第 I 章　バーコフの理論

序．

これから利用する Birkhoff の結果 [1, §44 – §47] について説明する．Birkhoff [2] と [3] も参照して欲しい．講義の内容と Birkhoff の結果との関係は次のとおりである；結果 2.2 と 2.3 = B[1, p.196]，2.4=B[1, p.200-201]，3.1=B[1, p.195-196]，5.7 ~ B[1, §46]，5.9.2 ~ B[§47]．結果 5.1 から 5.6 は Birkhoff[3] に述べられている．5.8 および 5.9 において Robinson[1] の生成性に関する結果と J.Moser[1] の定理に拠りつつ Birkhoff[3] の不安定ゾーンを説明する (Moser の定理の証明については Herman[2] が参考になる)．

Alexander の双対性の S^2 における初等的説明のために Wall[1] を参照されたい．Jordan の定理の証明は Wall[1], Jordan-Schönflies の定理の証明は Newman[1,VI] を見よ．conform representation の定理の証明については Rudin[1] を参照されたい．

記法.

n 次元のトーラスを $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ で表わす．$\mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T}^1)$ は $\mathbf{T}^1$ の方向保存の同相写像の群を表わし, $\mathrm{Diff}^k_+(\mathbf{T}^1)$ は $\mathbf{T}^1$ の方向保存の C^k 級の微分同相写像の群を表わす．

関数 $\varphi \in C^0(\mathbf{R})$ がリプシッツであるとは

$$\sup_{x \neq y} \frac{\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid}{\mid x - y \mid} = \mathrm{Lip}(\varphi) < +\infty,$$

のときである．$\mathrm{Lip}(\mathbf{T}^1) = \{\varphi \in C^0(\mathbf{R}) \mid \varphi$ は $\mathbf{Z}$-周期的かつ $\mathrm{Lip}(\varphi) < +\infty\}$ と書くことにする．写像 (application)$h \in C^0(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)$ は $\mathbf{T}^1$ の群の距離関数 ($\| \cdot \|$ と表わす) の $\mathbf{R}$ の標準的な距離関数による商がリプシッツであるときリプシッツであると言うことにする．このとき h のリプシッツ率を $\mathrm{Lip}(h)$ と書く．($(X_i, d_i), i = 1, 2$ を 2 つの距離空間とするとき, 写像 $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ は, $K > 0$ が存在し, $x, y \in X_1$ に対して, $d_2(f(x), f(y)) < K d_1(x, y)$ となるとき, リプシッツと呼ばれることを思い起こそう.)

$\mathbf{T}^1$ の C^k 級の関数空間を $C^k(\mathbf{T}^1), k \in \mathbf{N}$ と書く．$f \in C^k(\mathbf{T}^1)$ のとき, $\mathrm{D}^k f$ は f の k 階の微分を表わす．

X が可分な位相空間のとき, X の円は $\mathbf{T}^1$ を X へ連続な単射 (埋め込み) で写した像 C である．C はまた埋め込み円または単純閉曲線とも呼ばれる．C は $\mathbf{T}^1$ に同相である．

$f(C) = C$ であるとき, C は X の同相写像 f のもとで不変であると言われる．$n \geq 1$ とし, $\varphi : X \to \mathbf{R}^n$ は連続関数であるとする．$||\varphi||_{C^0} = \sup_{x \in X} ||\varphi(x)||$ と書く．ただし, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ として, $||y|| = \sup_i |y_i|$. 円盤 $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ を $\mathbf{D}^2$ で表す．

1.1. A は次の多様体のどれかを表わすとする：$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}, \mathbf{T}^1 \times [0, +\infty[$, または $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ ．f は A の $C^k (k \geq 1)$ 級の微分同相写像であって恒等写像にホモトープであるとする．$0 < \varepsilon < \pi/2$ に対して $C_I(\varepsilon)$ は, 半直線 OD が $|\ \mathrm{angle}(OD, O\theta)\ | \leq \pi/2 - \varepsilon$ を満たすような $\mathbf{R}^2$ の円錐であるとする．

逆の円錐を $C_{II}(\varepsilon) = -C_I(\varepsilon)$ で表わす．

図

1.2. f は A の C^1 級の微分同相写像であるとし, Df は f の接写像, A の接空間には標準的な自明化 (trivialisation) がなされているとする．A の鉛直なベクトル場はベクトル場 $v_x = (0, 1), x \in A$ である．点 x における写像 Df を Df_x と書くと, $Df_x : \{x\} \times \mathbf{R}^2 \to \{f(x)\} \times \mathbf{R}^2$ である．

定義：A の微分同相写像 f は, $0 < \varepsilon < \pi/2$ があって, すべての $x \in A$ に対して次の条件をみたすとき, 鉛直線を左に (**resp.** 右に) 傾ける (あるいは回転させ

る) といわれる．

$$\begin{aligned} &Df_x v_x \in C_{II}(\varepsilon) \qquad &&(\text{resp. } C_I(\varepsilon)),\\ &Df_x^{-1} v_x \in C_I(\varepsilon) \qquad &&(\text{resp. } C_{II}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

f が鉛直線を左に傾けるなら, f^{-1} は鉛直線を右に傾ける．

$$Df_x = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

と書いたとき, $C > 0$ が存在して, すべての x に対して $b(x) < -C$ かつ $a(x)d(x) - b(x)c(x) \geq C$ ならば微分同相写像 f は鉛直線を左に傾ける．

1.3. 例： a) $t(r) \in C^k(\mathbf{R}), k \geq 1$ が $\mathrm{d}t(r)/\mathrm{d}r \geq \varepsilon_0 > 0$ を満たすとする．このとき, 微分同相写像 $(\theta, r) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \to (\theta + t(r), r)$ は鉛直線を右に傾ける．

b) $\varphi(\theta) \in C^k(\mathbf{T}^1)$ および $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r)), f^{-1}(\theta, r) = (\theta - r + \varphi(\theta), r - \varphi(\theta))$ とする．$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ の微分同相写像 f はリュベーグ測度 $\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r$ を保存する．f は恒等写像にホモトープであり, また f は鉛直線を右に傾ける．f が大域標準 (global canonical) 微分同相写像であるための必要十分条件は $\int_0^1 \varphi(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$ である．そのとき, f は交差性 (intersection property) を持つ (Herman[2, §2] 参照)．

f は $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R})/(\theta, r) \sim (\theta, r + 1)$ の微分同相写像を定義することに注意しよう．それは $(\theta, r) \in \mathbf{T}^2 \to (\theta + r, r) \in \mathbf{T}^2$ にイソトープである．

1.4. 注意： f が A の微分同相写像であって鉛直線を傾けるなら, $\eta > 0$ が存在し, g が A の微分同相写像であって $\sup_{x \in A} |||Df_x - Dg_x||| < \eta$ を満たせば g も鉛直線を傾ける ($|||\cdot|||$ は $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ のノルムである)．

$\mathrm{Diff}^1(A)$ 上の C^1 一様位相とは A 上の一様収束の位相とヤコビ行列の一様収束の位相を加えたものである．

1.5. f が A の微分同相写像であって鉛直線を左に傾けるとき, $\eta > 0$ があって,

すべての $x \in A$ に対して

$$\frac{3\pi}{2} > \mathrm{angle}(\overrightarrow{O\theta}, Df_x\overrightarrow{OD_+}) > \frac{\pi}{2},$$
$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{angle}(\overrightarrow{O\theta}, Df_x^{-1}\overrightarrow{OD_-}) < \frac{\pi}{2},$$

が成り立つ．ここで $D_+ = (1, \eta), D_- = (1, -\eta)$ である．
$(Df_x(\overrightarrow{Or}) \in C_{II}(\varepsilon), Df_{f^{-1}(x)} \cdot Df_x^{-1}(\overrightarrow{Or}) = \vec{Or}, Df_x^{-1}(\overrightarrow{Or}) \in C_I(\varepsilon)$ であること，および半直線の方向 (すなわち $\mathbf{S}^1$) に働く行列 $B \in GL_+(2, \mathbf{R})$ は順序を保存することに注意する．)

図

図

f が A の微分同相写像であって恒等写像にホモトープであり，上に述べた性質を持つなら，f は鉛直線を左に傾ける．

2.1. A の C^1 級微分同相写像 f で恒等写像にホモトープなものが与えられたとする．$\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ が存在し，φ のグラフ: $C = \{(\theta, \varphi(\theta)) \mid \theta \in C^0(\mathbf{T}^1)\}$ が f に

関して不変であるとする．$p_1(\theta, r) = \theta$ を第一座標への射影とする．$g = p_1(f\mid_C)$ とおく; g は円 $\mathbf{T}^1$ の同相写像で方向を保存する．なぜなら f は恒等写像にホモトープであるから．円 C は f のもとで不変 (なわち, $f(C) = C$) であるから,

$$f(\theta, \varphi(\theta)) = (g(\theta), \varphi(g(\theta))).$$

2.2. 2.1 の微分同相写像 f は鉛直線を (左へ) 傾けるとする．$\eta > 0$ は 1.5 で定義された数とする．

命題：鉛直線を傾ける微分同相写像 f が $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフである円 C を不変にするなら, φ はリプシッツであって, また

$$\mid \varphi(\theta) - \varphi(\theta') \mid < \eta \parallel \theta - \theta' \parallel \ \text{ for } \ \parallel \theta - \theta' \parallel \leq 1/2,$$

が成り立つ．ここで $\theta \in \mathbf{T}^1$ で $\tilde{\theta}$ が θ の $\mathbf{R}$ への持ち上げであれば

$$||\theta|| = \mathrm{Inf}_{p \in \mathbf{Z}} |\tilde{\theta} + p|.$$

<u>証明</u>： A ($\mathbf{T}^1 \times I$ に微分同相である．ただし, $I = \mathbf{R}$ または $\mathbf{R}_+$ または $[0, 1]$ である) の普遍被覆 $\tilde{A} = \mathbf{R} \times I$ の上で考えよう．また f の持ち上げを $\tilde{f}$ で表わす．$\tilde{f}$ は $\tilde{\varphi}$ のグラフ $\tilde{C}$ を不変にする．ここで $\tilde{\varphi} = \varphi \circ p$ で, $p : \tilde{A} \to A$ は射影である．g は $\tilde{g} \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{R})$ に持ち上がり, $\tilde{g}(\theta + 1) = 1 + \tilde{g}(\theta)$ を満たす．鉛直線を左へ傾ける性質は $\tilde{f}$ も持っている．

同相写像 $\tilde{g}$ は順序を保存し, $\mathbf{R}$ の方向を保存する ($\mathbf{R}$ にひとつの方向を選んでおく)．

$\theta < \theta_1$ なら

$$|\mathrm{angle}(\overrightarrow{O\theta}, \overrightarrow{yy_1})| \leq \frac{\pi}{2}.$$

ただし, $y = \tilde{f}(\theta, \tilde{\varphi}(\theta)) = (\tilde{g}(\theta), \tilde{\varphi}(\tilde{g}(\theta))$, $y_1 = \tilde{f}(\theta_1, \tilde{\varphi}(\theta_1)) = (\tilde{g}(\theta_1), \tilde{\varphi}(\tilde{g}(\theta_1)))$．

すべての $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して $\varepsilon(\theta) > 0$ が存在して

$$(-\varepsilon(\theta) < \theta - \theta_1 < 0) \Longrightarrow \frac{\tilde{\varphi}(\theta_1) - \tilde{\varphi}(\theta)}{\theta_1 - \theta} < \eta.$$

(これは次の事実から出る．すなわち, $\tilde{f}$ が C^1 級であること, および背理法のために $\theta_i > \theta, \theta_i \to \theta$ なる列で $\frac{\tilde{\varphi}(\theta_i) - \tilde{\varphi}(\theta)}{\theta_i - \theta} \geq \eta$ なるものが存在すると仮定すると 1.5 により $\mathrm{angle}(\overrightarrow{O\theta}, \overrightarrow{yy_1}) > \frac{\pi}{2}$ となるが, これは不可能であること.)

図

同様に, すべての $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して $\varepsilon_1(\theta) > 0$ が存在して

$$(\varepsilon_1(\theta) > \theta - \theta_1 > 0) \Longrightarrow \frac{\tilde{\varphi}(\theta_1) - \tilde{\varphi}(\theta)}{\theta_1 - \theta} < \eta.$$

$\tilde{f}^{-1}$ に対して同じ論理を展開すれば, すべての $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して $\varepsilon_2(\theta) > \theta$ が存在して

$$(0 <\mid \theta - \theta_1 \mid< \varepsilon_2(\theta)) \Longrightarrow \mid \tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta_1) \mid \leq \eta \mid \theta - \theta_1 \mid .$$

区間 $]\theta_i - \varepsilon_2(\theta_i), \theta_i + \varepsilon_2(\theta_i)[, 1 \leq i \leq N$ による $\mathbf{T}^1$ の有限被覆を考えれば, $\varepsilon_3 > 0$ があって, $0 <\mid \theta - \theta_i \mid< \varepsilon_3$ なら, $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して $\mid \tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta_i) \mid \leq \eta \mid \theta - \theta_i \mid$ を得る．したがって, $\varepsilon_4 > 0$ があって, $0 <\mid \theta - \theta' \mid< \varepsilon_4$ なら $\mid \tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta') \mid \leq \eta \mid \theta - \theta' \mid$ を得る．

関数 $\tilde{\varphi} \in C^0(\mathbf{T}^1)$ はしたがってリプシッツである．$\tilde{\varphi}$ はリュベーグ測度 $\mathrm{d}\theta$ に関しほとんどいたるところ微分可能であり, $\mathrm{D}\tilde{\varphi} \in \mathrm{L}^\infty$, $\| \mathrm{D}\tilde{\varphi} \|_{\mathrm{L}^\infty} < \eta$ である (なぜならこれは局所的に成り立つから)．

したがって, $\mathbf{R}$ 上の θ および θ' に対して, $\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta') = \int_{\theta'}^{\theta} \mathrm{D}\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t$ であり, したがって

$$|\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta')| \leq \eta |\theta - \theta'|. \qquad \square$$

2.3 系：2.2 と同じ仮定のもとで, 同相写像 g と g^{-1} は ($\| \cdot \|$ で定義される群距離関数に対して) $\mathbf{T}^1$ 上で $\mathbf{T}^1$ のリプシッツ写像である．

証明:$f \mid_C$ と $f^{-1}|_C$ のリプシッツの比の上限を k で表わす (A には $\mathrm{d}((\theta, r), (\theta', r')) = \sup(||\theta - \theta'||, |r - r'|)$ で誘導される距離を用意しておく)．次が成り立つ．

$$g = p_1 \circ f \mid_C \circ \Phi$$
$$g^{-1} = p_1 \circ f^{-1} \mid_C \circ \Phi.$$

ここで $\Phi(\theta, r) = (\theta, \varphi(\theta))$ および $p_1(\theta, r) = \theta$（第一射影）である．次の等式が結果として得られる．

$$\sup(\mathrm{Lip}(g), \mathrm{Lip}(g^{-1})) \leq k \sup(1, \mathrm{Lip}(\varphi)). \qquad \square$$

2.4.1. f は A の微分同相写像であって鉛直線を右に傾けるとする．f は $C^0(\mathbf{T}^1)$ の要素 φ_1 と φ_2 のグラフである円 C_1 と C_2 を不変にするとする．$\tilde{f}$ を f の $\tilde{A}$ への持ち上げとする．$f_i = \tilde{f} \mid_{\tilde{C}_i}$, $f_i \in D^0(\mathbf{T}^1) = \{f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{R}) \mid f - \mathrm{Id} \in C^0(\mathbf{T}^1)\}$ とおく．ここで, $\tilde{C}_i$ は C_i の $\tilde{A}$ への持ち上げを表わす．

$g \in D^0(\mathbf{T}^1)$ なら, $\rho(g) \in \mathbf{R}$ はその〝回転数〟である（Herman [1,II] 参照）．回転数は点に無関係だから, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ なら, $\rho(f_1) = \rho(f_2)$ である．

2.4.2. 命題：$\varphi_1 < \varphi_2$ なら $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$ である．

証明： Herman[1,III.4] により, すべての $\theta \in \mathbf{R}$ に対して, $\tilde{g}_1(\theta) < \tilde{g}_2(\theta)$ を示せば十分である．ここで $\tilde{g}_i(\theta) = p_1(\tilde{f}(\theta, \varphi_i(\theta)))$ である（g_i は f_i に C^0 共役である）．さて $f(\theta, r) = (\tilde{f}_1(\theta, r), \tilde{f}_2(\theta, r))$ および $\theta \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\tilde{g}_2(\theta) - \tilde{g}_1(\theta) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r}(\theta, \tilde{\varphi}_1(\theta) + t(\tilde{\varphi}_2(\theta) - \tilde{\varphi}_1(\theta))(\tilde{\varphi}_2(\theta) - \tilde{\varphi}_1(\theta))\mathrm{d}t.$$

ところが f は鉛直線を右へ傾けるから, $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r}(\theta, \tilde{\varphi}(\theta) + t(\tilde{\varphi}_2(\theta) - \tilde{\varphi}_1(\theta)) > 0$ である． $\square$

2.4.3. Herman[1, III.4] により, $\rho(f_1) \notin \mathbf{Q}$ または $\rho(f_2) \notin \mathbf{Q}$ であれば, $\rho(f_1) < \rho(f_2)$ である．

2.4.4. 補足：**2.4.1** と同じ仮定のもとで, さらに f がリュベーグ測度を保存することを仮定すれば, $\varphi_1 < \varphi_2$ のとき $\rho(f_1) < \rho(f_2)$ である．

証明:2.4.2 と 2.4.3 により, $\rho(f_1) = \rho(f_2) = \frac{p}{q}$ と仮定できる．ここで $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, q \geq 1$ および $(p, q) = 1$ である．$i = 1, 2$ に対して, $x_i = (\theta_i, r_i)$ は $R_{-p} \circ f_i^q$ の不動点で $x_i \in \tilde{C}_i$ とし, x_2 は $\tilde{C}_2$ 上 $R_{-p} \circ f_2^q$ の不動点のうちはじめて直線 $\{\theta_1\} \times \mathbf{R}$ の右にあるものとする. ($\theta_1 = \theta_2$ をはじめから排除はしない.) $y_1 = \tilde{C}_2 \cap (\{\theta_1\} \times \mathbf{R})$, $y_2 = \tilde{C}_1 \cap (\{\theta_2\} \times \mathbf{R})$ とおく．$x_2 \neq y_1$ なら, R を $[x_1, y_1] \cup$ ($\tilde{C}_2$上の $\mathrm{Arc}(y_1, x_2)$) $\cup$ $[x_2, y_2] \cup$ ($\tilde{C}_1$上の $\mathrm{Arc}(y_2, x_1)$) で囲まれた円盤とする．

図

3.5.6(iii) と同様な論拠による．$R_{-p}\circ\tilde{f}^q([x_1,y_1])$ は $x_1\in\tilde{C}_1$ を出発する C^1 級の負の道であり，$\tilde{f}$ は各曲線 $\tilde{C}_i, i=1,2$ とともにその上の方向を保存し，$\tilde{f}$ は鉛直線を右へ傾け，$R_{-p}\circ\tilde{f}^q(y_1)$ は $R_{-p}\circ\tilde{f}^q([x_1,y_1])$ と $\tilde{C}_2$ との最初の交点であり，$R_{-p}\circ\tilde{f}^q(y_1)=(\theta',r')$ とおけば $\theta_1<\theta'<\theta_2$ である．したがって $\theta_1=\theta_2$ になるのは不可能である．3.5.6(i) より，$R_{-p}\tilde{f}^q(]x_1,y_1[)$ は領域 R の内部に含まれる．同じ結論が $R_{-p}\circ\tilde{f}^q(]x_2,y_2[)$ にも言える．曲線 $\tilde{C}_i$ は区間 $[x_i,y_i], i=1,2$ と同様リュベーグ測度はゼロである．これは $\tilde{f}$ がリュベーグ測度を保存することに矛盾する． □

注意： 一般に, $n\in\mathbf{N}$ が大きければ, 微分同相写像 f^n は鉛直線を右に傾けない．(例えば, C_1 と C_2 によって限られる領域上に f が無理数的楕円周期点 (un point périodique elliptique irrationnel) を持つと仮定すれば十分である.) 逆に, $n\geq 1$ なら, 道 $\tilde{f}^n([x,y_1])$ は $\tilde{f}^n(x_1)\in\tilde{C}_1$ を出発する負の道である (すなわち, 鉛直線および曲線 $t\to\varphi(t)=\tilde{f}^n((1-t)x_1+ty_1), 0\leq t\leq 1$ の接線との間の角度 $\mathrm{angle}(v_x,\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t})$, $x=\varphi(t)$ はいつも代数的に負である．このためには選んだ普遍被覆上で $t=0$ から出発して $\varphi(t)$ に沿い, $t=0$ のときの条件を満たすように角度を決めておけばよい)．

3. Birkhoffの定理

3.1. $\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}_+(\mathbf{R}_+=[0,+\infty[)$ の C^k 級 $(k\geq 1)$ 微分同相写像 f で鉛直線を左に傾けるものが与えられたとする (f は $\mathbf{T}^1\times\{0\}$ を不変にする)．f は $\mathrm{support}(\mu)=\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}_+$ なるラドン測度 $\mu>0$ を保存するとし, 以下を仮定する：

- U は $\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}_+$ 上で閉包がコンパクト (閉包をで表わす)；
- U は $\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}_+$ に微分同相である；
- $\delta>0$ があって $\{0\leq r\leq\delta\}\subset U$ である；

- U はその閉包の内部である (すなわち, $\mathrm{Int}(\overline{U}) = U$);
- U は f に関して不変である (すなわち, $f(U) = U$)

$C =\mathrm{Fr}(U)$ で $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ 上の U の境界集合 (フロンティア) を表わす．

定理： 上記の条件のもとで, $\mathbf{Fr}(U)$ は関数 $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフである．

図

3.2. 定理 3.1 は 3.6 節で証明する．

$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ に $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ に沿って円盤 $\mathbf{D}^2$ をくっつければ, $(\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+) \cup \mathbf{D}^2$ は $\mathbf{R}^2$ に同相である．$U \cup \mathbf{D}^2$ は $\mathbf{R}^2$ において開単連結である (閉包がコンパクト) から, $\mathbf{R}^2$ における $U \cup \mathbf{D}^2$ の境界点集合 (フロンティア) はコンパクトで連結である (Wall[1, 14.10] 参照)．

(Birkhoff が" 曲線" と呼んだものはわれわれが今日連続体と呼ぶものであることを注意しておく：コンパクトで連結ということは必ずしも局所連結であることを意味しない)．

注意： 先験的に, $\mathbf{Fr}(U)$ はとても複雑である.

図

$U \cong S^1 \times \mathbf{R}$ と仮定する必要がある．実は, $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ の上では, ベクトル場は, 4 個の臨界点を持つ S^2 上の Morse 関数に由来する S^2 上のハミルトニアンから誘導されるものであり, 次の条件を満たす不変領域 V を持つ. すなわち, V は $\pi_1(V) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ を満たし, その境界 ∂V は $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフでない.

図

3.3. 準備から始めよう．

3.3.1. $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して, $\varphi(\theta) = \mathrm{Inf}\{y \mid (\theta, y) \in (\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+) - U\}$ とおく．関数 $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}_+^*$ は下半連続である (実際, $\varphi(a) = \liminf_{\theta \to a} \varphi(\theta)$ である．なぜなら, $(\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+) - U$ は閉じているから．ここで $\liminf_{\theta \to a} \varphi(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0}(\inf_{\theta \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}(\varphi(\theta)))$ である．Bourbaki [1, §6 $n°2$ および Ex. §6, $n°8$ 参照].

図

3.3.2. したがって $V = \{(\theta, y) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+ \mid \varphi(\theta) > y\}$ は開である．V は $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ から出発して鉛直線によって到達できる U の点の集合である．

3.3.3. φ は Baire の第一階級の関数であるから, φ の連続点の集合 G は $\mathbf{T}^1$ において G_δ 稠密である．

3.3.4. 以下の関数は $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対し定義され $\mathbf{R}$ 上に値を持つとする：

$$\varphi_+(\theta) = \limsup_{y \to \theta, y \in G} \varphi(y),$$
$$\varphi_-(\theta) = \limsup_{y \to \theta, y \in G} \varphi(y).$$

すべての $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して, $\varphi(\theta) \leq \varphi_-(\theta) \leq \varphi_+(\theta)$ である．関数 φ_+ および φ_- はそれぞれ上半連続および下半連続である．

3.3.5. 3.3.3 および $\liminf$ の定義より,

$$V \text{ の閉包} = \overline{V} = \{(\theta, y) \mid \varphi_+(\theta) \geq y\},$$

および

$$\mathrm{Int}(\overline{V}) = \{(\theta, y) \mid \varphi_-(\theta) > y\}.$$

(φ_- は下半連続の関数 $\leq \varphi_+$ の最大のものであることに注意). すべての $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して, $\varphi(\theta) \in \mathrm{Fr}(U)$ および $\varphi_+(\theta) \in \mathrm{Fr}(U)$ である．

3.3.6. X が位相空間で U が X の開集合のとき, $W = \mathrm{Int}(\overline{U}) \supset U$ であり, 開集合 W はその閉包の内部であることを思い起こそう．

3.4.

3.4.1. 距離化可能かつ完備な位相空間 X が与えられたとする．したがって X は Baire 位相空間である．X の同相写像 f が与えられたとする．

3.4.2. X に $f(\Lambda) = \Lambda$ なる部分集合 Λ が与えられたとする．このとき

$$f(\overline{\Lambda}) = \overline{\Lambda},\ f(\mathrm{Int}(\overline{\Lambda})) = \mathrm{Int}(\overline{\Lambda}),\ \text{および}\ f(\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\overline{\Lambda}))) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\overline{\Lambda})).$$

3.4.3. f の非遊走集合 $\Omega(f)$ は X に等しいとする (すなわち, U が X の開集合で $f(U) \subset U$ のとき $U - f(U)$ は U 上で内点のない閉集合である)．V が $f(V) \subset V$ なる開集合なら, V の G_δ 稠密な集合 Λ で $f(\Lambda) = \Lambda$ なるものがある. ($\Lambda = \cap_{n\in\mathbf{N}} f^n(V)$ ととればよい.)

3.4.4. 微分同相写像 f, 開集合 U で 3.1 の仮定を満たすものが与えられたとする (十分すぎる??)．このとき, $f\ |_U$ は確率測度 $\nu = \frac{1}{\mu(U)}\mu|_U$ を保存し, $\mathrm{support}(\nu) = U$ である．したがって, ポアンカレの回帰定理により,

$$\Omega(f|_U) = U.$$

3.4.5. 以下では 3.1 と同じ仮定をおき, 3.3 で定義された開集合 V を考える．集合 $\Lambda \subset V$ で V において稠密かつ $f(\Lambda) = \Lambda$ なるものの存在を仮定する．

命題：上の仮定のもとで, $\mathbf{Fr}(U)$ は $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフである．

証明：3.4.2 より $f(\overline{V}) = \overline{V}$ および $f(\mathrm{Int}(\overline{V})) = \mathrm{Int}(\overline{V})$ である．$\overline{V} \subset \overline{U}$ である．$\varphi_+ = \varphi_-$ であることを示そう (3.3.5 を見よ)．したがって, $\varphi_+ \in C^0(\mathbf{T}^1)$, $\overline{V} = \{(\theta, y) \mid y \leq \varphi_+(\theta)\}$ である．また $\{(\theta, y) \mid y = \varphi_+(\theta)\} \subset \mathrm{Fr}(U)$ であるが, U (および $\overline{U}$) は連結であるから $U \subset \overline{V}$ であり, したがって $\mathrm{Int}(\overline{U}) = U$ であるから $U = \mathrm{Int}(\overline{V})$ である．

すべての $\theta \in \mathbf{T}^1$ に対して $\varphi_+(\theta) = \varphi_-(\theta)$ であることを示すために, 背理法でいく．

線分 $[\varphi_-(\theta), \varphi_+(\theta)] \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\overline{V})) \subset \mathrm{Fr}(V)$ である．以下のうちのどれかが起こると仮定できる：$z \in [\varphi_-(\theta), \varphi_+(\theta)]$ のとき

a) 列 $x_i = (\theta_i, y_i)$ があって, $\theta_i > \theta$ かつ $i \to +\infty$ のとき $\theta_i \to \theta$ であり, $x_i = (\theta_i, y_i) \to z$ および $(\theta_i, y_i) \in \Lambda \subset V$ を満たす；

b) a) と同じ列があって $\theta_i < \theta$ を満たし, それ以外はすべて a) の条件を満たす．

可能性 a) を排除しよう (ケース b) も f^{-1} を考えれば同様である)．

f は鉛直線を左に傾け, f は C^1 級であるから, $\varphi_-(\theta)$ に十分近い z に対して, f は $\mathrm{D}f_{(\theta,\varphi_-(\theta))}$ に非常に近く, 状況を図に示されたように表わせる；その上 $f(x_i) \in \Lambda$, $f(x_i) \to f(z)$ である．

図

$f(x_i) \in \Lambda \subset V$ であるから鉛直な線分は $S_i = [(\theta_i^1, 0), f(x_i)] \subset V$ を満たす．ただし $p_1(f(x_i)) = \theta_i^1$ である．

i が十分大きいとき, $L(\theta)$ を線分 $L(\theta) = [(\theta,\ \varphi_-(\theta)),\ (\theta, \varphi_+(\theta))]$ として $S_i \cap f(L(\theta)) \neq \emptyset$ である (2.4.2 の証明参照)．$L(\theta) \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\overline{V})) \subset \mathrm{Fr}(V)$ かつ $f(\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\overline{V}))) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\overline{V}))$ であるからこれは不合理である．したがって a) は不可能である．ケース b) も同様である．

3.5. V の右および左の領域

3.5.1. $\theta \in \mathbf{T}^1$ とすると, $\varphi(\theta) \leq \varphi_+(\theta)$ であり, その上, $\varphi(\theta) \in \mathrm{Fr}(U)$ および $\varphi_+(\theta) \in \mathrm{Fr}(U)$ である．次の条件を満たす $[A, B] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$ の存在

を仮定する：

$$A, B \in \mathrm{Fr}(U) \text{ および }]A, B[\cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$$

3.5.2. このとき, 線分 $]A, B[$ は U を 2 つの部分 U_1 と U_2 に分ける．ただし, U_1 は $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ に微分同相であり, U_2 は $\mathbf{R}^2$ に微分同相である．($\mathbf{R}^2 \cong U \cup \mathbf{D}^2 \subset S^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{+\infty\}$ と考えれば, $]A, B[\cup \{+\infty\}$ は埋め込まれた円であり, このとき Jordan-Schönflies (Neumann [1] 参照) の定理を適用すればよい)．

領域 U_2 が単連結で V の左に (resp. 右に) あれば $[A, B]$ は V の領域を左から (resp. 右から) 限るということにする．

図

3.5.3. 補題： 2 つの線分 $[A, B] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$ および $[A', B'] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$ が与えられ, 3.5.1 の仮定を満たすとする．$[A, B]$ がある領域を右から限れば $[A', B']$ についても同じである．

証明：図 I および II が不可能であることを示そう．

ある列 $\theta_i \to \theta$ で $\theta_i \in G$ (φ の連続点) かつ $\varphi_+(\theta_i) \to \varphi_+(\theta)$ なるものがある．V の定義により, $\{\theta_i\} \times [0, \varphi_+(\theta_i)[\subset V$ であり, この線分は U_2 および ${U'}_2$ の境界集合と交われない．さて, i が十分大きいとき, U_2 と ${U_2}'$ が V の同じ側になければ, これが必然的に起こる． □

図

3.5.4. 関連した議論により, 以下の事実を得る：

・U 上の道で $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ の点を V の左にある領域の点に結ぶものを $[A, B] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$ で定義する．このときこの道は $]A, B[$ と交わる．

・U 上の道で V の点を $U - V$ の点に結ぶものは, 線分 $\{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)[$ に交わる．

定義：$\hat{\varphi} : [0, 1] \to U$ は $\hat{\varphi}(0) \in \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ なる C^1 級の埋め込み道とする．(C^1 級で埋め込まれた) 道 $\hat{\varphi}$ が正 (**resp.** 負) と呼ばれるのは, $\hat{\varphi}(0) \in \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ を出発し, $\hat{\varphi}(t), t \in [0, 1]$ に沿っての代数的角度を選んだとき, $\frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t}$ とベクトル $v = (0, 1)$ の角度がつねに代数的に厳密に 0 より大きい (**resp.** 厳密に 0 より小さい) ときである．ただし $t = 0$ のとき角度は区間 $]0, \pi/2[$ (**resp.** $]-\pi/2, 0[$) 内にあるとする.

正に埋め込まれた C^1 級の道は鉛直線を左に回転させる道とも呼ばれる．

図

図

注意：V のすべての点は正に (resp. 負に) 埋め込まれた C^1 級の道によって近づける．

道 $\hat{\varphi} : [0,1] \to U$ は埋め込み (すなわち, $\frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0$ かつ 2 重点なし) かつ $\hat{\varphi}(0) \in \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ でなければならない．

3.5.5. 開領域 U_2 を V の右に限る $]A,B[\subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$ が与えられたとする．

補題：正に埋め込まれたすべての C^1 級の道 $\hat{\varphi}$ に対して, $\hat{\varphi}(1) \notin U_2$ である．

証明：$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ の普遍被覆 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ の上で考える．また, 道 $\hat{\varphi}$ の持ち上げを $\tilde{\varphi}$ と書く．t_0 は非常に小さい $t \in [0,1]$ であり, $\tilde{\varphi}(t_0) \in]A,B[$ を満たし, $\varepsilon > 0$ があって, $\tilde{\varphi}(]t_0, t_0+\varepsilon[) \in U_2$ であるとする．次が成り立つ．

$$| \operatorname{angle}(\vec{O\theta}, \frac{\mathrm{d}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t}) \mathrm{mod}(2\pi) | \leq \pi/2.$$

図

3.5.6. 正に埋め込まれた C^1 級の道 $\tilde{\varphi}$ は次の性質をもつ．

i) $a = \tilde{\varphi}(0)$ で $t > 0$ のとき, $p_1(\tilde{\varphi}(t)) < a$ $(p_1(\theta, r) = \theta)$,

ii) t_1 が非常に小さい t であって $\tilde{\varphi}(t_1) = (\theta_1, y_1)$ が $\{\theta_1\} \times \mathbf{R}_+$ と交わるなら, 代数的に $(\tilde{\varphi}(0)$ を出発する方向を考えて) 次を得る：

$$0 < \mathrm{angle}(v_x, \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(t_1)}{\mathrm{d}t}) \leq \pi, \text{ ただし } x = \varphi(t).$$

図

iii) そのうえ, $t_2 \geq t_1$ が $\tilde{\varphi}(t_2) = (\theta_1, y_2)$ を満たせば $y_2 \leq y_1$.

図

主張 ii) と iii) から i) が出る．

ii) が間違いなら, $\alpha = \mathrm{angle}(\vec{O\theta}, \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(t_1)}{\mathrm{d}t})$ の代数的角度は $k \in \mathbf{N}(k \geq 1)$ として $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$ を満たす．孤 (a, b) を図に示されるように円にして閉じさせれば, $\mathbf{R}^2$ 上に埋め込まれたすべての円に対して接線の角度の代数的変化が 2π であることに矛盾する．

図

iii) の証明も同様である（背理法による）． □

図

3.5.5 の証明のしめくくり： $\tilde{\varphi}(1) \in U_2$ なら, 点 $\varphi(t_0+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ は小さい) は 3.5.6ii) および iii) に矛盾するから, 補題 3.5.5 が背理法によりしたがう． □

U_2 を V の左にある領域に置き換え, $\hat{\varphi}$ を負の道に置き換えれば, 同様の補題を得る．

命題 3.5.5 が成り立つためには, $\hat{\varphi}$ が正に C^1 級に埋め込まれた道であり, $\hat{\varphi}(0) \in \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ であることを仮定すべきであることを下の図は示している．

図

3.6. 3.1 の証明：次のようにおく：

$$\begin{aligned} V_+ = \{x \in U \mid &\text{正に埋め込まれた } C^1 \text{級の道} \varphi : [0,1] \to U \\ &\text{で} \hat{\varphi}(1) = x \text{ なるものが存在する} \} \\ V_- = \{x \in U \mid &\text{負に埋め込まれた } C^1 \text{級の道} \varphi : [0,1] \to U \\ &\text{で} \hat{\varphi}(1) = x \text{ なるものが存在する} \} \end{aligned}$$

V_+ と V_- は U の開集合である．なぜなら $\hat{\varphi}_1 : [0,1] \to U$ が正に (resp. 負に) 埋

め込まれた C^1 級の道であって, $\hat{\varphi}_2 : [0,1] \to U$ が C^1 級の道で $\hat{\varphi}_1$ の C^1 近傍にあり, $\hat{\varphi}_2(0) \in \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ を満たせば, $\hat{\varphi}_2$ は正に (resp. 負に) 埋め込まれた道である．3.5.3 および 3.5.5 より $V_+ \supset V, V_- \supset V$ および $V_+ \cap V_- = V$ を得る．

f は鉛直線を左に傾ける微分同相写像であるから, 3.4.3 と 3.4.4 より, V_+(resp. V_-) で G_δ 稠密な集合 Λ_+ (resp. Λ_-) で $f(\Lambda_+) = \Lambda_+$ (resp. $f(\Lambda_-) = \Lambda_-$) なるものがある．

$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$ は V で G_δ 稠密であり, $f(\Lambda) = \Lambda$ を得る．Birkhoff の定理 3.1 は 3.4.5 よりでる． □

図

4.1. f は $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ の微分同相写像で鉛直線を傾け, 体積形式 $\Omega = \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r$ を保存するものとする．円環を $A_\delta = \{(\theta, r) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \mid 0 \leq r \leq \delta\}$ とすると

命題： f が $r =$ 一定 にホモトープな円 ($\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ に交わらない) を不変にするための必要十分条件は, $\delta > 0$ があって $V = \cup_{n \in \mathbf{Z}}(f^n(A_\delta))$ の閉包がコンパクトなことである．

証明: 集合 V は連結である．なぜなら $f^n(A_\delta)$ は連結であり, f は $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ を不変にするので, すべての整数 n_1 と n_2 に対して $f^{n_1}(A_\delta) \cap f^{n_2}(A_\delta) \supset \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ であるから．条件は明らかに必要である．逆に, $\overline{V}$ はコンパクトで連結であるから W_+ を $(\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+) - \overline{V}$ の無限遠と連結な成分とする；アレキサンダーの双対性 (Wall [1] 参照) より $H_1(W_1, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ であるから, W_+ は $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ に微分同相である；同時に開集合 $(\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+) - \overline{W}_+$ の $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ を含む連結開成分 U_1 は $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ に微分同相であることがわかる．また $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+ \supset A_\delta$ を示せる．さらに $U_1 = \mathrm{Int}(\overline{U_1})$ である (X が局所連結な距離化可能位相空間で $U \subset X$ が開

なら, $X-\overline{U}$ の各連結成分 V は $V=\mathrm{Int}(\overline{V})$ である). 3.1 節より $f(W_+)=W_+$ かつ $f(U_1)=U_1$ であるから, $\mathrm{Fr}(U_1)$ は $\psi\in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフであり, したがって $\mathrm{Fr}(U_1)$ は f のもとで不変な円であって ($\mathbf{T}^1\times\{0\}$ と異なり) $r=$ 一定 にホモトープである．2.2 節より ψ はリプシッツ関数である. □

4.2. $\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}$ の $C^k(k\geq 1)$ 級の微分同相写像 f で恒等写像にホモトープであり, 体積形式 $\Omega=\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r$ を保存し, 鉛直線を傾けるものが与えられたとする．f は以下の条件 $(+)$ を満たすとする：

$(+)$ すべての $a>0$ に対して C^1級の微分同相写像 g で
Ωを保存し, 鉛直線を傾け
$$g\,|_{\{r\geq -a\}}=f\,|_{\{r\geq -a\}}$$
を満たし, $a_1>a$ があって
$g(\{r\geq -a_1\})=(\{r\geq -a_1\})$ なるものがある．

このとき f が $r=$ 一定 にホモトープな円 C を不変にするなら, C はリプシッツ関数 $\psi\in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフである. (2.2 と 3.1 を用いる.) 集合 $\cup_{n\in\mathbf{z}}f^n(\{|\ r\ |\leq\delta\})(\delta>0)$ の閉包がコンパクトなら f は $\psi\in C^0(\mathbf{T}^1)$ のグラフとなっている円を不変にする (4.1 と同じ論拠による).

図

4.3. 例： $t(\theta,r)=(\theta+r,r)$ および $h(\theta)=(\theta,r+\varphi(\theta))$ として, $f_\varphi=h\circ t$ とおく．ここで $\varphi\in C^k(\mathbf{T}^1)$ および $\int_0^1\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta=0$ である．

命題： $k\geq 1$ のとき, f_φ は **4.2** の条件 $(+)$ を満たす．

証明:(Mather[2] より着想を得た.) $\psi(\theta)=\int_0^\theta\varphi(t)\mathrm{d}t\in C^{k+1}(\mathbf{T}^1)$ とおく．$\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}$ の普遍被覆 $\mathbf{R}^2$ の上で考えよう．$\tilde{f}_\varphi(\theta,r)=(\Theta,R)$ と書く．$v=\Theta-\theta,\Theta=\theta+r$, $r+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\Theta)=R$ なる新しい座標 (θ,v) を選ぶ．1-形式 $Rd-r\mathrm{d}\theta=R\mathrm{d}v+(R-v)\mathrm{d}\theta$ は exact である (すなわち, $\frac{v^2}{2}+\psi(\theta+v)$ は f_φ の母関数である).

$\eta\geq 0$ と $x\geq 0$ は $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ に属する関数とし, 次の性質を満たすとする：$v\geq -2$ のとき $\eta(v)=1$, $v\leq -3$ のとき $\eta(v)=0$；$v\geq -1$ のとき $x(v)=0$, すべての v に対して $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}x(v)\geq 0$, および $v\leq -2$ のとき $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}x(v)=c$．ただし, $c>\sup_{\theta,v}\mid\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\ (\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}v}(v)\cdot\ \psi(\theta+v))\mid$．

g は母関数 $l(\theta,v)=\frac{v^2}{2}+\eta(v)\cdot\psi(\theta+v)$ の写像とする．$g(\theta,r)=(\tilde{\Theta},\tilde{R})$, $v=\tilde{\Theta}-\theta$ として次を得る：

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(\theta,v)=\tfrac{\partial}{\partial v}l(\theta,v),\\&\tilde{r}(\theta,v)=(\tfrac{\partial l}{\partial v}-\tfrac{\partial l}{\partial\theta})(\theta,v)=v+\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}(v)+\tfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}v}(v)\cdot\psi(\theta+v).\end{aligned}$$

すべての θ および v に対して

$$(*)\qquad \frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}v}(v)>0\ \text{および}\ \tilde{r}(\theta,v)=\begin{cases}v & \text{if } v\geq 0,\\(1+c)v & \text{if } v\leq -3.\end{cases}$$

これは $\mathbf{R}^2$ からそれ自身の上への C^k 級写像 $g=(g_1,g_2)$ で

$$g(\theta+1,r)=(g_1(\theta,r)+1,g_2(\theta,r))$$

なるものを決める．なぜなら $(*)$ により θ および v の関数として v を見つけることができるから．したがって, 写像 g は $\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}$ のそれ自身の上への写像で恒等写像にホモトープなものを誘導する．1-形式 $R\mathrm{d}v-r\mathrm{d}\theta$ が閉であるから写像 g は体積形式 $\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r$ を保存する．写像 g もまた微分同相写像である．なぜなら $H(\theta,r)=(\theta,g_1(\theta,r)-\theta)$ が $(*)$ により微分同相写像であり, $g\circ H(\theta,r)=(\theta+r,r+\varphi(\theta,r))$ は $\mathrm{det}D(g\circ H)=1+\frac{\partial}{\partial r}\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}>0$ であるから．その結果, 写像 $g\circ H\circ t^{-1}(\theta,r)$ は微分同相写像であり (なぜなら $1+\frac{\partial}{\partial r}(\varphi(\theta-t,r))>0$ で

あり, これが成り立つのは $|\ r\ |$ が十分大きいときだからである), したがって最後に g もそうである．$(*)$ より, 微分同相写像 g は鉛直線を傾ける．$v \geq -1$(すなわち, $r \geq -1$) なら $g(\theta, r) = f_\varphi(\theta, r)$ を得, $v \leq -3$(すなわち, $r \leq -3(1+c)$) なら $g(\theta, r) = (\theta + \frac{r}{1+c}, r)$ を得る．$p \in \mathbf{Z}$ かつ $L_p(\theta, r) = (\theta, r+p)$ のとき $f_\varphi \circ L_p = L_p \circ f_\varphi$ であることに注意すれば, $a > 0$ が任意である場合に帰着する. □

注意: 命題において母関数の定式化を利用した (たとえば Arnold & Avez[1, Annexe 33], また Zehnder[1] を見よ). 同じ論拠により, 性質 $(+)$ は微分同相写像 f で恒等写像にホモトープで, 体積形式 Ω を保存し, 大域標準的 (global canonical, すなわち, $w = r\mathrm{d}\theta$ として $f^*w - w = \mathrm{d}S$) で, 微分同相写像 t (またはもっと一般に鉛直線を傾ける完全可積分な微分同相写像) に C^1 一様近接なものに対して満たされる．

4.4. $\varphi \in C^k(\mathbf{T}^1), k \geq 1$ および $\int_0^1 \varphi(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$ として $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ とおく．このとき,

> f が $r =$ 一定にホモトープな不変円を持つための必要十分条件は
> $\sup_{n \in \mathbf{Z}} \sup_{\theta, r} |\ f_2^n(\theta, r) - r\ | < \infty$ である．
> ただし, $f^n(\theta, r) = (f_1^n(\theta, r), f_2^n(\theta, r))$.

(これは 4.2, 4.3, および次の事実からしたがう．すなわち, C が f の不変曲線であれば, $L_p(\theta, r) = (\theta, r+p)$ として, $p \in \mathbf{Z}$ のときこれは $L_p(C)$ と同じである)．その上次が成り立つ. $\| \varphi \|_{C^1}$ にのみ依存する $k > 0$ があって f が $r =$ 一定 にホモトープな不変円をもつための必要十分条件が $\sup_{n \in \mathbf{Z}} \sup_{\theta, r} |\ f_2^n(\theta, r) - r\ | \leq k$ である (これは 2.2 および f が交差性 (intersection property) をもつということだけから出る．II 章, 1.2 参照).

5．帰結

簡単のため多様体 $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ に話を制限しよう．しかし global canonical な微分同相を考えれば, 結果は簡単に $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ や $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ に一般化できる (4.3 節参照)．

$\mathrm{diff}^k_\Omega(\mathbf{T}^1 \times [0, 1])$ は $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ の C^k 級の微分同相写像で体積形式 $\Omega = \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r$

を保存するものの群を表わすとする．

5.1. 鉛直線を右へ傾ける $g_0 \in \mathrm{Diff}^k_\Omega(\mathbf{T}^1 \times [0,1])$ が与えられたとする．V^k は $\mathrm{Diff}^k_\Omega(\mathbf{T}^1 \times [0,1])$ における g_0 の近傍であって (V^k は C^1 位相で導入される), $\eta_1 > 0$ と $K > 0$ があってすべての $g \in V^k$ に対して

- 1.5 節の数 η は $\eta < \eta_1$;
- $\mathbf{T}^1 \times [0,1]$ における g と g^{-1} のリプシッツの比 $< K$

を満たす ($\mathbf{T}^1 \times [0,1]$ には 2.3 節の距離を用意する)．

5.2. 3.1,2.2 節および 2.3 節より, $g \in V^k$ が $r =$ 一定 にホモトープな不変円 C を持てば C は $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbf{T}^1)$ のグラフであり, $h \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T}^1)$ があって $g(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta))$ が成立ち, そのうえ

$$\mathrm{Max}(\mathrm{Lip}(\psi), \mathrm{Lip}(h), \mathrm{Lip}(h^{-1})) < K_1,$$

が成り立つ．ただし $K_1 = \mathrm{Max}(2\eta, 2\eta K)$ である．

5.3. $\tilde{g}$ が $g \in V^k$ の $\tilde{\mathbf{T}}^1 \times [0,1] = \mathbf{R} \times [0,1]$ への持ち上げであれば $\tilde{g} \mid_{\tilde{C}} = \tilde{h} \in D^0(\mathbf{T}^1)$ であり, $\tilde{C}$ は $\tilde{\psi} = \psi \circ p$ のグラフである．ここで $p : \tilde{\mathbf{T}}^1 \times [0,1] \to \mathbf{T}^1 \times [0,1]$ は射影である．2.4 節より

$$\rho(\tilde{g} \mid_{\mathbf{R} \times \{0\}}) \leq \rho(\tilde{h}) \leq \rho(\tilde{g} \mid_{\mathbf{R} \times \{1\}}).$$

$\alpha \in \mathbf{R}$ (resp. $\alpha \in \mathbf{T}^1$) で $0 \leq r \leq +\infty$ のとき $F^r_\alpha = \{f \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$ (resp. $F^r_\alpha = \{f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^1) | \rho(f) = \alpha\}$) と表わす．集合 F^r_α は C^r 位相で閉じており, 関数 ρ は C^0 位相で連続である (Herman [1,II] 参照)．

5.4. J を $\mathbf{T}^1$ の空でない閉集合とし, $G^k_J = \{f \in V^k \mid$ すべての $\beta \in J$ に対して $r =$ 一定 にホモトープな円 C (β および f に依存する) で f のもとで不変で $\rho(f \mid_C) = \beta\}$ とおく．

命題： G^k_J は V^k の閉集合である (G^k_J は同時に V^k 上に誘導される C^0 位相でも閉じている)．

証明：(f_i) は V^k の列であって C^0 位相で $f_i \to f \in V^k$ とする．ただし, f は $C^k (k \geq 1)$ 級である．

$(\psi_i, h_i) \in C^0(\mathbf{T}^1) \times \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T}^1)$, $\rho(h_i) \in J$ は f_i のもとで不変な円 C_i を定義するものとする．Ascoli の定理および不等式 5.2 (および $0 \leq \psi_i \leq 1$) より, 整数の部分列 (それを再び $i \in \mathbf{N}$ で表わす) に対して, $i \to +\infty$ のとき C^0 位相で $\psi_i \to \psi, h_i \to h, h_i^{-1} \to g$ である．$g = h^{-1}$ (なぜなら, $h_i \circ h_i^{-1} = h_i^{-1} \circ h_i = \mathrm{Id}$ であるから) および $\rho(h) \in J$ を得る．また $f(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta)))$ を得る (なぜなら, $f_i(\theta, \psi_i(\theta)) = (h_i(\theta), \psi_i(h_i(\theta)))$ であるから)． □

5.5. $f \in V^k$ が与えられたとき, C_f で f のもとで不変な円の集合を表わす, すなわち,

$$C_f = \{(\psi, h) \in C^0(\mathbf{T}^1) \times \mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T}^1) \mid f(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta))\},$$

また C_f 上に C^0 位相を入れる．

命題：集合 C_f はコンパクトである．

証明： 5.2 を利用し, C_f が $C^0(\mathbf{T}^1) \times C^0(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)$ 上の C^0 位相で閉じており, 同等連続である (また $0 \leq \psi \leq 1$ であるから有界である) ことを示す．すると結果は Ascoli の定理からしたがう． □

5.6. $\rho(C_f) \subset \mathbf{T}^1$ は写像 $(\psi, h) \in C_f \to \rho(h) \in \mathbf{T}^1$ の像であることに注意しよう．$\rho(C_f)$ は $\mathbf{T}^1$ のコンパクトな部分集合である．

5.7.1. 命題：$f \in V^k$ のとき, $\tilde{f}$ は $\mathbf{R} \times [0, 1]$ 上にたかだか 1 つの不変曲線 $\tilde{C}$ を持つ．この曲線は $\tilde{\psi}$ のグラフであって, $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}}) = \alpha \notin \mathbf{Q}$ である．

証明 : 背理法でいく．$\tilde{\psi}$ と $\tilde{\psi}'$ のグラフである 2 つの曲線 $\tilde{C}$ と $\tilde{C}'$ があって $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}}) = \rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}'})$ であるとする．2.4 より必然的に $\tilde{C} \cap \tilde{C}' \neq \emptyset$ であるから $C \cap C' \neq \emptyset$ である．ここで $C = p(\tilde{C}), C' = p(\tilde{C}')$ である．したがって, 2 つの孤 $(acb) \subset C$ と $(ac'b) \subset C'$ で $(acb) \cap (ac'b) = \{a, b\}$ かつ円 $(acb) \cup (ac'b)$ が円盤 D の境界となるものを見つけることができる．f は回帰的であるから, $n \geq 1$ があって $f^n(\mathrm{Int}(D)) \cap \mathrm{Int}(D) \neq \emptyset$ であり, $f(C) = C$ および $f(C') = C'$ であるから, $f^n((acb)) = (acb)$ である．したがって $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}}) = \rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}'}) \in \mathbf{Q}$ である．これは不合理であるから $\tilde{C}$ は一意である． □

図

5.7.2. 注意：f は5.7.1の微分同相写像とする．f が $r = c^{te}$ にホモトープな2つの円 C と C' を不変にし $C \cap C' \neq \emptyset$ なら, $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}}) = \quad \rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}'}) \in \mathbf{Q}$ である．

5.7.3. $C^k(k \geq 1)$ 級の微分同相写像 g_0 は鉛直線を傾けるとし, $\tilde{g}_0$ を g_0 の $\mathbf{R}\times[0,1]$ への持ち上げとするとき, $\mid \rho(\tilde{g}_0 \mid_{\mathbf{R}\times\{0\}}) - \rho(\tilde{g}_0 \mid_{\mathbf{R}\times\{1\}}) \mid < 1$ であるとする．

g_0 の近傍 V^k は十分小さくて, この性質は $g \in V^k$ でも成り立つと仮定する．このとき, すべての $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ および $g \in V^k$ に対して, たかだか1つの g の不変円 $(\psi, h) \in C^0(\mathbf{T}^1) \times F^0_\alpha$ (すなわち, $g(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta)), \rho(h) = \alpha)$ が存在する．

命題：写像 $g \in G^k_\alpha \to (\psi, h) \in C^0(\mathbf{T}^1) \times F^0_\alpha$ はこの空間に C^0 位相を用意すれば連続である．

証明はコンパクト性の議論により簡単に得られるので, 演習問題としておく．

5.8.1. 命題：$1 \leq k \leq +\infty$ が与えられたとする．このとき C^k 位相で V^k の G_δ 稠密な集合 G^k でつぎの性質を持つものがある．$f \in G^k$ なら f のもとで不変な円 C で $r = c^{te}$ にホモトープで, $C \neq \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ または $C \neq \mathbf{T}^1 \times \{1\}$ で $\rho(f \mid_C) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ なるものは存在しない．

注意： 以下の性質は V^∞ で稠密な開集合の上で成り立つ．$i = 0, 1$ として $f_i = f \mid_{\mathbf{T}^1\times\{i\}}$ とすると, f_0 と f_1 は構造安定な微分同相写像であり, したがって, $\rho(f_0), \rho(f_1) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ を満たす. (実際, 写像 $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbf{T}^1 \times [0,1]) \to (f_0, f_1) \in (\mathrm{Diff}^\infty_+(\mathbf{T}^1))^2$ は開連続で上への写像である.)

5.8.1 の証明：Robinson[1] より, 以下の性質は V^k で G_δ 稠密な集合の上で成り立つ：

a) すべての周期点は生成的なスペクトルを持つ：$x \in \mathbf{T}^1 \times [0,1]$ が $f \in V^k$ の

周期点であって $f^q(x) = x$ であれば, 行列 $\mathrm{D}f^q(x) \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ のスペクトルは生成的である (すなわち, $-1, 1 \notin \mathrm{Spectre}\ (\mathrm{D}f^q(x))$ である．また $e^{2\pi i\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}$ が $\mathrm{D}f^q(x_0)$ の固有値であれば $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ である)．

b) すべての双曲周期点 $x \in \mathbf{T}^1 \times]0, 1[$ の安定多様体と不安定多様体は横断的に交わっている．

C は f のもとで不変な円であって, $\rho(f\ |_C) = p/q \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ であり, $f\ |_C$ は周期点 x_0 を持つとする．a) が成り立てば x_0 は f の双曲周期点である．実際, C は $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbf{T}^1)$ のグラフであり, したがって C は x_0 を通る円錐に含まれている．だから $\mathrm{D}f^q(x_0)$ は $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ 上で無理数回転に共役ではない．C は必然的に f の双曲周期点の安定および不安定多様体の和である．

性質 b) を仮定すれば, 円 C は存在できない ($C \neq \mathbf{T}^1 \times \{i\}, i = 0, 1$ なら). □

図

注意：以下の性質は C^∞ 位相で $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbf{T}^1 \times [0, 1])$ の G_δ 稠密な集合において成り立つ： f は $\rho(f\ |_C) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ なる ($\mathbf{T}^1 \times \{i\}, i = 0, 1$ と異なる) 円 C を不変にしない. (ここでは C が $r = c^{te}$ にホモトープであることは仮定しない.)

証明は 5.8.1 のものとほとんど同じである．楕円周期点は Birkhoff の第一不変量がゼロでないと仮定できるところだけが異なる点である (すなわち, $f^q(x_0)$ は極座標で $(\theta, r) \to (\theta + \alpha + a_1 r^2 + \mathrm{O}(r^4), r + \mathrm{O}(r^4)), a_1 \neq 0$ および $\alpha/2\pi \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ と書ける)．したがって, J.Moser[1] の定理より, f^q は C^∞ 級の円列 $(C_i), C_i \to x_0$ で $\rho(f^q\ |_{C_i}) \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ の各円 C_i を不変にする．これは x_0 を通る埋め込み曲線で f のもとで不変なものがないことを意味する. このとき「注意」の証明は 5.8.1 の証明とまったく同じである．

Birkhoff の第一不変量は x_0 における f^q の最初の 3 つの微分に依存することを注意しておく．もっと完全な議論に関しては J.Mather [1] を参照して欲しい．

図

5.8.2. $f \in G^k$ とするとコンパクト集合 $\rho(C_f)$ は $\mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ に含まれる．したがって, $\tilde{f}$ を考えると, $a < b$, ψ_a および $\psi_b \in C^0(\mathbf{T}^1)$, および ψ_a, ψ_b のグラフである不変曲線 $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_b$ で $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}_a}) = a$, $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}_b}) = b$ なるものが存在するが, グラフでありかつ $\rho(\tilde{f} \mid_{\tilde{C}}) \in]a, b[$ なる不変曲線 $\tilde{C}$ は存在しない．

5.8.3. (f_i) は $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbf{T}^1 \times [0,1])$ の列で $i \to \infty$ のとき C^∞ 位相で $f_i \to t$ であるとする．ここで $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$ である．

J.Moser[1] の定理より, i が十分に大きければ $\rho(C_{f_i})$ はディオファントス条件を満たす数のカントール集合を含む．

5.9. 不安定ゾーン (Instability zones)

5.9.1. 5.8.3 節の列 (f_i) がすべての i に対して 5.8.1 を満たし, $f_i \in G^\infty \subset V^\infty$ なら, 5.8 より, $g \in V^\infty, [a,b] \subset \mathbf{R}, a \neq b$, および $a, b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ が存在し, g の不変曲線 C_a, C_b でリプシッツ関数のグラフになっているものがあって $\rho(\tilde{g}|_{\tilde{C}_a}) = a, \rho(\tilde{g}|_{\tilde{C}_b}) = b$ を満たすが, g のもとで不変な円 $C(r = \text{一定}$ にホモトープ$)$ で $\rho(\tilde{g} \mid_{\tilde{C}}) \in]a, b[$ なるものは存在しない．2.4 により $C_a \cap C_b = \emptyset$ である．

C_a および C_b により決まる円環は g の不安定領域と呼ばれる．

図

5.9.2. 命題： C_a および C_b を境界とする $g \in V^k (k \geq 1)$ の不安定領域が与えられたとする．W を C_a の連結開近傍とし，$H = \cup_{n \in \mathbf{Z}} g^n(W)$ とする．このとき $C_b \cap \overline{H} \neq \emptyset$ である．

証明：$C_b \cap \overline{H} \neq \emptyset$(注：$=$ の間違い) なら U を $(\mathbf{T}^1 \times [0,1]) - H$ の C_b を含む連結成分とする．4.1 におけるのと同じ論拠によりバーコフの定理 3.1 (および 2.2) を適用でき, したがって $C = \mathrm{Fr}(U)$ は $\mathrm{Lip}(\mathbf{T}^1)$ の関数のグラフであるが, C は不安定領域に含まれるから $C = C_b$ である ($b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ として $\rho(\tilde{g} \mid_{\tilde{C}}) = b$ であるから 2.4 および 5.7.1 を適用できる). したがって $\overline{H} \cap C_b = \emptyset$ は矛盾である. □

5.9.3. 注意：1) 5.9.2 において"W は C_a の連結開近傍である"を"W は点 $y \in C_a$ の連結開近傍である"に置き換えることができる．実際, $H_1 = \cap_{n \in \mathbf{Z}} g^n(W \cup C_a)$ とおくと H_1 は連結でありしたがって $\overline{H}_1$ も連結である．$\overline{H}_1 \cap C_b = \emptyset$ とすると, 4.1 におけるのと同じ論拠により開集合 $(\mathbf{T}^1 \times [0,1]) - \overline{V}$ の $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ を含む連結成分は 3.1 の仮定を満たす．ただし, ここで V は開集合 $(\mathbf{T}^1 \times [0,1]) - \overline{H}_1$ の C_b を含む連結成分である．5.9.2 と同じ論拠によりこれは不合理である．

2) $C_b \cap (\mathbf{T}^1 \times \{1\}) = \emptyset$ なら 5.9.2 において包含関係 $C_b \subset \overline{H}$ を得る．

5.9.4. 2.4.4 を使えば, 5.9.2 や 5.9.3 において $a, b \in \mathbf{Q}$ と仮定する必要はない．g のもとでの不変曲線 C_a および C_b をとり, その際, C が g の不変曲線であり, $r =$ 一定 にホモトープであり, C_a と C_b に囲まれる不安定領域に含まれていれば, $\rho(\tilde{g} \mid_{\tilde{C}}) = a$ (resp. b) から $C = C_a$(resp. C_b) が出る．

図

参考文献

R.Abraham, J.Robbin

[1] Transversal mappings and glows, W.A.Benjamin, New York, 1967.

V.I.Arnold, A.Avez

[1] Problèmes Ergodiques de la méchanique classique, Gauthier Villars, Paris, 1967.

G.D.Birkhoff

[1] = B[1] Surface tarnsformations and their dynamical applications, Acta Mathematica **43** (1920) §44-47 = Collexted Mathematical Papers of G.D. Birkhoff, vol.II, p195-292, Dover, New York (1968).

[2] Sur Quelques courbes fermées remarquables, Bull. S.M.F. **60** (1932), Collected Math. Papers, vol.II, p418-443.

[3] Sur l'existence de région d'instabilité en dynamique, Ann. I.H.P. **2** (1932), Collected Math. Papers, vol.II, p444-461.

[4] Note sur la stabilité, J. Math. **15** (1936), Collected Math. Papers, vol.II, p662-667.

N.Bourbaki

[1] Topologie générale, Chap.IV, Nombres réels, Hermann, Paris, 1961, 3eme edition.

R.Duady

[1] Equivalence de théorèmes des tores invariants pour les difféomorphismes et les champs de vecteurs, Chap. I, Thése de 3éme cycle, Paris VII 1982, voir C.R. Acad Sc. Paris **295** (1982), 201-204.

M.R.Herman

[1] Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotation, Pub. I.H.E.S **49** (1979), 5-233.

[2] demonstration du théorème des courbes invariants pour les difféomorphismes de l'anneau (Manuscrit 1980), voir aussi "theoremes des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet et quelques appli-

cations aux systèmes dynamiques", cours à l'E.N.S. en preparation.

[III] Contre-exemples de Denjoy et contre-exemples de classe $C^{3-\varepsilon}$ au théorème des courbes invariants ayant un nombre de rotation fixé (Chap. III).

[IV] Démonstration de théorème des courbes translatées de nombre de rotation de type constant (Chapitre IV).

E.M.MacMillan

[1] A problem in the stability of periodic system, in "Topics in Modern Physics, A tribute to Edward U.Condon", Ed. by W.R. Brillin and H.Odabasi, Colorado Associated Univ. Press, Boulder (1971), p.219-244.

J.Mather

[1] Invariant subset for area preserving homeomorphisms of surfaces, in "Mathematical Analysis and Applications", edited by L.Nachbin, Part B, Academic Press, New York, 1981.

[2] Non-uniqueness of solutions of Percival's Euler-Lagrange equations, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 465-473.

J.Moser

[1] On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II., (1962), 1-20.

[2] On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations, Proc. Int. Conf. on "Functional Analysis and Related Topics", Tokyo, (1969), 60-67.

M.H.A.Newman

[1] Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge Unv. Press, Lomdon, 1939.

J.Pöschel

[1] über invariante tori in differenzierbaren Hamiltonschen systemen, Bonner math. Schriften No 102, Bonn, 1980.

R.C.Robinson

[1] Generic properties of conservative systems, Amer. J. Math. **92** (1970),

562-603.

W.Rudin

[1] Real and complex analysis, MacGraw Hill, New York, 1966.

H.Rüssman

[1] on the existence of invariant curves of twis mappings of an annulus, preprint, Mainz Univ. (1982).

F.Takens

[1] A C^1-counterexample to Moser's twist theorem, Indag. Math. **33** (1971), 379-386.

C.T.C.Wall

[1] A geometric introduction to topology, Addison-Wesley, 1972.

E.Zehnder

[1] Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphism, Lecture Notes in Maths. Mo 597, Springer Verlag, 1977, 855-866.