谷川清隆 訳

Ergod. Th. & Dynam. Sys. **4** (1984), 301-309

不変円の非存在
Non-existence of invariant circles

John N. Mather

要約. 差分方程式

$$\Delta^2 x_n = \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x_n)$$

にともなう力学系は数人の著者によって数値的に調べられてきた. 数値的証拠をもとにした彼らの結論では, 数 $k_0 \approx 0.97$ が存在して, $|k| \le k_0$ ならホモトピー非自明な不変円が存在し, $|k| > k_0$ なら存在しない. この小論文では, $|k| > \frac{4}{3}$ なら不変円が存在しないことの簡単かつ厳密な証明を与える.

1. 序.

写像 $\mathbf{Z} \to \mathbf{R} : n \mapsto x_n$ の空間を考える. われわれが興味を持つのは, 方程式 $\Delta^2 x_n = (k/2\pi)\sin(2\pi x_n)$ を満たす写像である. ここで $\Delta^2 x_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$ である. 以下はこの差分方程式の解を力学系の軌跡として表す標準的方法である. $y_n = x_n - x_{n-1}$ と置く. 差分方程式の解に対して次を得る.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n &= (k/2\pi)\sin(2\pi x_n). \end{aligned}$$

これは次のようにも書ける.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + (k/2\pi)\sin(2\pi x_n) \\ y_{n+1} &= y_n + (k/2\pi)\sin(2\pi x_n). \end{aligned}$$

これから調べたい問題は, 上の方程式が無限円筒の写像を定義していると考えるとたいへん簡単に設定できる. (x, y) を無限円筒 $T^1 \times \mathbf{R} = (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ の座標とし, x は mod 1 で定義されるとする.

$$f_k : T^1 \times \mathbf{R} \to T^1 \times \mathbf{R}$$

は $f_k(x, y) = (x', y')$ で定義される写像とする. ただし,

$$\begin{aligned} x' &= x + y + (k/2\pi)\sin(2\pi x) \\ y' &= y + (k/2\pi)\sin(2\pi x). \end{aligned}$$

<u>不変円</u> とは, 部分集合 $X \subset T^1 \times \mathbf{R}$ で, $f_k X = X$ かつ X が $T^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に同相なるものである. 円に同相な部分集合 $X \subset T^1 \times \mathbf{R}$ がホモトーピー非自明であるための必要十分条件は T^1 への射影が写像度 ± 1 なることである. 直観的には, 円環を一回ぐるりとまわることを意味する.

次が主結果である.

定理. $|k| > \frac{4}{3}$ なら, f_k のもとで不変なホモトピー非自明な円は $T^1 \times \mathbf{R}$ 内にはない.

J. Greene がこの問題を教えてくれた. わたしは彼と何回か議論した. かれは f_k についての詳しい数値研究を行ない [7], 数 $k_0 \approx 0.97$ があって, $|k| \le k_0$ ならホモトーピー非自明な不変円が f_k に存在し, $|k| > k_0$ なら存在しないことを見つけた. 何人かの別の著者も, 数値研究にもとづいて同じ結論に達した ([2], [5], [8], [12]). しかしこの結論はいまのところ厳密に証明されていない.

われわれの結果は G.D. Birkhoff の定理 ([4, §3] および [3, §44]) の非常に単純な帰結である. M. Herman は最近バーコフの結果および関連する結果についてもっと詳しい説明を行なった [9].

われわれの方法は [10] で使ったものと同じである. しかし写像 f_k への最近の興味の高まりからすれば, この結果は出版するに値すると思われる.

2. バーコフの定理

この節では, われわれが使うことになるバーコフの定理を述べる. バーコフの定理を述べるためにも, われわれの考える状況にバーコフの証明を拡張するためにも, 次の定義が必要である.

定義. C^1埋め込み 曲線 $\gamma : J \to T^1 \times \mathbf{R}$ を考える. ただし, $J = (-\infty, a), (-\infty, a]$ または $(-\infty, \infty)$ であり, また $a \in \mathbf{R}$ である. $t \to -\infty$ のとき $\gamma(t)_2 \to -\infty$ とする. ただし, $x \in T^1, y \in \mathbf{R}$ に対して $(x, y)_2 = y$ である. $\gamma' : J \to \mathbf{R}^2$ は γ の一階微分であるとする. 鉛直線からのγ'のずれ と呼ぶ $\delta_\gamma : J \to \mathbf{R}$ を, 以下の 2 つの性質を持つ一意の連続関数として定義しよう.

(a) $\delta_\gamma(t)$ は鉛直ベクトル $(\partial/\partial y)_{\gamma(t)}$ から $\gamma'(t)$ への角度に $\mathrm{mod}\ 2\pi$ で一致する. ただし, 反時計回りを正とする.

(b) すべての $s \le t$ に対して $\gamma(s)_2 \le \gamma(t)_2$ なる $t \in J$ が与えられたとき, $-\pi/2 \le \delta_\gamma(t) \le \pi/2$ である.

3 節では, W. Thurston が示唆してくれた方法で δ_γ の存在と一意性の証明の概略を述べる. δ_γ の存在と一意性は γ が埋め込まれていること, すなわち γ が一対一で γ' がゼロにならないこと, に依存する. 次も必要である.

定義. $g : T^1 \times \mathbf{R} \to T^1 \times \mathbf{R}$ は $T^1 \times \mathbf{R}$ の各端をそれ自身に写す C^1 微分同相写像であるとする. g が 左に(または 右に)傾いている とは, $T^1 \times \mathbf{R}$ 内の各鉛直線 $x =$ 一定 に対して, その g のもとでの像がいたるところ鉛直線から正の (または負の) ずれを持つときである.

例 2.1. $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を周期 1 の C^1 写像とする. $g : T^1 \times \mathbf{R} \to T^1 \times \mathbf{R}$ は $g(x, y) = (x', y')$ で与えられるとする. ただし

$$\begin{aligned} x' &= x + y + h(x) \\ y' &= y + h(x). \end{aligned} \tag{1}$$

この写像は右に傾いている.

序で議論した写像 f_k はこの写像 g の特別の場合であり, $h(x) = (k/2\pi)\sin(2\pi x)$ に対応する.

バーコフの定理 ([4, §3], [3, §44], および [9, I 章]). $g : T^1 \times \mathbf{R} \to T^1 \times \mathbf{R}$ を C^1 微分同相写像とする. g は面積形式 $dxdy$ を保存し, $T^1 \times \mathbf{R}$ の各端をそれ自身に写し, 方向を保存し, (左または右に) 傾いているとする. U は $T^1 \times \mathbf{R}$ の開部分集合であって, $gU = U$, U は $T^1 \times \mathbf{R}$ に同相であり, ある $a < b, a, b \in \mathbf{R}$ に対して $T^1 \times (-\infty, a] \subset U \subset T^1 \times (-\infty, b)$ であるとする. このとき, $T^1 \times \mathbf{R}$ 内の U の境界 (frontier) はリプシッツ関数 $\mu : T^1 \to \mathbf{R}$ のグラフである. すなわち, $\overline{U} - U = \{(x, \mu(x)) : x \in T^1\}$ である.

<u>例 2.2</u>. (1) で与えられる写像は上の定理で g に課した条件をすべて満たす.

<u>例 2.3</u>. $X \subset T^1 \times \mathbf{R}$ をホモトピー非自明な円とする. $T^1 \times \mathbf{R}$ 内の X の補集合の成分のひとつは, 上の定理で U に課した条件を満たす. これはトポロジーの古典的結果である. これは Schoenflies の定理からただちに出る. ($T^1 \times \mathbf{R}$ を平面に円環として埋め込む.)

<u>注意</u>. 最後の例より, バーコフの定理の系を得る. すなわち, X が $T^1 \times \mathbf{R}$ の g 不変なホモトピー非自明な円なら, X はリプシッツ関数 $\mu : T^1 \to \mathbf{R}$ のグラフである.

上の定理で述べた条件を満たす写像 g に伴って, 流量 (flux) と呼ばれる数値不変量がある. この不変量がゼロでなければ, バーコフの定理は無内容であるが成り立つ.

<u>定義</u>. g はバーコフの定理の条件を満たすとする. 流量 $C(g)$ を次で定義する.

$$\mathrm{Area}(gU \backslash U) - \mathrm{Area}(U \backslash gU).$$

ただし U は $T^1 \times \mathbf{R}$ 内の任意の開集合であって, ある $a < b, a, b \in \mathbf{R}$ に対して $T^1 \times (-\infty, a] \subset U \subset T^1 \times (-\infty, b)$ である.

g が $T^1 \times \mathbf{R}$ の面積保存同相写像であって各端をそれ自身に写すという事実から, $C(g)$ が U に依らないことが判る. バーコフの定理の陳述中で課した条件を U が満たせば, 明らかに, それを使って $C(g)$ が計算でき, $C(g) = 0$ が得られる. 言い換えると, 流量がゼロでなければ, バーコフの定理中で課された条件を満たす U はない. この場合, バーコフの定理は正しいが無意味である.

<u>例 2.4</u>. g を (1) で与えられる写像とする. すると次が成り立つ.

$$C(g) = \int_0^1 h(x)dx.$$

$C(g)$ の定義のときに使った集合 U を $T^1 \times (-\infty, 0)$ とすれば上の式は理解できる. とくに, f_k が序で定義された写像なら $C(f_k) = 0$ である.

[4, §3] および [3, §44] における定理の前提はわれわれ版のバーコフの定理の前提と若干異なっている. 事実, われわれの版はどちらの帰結でもない. ただ同様な仕方で証明できる. バーコフの定理のわれわれ版に非常に似たものが [9] で詳しく証明されてれいる. 4 節ではバーコフの証明を手短かに概観する.

3. δ_γ の存在と一意性

γ が 2 節の定義で述べた条件を満たすとする. $t \to -\infty$ のとき $\gamma(t)_2 \to -\infty$ であるから, $t_0 \in J$ があって, $s \le t_0$ なら $\gamma(s)_2 \le \gamma(t_0)_2$ である. 明らかに, 一意の連続な δ_γ があって, $t = t_0$ に (b) を満たし, またすべての t に対して (a) を満たす. $t_1 \in J$ が与えられてすべての $s \le t_1$ に対して $\gamma(s)_2 \le \gamma(t_1)_2$ を満たすときに $\pi/2 \le \delta_\gamma(t_1) \le \pi/2$ であることを示せば十分である.

この証明法は W.Thurston が示唆してくれた. γ が埋め込まれていることを使うことが本質的である. 簡単のため $t_0 < t_1$ とする. 残りの場合も同様である.

<u>ステップ 1</u>. t_0 および t_1 の近傍で γ が鉛直で, $i = 1, 2$ に対して $\gamma(s)_2 \le \gamma(t_i)_2$ の場合に問題を帰着させる. t_0 および t_1 の任意に小さな近傍で γ を変形すればこれが実現できる. この場合, 証明すべきことは $\delta_\gamma(t_1) = 0$ である.

<u>ステップ 2</u>. γ は t_0 の近傍で鉛直であって, $s \le t_0$ のとき $\gamma(s)_2 \le \gamma(t_0)_2$ であるから, $T^1 \times [\gamma(t_0)_2 - \varepsilon, \infty)$ を点ごとに固定して $T^1 \times \mathbf{R}$ をイソトープし, $\gamma|(-\infty, t_0 + \varepsilon)$ が鉛直になるように γ を変形できる. ここで ε は小さな正数である. これができることは微分トポロジー研究者にはよく知られており, 直観的には明らかである. すると変形を受けた γ が $\delta_\gamma(t_1) = 0$ を満たすのは, もとの γ がそれを満たすとき, またそのときのみである.

<u>ステップ 3</u>. いまや γ は $(-\infty, t_0 + \varepsilon]$ 上および t_1 の近傍で鉛直であり, また $s \le t_1$ に対して $\gamma(s)_2 \le \gamma(t_1)_2$ である. このとき次が成り立つ.

$$\gamma(t_0)_2 < \gamma(t_0 + \varepsilon)_2 \le \gamma(t_1)_2.$$

y 座標を保存する $T^1 \times \mathbf{R}$ のイソトピーを見つけて, $T^1 \times [\gamma(t_1)_2 - \varepsilon, \infty)$ 上で x 座標に関し一定速度の回転であり, また $T^1 \times (-\infty, \gamma(t_0)_2 + \varepsilon]$ 上で恒等写像であり, イソトピーの終端で $\gamma(t_0)_1 = \gamma(t_1)_1$ であるようにできる. 明らかに変形後の γ が $\delta_\gamma(t_1) = 0$ を満たすのは, もとの γ がそれを満たすとき, またそのときのみである.

<u>ステップ 4</u>. いまや γ は $(-\infty, t_0 + \varepsilon]$ 上および t_1 の近傍で鉛直であり, $s \le t_1$ に対して $\gamma(s)_2 \le \gamma(t_1)_2$ であり, また $\gamma(t_0)_1 = \gamma(t_1)_1$ である. $T^1 \times \mathbf{R}$ 上に円 C_1, C_2 があって次を満たす.

$$C_1 \cap \mathrm{image}\ \gamma = \gamma(t_0 + \varepsilon),$$
$$C_2 \cap \mathrm{image}\ \gamma = \gamma(t_1 - \varepsilon),$$

および

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

$T^1 \times \mathbf{R}$ のイソトピーで, C_1 と C_2 に挟まれた円環の外では恒等写像になっていて, イソトピーの終端では γ が $(-\infty, t_1 + \varepsilon]$ 上で鉛直になるものを見つけることができる. こんども, これができることは微分トポロジー研究者にはよく知られており, 直観的には明らかである. 変形後の γ は $\delta_\gamma(t_1) = 0$ を満たし, もとの γ も同じ方程式を満たす. □

4. バーコフの定理の証明

バーコフの発想にほぼ従いながら手短かにスケッチしよう. U 内の点 x が <u>正に</u>(または<u>負に</u>)<u>到達可能</u> とは埋め込み曲線 $\gamma : (-\infty, a] \to U$ があって $t \to -\infty$ のときに $\gamma(t)_2 \to -\infty$ を

満たし, 鉛直線から正に (または負に) にずれており, $\gamma(a)=x$ を満たすときである. W_+(または W_-) を U 内の正に (または負に) 到達可能な点の集合とする.

バーコフの定理を g が右に傾いている場合に証明する. g が左に傾いている場合は g を g^{-1} に置き換えればこの場合に帰着する.

g が右に傾いている場合, 簡単にチェックできるように $g(\overline{W}_-\cap U)\subset W_-$ および $g^{-1}(\overline{W}_+\cap U)\subset W_+$ である. これから $W_-=U=W_+$ が次のことからしたがう. すなわち, g が面積保存であり, $a<b$ があって次を満たすのである.

$$T^1\times(-\infty,a]\subset W_-\cap U\cap W_+\subset W_-\cup U\cup W_+\subset T^1\times(-\infty,b].$$

$W_-=U=W_+$ なる事実から, 各 $x\in T^1$ に対して $a_x\in\mathbf{R}$ があって次を満たす.

$$U\cap(x\times\mathbf{R})=x\times(-\infty,a_x).$$

これの証明は 3 節の証明に似ている. これはバーコフの論文にも Herman の論文 [9] にも言及してある.

$u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が C^1 関数のとき $\phi_u:T^1\times\mathbf{R}\to T^1\times\mathbf{R}$ を微分同相写像

$$\phi_u(x,y)=(x+u(y),y)$$

とする. $g_u=\phi_u g\phi_u^{-1}$ と置く. すると $\phi_u U$ は g_u に関して不変である. u がホイットニーの C^1 位相で 0 に十分近ければ, g_u は g と同じ方向に傾いている. ゆえに $\phi_u U$ は次の条件を満たす. すなわち, 各 $x\in T^1$ に対して $a_{ux}\in\mathbf{R}$ があって

$$\phi_u U\cap(x\times\mathbf{R})=x\times(-\infty,a_{ux}).$$

これは 0 の十分小さな C^1 近傍内の任意の u に対して成り立つから U の境界 (frontier) はリプシッツ関数のグラフであり, バーコフの定理の主張通りである. □

5. 母関数

g を例 2.1 の写像とする. 例 2.4 より, 流量 $C(g)$ は $\int_0^1 h(x)dx$ である. バーコフの定理は $C(g)\neq 0$ のとき無内容で正しいから $\int_0^1 h(x)dx=0$ と置く. H を h の不定積分とする. $\int_0^1 h(x)dx=0$ であるから H は周期 1 で周期的である.

古典力学で g の母関数として知られるものを次式で定義する.

$$G(x,x')=-\frac{(x'-x)^2}{2}-H(x).$$

例 (2.1) の方程式 (1) は次式と同値である.

$$\begin{aligned} y&=\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\\ y'&=-\frac{\partial G(x,x')}{\partial x'}. \end{aligned}\tag{2}$$

g はホモトピー非自明な円 X を持つとする. バーコフの定理および例 2.3 に続く注意より, X はリプシッツ関数 $\mu:T^1\to\mathbf{R}$ のグラフである. したがって同相写像 $g_0:T^1\to\mathbf{R}$ があって次を満たす.

$$g(x,\mu(x))=(g_0(x),\mu(g_0(x))).$$

g は $T^1\times\mathbf{R}$ の各端をそれ自身に写すから, X の補集合の各成分をそれ自身に写す. その上, g は方向保存であるから, g_0 は方向保存である. 方程式 (2) より次を得る.

$$\frac{\partial}{\partial x}[G(\overline{x},x)+G(x,x')]=0. \tag{3}$$

ただし $\overline{x}=g_0^{-1}(x), x'=g_0(x)$ である.

5. 定理の証明

前節の記法を続いて用いる. $g_0=\mu_0^{-1}g\mu_0$, $\mu_0=(1,\mu):T^1\to\mathrm{graph}\mu$ で μ_0 と g はリプシッツであるから, g_0 はリプシッツである. 同様に $g_0^{-1}=\mu_0^{-1}g^{-1}\mu_0$ はリプシッツである. リプシッツ関数は絶対連続であるから, ルベーグ理論の古典的定理, すなわち絶対連続な関数はほとんどいたるところ微分可能であり, その微分の不定積分は (定数の不定性を除いて) もとの関数である, を適用できる. この定理は [13,11.7] で述べられ証明されている.

ゆえに (3) を微分できて次を得る.

$$\frac{dg_0^{-1}(x)}{dx}+\frac{dg_0(x)}{dx}=2+h'(x). \tag{4}$$

ここで h' は h の微分である. 方程式 (4) は $dg_0(x)/dx$ と $dg_0^{-1}(x)/dx$ が定義されているところではいつも成り立つ. だからほとんどいたるところ成り立つ.

L を g_0 と g_0^{-1} のリプシッツ定数の大きい方とする. すなわち

$$L=\max\left\{\sup\frac{|g_0(x)-g_0(x')|}{|x-x'|},\sup\frac{|g_0^{-1}(x)-g_0^{-1}(x')|}{|x-x'|}\right\}.$$

g_0 と g_0^{-1} は方向保存だから, $dg_0(x)/dx$ と $dg_0^{-1}(x)/dx$ は非負である. L の定義からすると次が出る.

$$\begin{aligned}L^{-1}&\le\frac{dg_0(x)}{dx}\le L,\\ L^{-1}&\le\frac{dg_0^{-1}(x)}{dx}\le L.\end{aligned} \tag{5}$$

$m=\min h', M=\max h'$ と置く. (4) と (5) より次を得る.

$$2L^{-1}\le 2+m. \tag{6}$$

とくに

$$m>-2. \tag{7}$$

(7) は g がホモトピー非自明な不変円を許すという仮定のみから導かれたから, これはホモトピー非自明な不変円の存在のための必要条件である. 別の必要条件を以下のように得ることができる.

L の定義および [13,11.7] の理論より次を得る.

$$L=\max\left\{\text{ess.sup.}\frac{dg_0(x)}{dx},\text{ess.sup.}\frac{dg_0^{-1}(x)}{dx}\right\}. \tag{8}$$

ここで ess.sup. は測度論的な意味での「本質的上限」(essential supremum) のことである．$dg_0(x)/dx, dg_0^{-1}(x)/$
はリプシッツ関数の微分であるから, 各自の本質的上限は各自が定義されている集合の上の上限と同じである.

(4), (5), (8) より次を得る.

$$L^{-1} + L \leq 2 + M. \tag{9}$$

関数 $L^{-1} + L$ は $L \geq 1$ のとき単調増加関数であるから, (6) と (9) より次が得られる.

$$\frac{2+m}{2} + \frac{2}{2+m} \leq 2 + M. \tag{10}$$

ここで h が周期的であることより $m \leq 0$ であることを利用した.

$g = f_k$ の場合, $h(x) = (k/2\pi)\sin(2\pi x)$ であるから, $M = |k|, m = -|k|$ である．不等式 (7) と (9) は次を意味する.

$$|k| \leq \frac{4}{3}. \tag{11}$$

(11) はホモトピー非自明な円の存在の仮定の下に導かれたから, 証明が完結した. □

6. 補足的注意

(1) 上の本文はプレプリント [11] に些細な変更を加えたものである． それを書いて以来, Fathi[6] はバーコフの定理の Herman 版 [9] の別の詳しい証明を与えた.

(2) Aubry, Le Daeron および André は不変円の存在の必要判定条件を証明した [1]．かれらの結果と長い数値計算はこの論文の主結果を含むように見える.

(3) g を例 2.1 で与えられるタイプの写像とする．方程式 (3) は次式に同値である.

$$g_0^{-1}(x) + g_0(x) = 2x + h(x).$$

逆に写像 $g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ があって狭義単調であり, $g_0(x+1) = g_0(x) + 1$ と上の式を満たせば, g はホモトピー非自明な不変円でリプシッツ関数

$$\mu(x) = G_1(x, g_0(x))$$

のグラフとなっているものを持つ．ただし $G_1 = \partial G(x, x')/\partial x$ である．この観察は M.Herman による．彼は 1981 年夏のブラジルでの講義で, g が $C^{3-\varepsilon}$ 級で無理数回転数の非遷移的不変円を持つ注目すべき例を構成した．([9],III 章参照.)

(4) 上で示した証明によれば, g がホモトピー非自明な不変円を持てば (7) と (10) が満たされる．1983 年夏の大学院コースで, g がホモトピー非自明な不変円を持つという前提から m と M に関してこれ以上の条件が出せるかという課題を出した．Rafael Llave はこの課題に答えた．すなわち, (7) と (10) を満たす任意の $m \leq 0$ および任意の $M \geq 0$ に対して g が存在してホモトピー非自明な不変円を持ち，また $m = \min h, M = \max h$ を満たすことを示した．彼の証明は補遺に載せておいた.

(5) レフェリーは 6 節の不等式が [9, II および III 章] に含まれることを指摘し，また目的は違っていたが補遺の例が [9, III.9] に含まれることを指摘した．レフェリーのコメントによれば, これらの不等式や例は M.Herman が 1980 年以来, Palaiseau, Zurich, Rio 等においていろいろな講義で議論してきたものである.

補遺

R.Llave

定理. $m < 0 < M$ は (7) と (9) を満たす 2 つの実数とする．このとき C^∞ 関数 $g_0, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ があって以下を満たす．g_0 は単調増加であり, $g_0(x+1) = g_0(x) + 1$,

$$g_0^{-1}(x) + g_0(x) = 2x + h(x), \tag{$A1$}$$

および

$$\max h'(x) = M, \quad \min h'(x) = m. \tag{$A2$}$$

<u>証明</u>. $-2 < m < 0$ であるから l があって次を満たす.

$$\frac{2}{m+2} l + \frac{m+2}{2}(1-l) = 1.$$

g_0 は $[0,1]$ で定義された区分線形関数であって以下を満たすとする.

$$\begin{aligned} &g_0(0) = 0; \\ &g_0'(x) = 2/(2+m), \quad x \in [0, l/2] \cup [1 - l/2, 1]; \\ &g_0'(x) = (2+m)/2, \quad x \in (l/2, 1 - l/2). \end{aligned}$$

このとき $g_0(1) = 1$ であるから g_0 を $\mathbf{R}$ 全体に拡張して $g_0(x+1) = g_0(x) + 1$ を満たすようにできる．h は (A1) で定義されるとする．すると次が成り立つ.

$$m = \min h'(x), \quad M_1 = \max h'(x). \tag{$A3$}$$

ここで M_1 は次式で定義される.

$$2/(2+m) + (2+m)/2 = 2 + M_1.$$

1 図を見よ.

図 1

g_0 の角を丸めて無限回微分可能な関数 g_0 と h(これも (A1) で定義される) を得て (A3) を満たすようにできる．最後に, 任意に小さな区間で g_0 を変形して, そこでその微分を増加させ, $\max h'(x) = M$ とし, また定理のその他の条件をすべて満たすようにできる．というのは (10) により $M \geq M_1$ だからである． $\square$

参考文献

[1] Aubry, Le Daeron, & André. Classical ground states of a one-dimensional model for incommensurate structures. Preprint(1982).

[2] G. Benettin, L. Galgani, & J. Strelcyn. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev.* **A 14** (1976), 2338-.

[3] G.D. Birkhoff. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.* **43** (1922), 1-119. Reprinted in *Collected Mathematical Papers*, Vol.II, Amer. Math. Soc.: New York (1950), 111-229.

[4] G.D. Birkhoff. Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bull. Soc. Math. de France* **60** (1932), 1-26. Reprinted in *Collected Mathematical Papers*, Vol.II, Amer. Math. Soc.: New York (1950), 418-443.

[5] B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports* **52** (1979), 263-379.

[6] A. Fathi. Une interprétation plus topologique de la démonstration de théorème de Birkhoff. Appendix of [9].

[7] J.M. Greene. A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.* **20** (1979), 1183-1201.

[8] R.H.G. Hellemann & T. Bountis. Periodic solutions of arbitrary period, variational methods. In *Stochastic Behaviour in Classicasl and Quantal Systems*, (ed. G. Casati and J. Ford). Springer Verlag: New York(1979), 353-.

[9] M. Herman. Introduction à l'étude des courbes invariantes par les diffeomorphismes de l'anneau. *Asterisque* **103-104** (1983).

[10] J. Mather. Glancing billiards. *Ergod. Th. & Dyn. Sys.* **2** (1982), 397-403.

[11] J. Mather. Non-existence of invariant circles. Preprint (1982).

[12] G.E. Powell & J.C. Percival. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of Hamiltonian systems. *J. Phys.* **A12** (1979), 2053-2071.

[13] E.C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*, (2nd edition). Oxford Univ. Press: Oxford(1939).