $p/q-$ 周期点も $p/q-$ バーコフ周期軌道である．p/q, $\rho_0(f)$ および $\rho_1(f)$ に関するある条件を与えることができる．その条件は本質的には写像が大きくねじれていないことを言うのだが、それから上の条件 $(\dagger)$ が出る．面積保存ねじれ写像に対しては、$(\dagger)$ を次の条件と入れ換えて、定理を改善できる．

$$(\ddagger) \quad f \text{ のどの } r/s - \text{周期点も } s \geq q \text{ を満たす.}$$

このときどの $p/q-$ 周期軌道も $p/q-$ バーコフ周期軌道である、という同じ結論が得られる．

注意. A. Katok が伝えてくれたところによると、D. Bernstein は最近、定理 3 の変形版の証明を得た．彼は面積保存性の代わりに「円交差性」を使った ([3] 参照)．また P. Carter[8] は保測性の代わりに円交差性を用いて定理 2 に似た結果を得ている．

4. いくつかの補題.

この節では定理 1 の証明に有用な補題をいくつか証明する．

補題 **1.** $f_n : A \to A, n = 1, 2, \cdots$ はねじれ写像列であるとし、ある固定した互いに素な整数 p, q に対して、各 f_n は $p/q-$ バーコフ周期点 $z_n \in A$ を持つとする．上限ノルム位相で f_n がねじれ写像 $f_0 : A \to A$ に収束し (すなわち、$\| \cdot \|$ を通常の $\mathbf{R}^2$ ノルムとして、$n \to \infty$ のとき $\sup_{z \in A} \| f_n(z) - f_0(z) \| \to 0$)、$n \to \infty$ のとき z_n が $z_0 \in A$ に収束するなら、z_0 は f_0 の $p/q-$ バーコフ周期点である．

補題 1 の証明. すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して $f_n^q(z_n) - (p, 0) = z_n$ なので、$f_0^q(z_0) - (p, 0) = z_0$ である．(そのうえ、p, q は互いに素だから $s < q$ なる任意の r, s に対して $f_0^s(z_0) - (r, 0) \neq z_0$ である.) ゆえに z_0 は f_0 の $p/q-$ 周期点である．

z_0 が f_0 の $p/q-$ バーコフ周期点であることを示すために k_1, k_2, l_1, $l_2 \in \mathbf{Z}$ を固定する．このとき、$n = 1, 2, \cdots$ に対して次が成り立つ．

$$\pi_1(f_n^{k_1}(z_n)) + l_1 < \pi_1(f_n^{k_2}(z_n)) + l_2 \Rightarrow \pi_1(f_n^{k_1+1}(z_n)) + l_1 < \pi_1(f_n^{k_2+1}(z_n)) + l_2.$$

ところがこのとき連続性により、f_n と z_n をそれぞれ f_0 と z_0 に置き換え、第二の不等式に「$\leq$」を入れても同じ主張が成り立つ．しかし、

$$\pi_1(f_0^{k_1}(z_0)) + l_1 < \pi_1(f_0^{k_2}(z_0)) + l_2, \qquad (*)$$

および

$$\pi_1(f_0^{k_1+1}(z_0)) + l_1 = \pi_1(f_0^{k_2+1}(z_0)) + l_2,$$

と仮定してみる．このときねじれ条件から $\pi_2(f_0^{k_1+1}(z_0)) > \pi_2(f_0^{k_2+1}(z_0))$ を得る (2 図参照)．だから再びねじれ条件より $\pi_1(f_0^{k_1+2}(z_0)) + l_1 > \pi_1(f_0^{k_2+2}(z_0)) + l_2$ を得る．ところが、これは n が十分大きいとき

$$\pi_1(f_n^{k_1+2}(z_n)) + l_1 > \pi_1(f_n^{k_2+2}(z_n)) + l_2,$$

を意味し、一方 $(*)$ 式は n が十分大きいとき

$$\pi_1(f_n^{k_1}(z_n)) + l_1 < \pi_1(f_n^{k_2}(z_n)) + l_2,$$

を意味するが、これは z_n が f_n の $p/q-$ バーコフ周期点であることに矛盾する．だから z_0 は f_0 の $p/q-$ バーコフ周期点でなければならず、証明が完結した． □

図 2

次の補題によれば、中間にある写像もねじれ写像になるように、与えられたねじれ写像を懸垂できる．

補題 2. ねじれ写像 $f : A \to A$ が与えられたとき、以下の条件を満たす C^1 写像 $\phi : A \times \mathbf{R} \to A$ が存在する.

(1) $\phi(\cdot, 0) = A$ 上の恒等写像、$\phi(\cdot, 1) = f(\cdot)$;
(2) すべての $t \in [0, 1]$ およびすべての $n \in \mathbf{Z}$ に対して、$\phi(\cdot, t + n) = \phi(f^n(\cdot), t)$;
(3) すべての $t \in [0, 1]$ に対して、$\phi(\cdot, t)$ はねじれ写像である;
(4) すべての $z \in A$ およびすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して、$\phi(z + (1, 0), t) = \phi(z, t) + (1, 0)$.

補題 2 の証明. $A \times [0, 1]$ 上で (1)、(3) および (4) を満たすように ϕ を定義すればよい．というのは、次に (2) を使って定義を $\mathbf{R}$ 全体に広げればよいからである．

$f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $f_0(x) = \pi_1(f(x,0))$ で与えられるとし、$G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ はすべての $z \in A$ に対し次式で与えられるとする．

$$G(z) = Df(f^{-1}(z))(0,1).$$

ただし $Df(w)$ は $w \in A$ における f の微分 (行列) である．このとき f は写像 f_0 およびベクトル場 G によって次のように定まる．ψ は定義域を $A \times \mathbf{R}$ 内に持つ局所流れで初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(z,t) = G(\psi(z,t)), \\ \psi(z,0) = z, \quad \text{for all } z \in A, \end{cases}$$

で定義されているとする．このときすべての $z \in A$ に対して f は次式で与えられる．

$$f(z) = \psi((f_0(\pi_1(z)),0),\pi_2(z)). \tag{$**$}$$

f の求めるホモトピーは容易に次のように構成できる．

(a) $\mathbf{R}$ 上で円微分同相写像の持ち上げになっている微分同相写像を通って f_0 を恒等写像に変形する;

(b) ベクトル場の滑らかな 1-パラメーター族 $G_s : A \to \mathbf{R}^2$ でパラメーターが $s \in [0,1]$ であるもので、G_0 が定数 $(0,1)$ に等しく、G_1 が G に等しいものをつくる．条件 (3) を保証するために、$G_s(z)$ と x 軸の角度がつねに $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にあって、s とともに増加するように G_s を構成する．条件 (4) のために、すべての $z \in A$, $s \in [0,1]$ に対して $G_s(z+(1,0)) = G_s(z)$ であることを要請する．

写像 $\phi(\cdot, s)$ はベクトル場 G_s を $(**)$ の形の方程式における上の (a) を満たす微分同相写像で指定される初期条件で解いて与えられる (?)．もちろん ϕ を $A \times \mathbf{R}$ 上の大域的な滑らかな写像に拡張するためには、円写像の族と (a) および (b) で与えられるベクトル場を $s = 0$ および $s = 1$ の近くで「つなげる (match up)」必要がある．詳細は読者にまかせる． □

定理 1 の証明の鍵となるのは、これらの流れのもとでの $p/q-$ バーコフ周期点の軌道の位相的性質、すなわち、これらが「絡んで」いない事実である．これは次の補題で精密化される．

$f : A \to A$ はねじれ写像で p, q は互いに素の整数とする．$g : A \to A$ はすべての $z \in A$ に対して次で定義されるとする．

$$g(z) = f^q(z) - (p,0).$$

このとき g の不動点は正確に f の $p/q-$ 周期点に対応する．f が $p/q-$ バーコフ周期点 $z_0 \in A$ を持つとする．すると

補題 3. C^1 写像 $\phi : A \times \mathbf{R} \to A$ があって次を満たす:

(i) すべての $z \in A$ およびすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して、$\phi(z+(1,0),t) = \phi(z,t) + (1,0)$;

(ii) $\phi(\cdot,0) =$ 恒等写像, $\phi(\cdot,1) = g(\cdot)$;

(iii) すべての $t \in [0,1]$ およびすべての $n \in \mathbf{Z}$ に対して $\phi(\cdot, t+n) = \phi(g^n(\cdot), t)$;

(iv) すべての $t \in [0, 1/q]$ および $i = 0, \cdots, q-1$ に対して、$\phi(\phi(\cdot, i/q)^{-1}, i/q + t)$ はねじれ写像である;

(v) $i = 1, \cdots, q$ および任意の $z, w \in A$ に対して、$\pi_1(\phi(z, i/q)) < \pi_1(\phi(w, i/q))$ であるための必要十分条件は $\pi_1(f^i(z)) < \pi_1(f^i(w))$ である;

(vi) すべての $\zeta \in \mathcal{O}(f, z_0)$ およびすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して、$\phi(\zeta, t) = \zeta$.

補題 3 の証明. $\phi_1 : A \times \mathbf{R} \to A$ は補題 2 によって f に同伴する 1-パラメーター族であるとする．写像 $\phi_1(\cdot, t)$ と $x =$ 一定の葉層を保存する写像とを合成することにより (すなわち、ベクトル場 G_t で与えられるベクトルのノルムを調整することにより)、次のように仮定することができる．すなわち、$\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{O}(f, z_0)$ が $\pi_1(\zeta_1) < \pi_1(\zeta_2)$ なら

$$\pi_1(\phi_1(\zeta_1, t)) < \pi_1(\phi_1(\zeta_2, t)) \quad \text{for all} \quad t \in [0, 1].$$

ところがこのとき $\phi_2 : A \times [0, 1] \to A$ がすべての $z \in A$ およびすべての $t \in [0, 1]$ に対して

$$\phi_2(z, t) = \phi_1(z, qt) - t(p, 0),$$

によって定義されているとすると、ϕ_2 は条件 (i)、(ii)、(iv) および (v) を満たすことがわかり、さらに $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{O}(f, z_0)$, $\pi_1(\zeta_1) < \pi_1(\zeta_2)$ ならすべての $t \in [0, 1]$ に対して $\pi_1(\phi_2(\zeta_1, t)) < \pi_1(\phi_2(\zeta_2, t))$ であることがわかる．ゆえに ϕ_2 を族 $\phi : A \times [0, 1] \to A$ に変形して (i)、(ii)、(iv)、(v) および (vi) を満たすようにし、条件 (iii) によって ϕ を $\mathbf{R}$ 上の写像に拡張できる．これが求むべき写像 ϕ であるから証明が完了した． □

注意. (1) 非公式には $\zeta \in \mathcal{O}(f, z_0)$ に対して $\phi_2(\zeta, t)$ で与えられる組み紐は「まっすぐ伸ばせる」から自明であると言える (3 図参照)．

図 3

(2) z_0 が $p/q-$ バーコフ周期点であるという仮定は上の補題で必要である．実際、z_0 が $p/q-$ 周期点であって $p/q-$ バーコフ周期点でないとすると、上の補題は成り立たない．これを見るためには、z_0 が $p/q-$ バーコフ周期点でないとき、$\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{O}(f, z_0)$ で $\pi_1(\zeta_1) < \pi_1(\zeta_2)$ かつ $\pi_1(f(\zeta_1)) > \pi_1(f(\zeta_2))$ なるものがあることに注意すればよい．ところが次の補題の証明で見るように、このことから、ϕ_1 のもとでの ζ_1 と ζ_2 の軌道は非自明に「絡み」あっており (4 図参照)、同時にまっすぐ伸ばすわけにはいかない．

(3) 最後に、補題 3 の証明はバーコフ周期軌道の点が順序よく並んでいることのみに依存していることを注意しておく．同じ証明法で次が示せる．

補題 **3′.** $f : A \to A$ および $g : A \to A$ を上と同様とし、ζ_1, ζ_2 は f の $p/q-$ 周期点であって、すべての $i = 0, \cdots, q$ に対して $\pi_1(f^i(\zeta_1)) < \pi_1(f^i(\zeta_2))$ を満たせば、写像 $\phi : A \times \mathbf{R} \to A$ があって補題 3 の (ii)-(v) を満たしさらに次を満たす．

(vi′) すべての $t \in \mathbf{R}$ に対して、$\phi(\zeta_i, t) = \zeta_i,\ i = 1, 2.$

注意. この補題の場合、条件 (i) つまり x 方向の周期性を要請することはできないことに注意しよう．というのは、ζ_1 は ζ_2 とは絡んでいなくても $\zeta_2 - (1, 0)$ とは絡んでいるかもしれない．だから、この場合「まっすぐ伸ばす」ことができるのは円環の中ではなく、被覆空間 A の中でなのである．

4 図

補題 **3′** の証明. 補題 3 の証明と同じ． □

この節の最後の補題は定理 1 で要求されている「不動点」補題である．

補題 **4.** $f : A \to A$ をねじれ写像とし、p, q は互いに素な整数とする．f は $p/q-$ バーコフ周期点 $z_0 \in A$ とバーコフ周期点でない $p/q-$ 周期点 $w_0 \in A$ を持つとする．このとき f は別の $p/q-$ バーコフ周期点 $z_1 \in A$ で $z_1 \notin \mathcal{O}(f, z_0)$ なるものを持つ．その上、$\tilde{f} : A \to A$ がねじれ写像で $\sup_{z \in A} \parallel f(z) - \tilde{f}(z) \parallel$ が十分小さければ (ただし、$\parallel \cdot \parallel$ は $\mathbf{R}^2$ の通常のノルム)、$\tilde{f}$ は $p/q-$ バーコフ周期点を持つ．

注意. この定理は面積保存ねじれ写像に関するバーコフの定理 (3 節の定理 2 はこれの系である) を暗示する．その定理とは、ねじれ写像 f に対して $0 \in [\rho_0(f), \rho_1(f)]$ ならば f は 2 つの不動点を持つ、というものである．生成的な場合に f が 2 つの不動点を持つべきということは指数に関する議論から容易に出るが、不動点が縮退している場合でも、f は 2 つの不動点を持たねばならない ([4],[5] および [7] 参照)．強調したいのは、補題 4 でわれわれは面積保存性もどんな円交差性も仮定していないことである．

補題 **4** の証明. 上のようにすべての $z \in A$ に対して $g(z) = f^q(z) - (p, 0)$ とし、$\phi : A \times \mathbf{R} \to A$ は補題 3 により g および $z_0 \in A$ の軌道に同伴する 1-パラメーター族であるとする．便宜のため以下の技術的記号を導入する。

$\zeta, \eta \in A$ の 順序が狂う(get out of order) といわれるのは、ある $i, 0 < i < q$ に対して $\pi_1(\zeta) < \pi_1(\eta)$ かつ $\pi_1(f^i(\zeta)) > \pi_1(f^i(\eta))$ であるか、ある $i, 0 < i < q$ に対して $\pi_1(\zeta) > \pi_1(\eta)$ かつ $\pi_1(f^i(\zeta)) < \pi_1(f^i(\eta))$ のときである．

ただちに言えることは、ζ, η が f の $p/q-$ 周期点であれば、ζ, η の順序が狂うための必要十

分条件はすべての $k \in \mathbf{Z}$ に対して $f^k(\zeta), f^k(\eta)$ の順序が狂うことである．

$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{q-1} \in \mathcal{O}(f, z_0)$ は次のように並んでいるとする.

$$0 \leq \pi_1(\mu_0) < \pi_1(\mu_1) < \cdots < \pi_1(\mu_{q-1}) < 1.$$

また $\nu_0, \cdots, \nu_{q-1} \in \mathcal{O}(f, w_0)$ は次のように並んでいるとする.

$$\pi_1(\mu_0) \leq \pi_1(\nu_0) < \pi_1(\nu_1) < \cdots < \pi_1(\nu_{q-1}) < \pi_1(\mu_0 + (1, 0)).$$

(必要なら座標をすこし変えて $\pi_1(\nu_i) \neq \pi_1(\nu_{i+1})$ と仮定できる.)

さて鳩の穴原理によって 2 つの場合を指定する．

ケース 1. $i_0, 0 \leq i_0 < q$ があってすべての $j = 0, 1, \cdots, q-1$ に対して $\pi_1(\nu_j) \notin [\pi_1(\mu_{i_0}), \pi_1(\mu_{i_0+1})$) (または $i_0 = q-1$ のときは $\pi_1(\nu_i) \notin [\pi_1(\mu_{q-1}), \pi_1(\mu_0) + 1)$).

ケース 2. 各 $i, 0 \leq i < q$ に対して $\pi_1(\nu_i) \in [\pi_1(\mu_i), \pi_1(\mu_{i+1}))$(および $\pi_1(\nu_{q-1}) \in [\pi_1(\mu_{q-1}), \pi_1(\mu_0)$ $+1)$).

ケース 1 が成り立つなら $\zeta_0 = \mu_{i_0}$ および $\zeta_1 = \mu_{i_0+1}$ と取る．ケース 2 が成り立つなら $\zeta_0 = \mu_0$ および $\zeta_1 = \mu_1$ と取る．

次に w_0 はバーコフ周期点でないから $z \in \mathcal{O}(f, z_0)$ があって z, w_0 は順序が狂うはずであることに注意する．$\overline{z} \in \mathcal{O}(f, z_0)$ は $\overline{z}, w_0$ の順序が狂うような点であって、$z \in \mathcal{O}(f, z_0)$ で z, w_0 の順序が狂うなら $z = \overline{z}$ または $\pi_1(z) < \pi_1(\overline{z})$ となる点とする．同様に、$\underline{z} \in \mathcal{O}(f, z_0)$ は $\underline{z}, w_0$ の順序が狂うような点であって、$z \in \mathcal{O}(f, z_0)$ で z, w_0 の順序が狂うなら $\underline{z} = z$ または $\pi_1(\underline{z}) < \pi_1(z)$ となる点とする ($\overline{z} = \underline{z}$ のことも有り得る)．$f^{r_1}(\overline{z}) = \zeta_0 + (s_1, 0)$ および $f^{r_2}(\underline{z}) = \zeta_1 + (s_2, 0)$ となるように $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbf{Z}$ を固定する．すると、$\zeta_0 + (s_1, 0)$, $f^{r_1}(w_0)$ は順序が狂い、$\zeta_1 + (s_2, 0)$, $f^{r_2}(w_0)$ の順序も狂う．

$$\eta_0 = f^{r_1}(w_0) - (s_1, 0), \quad \eta_1 = f^{r_2}(w_0) - (s_2, 0),$$

とおけば、ζ_0, η_0 の順序が狂い、ζ_1, η_1 の順序も狂う．さて、ζ_0, η_1 の順序は狂わない．なぜなら、もし順序が狂うと $\zeta_0 + (s_2, 0)$, $f^{r_2}(w_0)$ の順序が狂い、$f^{-r_2}(\zeta_0 + (s_2, 0))$, w_0 の順序も狂うはずである．ところが z_0 はバーコフ周期軌道であるから $\pi_1(\zeta_0) < \pi_1(\zeta_1)$ から

$$\pi_1(f^{-r_2}(\zeta_0 + (s_2, 0))) < \pi_1(f^{-r_2}(\zeta_1 + (s_2, 0)) = \pi_1(\underline{z})$$

が出て、$\underline{z}$ の選び方と矛盾する．同様に ζ_1, η_0 の順序は狂わない．すなわち、$i = 0, \cdots, q-1$ に対して、$\pi_1(f^i(\zeta_0)) < \pi_1(f^i(\eta_1)$ および $\pi_1(f^i(\zeta_1)) > \pi_1(f^i(\eta_0)$ である．このとき、ケース 2 の場合なら次の 3 つのうちどれかが成り立つ．

(i) $\pi_1(\eta_0) < \pi_1(\zeta_0)$ かつ $\pi_1(\zeta_1) \leq \pi_1(\eta_1)$、または

(ii) $\pi_1(\eta_0) < \pi_1(\zeta_0)$ かつ $\pi_1(\zeta_0) \leq \pi_1(\eta_1) < \pi_1(\zeta_1)$、または

(iii) $\pi_1(\zeta_0) \leq \pi_1(\eta_0) < \pi_1(\zeta_1)$ かつ $\pi_1(\zeta_1) < \pi_1(\eta_1)$.

一方ケース 1 の場合には条件 (i) が成り立つはずである．

$\pi_1(\eta_0) < \pi_1(\zeta_0)$ とし、ある $i, 0 < i < q$ に対して $\pi_1(f^i(\eta_0)) > \pi_1(f^i(\zeta_0))$ とする．$\pi_1(\phi(\eta_0,$ $(i-1)/q)) < \pi_1(\zeta_0)$ および $\pi_1(\phi(\eta_0, i/q)) > \pi_1(\zeta_0)$ が成り立つ最小の $i > 0$ を固定する．ねじれ条件により、$t \in [0, 1/q)$ かつ $\pi_1(\phi(\eta_0, i/q + t)) = \pi_1(\zeta_0)$ なら

$$\pi_2(\phi(\eta_0, (i-1)/q + t)) > \pi_2(\zeta_0),$$

であることがわかる．$\pi_1(\phi(\eta_0,(j-1)/q)) > \pi_1(\zeta_0)$ かつ $\pi_1(\phi(\eta_0,j/q)) \le \pi_1(\zeta_0)$ を満たす最小の $j > i$ を固定すると、同様に $t \in [0,1/q)$ および $\pi_1(\phi(\eta_0,(j-1)/q+t) = \pi_1(\zeta_0)$ のとき

$$\pi_2(\phi(\eta_0,(j-1)/q+t)) < \pi_2(\zeta_0),$$

であることがわかる．この議論を $i > q$ まで続ければ、$\phi(\eta_0,[0,1])$ が $A \sim \{\zeta_0\}$ において可縮でないことがわかる．同様に、$\pi_1(\eta_0) \ge \pi_1(\zeta_0)$ のときも同じことが言える．また、同じ議論をすれば、$\phi(\eta_1,[0,1])$ が $A \sim \{\zeta_1\}$ において可縮でないことが出る．状況は模式的に 5 図に表わしておいた．

図 5

主張. $\pi_1(\zeta_0) < \pi_1(z_1) < \pi_1(\zeta_1)$ なる $z_1 \in A$ があって、z_1 は g の不動点であり、ループ $\phi(z_1,[0,1])$ は $A \sim \{\zeta_0,\zeta_1\}$ において可縮である．

注意. (1) この主張を証明するにはいくつかのやり方がある．5 図に示されているように、ζ_0,ζ_1,η_0 および η_1 の軌道は非常に簡単な形の組み紐をなしている．だから曲面上の時間周期的常微分方程式の組み紐と周期軌道に関する Matsuoka[17] の定理の計算および応用を通して主張が証明できるのはそれほど驚くべきことではない．以下で示す初等的証明は Matsuoka の定理のいくつかの簡単の場合の幾何学的な見方を示す．(「取り除き得る」周期軌道と Nielsen 理論を関係づける Asimov and Franks[1] の最近の仕事も参照して欲しい.)

(2) この証明に関し M.Handel の示唆に感謝する．とくに補題 4 の安定性に関する陳述は幾何学的なアプローチでも示せたはずである．これによって次節のいくつかのステップを簡単にすることができた．

主張の証明. まずケース 1 の場合の証明を示そう．ケース 2 は同様のもっと簡単な議論でできる．

Case 1: ($\pi_1(\eta_0) < \pi_1(\zeta_0)$ かつ $\pi_1(\eta_1) \ge \pi_1(\zeta_1)$). 以下の記法が有用である．

$$\begin{aligned} B &= \{z \in A : \pi_1(\zeta_0) \le \pi_1(z) \le \pi_1(\zeta_1)\},\\ b_i^+ &= \{(\pi_1(\zeta_i),y) \in A : y > \pi_2(\zeta_i)\}, \quad i = 0,1\\ b_i^- &= \{(\pi_1(\zeta_i),y) \in A : y < \pi_2(\zeta_i)\}, \quad i = 0,1 \quad (6 \text{ 図参照}). \end{aligned}$$

以下の定義も有用である:

$t \in [0,1]$ に対して点 $\zeta \in B$ で $\phi(\zeta,t) \in \phi(B,t) \cap B$ なるものは、$\phi(\zeta,[0,1])$ および $\phi(\zeta,t)$ と ζ を結ぶ線分からなるループが $A \sim \{\zeta_0,\zeta_1\}$ において可縮であるとき、時刻 t に B で零 (null) である

という．次のようにおく．

$$S_t = \{\phi(\zeta, t) \in B : \zeta \in B \text{ は時刻 } t \text{ において } B \text{ において零 }\}.$$

図 6

注意. ほかにもいくつか S_t の特徴づけがある．たとえば、$\hat{A}$ を $A \sim \{\zeta_0, \zeta_1\}$ の普遍被覆とし、$\hat{\phi} : \hat{A} \times \mathbf{R} \to \hat{A}$ は ϕ の持ち上げで、$\hat{\phi}(\cdot, 0)$ が $\hat{A}$ 上の恒等写像に等しいものとし、$\hat{B} \subseteq \hat{A}$ は B のある特別に固定した持ち上げとすると、点 $\zeta \in S_t$ は正確に $\hat{\phi}(\hat{B}, t) \cap \hat{B}$ 内の点の射影になっている．

ζ が B において零だとしても $\phi(\zeta, [0, t]) \subseteq B$ は必ずしも出てこない．しかし、$0 \leq i/q \leq t$ ならいつでも $\phi(\zeta, i/q) \in B$ であり、ある $t' \in [0, t]$ および $i = 0$ または 1 に対して $\pi_1(\phi(\zeta, t')) = \pi_1(\zeta_i)$ なら $\phi(\zeta, t') \in b_0^- \cup b_1^+$ である．これはねじれ条件から出る．

7 図

同様にねじれ条件より、各 $t \in [0, 1]$ に対して次を得る．

$$S_t \cap (b_0^+ \cup b_1^-) = \emptyset.$$

また $\sigma : [0, 1] \to B$ が $\sigma(0) \in b_0^-$、$\sigma(1) \in b_0^+$ なら、各 $t \in [0, 1]$ に対して $\phi(\sigma([0, 1]), t) \cap S_t$ は片方の端点が b_0^- にありもう一方の端点が b_1^+ にあるような孤を含む．最後に、$\partial S_t \cap \mathrm{Int}(B)$ は、J を b_0^+ または b_1^- 内の区間として、$\phi(J, t)$ の形の孤から成り、また次が成り立つことを注意しておく．

$$\partial S_t \cap \partial B \subseteq b_0^- \cup b_1^+ \cup \{\zeta_0, \zeta_1\} \cup \{(x, j) \in B : j = 0, 1\}.$$

次に η_0 と η_1 の存在および ϕ のもとでのそれらの軌道の性質を使って、$t=1$ のとき S_t が連結成分 T_t で次の性質を満たすものを含むことを示そう．

(α) $\partial T_t \cap \{\zeta_0, \zeta_1\} = \emptyset$;

(β) ∂T_t は $\phi(J_0, t)$, $\phi(J_1, t)$ の形の孤を含む．ただし $J_0 \subseteq b_0^+$, $J_1 \subseteq b_1^-$ である．また $\phi(J_0, t)$ と $\phi(J_1, t)$ は $b_0^- \cup \{(x, 0) \in B\}$ および $b_1^+ \cup \{(x, 1) \in B\}$ の点のどちらをも含む (7 図参照)．

8 図

集合 $g^{-1}(T_1)$ に簡単な指数の議論を適用すれば求める不動点 $z_1 \in A$ が得られる．

$\phi(\eta_0, i_0/q)$, $\phi(\eta_1, i_1/q) \in B$ を満たす最小の i_0, i_1 を固定し、また $\phi(\eta_0, j_0/q)$, $\phi(\eta_1, j_1/q) \notin B$ を満たす最小の $j_0 > i_0$, $j_1 > i_1$ を固定する．はじめに $j_0 \leq j_1$ と仮定し、以下の場合を考える:

ケース a. すべての $i = i_0, i_0+1, \cdots, j_0$ に対して、$\pi_1(\phi(\eta_0, i/q)) < \pi_1(\phi(\eta_1, i/q))$.

ケース b. ある i, $i_0 \leq i < j_0$ に対して、$\pi_1(\phi(\eta_0, i/q)) > \pi_1(\phi(\eta_1, i/q))$ (すなわち、η_0, η_1 の軌道が絡んでいないか、絡んでいるか)．

ケース a. $\phi(\eta_0, [0, j_0/q])$ に $\phi(\eta_0, j_0/q)$ と η_0 を結ぶ線分をつなげてできるループは $A \sim \{\zeta_0\}$ において可縮でない．ゆえに、$S_{j_0/q}$ は上の (β) を満たす成分 $T_{j_0/q}$ を含むはずであり、$\zeta_0 \notin T_{j_0/q}$

である (8 図 b 参照) .

同様に $\phi(\phi^{-1}(T_{j_0/q}, j_0/q), j_1/q)$ は (α) と (β) を満たす成分 $T_{j_1/q}$ を含むはずであり、$g(\phi^{-1}($ $T_{j_1/q}, j_1/q))$ はしたがって S_1 の成分のうち、求めている方の成分を含むはずである (8 図 c 参照) .

実際、この場合 $z \in g^{-1}(T)$, $i = 0, \cdots, q$ に対して

$$\pi_1(\phi(\eta_0, i/q)) < \pi_1(\phi(z, i/q)) < \pi_1(\phi(\eta_1, i/q)),$$

である . だから $g^{-1}(T)$ のどの点も η_0 または η_1 と順序が狂わない . (このことは以下でケース 2 で使われる.)

ケース b. $\phi(\eta_0, [0, j_0/q])$ に η_0 と $\phi(\eta_0, j_0/q)$ を結ぶ線分をつなげてできるループは $A \sim \{\zeta_0\}$ において可縮でなく、ある $i, 0 < i < j_0$ に対して、$\pi_1(\phi(\eta_0, i/q)) > \pi_1(\phi(\eta_1, i/q))$ であることからわかるとおり、$S_{j_0/q}$ は上の (α) および (β) を満たす成分 $T_{j_0/q}$ を含むか (この場合、$g(\phi^{-1}(T_{j_0/q}, j_0/q))$ の成分が求める集合である)、$S_{j_0/q}$ は $\{\zeta_1\}$ と共通点を持たない成分 $T_{j_0/q}$ で、$\partial T_{j_0/q}$ が孤 $\phi(J_0, j_0/q)$ および $\phi(J_1, j_0/q)$ を含むようなもの、を含む . ただし、ここで J_0, J_1 はそれぞれ b_0^+, b_1^- に含まれる区間であり、$\phi(J_0, j_0/q)$ は両端が b_0^- に含まれるが、$\phi(J_1, j_0/q)$ は両端が b_0^- に含まれるか、一端が $b_0^- \sim \{\zeta_0\}$ 内にあり、他端が $b_1^+ \sim \{\zeta_1\}$ にあるかどちらかである (8 図 f 参照) . これらの孤の両端点がともに b_0^- にあれば、両端点を b_0^- に置いたまま $B \sim \phi(\eta_1, j_0/q)$ 内では b_0^- にホモトープでない . しかしこのとき $\phi(\phi^{-1}(T_{j_0/q}, j_0/q), j_1/q)$ は (α) および (β) を満たす連結成分 $T_{j_1/q}$ を含むはずであるから、$g(\phi^{-1}(T_{j_1/q}, j_1/q))$ は求める成分を含む (8 図 g 参照) . $j_1 < j_0$ の場合の証明は、いま述べた場合と対称的である .

図 9

$B_1 = g^{-1}(T_1)$ とする . このとき、T_1 の性質 (α) および (β) からわかるとおり、$z \in A$ を ∂B_1 のまわりに動かしてベクトル $z - g(z)$ と x 軸のなす角度の全変化を計算すれば、結果は (回る方向をどうとるかにに依存して)$\pm 2\pi$ となる (9 図参照) . だから、g は不動点 $z_1 \in B_1 \cap T_1$ を持つはずである . その上、$T_1 \subseteq S_1$ であるから、$\phi(z_1, [0, 1])$ は $A \sim \{\zeta_0, \zeta_1\}$ において可縮のはずであり、$\zeta_0, \zeta_1 \notin T_1$ であるから、$z_1 \notin \{\zeta_0, \zeta_1\}$ であることが判る .

z_1 は g の不動点であるから、f の $p/q-$ 周期点のはずである . $\mathcal{O}(f, z_0)$ は $B \sim \{\zeta_0, \zeta_1\}$ に点を持たないから $z_1 \notin \mathcal{O}(f, z_0)$ である . 最後に、$\phi(z_1, [0, 1])$ は $A \sim \{\zeta_0, \zeta_1\}$ において可縮であるから、$i = 0, \cdots, q$ に対して

$$\pi_1(f^i(\zeta_0)) < \pi_1(f^i(z_1)) < \pi_1(f^i(\zeta_1)),$$

であり、ゆえに z_1 は f の $p/q-$ バーコフ周期点でなければならない．ケース a の場合は上に注意したように同じく $\pi_1(f^i(\eta_0)) < \pi_1(f^i(z_1)) < \pi_1(f^i(\eta_1))$ を得る．(これは以下でケース 2 の場合に利用する.)

補題の安定性の部分を得るために、次のことに注意する．すなわち、$\tilde{f}$ が f に十分近く、$\tilde{g}(\cdot) \equiv \tilde{f}(\cdot) - (p, 0)$ であれば、$\tilde{g} : B_1 \to A$ の指数はやはりゼロでないから、$\tilde{g}$ は不動点 $\tilde{z}_1 \in \tilde{g}(B_1) \cap B_1$ を持つ．$T_1 \cap B_1$ は $(A$ に相対的に$)B$ の内部に含まれるから、これは $\tilde{g}(B_1) \cap B_1$ に対しても成立ち、したがって、$\tilde{f}$ が f に十分近いときには $i = 0, \cdots, q$ に対して次を得る．

$$\pi_1(\tilde{f}^i(\zeta_0)) < \pi_1(\tilde{f}^i(\tilde{z}_1)) < \pi_1(\tilde{f}^i(\zeta_0)).$$

このとき上と同じように (たとえ ζ_0, ζ_1 が必ずしも $\tilde{f}$ の周期点に近くなくとも)、$\tilde{z}_1$ が $\tilde{f}$ の $p/q-$ バーコフ周期点であることが出て、ケース 1 の場合の証明が完了した．

ケース 2. この場合 $i = 0, \cdots, q$ に対して $\pi_1(f^i(\eta_0)) < \pi_1(f^i(\eta_1))$ であることを知っている．ゆえに、$\pi_1(\zeta_0) \le \pi_1(\eta_0) < \pi_1(\zeta_1)$ のとき補題 $3'$ が適用できて g に同伴する $\tilde{\phi} : A \times \mathbf{R} \to A$ が得られて、$\tilde{\phi}(\eta_0, t) = \eta_0$, $\tilde{\phi}(\zeta_1, t) = \zeta_1$ がすべての t に対して成り立つ．このとき、$\tilde{\phi}(\zeta_0, [0, 1])$ は $A \sim \{\eta_0\}$ において可縮でないが、$\tilde{\phi}(\zeta_0, [0, 1])$ と $\tilde{\phi}(\eta_1, [0, 1])$ は絡んでいない．だから、$B = \{z \in A : \pi_1(\eta_0) \le \pi_1(z) \le \pi_1(\zeta_1)\}$ と取って上のケース $1\mathrm{a}$ を適用でき、g の不動点 z_1 を得る．ケース $1\mathrm{a}$ からわかるように、$\tilde{\phi}(z_1, [0, 1])$ は ζ_0, ζ_1, η_0, および η_1 の $\tilde{\phi}$ による軌道のどれとも絡んでいない．証明の残りは前と同じである．

$\pi_1(\zeta_0) < \pi_1(\eta_1) \le \pi_1(\zeta_1)$ の場合はもちろん上と対称的であるから、主張および補題の証明は完結した． □

5. 定理 1 の証明.

$f : A \to A$ はねじれ写像、p, q は互いに素な整数、$w_0 \in A$ は f の $p/q-$ 周期点とする．w_0 はバーコフ周期点でないと仮定する．バーコフ周期点であれば証明は済んでいるからである．

図 10

次に f は $p/q-$ 周期点を持つから、$p/q \in [\rho_0(f), \rho_1(f)]$ であることに注意しよう．$p/q \in (\rho_0(f), \rho_1(f))$ と仮定できる．というのは、$i = 0$ または 1 として $\rho_i(f) = p/q$ なら、$f\,|_{\{(x,i):x\in\mathbf{R}\}}$ は回転数 p/q の円微分同相写像の持ち上げであって、$p/q-$ バーコフ周期点の存在は円写像に対する通常の議論から出て来るからである ([12] 参照)．そのうえ、各 $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して $y_\alpha \in (0, 1)$ で $\pi_1(f(\alpha, y_\alpha)) = \alpha + p/q$ なるものが存在すると仮定できる．そでないとすると、与えられた写

像 f に対して、f を $f_1 : A_1 \to A_1$ に拡張できる．ここで、$A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1/2 \le y \le 3/2\}$ で f_1 は上の条件を満たすねじれ写像であり、f と f_1 は A 上で一致する．$\rho_0(f) < p/q < \rho_1(f)$ であるから、A_1 上で f_1 の $p/q-$ バーコフ周期点を見つけることができれば、実際はその軌道は A 内にあるはずである (10 図参照)．

主張 **1.** 以下の条件を満たす C^2 ホモトピー $H : A \times [0, 1] \to A$ がある．
(a) $H(\cdot, 0) = f(\cdot)$．
(b) すべての $s \in [0, 1]$ に対して、$H(\cdot, s)$ はねじれ写像である．
(c) すべての $s \in [0, 1]$ に対して、w_0 は $H(\cdot, s)$ の $p/q-$ 周期点である．
(d) $H(\cdot, 1)$ は $p/q-$ バーコフ周期点を持つ．

主張 1 の証明. $z_0 \in A$ を固定して A の内部に含まれるようにし、また

$$\{\pi_1(z_0) + jp/q, j = 0, \cdots, q-1\} \cap (\{\pi_1(w) : w \in \mathcal{O}(f, w_0)\} \cup \mathbf{Z}) = \emptyset,$$

および $\pi_1(f(z_0)) = \pi_1(z_0) + p/q$ となるようにする．$y_i \in [0, 1]$ を固定して、$\pi_1(f(\pi_1(z_0) + ip/q, y_i)) = \pi_1(z_0) + (i+1)p/q$ が $i = 0, \cdots, q-1$ に対して成り立つようにする (したがって、$y_0 = \pi_2(z_0)$)．任意の $\varepsilon > 0$ に対して、1-パラメーター微分同相写像族 $h_{i,s} : A \to A$, $i = 1, \cdots, q$, $s \in [0, 1]$ を定義して、次を満たすようにできる．

(1) すべての $s \in [0, 1]$, $i = 1, \cdots, q$ に対して、またすべての $(x, y) \in A$ に対して、$h_{i,s}(x + 1, y) = h_{i,s}(x, y) + (1, 0)$．

(2) すべての $s \in [0, 1]$, $i = 1, \cdots, q$ に対して、台 $(h_{i,s} -$ 恒等写像$) \cap \{(x, y) \in A : 0 \le x < 1\}$ は $\{(x, y) \in A : \mid x - (\pi_1(z_0) + ip/q - [\pi_1(z_0) + ip/q]) \mid \varepsilon\}$ (ここで $[\cdot]$ は最大整数関数を表わす) に含まれ、また $h_{i,\cdot}(\cdot)$ は $A \times [0, 1]$ 上で C^∞ である．

(3) すべての $s \in [0, 1]$, $i = 1, \cdots, q$ に対して、またすべての $(x, y) \in A$ に対して、$\pi_1(h_{i,s}(x, y)) = x$ である．

(4) $i = 1, \cdots, q$ のとき $h_{i,0} =$ 恒等写像 であり、また

$$\pi_2(h_{i,1}(\pi_1(z_0) + ip/q - [\pi_1(z_0) + ip/q], \pi_2(f(\pi_1(z_0) + (i-1)p/q, y_{i-1}))) = \begin{cases} y_i & \text{if} \quad i = 1, \cdots, q-1, \\ y_0 & \text{if} \quad i = q. \end{cases}$$

ε を十分小さく選んで

$$\left(\cup_{i=1}^q \cup_{s \in [0,1]} \text{台 } (h_{i,s} - \text{恒等写像})\right) \cap (\mathcal{O}(f, w_0) \cup \{(j, y) \in A : j \in \mathbf{Z}\}) = \emptyset$$

とし、次を定義する:

$$H : A \times [0, 1] \to A$$
$$H(z, s) = h_{q,s} \circ f \circ h_{q-1,s} \circ h_{q-2,s} \circ \cdots \circ h_{1,s}(z).$$

このとき、H は上の性質 (a)-(d) を持つ．とくに、すべての $s \in [0, 1]$ に対して、w_0 は $H(\cdot, s)$ の p/q 周期点である．というのは、f と $H(\cdot, s)$ は $\mathcal{O}(f, w_0)$ の近傍で一致し、$H(\cdot, s)$ はねじれ写像だからである．$H(\cdot, s)$ がねじれ写像なのは、ねじれ写像と $x =$ 一定の葉層を保存する写

像との合成はやはりねじれ写像だからである．写像 $H(\cdot,1)$ は上の条件 (4) によって z_0 を $p/q-$ 周期点として持ち、z_0 は $p/q-$ バーコフ周期点である．なぜなら、任意の $\zeta \in \mathcal{O}(H(\cdot,1),z_0)$ はふたたび条件 (4) によって、$\pi_1(H(\zeta,1)) = \pi_1(\zeta) + p/q$ を満たすからである．ゆえに、H は求めるホモトピーであって、主張の証明が完了した． □

$\Xi = \{s \in [0,1] :$ すべての $s_1 \geq s$ に対して、$H(\cdot,s_1)$ は $p/q-$ バーコフ周期点を持つ $\}$ とおく．$1 \in \Xi \neq \emptyset$ であるから、点 $s_1 = \inf\{s \in [0,1] : s \in \Xi\}$ が Ξ の内部にあること、つまり Ξ が開かつ閉であること、を示せれば、$\Xi = [0,1]$ でなければならない．ゆえに、$H(\cdot,0) = f(\cdot)$ は $p/q-$ バーコフ周期点を持つはずであり、証明は完了することになる．

主張 **2.** Ξ は閉じている．

主張 2 の証明. 補題 1 から直ちにしたがう． □

主張 **3.** $\Xi = [0,1]$.

主張 3 の証明. $\Xi \neq [0,1]$ と仮定する．すると、$s_1 = \inf\{s \in [0,1] : s \in \Xi\} > 0$ である．主張 2 より、$s_1 \in \Xi$ であるから、$H(\cdot,s_1)$ は $p/q-$ バーコフ周期点 $\zeta_0 \in A$ を持つ．構成法から、w_0 は $H(\cdot,s_1)$ の $p/q-$ 周期点であって、$p/q-$ バーコフ周期点でない．ゆえに、補題 4 が適用できて、$H(\cdot,s_1)$ が別の $p/q-$ バーコフ周期点 $z_1 \in A$ で $z_1 \notin \mathcal{O}(H(\cdot,s_1),z_1)$ なるものを持つこと、さらに重要なことに、s_1 に十分近い s に対して、補題 4 の安定性の陳述から $H(\cdot,s)$ も $p/q-$ バーコフ周期点を持つことが示せる．ゆえに、s_1 は Ξ の内部にあることになり、s_1 の定義に矛盾する．この矛盾より、$s_1 = 0$、つまり $\Xi = [0,1]$ が出て、主張の証明が完了した． □

上で注意したように、$0 \in \Xi$ は $H(\cdot,0) = f(\cdot)$ が $p/q-$ バーコフ周期点を持つことを意味し、定理 1 の証明は完了した． □

6. いくつかの関連する定理.

この節では、次を示す．

定理 **4.** $f : A \to A$ はねじれ写像、p,q は互いに素な整数とする．f のどの $r/s-$ 周期点も $s = q$ または $s > 3q/2$ を満たせば、f のどの $p/q-$ 周期点も $p/q-$ バーコフ周期点である．

注意. この定理が言っているのは、ねじれ写像のある周期軌道の周期がすべての大きな周期より小さければ、この軌道がバーコフ周期軌道であることである．可能な周期はいつも境界の回転数の間に含まれているから、定理の仮定が成立するための条件を以下のように与えることができる．

$\mathcal{F}_n$ は n 次 (order) の Farey 数列であるとする．すなわち、$\mathcal{F}_n$ は 0 と 1 のあいだの既約分数列で分母が n 以下のものを小さい順にならべたものである．だから ([11] 参照)、

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, \mathcal{F}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, \mathcal{F}_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}, \cdots.$$

系. $f : A \to A$ はねじれ写像、p,q は互いに素な整数、$\rho_0(f)$, p/q $\rho_1(f)$ はある n に対して $\mathcal{F}_n$ の相続く要素であるとする．最低次の形で $\rho_0(f) = r_0/s_0$, $\rho_1(f) = r_1/s_1$ であり、$s_0 > 3q/2$, $s_1 > 3q/2$ なら、f のすべての $p/q-$ 周期点は (もしあれば)$p/q-$ バーコフ周期点である．

系の証明. $i > 0$ に対して $r/s \in \mathcal{F}_{n+i} \sim \mathcal{F}_{n+i-1}$ であり、$r_0/s_0 < r/s < p/q$ とする．すると、[11] の定理 29-31 より、$r/s = (a_1+a_2)/(b_1+b_2)$ である．ただし、$a_1/b_1, a_2/b_2$ は $\mathcal{F}_{n+i-1}$ の相続く要素であって、a_1+a_2, b_1+b_2 は互いに素である．ところがそのとき $a_1/b_1, a_2/b_2 \in [r_0/s_0, p/q]$ であるから $a_1/b_1 \in \mathcal{F}_n$ であるための必要十分条件は $a_1/b_1 = r_0/s_0$ であり、$a_2/b_2 \in \mathcal{F}_n$ であるための必要十分条件は $a_2/b_2 = p/q$ である．だから、$b_1 \geq q$ および $b_2 \geq q$ であって $s \geq 2q$ となる．同様に、$p/q < r/s < r_1/s_1$ のとき $s \geq 2q$ となり、f, p, q は定理 4 の仮定を満たすから系の証明が完了した． □

注意. 本質的には、上の定理と系が言っているのは、$f : A \to A$ がねじれ写像で f がそれほど「ねじれて」いないとき、最小周期の周期軌道はバーコフ周期軌道でなければならないことである．定理 4 の条件が最上のものであることを示す例を知らないが、f が面積保存なら、定理はずっと改善できる．

定理 5. $f : A \to A$ は面積保存ねじれ写像、p, q は互いに素な整数とする．f のどの $r/s-$ 周期点も $s \geq q$ を満たせば、f のどの $p/q-$ 周期点も $p/q-$ バーコフ周期点である．

定理 4 の証明は定理 1 の証明と似た発想で、しかももっと技術的に簡単にできる．定理 5 の証明は [6] の Sharkovskii の定理への「グラフ理論的」アプローチに漠然と関係している．

定理 4 の証明. $f : A \to A$ と p, q を定理におけるように固定する．$z_0 \in A$ は f の p/q-周期点であって p/q-バーコフ周期点でないと仮定する．このとき $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{O}(f, z_0)$ を固定し、ある $j, 1 < j \leq q/2+1$ に対して $\pi_1(\zeta_1) < \pi_1(\zeta_2)$, $\pi_1(f(\zeta_1)) > \pi_1(f(\zeta_2))$ および $\pi_1(f^j(\zeta_1)) < \pi_1(f^j(\zeta_2))$ となるようにする．このとき整数 r が存在して、ある $k, j \leq k \leq 3q/2, k \neq q$ に対して $f^k(\zeta_2) = \zeta_1 + (r, 0)$ である．

11 図

さて十分大きな $N > 0$ を固定して、$i = 0, \cdots, 2q$ に対して $\pi_1(f^i(\pi_1(\zeta_2), 1)) < \pi_1(f^i(\pi_1(\zeta_) + N, 0))$ となるようにし、$B = \{(x, y) : \pi_1(\zeta_1) \leq x \leq \pi_1(\zeta_1) + N\}$ とおく．$g : A \to A$ はすべての $z \in A$ に対して $g(z) = f^k(z) - (r, 0)$ で定義されているものとする．このとき $g(\zeta_2) = \zeta_1$ で

ある．

$$J_1 = \{(\pi_1(\zeta_1), y) : \text{すべての } y_1 \geq y \text{ に対して } g(\pi_1(\zeta_1), y_1) \in B\}$$

および

$$J_2 = \{(\pi_1(\zeta_1) + N, y) : \text{すべての } y_1 \leq y \text{ に対して } g(\pi_1(\zeta_1) + N, y_1) \in B\}$$

と置く．このとき $g(B) \cap B$ の成分 T で境界が $g(J_1) \cup g(J_2)$ を含むものは不動点を持つはずである．このことは、z が $g^{-1}(T)$ の境界を動いたときのベクトル $z - g(z)$ の角度の変化を計算すれば簡単にわかる．この変化は動く方向に依存して $\pm 2\pi$ である (図 11 参照).

ところが g のこの不動点は f の $r/k-$ 周期点に対応する．ゆえに f が $s_1 \neq q, s_1 \leq 3q/2$ なる r/s_1-周期点を持たなければ、f のどの p/q-周期点も p/q-バーコフ周期点でなければならず、証明が完了した． □

定理 5 の証明. 面積保存ねじれ写像 $f : A \to A$、互いに素な整数 p, q および f の p/q-周期点 z_0 を固定する．

$$\{\zeta_0, \cdots, \zeta_{q-1}\} = \mathcal{O}(f, z_0) \cap \{z \in A : \pi_1(z) \in [0, 1)\}$$

とし、$\pi_1(\zeta_0) \leq \pi_1(\zeta_1) \leq \cdots \leq \pi_1(\zeta_{q-1})$ と番号づける．必要なら変数をすこし変えることにより、$i = 0, \cdots, q-1$ に対して $\pi_1(\zeta_i) \neq \pi_1(\zeta_{i+1})$ と仮定できる．$\zeta_0, \cdots, \zeta_{q-1}$ を節とする方向付きグラフを次のように定義する．

ζ_i から ζ_j への辺があるための必要十分条件は

(a) ある $s \in \mathbf{Z}$ に対して $\pi_1(f(\pi_1(\zeta_i), 0) \in (\pi_1(\zeta_{j-1}) + s, \pi_1(\zeta_j) + s]$ であるか、

(b) ある $s \in \mathbf{Z}$ に対して $\pi_1(f(\pi_1(\zeta_i), 1) \in (\pi_1(\zeta_j) + s, \pi_1(\zeta_{j+1}) + s)$ である．

ゆえに各 ζ_i は、自分から出る辺を少なくとも 1 つ持ち、その上 z_0 が p/q-バーコフ周期点でなければ自分から出る辺を 2 つ持つ ζ_i がある．なぜなら、ある ζ_i, ζ_j に対して $\pi_1(\zeta_i) < \pi_1(\zeta_j)$ であるが $\pi_1(f(\zeta_i)) > \pi_1(f(\zeta_j))$ であって (図 12 参照)、次が成り立つからである．

$$\pi_1(f(\pi_1(\zeta_i), 0)) < \pi_1(f(\zeta_j)) < \pi_1(f(\zeta_i)) < \pi_1(f(\pi_1(\zeta_i), 1))$$

12 図

この場合、できたグラフは長さ q 未満のループを有する．ところが、これは $s < q$ なる有理数 $r/s \in [\rho_0(f), \rho_1(f)]$ の存在を意味する．バーコフの定理 (定理 2) によれば (バーコフが指摘したように、定理 2 が成立するためには $f : A \to A$ はゼロでない密度の測度を保存すればよい ([4] 参照)．だから上の変数変換には何も問題がない)、f は r/s-周期点を持つはずである．ゆえに $f : A \to A$ が $s < q$ なる r/s-周期点を持たなければ、f のどの p/q-周期点も p/q-バーコフ周期点である． □

謝辞. この仕事の間、話を辛抱強く聞いてくれ、示唆や励ましをくれた人々に感謝する．とくに C. Conley, E. Mansfield, D. Terman に感謝する．M. Handel には特別に感謝する．彼は補題 4 を簡単化し拡張するための示唆をくれた．おかげで技術的な困難が除かれた．また彼は 6 節の定理の可能性を示唆してくれた．最後に補題 $3'$ の間違いを指摘した David Bernstein に感謝する．

米国陸軍の契約番号 DAAG 29-80-C-0041 および NSF の博士課程修了者フェロウシップの援助を受けた．

参考文献

[1] D. Asimov & J. Franks. Unremovable closed orbits. Preprint.

[2] S. Aubry. Theory of the devil's staircase. *Seminar on the Riemann Problem and Complete Integrability*, 1978/1979, (Ed. D.O.Chudrovsky), Lecture Notes in Math. 925 Springer, Berlin.

[3] D. Bernstein. Birkhoff periodic orbits for twist maps with graph intersection property. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* To appear.

[4] G. D. Birkhoff. Proof of Poincaré's geometric theorem. In *George David Birkhoff: Collected Mathematical Papers*, Vol.1, Dover, New York, 1968, p.673.

[5] G. D. Birkhoff. An extension of Poincaré's last geometric theorem. In *George David Birkhoff: Collected Mathematical Papers*, Vol.2, Dover, New York, 1968, p.252.

[6] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz & L.-S.Young. Periodic points and topological entropy of one dimensional maps. preprint.

[7] M. Brown & W. D. Neumann. Proof of Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. *Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.

[8] P. Carter. An improvement of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 285-299.

[9] A. Chenciner. Sur un enoncé dissipatif du Théoremè geometric de Poincaré-Birkhoff. *C.R. Acad. Sc. Paris*, **294** (1982), 243-245.

[10] A. Chenciner. Bifurcation de points fixes elliptiques. preprint.

[11] G. H. Hardy & E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, (fifth edition), Oxford University Press, Oxford, 1979.

[12] M. Herman. Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphisms de cercle a des rotations. *Publ. Math. I.H.E.S.* **49**, 1979.

[13] M. Herman. Introduction a l'etude des courbes invariantes par les diffeomorphisms de l'anneau, Vol.1. Preprint.

[14] A. Kotok. Some remarks on Birkhoff and Mather twist map Theorems. *Ergod. Th. & Dynam Sys.* **2** (1982), 185-192.

[15] J. N. Mather. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms. *Topol-*

ogy(1982).

[16] J. N. Mather. A criterion for the non-existence of invariant circles. Preprint.

[17] T. Matsuoka. The number and linking of periodic solutions of periodic systems. *Invent. Math.* **70** (1983), 319-340.