谷川清隆 訳

Topology **21** (1982), 457-467

円環のねじれ同相写像における準周期軌道の存在

Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorophisms of the annulus

John N. Mather

要約. 円環上の任意の面積保存「ねじれ」同相写像 f が, 区間 $[\rho(f_0), \rho(f_1)]$ 内のすべての周波数 ω の準周期軌道を持つことを証明する. ω がこの区間にない場合に周波数 ω の準周期軌道がないことを示すことは容易である. この結果を述べるにあたって, 軌道が準周期的であるとはどういう意味かについては liberal な解釈をする. すなわち, このような軌道の閉包は円ではなくてカントール集合のこともあり得る.

0. 序.

この論文で用いる方法は, Percival が数値的に準周期軌道を見つけるのに使った方法 [3,4] に密接に関係している. Percival は自分の方法で存在定理を証明しなかった.

定理を述べるには, 円環自身よりもその普遍被覆 A で仕事する方が都合がよい. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 1\}$ とする. $T : A \to A$ を平行移動 $T(x, y) = (x + 1, y)$ とする. f は A の面積保存, 方向保存, かつ境界成分保存の同相写像であって, $fT = Tf$ を満たすとする. 加えて, $y > z$ なら $f(x, y)_1 > f(x, z)_1$ と仮定する. ここで $p = (x, y) \in A$ のとき $p_1 = x$ と約束する. これが「ねじれ条件」である.

$f_i = f_R \times i, i = 0, 1$ と置く. $B = \{(x, x') \in \mathbf{R}^2 : f_0(x) \le x' \le f_1(x)\}$ とする. ねじれ条件より, 各 $(x, x') \in B$ に対して唯一の $y = g(x, x') \in [0, 1]$ および $y' = g'(x, x') \in [0, 1]$ があって, $f(x, y) = (x', y')$ を満たす. 関数 g および g' は B 上の連続関数である.

任意の同相写像 $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で $h(x + 1) = h(x) + 1$ を満たすものに対して

$$\rho(h) = \lim_{n\to\infty} \frac{h^n(x)}{n}$$

と置く. ポアンカレの有名な定理によると, この極限は存在し, x に無関係である.

以下がわが主結果である.

定理. $\rho(f_0) \le \omega \le \rho(f_1)$ とする. このとき, 弱順序保存写像 $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ があって, $\phi(t + 1) = \phi(t) + 1$ かつ

$$f(\phi(t), \eta(t)) = (\phi(t + \omega), \eta(t + \omega)), \tag{1}$$

を満たす. ただし, $\eta(t) = g(\phi(t), \phi(t + \omega))$ である.

写像 ϕ は必ずしも連続でない. しかし次の性質を持つことを以下で示す.

補足 1. t が ϕ の連続点であれば, $t + \omega$ も $t - \omega$ も連続点である.

この定理の意味は ω が有理数か無理数かによって異なる. ω が有理数, たとえば $\omega = p/q$ で既約なら, 定理の意味するところは, $f^q(x,y) = (x+p, y)$ なる点の存在である. というのは, ϕ が定理の前提を満たし, ある $t \in \mathbf{R}$ に対して $(x,y) = (\phi(t), \eta(t))$ なら $f^q(x,y) = (x+p,y)$ だからである. これは有名なバーコフの定理 [1] の帰結である. ω が無理数の場合, 次を得る.

補足 2. $\omega \notin \mathbf{Q}$ なら, ϕ は任意の区間上で一定でない.

ω が無理数のとき, M_ϕ を, ϕ の連続点 t から作った集合 $(\phi(t), \eta(t))$ の閉包とする. ϕ は弱順序保存であるから, t んｐ不連続点の集合は高々可算個である. このとき, M_ϕ は, 下からの極限 $(\phi(t-), \eta(t-))$ の和および上からの極限 $(\phi(t+), \eta(t+))$ の和と同じである. $\Sigma_\phi = M_\phi/T$ と置く.

ϕ が連続の場合, M_ϕ が $\mathbf{R}$ に同相であること, および Σ_ϕ が円に同相であることは明らかである. その上, $\bar{f}$ を f によって誘導される円環 A/T 上の同相写像とすると, $\bar{f}/\Sigma_\phi$ は回転数を $\omega(\mathrm{mod}\ 1)$ とする回転に共役である.

ϕ が連続でない場合, 補足 1 および 2 より, Σ_ϕ は $\bar{f}$ の下で不変なカントール集合である. 定理の陳述および補足 1 および 2 において ϕ に課した条件から簡単にチェックできるように, $\tilde{f}|\Sigma_\phi$ は回転数 $\equiv \omega(\mathrm{mod}\ 1)$ なる円の回転に位相共役である. 事実, $(\phi(t-), \eta(t-))$ を $(\phi(t+), \eta(t+))$ と同一視し, 次に Tp と p を同一視すると円が得られ, その上に f から誘導される同相写像は回転に共役である. これらの同一視は $\tilde{f}|\Sigma_\phi$ の位相力学によって純粋に記述可能である. Σ_ϕ の点は $\tilde{f}$ の未来へおよび過去への繰り返し作用のもとで互いに近づくものを同一視する (?). 知られているし, またむずかしくない議論によって, $\tilde{f}|\Sigma_\phi$ がよく知られた Denjoy の極小系に位相共役であることが示せる. すなわち, $\tilde{f}|\Sigma_\phi$ は極小で, Σ_ϕ は円に埋め込むことができ, $\tilde{f}|\Sigma_\phi$ は円の方向保存同相写像へと拡張される.

ϕ が弱順序保存である事実より, $t \to \phi(t) - t$ が有界変動であることが出る. ゆえに, $\phi(t) - t$ のフーリエ展開 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi \mathrm{int})$ はいたるところ pointwise 収束し, t が ϕ の連続点である限り和は $\eta(t)$ に収束する [5].

$\eta(t)$ の定義からすると, そのフーリエ展開, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(2\pi \mathrm{int})$ はいたるところチェザロ (Cesaro)summable であり, t が ϕ の連続点である限り和は $\eta(t)$ に収束する. その上, f が C^1 で $\dfrac{\partial f(x,y)_1}{\partial y} > 0$ なら, $\eta(t)$ は有界変動であり, そのフーリエ級数は pointwise 収束し, t が ϕ の連続点である限り和は $\eta(t)$ に収束する.

ϕ の連続点 t_0 を考え,

$$x_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi \mathrm{i} n(t_0 + k\omega))$$
$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(2\pi \mathrm{i} n(t_0 + k\omega))$$

を定義する. ここで, 第二の和はチェザロ summability の意味であると理解する. 補足 1 より, $t_0 + k\omega$ は ϕ の連続点である. ゆえに

$$x_k = \phi(t_0 + k\omega), \quad y_k = \eta(t_0 + k\omega),$$

であり, したがって $f(x_k, y_k) = (x_{k+1}, y_{k+1})$ である. こうして周波数 ω の準周期軌道が見つかった.

1. 証明のアウトライン.

Y_ω は弱順序保存写像 $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ のうち次の 3 つの条件

$$\begin{aligned}&\phi(t+1) = \phi(t) + 1,\\ &f_0(\phi(t)) \leq \phi(t+\omega) \leq f_1(\phi(t)),\\ &\phi \text{は左連続, つまり} \phi(t-) = \phi(t)\end{aligned}$$

を満たすものすべての集合とする. X_ω は $\phi \in Y_\omega$ のうち,

$$\begin{aligned}\phi(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad t > 0\\ \phi(t) \leq 0 \quad \text{for} \quad t < 0\end{aligned}$$

を満たすものすべての集合とする.

f が面積保存であることから, $g(x,x')dx - g'(x,x')dx'$ は B 上の閉 1-形式である. ゆえに C^1 関数 $h(x,x')$ が B 上に存在して,

$$dh(x,x') = g(x,x')dx - g'(x,x')dx'. \tag{1.1}$$

を満たす. $\phi \in Y_\omega$ に対して

$$F_\omega(\phi) = \int_{t=0}^{1} h(\phi(t), \phi(t+\omega))dt \tag{1.2}$$

を定義する.

2 節では, $X_\omega \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は $\rho(f_0) \leq \omega \leq \rho(f_1)$ であることを示す.

4 節では, Y_ω 上に計量を定義する. 5 節では, この計量に関して X_ω がコンパクトであること, 6 節では, F_ω が連続であることを示す. ゆえに F_ω を極大にする $\phi \in X_\omega$ がある.

$a \in \mathbf{R}$ に対して, $T_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を平行移動 $T_a(x) = x + a$ とする. 3 節では, 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $F_\omega(\phi T_a) = F_\omega(\phi)$ であることを示す. $\phi \in Y_\omega$ なら, $\phi T_a \in X_\omega$ である. ただし $a = \sup \phi^{-1}(-\infty, 0)$ である. ゆえに, F_ω が X_ω 上 ϕ で極大を取るなら, Y_ω 上でも ϕ で極大を取る.

$\phi \in Y_\omega$ および $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$V(\phi, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[h(\bar{x}, x) + h(x, x')\right]. \tag{1.3}$$

を定義する. 評価する場所は

$$\bar{x} = \phi(t-\omega), \quad x = \phi(t), x' = \phi(t+\omega) \tag{1.4}$$

である.

7 節-10 節では, F_ω が Y_ω 上 ϕ において極大を取るなら, 次のような「オイラー・ラグランジュ方程式」

$$V(\phi, t) = 0 \quad \text{for all} \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1.5}$$

が得られることを示す.

これは本質的には Percival[3] による「オイラー・ラグランジュ方程式」の特殊な場合である. しかしながら, Percival は証明を与えなかった. 実は, ϕ が C^1 級であって, 微分がゼロにな

らず, すべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $f_0(\phi(t)) < \phi(t+\omega) < f_1(\phi(t))$ を満たすなら, 通常の議論が当てはまる. しかし, わが存在定理を証明するためには実 1 変数初等関数論でよく知られた型の (長たらしい) 論拠を巻き込むような通常の議論を拡張する必要がある.

式 (1) は「オイラー・ラグランジュ方程式」から簡単に出る. h の定義 (1.1) および $V(\phi,t)$ の定義 (1.3) より,

$$V(\phi,t) = -g'(\bar{x},x) + g(x,x'). \tag{1.6}$$

を得る. ここで $\bar{x}, x, x'$ は (1.4) 式で与えられる. この式で t の代わりに $t+\omega$ を代入し, 「オイラー・ラグランジュ方程式」(1.5) を使えば

$$g(\phi(t+\omega),\phi(t+2\omega)) = g'(\phi(t),\phi(t+\omega)).$$

が得られる. η の定義からすると, この結果から

$$\eta(t+\omega) = g'(\phi(t),\phi(t+\omega)).$$

が出る. ゆえに

$$\begin{aligned} f(\phi(t),\eta(t)) = &\ f(\phi(t), g(\phi(t),\phi(t+\omega))) \\ = &\ (\phi(t+\omega), g'(\phi(t,\phi(t+\omega))) \\ = &\ (\phi(t+\omega),\eta(t+\omega)) \end{aligned}$$

である. ここで, 第二の等式は g と g' の定義からの帰結である.

こうして, F_ω が Y_ω 上で極大を取ること, また. F_ω が ϕ において極大を取る限り「オイラー・ラグランジュ方程式」を満たすことを示してしまうと, 序の定理が得られる.

補足は 11, 12 節で証明する.

2. $X_\omega \neq \emptyset$ のための必要十分条件は $\rho(f_0) \le \omega \le \rho(f_1)$

<u>証明</u>. 'only if'. $\phi \in Y_\omega$ とする. $n > 0$ なら $f_0^n(\phi(t)) \le \phi(t+n\omega) \le f_1^n(\phi(t))$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_0^n(\phi(t))}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t+n\omega)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{f_1^n(\phi(t))}{n}$$

または

$$\rho)f_0 \le \omega \le \rho(f_1) \tag{2.1}$$

である. だから $Y_\omega \neq \emptyset$ なら (2.1) が成り立つ.

'If'. $0 \le s \le 1$ に対して, $g_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$g_s(t) = sf_1(t) + (1-s)f_0(t)$$

で定義する. 明らかに, g_s は $\mathbf{R}$ の同相写像であって $g_s(t+1) = g_s(t)+1$ が成り立つ. 量 $\rho(g_s)$ は s の非減少関数である. だから s の値 s_0 が少なくともひとつ存在して $\rho(g_s(0)) = \omega$ となる. なぜなら

$$\rho(g_0) = \rho(f_0) \le \omega \le \rho_1(f_1) = \rho(g_1).$$

だからである. $g = g_{s(0)}$ と置き, $\bar{g} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を誘導された同相写像とする.

$\phi \in X_\omega$ を ω が有理数であるか無理数であるかに応じて 2 つの異なったやり方で構成する. まず, ω が有理数であるとする. たとえば $\omega = p/q,\ p, q \in \mathbf{Z}$ で p, q は互いに素であるとする. ポアンカレの定理によると, $\bar{g}$ の周期点の集合 P は空でない. $\bar{P} = \pi^{-1}P$ と置く. ただし, $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は射影である. $\phi(0)$ を $\bar{P}$ の最大の非負の要素として定義する. $t \in \mathbf{R}$ が与えられたとき, t を次のように表現することができる.

$$t = n\left(\frac{p}{q}\right) + m + r$$

ここで, $n, m \in \mathbf{Z}$ であり, $-\dfrac{1}{q} < r \leq 0$ である. 次を定義する.

$$\phi(t) = g^n(\phi(0)) + m.$$

$\phi(0) \in \bar{P}$ であるから, $g^p(\phi(0)) = \phi(0) + p$ である. したがって, ϕ は well-defined である.

$\rho(g) = \dfrac{p}{q}$ であることを使うと, ϕ が弱順序保存であることがわかる. というのは, $n\left(\dfrac{p}{q}\right) + m > n'\left(\dfrac{p}{q}\right) + m'$ とし, 一方 $g^n(\phi(0)) + m \leq g^n(\phi(0))v + m'$ であるとする. すると, $g^{n-m}(\phi(0)) \leq m' - m$ である. $n - n' > 0$ の場合,

$$\rho(g) \leq \frac{m' - m}{n - n'} < \frac{p}{q}$$

を得る. $n - n' < 0$ の場合,

$$\rho(g) \geq \frac{m' - m}{n - n'} > \frac{p}{q}$$

を得る. だからどちらの場合も矛盾に至った.

定義により, $\phi(0) \leq 0$ であるから, 弱順序保存性より, $t \leq 0$ に対して $\phi(t) \leq 0$ である. $t > 0$ に対しては $\phi(t) \in \bar{P}$ および $\phi(t) \neq \phi(0)$ である. ϕ は弱順序保存であり, $\phi(0)$ は $\bar{P}$ の非正の最大要素であるから, $\phi(t) > 0$ を得る.

ϕ の定義よりただちに, $g(\phi(t)) = \phi(t + \dfrac{p}{q})$ が出る. ゆえに, $f_0(\phi(t)) \leq \phi(t + \dfrac{p}{q}) \leq f_1(\phi(t))$ である. ϕ は左連続であると定義した. だから $\phi in X_{p,q}$ である.

ω が無理数のとき, 弱円順序保存連続写像 $h : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ で, $theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対して $h\bar{q}(\theta) = h(\theta) + \omega \pmod 1$ を満たすものが存在する. ただし $\bar{g} = \mathbf{R}/\mathbf{bfZ} \to \mathbf{RZ}$ は g に誘導される写像である. $\bar{h} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を h の持ち上げ, つまり, $\pi\bar{h} = h\pi$ を満たす連続写像とする. h および $\bar{h}$ にある選択法がある. 両方併せると, $\bar{h}$ に任意の定数を加えることができる. $\bar{h}(0) = 0$ と指定することにより, $\bar{h}$ を一意にできる. h は弱円順序保存であるから, $\bar{h}$ は弱順序保存である. $\phi(t) = \inf \tilde{h}^{-1}(t)$ と置く. ϕ は弱順序保存であることは明白である. h が写像度 1 であることははっきりしている. だから $\bar{h}(t+1) = \bar{h}(t) + 1$ および $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$ である. 定義により, $\phi(0) \leq 0$ であり, 0 は $\phi(t) \leq 0$ であるような最大の数 t である. だから $t \leq 0$ のとき $\phi(t) \leq 0$ であり, $t > 0$ のとき $\phi(t) \geq 0$ である. $\bar{h}(g(t)) = \bar{h}(t) + \omega$ であるから, ϕ の定義より $g(\phi(t)) = \phi(t + \omega)$ が得られる. すると g の定義から

$$f_0(\phi(t)) \leq g(\phi(t)) = \phi(t + \omega) \leq f_1(\phi(t)).$$

が得られる. ϕ の定義より, これは左連続である. ゆえに $\phi \in X_\omega$ である. □

3. F_ω の平行移動不変性

g および g' の定義より,

$$\begin{aligned} g(x+1, x'+1) &= g(x', x) \\ g'(x+1, x'+1) &= g'(x', x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

が成り立つことははっきりしている. ゆえに $h(x+1, x+1) - h(x, x')$ は定数 C である. 次を得る.

$$C = \int_\gamma g(x, x')dx - g(x, x')dx',$$

ここで γ は B 内の道であって, 任意の点 (x_0, x_0') と $(x_0+1, x_0'+1)$ を結ぶ. ところが $\gamma(t) = (t, f_0(t))$ なる形の道に沿っては積分記号下の 1-形式は恒等的にゼロである. ゆえに $C = 0$ である. つまり

$$h(x+1, x'+1) = h(x, x'). \tag{3.2}$$

この公式, F_ω の定義, および $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$ より, F_ω が平行移動不変であること, つまり

$$F_\omega(\phi T_a) = F_\omega(\phi),$$

であることがわかる.

4. Y_ω 上の計量

任意の弱順序保存写像 $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$\text{graph}\phi = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \phi(x-) \le y \le \phi(x+)\}$$

を定義する. $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が第二の弱順序保存写像のとき,

$$d(\phi, \psi) = \max\{\sup_\xi \inf_\eta |\xi - \eta|,\ \sup_\eta \inf_\xi |\xi - \eta|\} \tag{4.1}$$

と置く. ここで ξ は graph ϕ の上を動き, η は graph ψ の上を動く. また $|\cdot|$ は $\mathbf{R}^2$ の上のユークリッドノルムを表す. これは無限大ということもあり得る.

$\phi \in X_\omega$ のとき, $(0,0), (1,1) \in$ graph ϕ および $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$ である. したがって, $\phi, \psi \in X_\omega$ に対して, $d(\phi, \psi)$ は (4.1) で与えられる. ただし, ξ の動く範囲は $[0,1]^2 \cap$ graph ϕ, η の動く範囲は $[0,1]^2 \cap$ graph ϕ である. このとき, $\phi, \psi \in X_\omega$ に対して $d(\phi, \psi) \le 1$ を得る.

明らかに, 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $d(\phi T_a, \phi) \le a$ である. 任意の $\phi \in Y_\omega$ に対して $a \in \mathbf{R}$ が存在して $\phi T_a \in X_\omega$ が成り立つから, d に対する三角不等式より, $\phi, \psi \in Y_\omega$ に対して $d(\phi, \psi) < \infty$ を得る. d が Y_ω 上の計量であることは示せる. 観察して欲しいのは, Y_ω のどの要素も左連続であるから, $d(\phi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \phi = \psi$ なることである.

5. 計量 d に関し X_ω はコンパクト

証明. S を $[0,1]^2$ の閉部分集合の集合であるとし, d' をハウスドルフ計量とする. (S, d') はコンパクトである ([2], 3.16, 問題 3). 写像 $\phi \to$ graph $\phi \cap [0,1]^2$ は isometrically に X_ω を S んp閉部分集合として埋め込む. だから X_ω はコンパクトである.

6. $F : Y_\omega \to \mathbf{R}$ は連続

証明. 次のように置く.

$$M = \sup_{(x,x')\in B} \max\{1,\ |g(x,x')|,\ g'(x,x')\}$$

(3.1) より, $M<\infty$ である. F_ω の定義および平均値の定理より,

$$|F_\omega(\phi)-F_\omega(\psi)\leq M\int_{t=0}^{1}\left(|\phi(t)-\psi(t)|+|\phi(t+\omega)-\psi(t+\omega)|\right)dt$$

が成り立つ. $\partial h/\partial x = g$ および $\partial h/\partial x' = -g'$ だからである.

$1\geq\epsilon>0$ と置く. $\delta=\epsilon^2/1000M^2$ とする. $d(\phi,\psi)<\delta$ と仮定する. $|F_\omega(\phi)-F_\omega(\psi)|<\epsilon$ を示そう.

$d(\phi,\psi)<\delta<10^{-3}$, 周期性 $\phi(t+1)=\phi(t)+1$, $\psi(t+1)=\psi(t)+1$, および ϕ と ψ が弱増大であることより, すべての $t\in\mathbf{R}$ に対して, $|\phi(t)-\psi(t)|<\dfrac{1001}{1000}<2$ であることは容易に示せる.

$a\in\mathbf{R}$ とする. π_a は $t\in[a,a+1)$ のうち $|\phi(t)-\psi(t)|\geq\dfrac{\epsilon}{5M}$ を満たすものとする. 仮定 $d(\phi,\psi)<\delta$ より, $\psi(t)\geq\phi(t)+\epsilon/5M$ の場合

$$\phi(t+\delta)\geq\phi(t)+\frac{199\varepsilon}{1000M} \tag{6.2}$$

を得る. また $\psi(t)\leq\phi(t)$ ー$\epsilon/5M$ の場合

$$\phi(t-\delta)\leq\phi(t)-\frac{199\varepsilon}{1000M} \tag{6.3}$$

を得る.

π_a'(または π_a'') は $t\in[a,a+1)$ のうち (6.2)(または (6.3)) を満たすものとする. すると

$$\pi_a\subset\pi_a'\subset\pi_a''$$

任意の点 $t\in\pi_a'$ において, 区間 $[t,t+\delta]$ にわたる ϕ の変動は $\geq\dfrac{199\epsilon}{1000M}$ である. $(a,a+1)$ 上での ϕ の全変動 ≤ 1 であるから, π_a' は長さ $\delta=\epsilon^2/100M$ の高々 $\left[\dfrac{1000M}{199\epsilon}\right]+1\leq 7\dfrac{M}{\epsilon}$ 個の区間で被覆される. ゆえに π_a' の測度 $\mu(\pi_a')$ は高々 $7M\delta/\epsilon<\epsilon/100M$ である. 同様に, $\mu(\pi_a'')\leq\epsilon/100M$ である. ゆえに

$$\mu(\pi_a)\leq\mu(\pi_a')+\mu(\pi_a'')\leq\varepsilon/50M.$$

すべての $t\in\mathbf{R}$ に対して $|\phi(t)-\psi(t)|\leq 2$ であり, $t\in(0,1)-\pi_0$ および $t\in(\omega,\omega+1)-\pi_\omega$ に対して $|\phi(t)-\psi(t)|\leq\epsilon/5M$ であるから, (6.1) より,

$$\begin{aligned}|F_\omega(\phi)-F_\omega(\psi)\leq\ & M\left(2\mu(\pi_0)+2\mu(\pi_\omega)+\frac{2\omega}{5M}\right)\\ \leq\ & M\left(\frac{4\varepsilon}{50M}+\frac{2\varepsilon}{5M}\right)<\varepsilon.\end{aligned}$$

を得る.

系. F_ω は Y_ω 上で極大を取る. 場所は X_ω に属する点においてである.

7. F_ω の変分 (variation) の計算

補題. $a \le 0 \le b$ および $a < b$ とする. Y_ω の要素 ϕ_s が $a \le s \le b$ に対して与えられ, $\phi_s(t)$ は各固定した t について s の C^2 関数であり, $\dfrac{\partial \phi_s(t)}{\partial s}, \dfrac{\partial^2 \phi_s(t)}{\partial s^2}$ は $a \le s \le b, t \in \mathbf{R}$ に対して一様有界かつ可測であるとする. このとき

$$\frac{d}{dt}F_\omega(\phi_s)|_{s=0} = \int_{t=0}^{1} V(\phi,t)\dot{\phi}(t) \tag{7.1}$$

である. ただし

$$\dot{\phi}_s(t) = \frac{\partial \phi_s(t)}{\partial s}, \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0, \quad \phi = \phi_0$$

<u>証明</u>. F_ω の定義および $\phi_s(t)$ が各固定した t について s の C^2 関数であるという仮定から

$$\begin{aligned}\frac{F_\omega(\phi_{\Delta s}) - F_\omega(\phi)}{\Delta s} = \quad & \int_{t=0}^{1}\int_{u=0}^{1}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\phi_{u\Delta s}(t), \phi_{u\Delta s}(t+\omega))\dot{\phi}_{u\Delta s}(t)\right. \\ & \left. + \frac{\partial h}{\partial x'}(\phi_{u\Delta s}(t), \phi_{u\Delta s}(t+\omega))\dot{\phi}_{u\Delta s}(t)\right] dudt.\end{aligned}$$

を得る. $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial h}{\partial x'}$ は B 上で一様連続であり, $\dfrac{\partial \phi_s}{\partial s}, \dfrac{\partial^2 \phi_s}{\partial s^2}$ は一様有界であるから, 被積分関数は $\Delta s \to 0$ のとき一様収束する. $\Delta s = 0$ の極限へ行けば,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)|_{s=0} = \quad & \int_{t=0}^{1}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\phi(t), \phi(t+\omega))\dot{\phi}(t) + \frac{\partial h}{\partial x'}(\phi(t), \phi(t+\omega))\dot{\phi}(t+\omega)\right] dt \\ = \quad & \int_{t=0}^{1}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\phi(t), \phi(t+\omega)) + \frac{\partial h}{\partial x'}(\phi(t-\omega), \phi(t))\right]\dot{\phi}(t)dt \\ = \quad & \int_{t=0}^{1} V(\phi,t)\dot{\phi}(t)dt.\end{aligned}$$

を得る. □

8. 1-パラメータ族

この節では $t_0 \in \mathbf{R}$, $\phi \in Y_\omega$ を固定し, 3 つの 1-パラメータ族 ϕ_s, ψ_s, ξ_s を構成しよう. 構成法は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上で $[0,1]$ 内に値を持つ C^∞ 関数 ρ の選び方に依存する (?). $\pi(t_0)$ の近傍では ρ が恒等的に 1 であると仮定する. ここで $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は射影である.

$u_s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は微分同相写像の一意の族であって, $s \in \mathbf{R}$ に対して定義され, ...

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)|_{s=0} = \quad \int_{t=0}^{1} V(\phi,t)\rho\pi\phi(t)dt. \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}\psi_s(t) = \quad & u_s\phi(t), \quad \text{if} \qquad n \in \mathbf{Z}\text{ があって}, \quad t_- + n \le t < t_1 + n \\ = \quad & \phi(t), \qquad \text{otherwise}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_s(t) = \quad & \phi(t), \qquad \text{if} \qquad n \in \mathbf{Z}\text{ があって}, \quad t_- + n \le t < t_1 + n \\ = \quad & u_s\phi(t), \quad \text{otherwise}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)|_{s=0} = \quad \int_{t_0}^{t_1} V(\phi,t)\rho\pi\phi(t)dt. \tag{8.2}$$

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\xi_s)|_{s=0} = \int_{t_1-1}^{t_0} V(\phi,t)\rho\pi\phi(t)dt. \tag{8.3}$$

9. 極大において満たされるはずのない条件

$$\phi(t)=f_0\phi(t-\omega) \quad \text{および} \quad \phi(t+\omega)>f_0\phi(t), \tag{9.1}$$

または

$$\phi(t)<f_1\phi(t-\omega) \quad \text{および} \quad \phi(t+\omega)=f_1\phi(t), \tag{9.2}$$

または

$$\phi(t)>f_0\phi(t-\omega) \quad \text{および} \quad \phi(t+\omega)=f_0\phi(t), \tag{9.3}$$

または

$$\phi(t)=f_1\phi(t-\omega) \quad \text{および} \quad \phi(t+\omega)<f_1\phi(t), \tag{9.4}$$

補題. (9.1) または (9.2) が満たされるなら, $V(\phi,t)>0$ である. (9.3) または (9.4) が満たされるなら, $V(\phi,t)<0$ である.

証明. g と g' の定義より,

$$x'=f_0(x)\Leftrightarrow g(x,x')=0\Leftrightarrow g'(x,x')=0$$
$$x'=f_1(x)\Leftrightarrow g(x,x')=1\Leftrightarrow g'(x,x')=1$$

であることがわかる. (1.6), この同値性および $0\le g(x,x')\le 1$, $0\le g'(x,x')\le 1$ より, 補題の結論がただちにしたがう. □

$t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$ とする. ρ が $\pi\phi(t_0)$ のまわりの十分小さな区間内に台を持つとして, 十分小さい $s\ge 0$ に対して (または十分小さな絶対値の $s\le 0$ に対して)$\phi_s\in Y_\omega$ であり, また (8.1) および上の補題より, (9.1) または (9.2)(または (9.3) または (9.4)) が満たされれば, $\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)|_{s=0}>0$ (または <0) である. ゆえに F は ϕ において極大にならない.

$t_0\ne\phi^{-1}\phi(t_0)$ なら, $\phi^{-1}\phi(t_0)$ は区間である. $\alpha,\beta,(\alpha<\beta)$ を端点とする. $t=t_0$ において (9.1) または (9.2) が満たされるなら, すべての $t\in[t_0,\beta)$ においても満たされる. その上, $V(\phi,t)$ は (α,β) において t の増加関数である. それは (1.6) および $g(x,x')$ が x' の増加関数であること, $g'(\bar{x},x')$ が $\bar{x}$ の減少関数であることによる. 簡単にわかるように, ρ が $\pi\phi(t_0)$ の十分小さな近傍内に台を持てば, 十分小さな $s\ge 0$ に対して $\psi_s\in Y_\omega$ である. また (8.2) および上の補題より, $\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)|_{s=0}>0$ である. ゆえに F_ω は $\phi=\psi_0$ において極大にならない.

(9.3) または (9.4) が $t=t_0$ において満たされるなら, 同様な論拠により, ρ が $\pi\phi(t_0)$ の十分小さな近傍内に台を持てば, 十分小さな絶対値の $s\le 0$ に対して $\xi_s\in Y_\omega$ であり, $\frac{d}{ds}F_\omega(\xi_s)|_{s=0}<0$ である. ゆえに F_ω は $\phi=\xi_0$ において極大にならない. Box

10. オイラー・ラグランジュ方程式の証明

この節では, F_ω が ϕ において極大になると仮定して (1.5) を証明する. $t-\omega,t$ および $t+\omega$ が ϕ の連続点である場合に (1.5) を証明すれば十分である. なぜなら, 高々可算個の $t\in\mathbf{R}$ を除いてこれが成り立ち, また $V(\phi,t)$ は左連続だからである.

9 節より, 条件 (9.1-9.4) のどれひとつとして満たされない ($t-\omega, t$ および $t+\omega$ が ϕ の連続点であるとき). つまり, $\phi(t)=f_0\phi(t-\omega) \Leftrightarrow \phi(t+\omega)=f_0\phi(t)$ および $\phi(t)=f_1\phi(t-\omega) \Leftrightarrow \phi(t+\omega)=f_1\phi(t)$ である. これらのうちどちらかでも成り立てば, 9 節の補題の証明に使った論拠より, $V(\phi,t)=0$ である.

ゆえに, $f_0\phi(t_0-\omega)<\phi(t_0)<f_1\phi(t_0-\omega)$ および $f_0\phi(t_0)<\phi(t_0+\omega)<f_1\phi(t_0)$ を満たし, $t_0-\omega, t_0$ および $t_0+\omega$ が ϕ の連続点であるような点 $t_0 \in \mathbf{R}$ を考えれば十分である.

$t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$ とする. すると, ρ が $\pi\phi(t_0)$ の十分小さな近傍に台を持てば, 十分小さな s に対して $\phi_s \in Y_\omega$ であり, (8.1) が成り立つ. F が $\phi=\phi_0$ において極大になるという前提より, $\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)|_{s=0}=0$ である. $V(\phi,t)$ は $t=t_0$ において連続であるから ($t-\omega, t$ および $t+\omega$ は $t=t_0$ において連続であるという前提より), $\phi(t)$ は t_0 において連続であり, また $t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$ であるから, われわれの考えている型のすべての ρ に対して

$$\int_{t=0}^{1} V(\phi,t)\rho\pi\phi(t)dt=0.$$

であることより, $V(\phi,t_0)=0$ が出る.

$t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$ なら $\phi^{-1}\phi(t_0)$ は区間である. α と $\beta(\alpha<\beta)$ をその端点とする. すると, $V(\phi,t)$ は (α,β) 内で t の増加関数である. これは (1.6), $g(x,x')$ が x の増加関数であること, $g'(\bar{x},x')$ が $\bar{x}$ の減少関数であることによる. 簡単にわかるように, ρ が $\pi\phi(t_0)$ の十分小さな近傍内に台を持てば, 十分小さな $s\geq 0$ に対して $\psi_s \in Y_\omega$ であり, 十分小さな $s\leq 0$ に対して $\xi_s \in Y_\omega$ である. ゆえに (8.2) と (8.3) が成り立つ. F_ω が $\phi=\psi_0=\xi_0$ において極大になるという仮定より

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)|_{s=0}\leq 0$$
$$\frac{d}{ds}F_\omega(\xi_s)|_{s=0}\geq 0$$

だしたがう. $V(\phi,t)$ が (α,β) 内で増加することから, (8.2) より, $V(\phi,t)\leq 0$ が出, (8.3) より $V(\phi,t)\geq 0$ が出る. ゆえに $V(\phi,t_0)=0$ である. □

これで, 序に述べた定理の証明が完結した.

11. 補足 1 の証明

(1.6) および $g(x,x')$ が x' の増加関数であること, および $g(\bar{x},x)$ が $\bar{x}$ の減少関数であることから, ϕ が t で連続なら, $V(\phi,t+)\geq V(\phi,t-)$ であることが言える. また等号が成り立つための必要十分条件は ϕ が $t-\omega$ および $t+\omega$ においても連続なることである. (1) はオイラー・ラグランジュ方程式 $V(\phi,t)=0$ に等価であるから, 等式が成り立ち, ϕ は $t-\omega$ においても $t+\omega$ においても連続である. □

12. 補足 2 の証明

すでに見たように, ϕ が区間 (α,β) で定数なら, $V(\phi,t)$ はこの区間内で増加である. その上, それを証明した議論 (9 節) を使えば, $V(\phi,t)$ が定数であるための必要十分条件が ϕ が $(\alpha-\omega,\beta-\omega)$ 上および $(\alpha+\omega,\beta+\omega)$ 上で定数であることを示すことができる. この議論を繰り返し, $\phi(t+1)=\phi(t)+1$ であることを使えば, 任意の $n,m\in\mathbf{Z}$ に対して区間 $(\alpha+n\omega+m,\beta+n\omega+m)$ 上で ϕ が定数であることが得られる. $\omega\notin\mathbf{Q}$ であるから, これは ϕ が $\mathbf{R}$ 上で定数であることを意味し, $\phi(t+1)=\phi(t)+1$ に矛盾する.

ゆえに ϕ はどの区間においても定数ではない. □

参考文献

[1] G.D. Birkhoff, Proof of Poincaré's geometric thorem, *Trans. AMS* **14**, 14-22(1913). Reprinted in *Collected Works*, Vol.1,AMS, New York, 1950, pp.673-681.

[2] J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic press, New York, 1960.

[3] J.C. Percival, Variational principles for invariant tori and cantori, in Symp. on Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interactions, (eds. M. Month and J.C. Herrara), No.55, pp.320- , American Institute of Physics, Conf. Proc.(1980).

[4] J.C. Percival, *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.* **12**, L57(1979)

[5] E.C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*, Clarendon Press: Oxford(1932).