谷川清隆 訳

Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), 185-194

バーコフおよびマザーのねじれ写像定理に関する注意
Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems

A.Katok

要約.

ねじれ写像の準周期軌道の存在に関する J.Mather[1] の最近の結果は、周期軌道に関するバーコフ (G.D.Birkhoff) の古典的定理をうまく修正して導き出せる．Mather の議論を幾何学に簡単化したものを使ってバーコフの定理を証明する．Mather の不変集合の別の性質についても議論する．

1. 記法.

$$A = S^1 \times [0,1] = \{(\phi, r), \phi \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}, 0 \le r \le 1\},$$

を標準的円環とし、

$$S = \mathbf{R} \times [0,1] = \{(x,y), x \in \mathbf{R}, 0 \le y \le 1\},$$

をその普遍被覆とし、$T : S \to S$ を単位平行移動

$$T(x,y) = (x+1, y),$$

とする．

任意の同相写像 $f : A \to A$ に対して、その S への持ち上げは T のベキの不定性を除いて定義される．逆に、$F : S \to S$ で、F が T と可換なら F は A のある同相写像の持ち上げである．F を次のような座標で書こう．

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)).$$

同相写像 $f : A \to A$ が ねじれ同相写像(または ねじれ写像) と呼ばれるのは、それが方向保存で、A の境界を保存し、また f の持ち上げ F および任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して関数 $F_1(x,y)$ が y の狭義単調関数であるときである．

明らかに、異なる x に対する関数 $F_1(x,y)$ はすべて増加であるか減少であるかどちらかである．対応して右ねじれ写像とか左ねじれ写像ということにする．f が右ねじれ写像なら、f^{-1} は左ねじれ写像である．逆も成り立つ．はっきりさせるため、f は右ねじれ写像であるとしよう．

ねじれ写像 f に次の対象を結びつける．

まず ねじれ区間$[\alpha_0(f), \alpha_1(f)]$．ここで $\alpha_0(f)$ と $\alpha_1(f)$ は F を $\mathbf{R}\times\{0\}$ および $\mathbf{R}\times\{1\}$ にそれぞれ制限したときの回転数である．ねじれ区間は整数平行移動の不定性を除いて定義される．

次に ねじれ modulus$\omega_f(r)$. これは $0 \leq r \leq 1$ に対して、次で定義される.

$$\omega_f(r) = \min_{0\leq x\leq 1} \min_{0\leq y\leq 1-r} (F_1(x, y+r) - F_1(x, y), \hat{F}_1(x, y) - \hat{F}_1(x, y+r)).$$

ここで $\hat{F}_1$ は f^{-1} の持ち上げの第一座標である.

f がねじれ写像で、加えて f と f^{-1} がリプシッツ写像で、ある K に対して $\omega(r) \geq Kr$ なら、f を リプシッツねじれ写像 と呼ぶ. たとえば、$\partial F_1/\partial y > 0$ なる任意の C^1 微分同相 f はリプシッツねじれ写像である.

2. バーコフ周期軌道

$f^q z = z$ なら、z の任意の持ち上げ w に対して $F^q w = T^p w$ が成り立つ. ただし p は q の整数倍の不定性を有する. だから分数 p/q は整数分だけ不定性を有する. この分数を周期点 z の 回転数 と呼ぼう.

点 z が (p, q)型バーコフ点 と呼ばれるのは、z の持ち上げ w に対して、写像

$$\theta = (\psi, \rho) : \mathbf{Z} \to S$$

があって次が満たされるときである.

$$\begin{gathered}\theta(0) = w,\\ \psi\text{は狭義単調関数},\\ \theta(n+q) = T\theta(n),\\ \theta(n+p) = F\theta(n).\end{gathered}$$

(p, q) 型バーコフ点の軌道を (p, q)型バーコフ周期軌道 と呼ぶ.

明らかに、任意の (p, q) 型バーコフ点は回転数 p/q の周期点である. その上、このような点に対して

$$f^n z = (\phi_n, r_n), \quad n = 0, 1, ..., q-1$$

と書けば、ϕ_n はすべて異なり、円周上の $2\pi p/q$ ずつの回転による像と同じ順序で並んでいる. しかし、だからと言ってこの二つの性質だけからは z が (p, q) 型バーコフ点であるとは言えない. ことに、以下の命題 1 の主張はこの二つの性質からは出てこない.

$\beta(r)$ を f と f^{-1} の共通の連続率 (modulus of continuity) とする. β は凸関数であると仮定する.

命題 1. f をねじれ写像とする. このとき凹な単調関数 $\gamma(r)$ で以下の条件を満たすものが存在する. $\gamma(r)$ は r が正のとき正であり、ω_f と β のみに依存し、各バーコフ周期軌道に対して

$$|\phi_n - \phi_m| < r,$$

ならば

$$|r_n - r_m| < \gamma(r),$$

が成り立つ.

とくに f がリプシッツねじれ写像のとき、ある L を取って $\gamma(r)$ を Lr とできる.

<u>証明</u>. 普遍被覆面上で考える. ψ は増加関数であるとし、$m, n(m < n)$ を整数とする. よって $\psi(m) < \psi(n)$ である. $\rho(n) < \rho(m)$ と仮定し、

$$F(\psi(n), \rho(m)) = (\tilde{\psi}, \tilde{\rho})$$

と書く.

$$F(\psi(n), \rho(n)) = (\psi(n+p), \rho(n+p)) \tag{1}$$

であり、また $\rho(n) < \rho(m)$ だから、ねじれ条件より

$$\tilde{\psi} > \psi(n+p) + \omega_f(\rho(m) - \rho(n)) \tag{2}$$

を得る. 一方

$$\psi(n+p) > \psi(m+p) > \tilde{\psi} - \beta(\psi(n) - \psi(m)) \tag{3}$$

である. (1),(2),(3) 式より

$$\omega_f(\rho(m) - \rho(n)) < \beta(\psi(n) - \psi(m))$$

を得る. だから、$\gamma = \tilde{\omega}^{-1} \circ \beta$ とおける. ただし、ここで $\tilde{\omega}$ は $r > 0$ のとき

$$0 < \tilde{\omega}(r) \leq \omega_f(r)$$

を満たす狭義単調凸関数である.

$\rho(n) > \rho(m)$ の場合は f の代わりに f^{-1} を用いて同じ議論をすればよい.

リプシッツの場合はある定数 M を用いて $\beta(r) = Mr$ と取れ、$\tilde{\omega}(r) = Kr$ であるから、$\gamma(r) = MK^{-1}r$ である.

3. マザー集合 (Mather sets)

f 不変な閉集合 $E \subset A$ が次の二つの条件を満たすとき、E を Mather 集合と呼ぶ.

(i) E は各区間 $\{\phi\} \times [0, 1]$ と高々一点で交わる. すなわち、Φ が S^1 の閉集合 K 上で定義された連続関数で $[0, 1]$ に値をとるものとして、$E = \mathrm{graph}\Phi$ と書ける.

(ii) F は E の被覆上の順序を保つ.

$f|_E$ が E 上の自然な円順序を保存すること、また順序保存の同相写像を通して、円の同相写像を集合 K へ制限したものに位相共役 (topologically conjugate) であることは容易にわかる. ことに、回転数 $\rho(E)$ は整数の不定性を有する.

Mather 集合のどの閉部分集合も Mather 集合である. とくに、このような集合はどれも極小集合を含む. したがって、円同相写像の標準的なポアンカレ・ダンジョア理論より 3 種類の極小マザー集合のあることがわかる. すなわち、

$\rho(E)$ が有理数で例えば p/q に等しいとき、E は (p, q) 型のバーコフ周期軌道である.

$\rho(E)$ が無理数のとき E は円そのものであって、f_E は回転 $\rho(E)$ に共役であるか、

E はカントール集合であって、f_E は、いわゆるダンジョアの反例の一つに対する極小集合に同値である.

命題 2. 任意の Mather 集合 E に対して、関数 Φ の連続率 γ は命題 1 で述べられた性質を有する.

証明は命題 1 の証明の単なる繰り返しである．というのは、この証明に際して、軌道の周期性は重要でなく、普遍被覆面上での順序の保存だけが問題となるからである.

<u>注意</u>. バーコフの定理からマザーの定理を導くのに命題 2 は必要ない.

コンパクトな距離空間 X のすべての閉部分集合からなる空間上のハウスドルフ位相の定義を思い起こそう．$U_\varepsilon(E)$ は $E \subset X$ の開 $\varepsilon-$ 近傍とする．ハウスドルフ位相での E の近傍の基は集合達

$$V_\varepsilon(E) = \{F \subset X : F \subset U_\varepsilon(E), E \subset U_\varepsilon(F)\}$$

からなる.

命題 3. (a) ねじれ同相写像のマザー集合のすべての集合はハウスドルフ位相で閉じている.
(b) マザー集合 E の回転数 $\rho(E)$ はハウスドルフ位相で連続である.

<u>証明</u>. $\Phi_n : K_n \to [0,1]$ として、$E_n = \mathrm{graph}\Phi_n$ は f のマザー集合の列であって、ハウスドルフ位相で集合 E に収束するとする.

$$z = (\phi^0, r^0) \in E, z_n = (\phi^n, r^n) \in E_n,\ z_n \to z$$

とし、小さい数 $\varepsilon > 0$ を固定する．命題 2 より

$$\begin{gathered} E_n \cap [\phi^n - \varepsilon; \phi^n + \varepsilon] \times S^1 \subset \{(\phi, r) : \phi^n - \varepsilon \leq \phi \leq \phi^n + \varepsilon, \\ r^n - \gamma(|\, r - r^n\,|) \leq r \leq r^n + \gamma(|\, r - r^n\,|)\}, \end{gathered}$$

であり、ハウスドルフ位相での収束性によって

$$\begin{gathered} E \cap [\phi^0 - \varepsilon; \phi^0 + \varepsilon] \times S^1 \subset \{(\phi, r) : \phi^0 - \varepsilon \leq \phi \leq \phi^0 + \varepsilon, \\ r^0 - \gamma(|\, r - r^0\,|) \leq r \leq r^0 + \gamma(|\, r - r^0\,|)\}, \end{gathered}$$

が保証される．この関係から集合 E に対する条件 (i) がでる．E_n に対するこの条件と収束性からただちに条件 (ii) がでる．これで (a) が証明された.

次に、ρ を列 $\rho(E_n)$ の任意の極限点とする．例えば、$\rho(E_{n_k}) \to \rho$ とする．次のように書こう.

$$f^m(z_{n_k}) = (\phi_m^k, r_m^k), f^m(z) = (\phi_m, r_m).$$

$\rho(E) = \rho$ を示すためには、円周上の ϕ_m の順序が、ある点の $2\pi\rho$ ずつの回転の像の順序と同じであることを示せばよい．任意に固定した N に対して、うまく $k(N)$ をとれば、$k \geq k(N)$ に対しては、最初の N 個の $2\pi\rho(E_{n_k})$ ずつの回転像の順序が $2\pi\rho$ ずつの回転像の順序と同じにできる．集合 E_{n_k} に対する性質 (ii) によって、ϕ_m^k の順序は $2\pi\rho(E_{n_k})$ ずつの回転像の順序と同じである．ところが、角度 ϕ_m, $m = 0, \cdots, N-1$ はすべて値が互いに異なる．だから、十分大きな k に対して、ϕ_m^k と ϕ_m の順序は $m = 0, \cdots, N-1$ で一致する．N はいくらでも大きくとれるから、$\rho(E) = \rho$ である．よって (b) も証明された. □

この命題とハウスドルフ位相のコンパクト性より、ただちにつぎが出る．

系１．すべてのマザー集合の和は閉 $f-$ 不変集合である．

この集合を $M(f)$ と表す．この集合の性質のいくつかについて後に議論する．

系２. f がねじれ区間内の任意の有理数 p/q に対して (p,q) 型のバーコフ軌道を持てば、f はねじれ区間内の任意の無理数に対して極小マザー集合を持つ．

系２を面積保存ねじれ同相写像の場合に主張しているのがマザーの定理([1]) の内容である．だから、我々は、この定理をバーコフ周期軌道の存在の問題へ帰着させたことになる．

問題. 周期軌道は $M(f)$ 内で稠密か?

4. バーコフの定理

定理. f は開集合上で正な測度を保存するねじれ同相写像とし、p/q はねじれ区間に属するとする．このとき、f は (p,q) 型のバーコフ周期軌道を持つ．

加えて、f が C^1 微分同相写像であって、正のなめらかな密度で与えられる測度を保存するなら、同じ仮定の下で f は２個の異なる (p,q) 型のバーコフ周期軌道を持つ．この２個の軌道はマザー集合を構成する．

証明. 記法の便宜のために、円環の代わりに、その普遍被覆面上で考える． $F_1(x,0)=g_0(x)$ および $F_1(x,1)=g_1(x)$ と書く．以下のような非減少写像 $\phi:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ をとり、この写像全体の空間を考える．その写像とは

$$\phi(n+q)=\phi(n)+1,$$

および

$$g_0(\phi(n))\le\phi(n+p)\le g_1(\phi(n)). \tag{5}$$

さらにどの k に対しても、このような写像 $\phi(n)$ と $\phi(n)+k$ を同一視する．因子空間 (factor space) を $\Phi_{p,q}$ で表す．

$\Phi_{p,q}$ 上の自然なコンパクト位相は

$$\Phi_{p,q}\to\mathbf{R}^q/\mathbf{Z}\simeq\mathbf{R}^{q-1}\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

なる埋め込みから得られる．この埋め込みによって、写像 ϕ にベクトル $(\phi(0),\cdots,\phi(q-1))$ が割り当てられる．$\mathbf{R}^q$ における因子化は対角線上の整数移動

$$(x_1,\cdots,x_q)\to(x_1+n,\cdots,x_q+n),n\in\mathbf{Z}$$

で定義される．

$\Phi_{p,q}$ における同一視がこの因子化に対応することは容易にわかる．コンパクト性は (5) からでる．

$\Phi_{p,q}$ が空でないことは容易にわかる．その上、どの $x\in\mathbf{R}$ に対しても $\phi(0)=x$ なる $\phi\in\Phi_{p,q}$ がある．実際、$g_t(x)$, $0\le t\le 1$ は g_0 と g_1 を結ぶ $\mathbf{R}$ の同相写像の単調な族であるとする．$\alpha_0(f)<p/q$ かつ $\alpha_1(f)>p/q$ であるから、

$$g_0^q(x)-x<p,\quad g_1^q(x)-x>p$$

を得、よってある $t \in [0,1]$ に対して、$g_t^q(x) = x + p$ である．このとき $\phi(n) = g_t^n(x)$ で定義される ϕ は $\Phi_{p,q}$ に属する．

$x, x' \in \mathbf{R}$ かつ $g_0(x) \leq x \leq g_1(x)$ とする．ねじれ性により、区間 $I = \{x\} \times [0,1]$ の像は区間 $I' = \{x'\} \times [0,1]$ とちょうど一点、例えば $(x', h(x,x'))$、で交わる．S の底辺境界 S_0、区間 I'、および曲線 $F(I)$ によって囲まれる「三角形」を $T(x,x')$ と書こう．

$\phi \in \Phi_{p,q}$ に対して次を定義する．

$$L_{p,q}(\phi) = \sum_{n=0}^{q-1} \mu(T(\phi(n), \phi(n+p))).$$

ここで、μ は f のもとで不変かつ開集合上で正の測度の S への持ち上げである．

図 1

さらにいくつか記号が必要である．すなわち

$$\begin{aligned}
&h_1(n) = h(\phi(n-p), \phi(n)),\\
&\psi_1(n) = (\phi(n), h_1(n)),\\
&\psi_2(n) = F^{-1}\psi_1(n+p) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi(n), h_2(n)).
\end{aligned}$$

このとき

$$h_1(n) = h_2(n), \tag{6}$$

なら次が成り立つ．

$$F\psi_1(n) = \psi_1(n+p).$$

だからどの n に対しても (6) が満たされれば、写像 $\psi_1 : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ は回転数 p/q の周期軌道を定義する．実は、これは (p,q) 型のバーコフ軌道である．というのは、そうでないと、ϕ は狭義単調でなくなり、$\phi(n) = \phi(n+1)$ かつ $h_1(n) \neq h_1(n+1)$ なる n が存在することになる．$\phi(n-p) \leq \phi(n-p+1)$ であるから、ねじれ性により、$h_1(n) > h_1(n+1)$ が得られるが、そのときには再びねじれ性により、$\phi(n+p) > \phi(n+p+1)$ が得られ、ϕ が非減少でなくなる．こうして、定理の第一の主張は $\Phi_{p,q}$ のコンパクト性および次の補題から出る．

補題. 汎関数 $L_{p,q}$ が ϕ において局所的極小になっていれば、この ϕ に対して

$$h_1(n) = h_2(n),$$

がすべての n に対して成り立つ．

<u>証明</u>. ある n に対して

$$\phi(n-1) < \phi(n) < \phi(n+1) \text{ かつ } h_1(n) \neq h_2(n),$$

が成り立つ場合をまず考えよう．このとき

$$1 \geq h_1(n) > h_2(n) \geq 0, \tag{7}$$

または

$$1 \geq h_2(n) > h_1(n) \geq 0, \tag{8}$$

のどちらかが成り立つ．第一の場合を考える．

$$F(\phi(n), h_2(n)) = (\phi(n+p), h_1(n+p)),$$

であるから、(7) より

$$h_1(n+p) < 1. \tag{9}$$

$\varepsilon > 0$ として次の関数を定義しよう．

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(m) = \begin{cases} \phi(m), & \text{if } m \neq n (\mathrm{mod}\ q), \\ \phi(m) - \varepsilon, & \text{if } m = n (\mathrm{mod}\ q). \end{cases}$$

ε を十分小さくとれば、(7) と (9) によって、$\tilde{\phi}_\varepsilon \in \Phi_{p,q}$ が保証される．次のように置く．

$$\begin{aligned} I_0 &= \{\phi(n-p)\} \times [0,1], \quad I_1 = \{\phi(n)\} \times [0,1], \\ I_2 &= \{\phi(n+p)\} \times [0,1], \quad \tilde{I}_1 = \{\tilde{\phi}(n)\} \times [0,1]. \end{aligned}$$

A_1 を I_1、FI_0、$\tilde{I}_1$、および S_0 に囲まれた領域、A_2 を FI_1、I_2、$F\tilde{I}_1$、および S_0 に囲まれた領域とする．

図 2

ε が十分小さければ、$F^{-1}A_2 \subset A_1$ であるから、μ の F 不変性により

$$\mu(A_1) > \mu(F^{-1}A_2) = \mu(A_2).$$

このとき次を得る．

$$\begin{aligned} L_{p,q}(\phi) - L_{p,q}(\tilde{\phi}_\varepsilon) = & \ \mu(T(\phi(n), \phi(n+p))) + \mu(T(\phi(n-p), \phi(n))) \\ & -\mu(T(\phi(n) - \varepsilon, \phi(n+p))) - \mu(T(\phi(n-p), \phi(n) - \varepsilon)) \\ = & \ \mu(A_1) - \mu(A_2) > 0. \end{aligned}$$

これはϕが局所極小でないことを示している．不等式 (8) 式が満たされる場合も $\tilde{\phi}_\varepsilon(n)$ を $\phi(n)+\varepsilon$ で定義して同様に扱える (Fig.3 参照)．このときは $A_1 \subset F^{-1}(A_2)$ である．

もっと一般の場合が残っている．すなわち、たとえば

$$\phi(n-1) < \phi(n) = \phi(n+1) = \cdots = \phi(n+k) < \phi(n+k+1),$$

の場合である．このとき

$$1 \geq h_1(n) \geq h_1(n+1) \geq \cdots \geq h_1(n+k) \geq 0,$$

および

$$1 \geq h_2(n+k) \geq h_2(n+k-1) \geq \cdots \geq h_2(n) \geq 0,$$

であるから、

$$1 \geq h_1(n) > h_2(n) \geq 0, \tag{10}$$

または

$$1 \geq h_2(n+k) > h_1(n+k) \geq 0, \tag{11}$$

または

$$h_1(n+l) = h_2(n+l), \quad l = 0, \cdots, k,$$

である．

(10)、(11) の場合はそれぞれ (7)、(8) と同様に考えればよい．これができるのは、第一の場合に $\phi(n)$ が左にずれ、第二の場合に $\phi(n+k)$ が右にずれて ϕ の単調性が摂動のあとでも保たれるからである．これで補題の証明が終わる． □

図 3

前に述べたマザーの定理の証明 (3 節) は本節の定理の 2 番目の主張とは独立であるから、その部分の証明の概略のみを述べよう．

なめらかな場合、$L_{p,q}$ は $\mathbf{T}^q$ への埋め込みによって誘導されるなめらかな構造に関して微分可能である．補題の議論の無限小 (したがって簡単) 版によれば、$\Phi_{p,q}$ の内部にある $L_{p,q}$ のどの 臨界 点もバーコフ周期軌道を生成するはずである．

このとき空間 $\Phi_{p,q}$ 上で汎関数 $L_{p,q}$ を極小にする写像 φ を取り、(5) を満たし、またすべての n に対して条件

$$\phi(n) \leq \psi(n) \leq \phi(n+1)$$

を満たす写像 $\psi : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ 全体の空間 $\Phi^{\phi}_{p,q}$ を考える．写像 ϕ と $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}(n) = \phi(n+1)$ は $\Phi^{\phi}_{p,q}$ 上の $L_{p,q}$ の臨界点 (極小) である．

関数 $L_{p,q}$ の勾配流が $\Phi^{\phi}_{p,q}$ をそれ自身の上に写すことを示すことによって、極小でなく、したがって ϕ とも $\tilde{\phi}$ とも異なる臨界点 ψ の存在を保証できる．この写像 ψ は第二バーコフ周期軌道を決める．

滑らかさの仮定は弱めることができる．しかし不変測度が連続な密度で与えられることは議論にとって決定的に重要である．この種の議論をもっとも一般に議論するにはどうしたらよいのかわたしは知らない．

[2] でバーコフは指数の議論で回転数 p/q の第二の周期軌道を得たが、これがなぜ円順序を保存するのかは明らかでない．

5. 放物および双曲軌道

非有理回転数のどの Mather 集合も一意の $f-$ 不変確率測度 μ_E を持っている (carry)．f が C^1 微分同相なら、2 つのリャプーノフ特性指数 [3] を定義することができ、これらは μ_E の意味でほとんどいたるところ一定である．$\chi_1^E \le \chi_2^E$ をこれら指数の本質的値とする．f が滑らかな測度を保存するなら、$\chi_1^E + \chi_2^E = 0$ であり、だから非負の指数 χ^E ひとつと非正の指数 $-\chi^E$ がある．

$\chi^E > 0$ なら Mather 集合 E を双曲的と呼び、$\chi^E = 0$ なら放物的と呼ぶ。

<u>問題</u>. 双曲的 Mather 集合 E を持つ $C^1(C^2, C^\infty,$ 実解析的) 面積保存ねじれ微分同相はあるか?.

マザー集合が <u>すべて</u> 双曲的であるような区分的に解析的なねじれ微分同相写像の例は有名なスタジアム型の例も含めて Bunimovich のビリヤードから得られる [4]．しかし、この例では、マザー集合は特異点と交わっている．

命題 4. f は $C^{1+\varepsilon}$ ねじれ微分同相で、リュベーグ測度に同値な測度 μ を保存するとする．このとき f の双曲的 Mather 集合の全リュベーグ測度は 0 である．

<u>証明</u>. マザー集合には属するけれども極小マザー集合に属さない点はどれも回帰的でない．すなわち、この点は自分の ω 極限集合に属さない．ポアンカレの回帰定理により、このような点の全 μ 測度はゼロである．だから極小マザー集合を考えるだけで十分である．これらの集合は閉かつ互いに素である．だから $M(f)$ の個々のマザー集合への分割は可測である．このような集合は連続関数のグラフの一部としてどれもリュベーグ測度がゼロである．だから集合 $M(f)$ 上の μ のどのエルゴード成分も測度がゼロである．双曲マザー集合の和を $M_h(f)$ と表わそう．f はこの集合上で非ゼロのリャプーノフ指数を持つ．Pesin の理論 [3] より、非ゼロの指数を持つ集合上のエルゴード成分はどれも正の測度を持つ．だから $\mu(M_h(f)) = 0$ である． $\square$

6. 結語.

準周期軌道に関するマザーの定理は古典分野における大きな結果である．これは、周期軌道に関するポアンカレおよびバーコフの結果、ホモクリニック軌道の近くの軌道構造に関するバーコフやスメールの結果、および不変曲線の持続に関するコルモゴロフ、アーノルドおよびモーザーの結果に比肩しうる．とくにマザーの定理はなくなった不変曲線について簡潔な説明を与え、また不変曲線の消え方を示している．

このノートの主目的は、若干一般の仮定の下で初等的かつ幾何学的な証明によってマザーの結果を普及させることにある．もっと詳しく言えば、ここでの方法は無限次元空間を使用を避け、マザーの元の論文で使われた解析的言語 (形式、母関数) の代わりに幾何学的言語 (測度、曲線等) を使った．幾何学的言語を最初に使ったのは D.Rudolph であり、彼はマザーの定理を 1981 年 9 月のメリーランド大学での「ねじれ写像」セミナーで紹介した．とくに Rudolph の紹介からも判る通り、面積保存は開集合上で正の測度の保存に置き換えることができる．

もうひとつの注意: マザー集合がバーコフ周期軌道の極限として得られることは私の結果である．50 年前になぜバーコフがこの注意をしなかったのか不思議である．しかし、一つの曖昧な、しかし特徴的な注意がバーコフの論文 [5] の 254 ページにある．そこで準周期軌道は周期軌道の極限として現われるはずだと述べている．しかし残念なことにかれはこの考えを先に進めなかった．

第二の目標は、マザー集合に関連するいくつかの未解決問題を定式化することであった．本文で言及した問題以外に、この主題に関する議論を含む Amherst の Conference[6] で問題のリストを出したことを引用しておく．

この論文は著者が 1982 年 2 月にライス大学滞在中に執筆した．この機会を借りて、ライス大学数学教室およびシュルンベルジャー財団に感謝する．

校正中に加えた注意．この論文を書き上げた後で、マザーの結果と同値な定理が 2 年以前に G.Aubry によって証明されていることを M.Herman が教えてくれた．Aubry の結果は各種プレプリントで見つかる．彼の方法はマザーや私のものと違い、もっと複雑であるように見える．

参考文献

[1] J.N. Mather. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms. *Topology.* (To appear.)

[2] G.D. Birkhoff, on the periodic motions of dynamical systems. In *G. D. Birkhoff collected Mathematical Papers*, Vol. 2, pp. 333-353, Amer. Math. Soc., 1950.

[3] Ja. B. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russ. Math. Surveys* **32** (1977), 55-112.

[4] L.A. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Comm. Math. Phys.* **65** (1979), 295-312.

[5] G.D. Birkhoff. An extension of Poincaré's last geometric theorem. In *G. D. Birkhoff collected Mathematical Papers*, Vol. 2, pp. 252-266, Amer. Math. Soc., 1950.

[6] A. Katok & R. Spatzier. Problem list of special session on differential geometry and ergodic theory in Amherst, October 1981. (prepint)