谷川清隆 訳

Inventiones mathematicae (1980), **60**, 249-267

平面二等辺三体問題の三体衝突

Triple collision in the planar isosceles three body problem

Robert L. Devaney

要約. McGehee の装置を使って、平面三体問題の特別な場合において、三体衝突に達したり、その近くに来る軌道の定性的ふるまいについて議論する．三体衝突に始まりかつ終る軌道が無限個存在することを示す．近傍の軌道は直線中心図形に近づくか正三角形中心図形に近づくかによって異なるふるまいをする．最後に、「ビリアード shot」と呼ぶ、三体問題における新しい型の軌道について議論する．

序

この論文の目標は平面二等辺三角形三体問題において、三体衝突に始まるか、三体衝突に終わるか、または三体衝突の近くを通過する解の定性的ふるまいを調べることである．この二等辺三角形問題は平面三体問題の特別な場合であって、自由度２のハミルトン系に帰着する．簡単に言えば、質量の等しい２つの質点に平面の y 軸に関して対称な位置と速度を与え、第三の質点の位置と速度はこの軸上に与える．だから質点は平面の二等辺三角形 (縮退することも有り得る) を形成する．問題の対称性より、質点はずっとこの配位を保つ．ゆえに、重心を原点にとれば、系は自由度２になる．

三体衝突を調べる主たる道具は McGehee による装置であって、これによって三体衝突による特異点が不変２次元多様体に置き換えられ、その上では流れは滑らかになる．この衝突多様体上の流れを完全に理解すれば、三体衝突に達したりその近くを通り過ぎる軌道のふるまいを「読みとる」ことができる．

これはまさに McGehee が直線三体問題で三体衝突を調べたやり方 [3] である．その論文で、かれは大多数の質量の選び方に対して、三体衝突に近づく軌道は、衝突近傍を任意に大きな速度をもらって離れていくことを示した．２つの質点は近接連星となってある方向に動き、第三体はもう一方の方向に離れていく．

上の結果をどのように平面または３次元問題へ拡張するか、は自然な疑問である．さまざまな人が平面問題の三体衝突多様体について議論している [10,13]．この多様体は４次元であり、その上の流れはいまのところよく理解されていない．二等辺の場合の三体衝突多様体上の簡単な流れを調べれば、平面問題におけるこの流れの構造に関しなんらかの洞察が得られることを期待している．きっと、以下で記述する現象の多数はなんらかの形で一般三体問題でも生じるだろう．

二等辺問題と直線問題の大きな違いの一つは、前者に直線および正三角形中心図形の可能性があることである．三体衝突に始まるか三体衝突に終わる任意の軌道は特異点に近づくにつ

れて中心図形をとる、という古典的結果を簡単に再現できる．さらに、我々が示すとおり、自然な直線軌道は直線中心図形に近づく唯一の軌道であるのに対し、軌道の２つの滑らかな 1-パラメーター族があって正三角形配位に近づく．

第三質量が比較的小さいとき、これらの軌道の構造はきわめて複雑である．三体衝突に始まりかつ終わる軌道 (いわゆる放出-衝突軌道) が無限個あることを示す．これらは次のように特徴づけることができる．連星系は単純に x 軸の近くで原点から始まって原点に終わるように１周期まわり、速度がゼロになる点が１つある．その間、第三体は原点の近く y 軸上を高速で振動する．事実、任意の十分に大きな整数 k に対して、連星系の重心を第三体がちょうど k 回通過する型の放出-衝突軌道が存在する．これは Broucke[1] が数値的に決定した結果を証明している．

これらの放出-衝突軌道はすべて、連星が x 軸上にとどまり、第三体が連星系の重心に止まっている自然な直線放出-衝突軌道に近いことを注意しておく．だからこの軌道は、近くの軌道が長い時間の間、この軌道の近くにあり、いずれ正三角形配位になって衝突してしまうという意味で不安定である．

直線三体問題の場合と同様、三体衝突多様体上の流れを使って三体衝突の近くを通る軌道のふるまいを決定できる．基本的に２つの可能性がある．連星系が有限の速度で x 軸上を逃げていって第三体が重心のまわりを振動するか、第三体が上か下の方向に任意に大きな速度で逃げていくかである．この場合、連星系は逆の方向に二体衝突を繰り返しながら走っていく．

三体衝突多様体を使えば、二等辺問題において「ビリヤード shot」軌道の存在を証明できる．これらは、連星が高速の二体衝突をする際に、第三体が三体衝突前に y 軸上をすり抜けるような軌道である．衝突近傍をすり抜けた後で、第三体 (またはビリヤードボール) は重心を高速で振動しながら離れ、連星系は x 軸の近くを反対方向に離れる．

1. 三体衝突多様体

この節の目標は McGehee の導入した装置を利用して三体衝突における系の特異点を膨らませることにある．ここで使う材料のほとんどは McGehee の論文のものとまったく同じである．かれの論文を参照して欲しい．以下では変数をいくらか変えるがそれについては [2] を参照して欲しい．しかし完全を期すため、技術的詳細のすべてをここで述べる．

平面二等辺三体問題の設定を思い起こそう．平面内に３つの質点 $m_1 = m_2, m_3$ が与えられる．第三体をはじめに y 軸におき、速度は y に沿わせる．質量の等しい２質点の位置と速度は y 軸に関し対称である．だから粒子ははじめに二等辺三角形の頂点に位置する．質点はニュートンの法則にしたがって互いを引き合うとする．問題の対称性から、粒子はいつもある二等辺三角形の頂点上にある．

二体衝突は質量の等しい粒子の間でしか起こらないことに注意しよう．m_3 が衝突に参加する場合には、必然的に同じ瞬間に m_1 とも m_2 とも衝突する．以下で問題にするのはまさにこの場合である．

系の重心を原点に固定すれば、系は自由度 2 になってしまう．日心座標あるいはヤコビ座標を用いて運動を記述できる．後者を使おう．x_1 は m_1 から m_2 への距離とする．だから $x_1 \geq 0$ である．Fig.1 を見よ．また x_2 は y 軸上、m_1 と m_2 の重心から m_3 への方向つき距離を表わすとする．だから x_2 は m_3 が連星系の上にあるときは正で、下にあるときは負である．$x_1 = 0$ のときにちょうど二体衝突が起こり、$x_1 = x_2 = 0$ のときはいつも全崩壊つまり三体衝突が起

こる．
　これらの座標で、運動方程式は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{-2m_1}{x_1^2} - \frac{8m_3x_1}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{-8(2m_1+m_3)x_2}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

この式の導き方については Pollard[4] を参照して欲しい．

　p_1 および p_2 は x_1 および x_2 に共役な運動量を表わすとし、次式で定義する．

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1\dot{x}_1/2, \\ p_2 &= 2m_1m_3\dot{x}_2/(2m_1+m_3). \end{aligned}$$

このとき運動方程式は１階の微分方程式系としてハミルトン形式で

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{1.2}$$

と書ける．ここでハミルトン関数すなわち全エネルギーは

$$H(x_1,x_2,p_1,p_2) = \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{(2m_1+m_3)p_2^2}{4m_1m_3} - \frac{m_1^2}{x_1} - \frac{4m_1m_3}{(x_1^2+4x_2^2)^{1/2}}, \tag{1.3}$$

で与えられる．よく知られているように、H は (1.2) に対する運動の定数である．
　以下の記法を使えばこの系をもっと簡潔に書ける．$x=(x_1,x_2)$ および $p=(p_1,p_2)$ とおく．$M=2m_1+m_3$ を系の全質量とする．このとき次のように書ける．

$$H(x,p) = (1/2)p^tA^{-1}p + V(x), \tag{1.4}$$

ここで A^{-1} は 2×2 行列

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/m_1 & 0 \\ 0 & M/2m_1m_3 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

であり、ポテンシャルエネルギー $V(x)$ は次式で与えられる．

$$V(x) = -\frac{m_1^2}{x_1} - \frac{4m_1m_3}{(x_1^2+4x_2^2)^{1/2}}. \tag{1.6}$$

$V(x) < 0$ であること、および V は -1 次の同次式であることに注意しよう．

こうして、$x_1 > 0$ に対して定義された、すなわち、空間 $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 上で定義された解析的なハミルトン系を得た．最初の目標はこの系を衝突が起こる境界 $x_1 = 0$ に拡張することである．これは McGehee による一連の変数変換を用いて実行できる．

まず配位空間に「極」座標を導入し、同時に運動量の動径成分と接線成分の尺度を変える．すなわち、次の変数を導入する．

$$\begin{aligned} r &= (x^tAx)^{1/2}, \\ s &= x/r, \\ v &= r^{1/2}(s\cdot p), \\ u &= r^{1/2}(A^{-1}p-(s\cdot p)s). \end{aligned} \tag{1.7}$$

$s^tAs = 1$ および $s^tAu = 0$ に注意しよう．また、r^2 は系の慣性モーメントである．系の時間変数の尺度も

$$dt = r^{3/2}d\tau,$$

によって変える．これらの変数を使うと、系 (1.2) は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= u^tAu + (1/2)v^2 + V(s), \\ \frac{ds}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -(1/2)vu - (u^tAu)s - \mathrm{grad}V(s). \end{aligned} \tag{1.8}$$

ここで $V(s)$ は V の球 s^tAs への制限であり、$\mathrm{grad}V(s)$ は A によって誘導される計量におけるその勾配である．

ここで $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ として

$$\begin{aligned} s &= (A^{-1})^{1/2}(\cos\theta, \sin\theta), \\ u &= u(A^{-1})^{1/2}(-\sin\theta, \cos\theta), \end{aligned}$$

を導入する．方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= u^2 + (1/2)v^2 + V(\theta), \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -(1/2)vu - V'(\theta). \end{aligned} \tag{1.9}$$

エネルギーの式 (1.4) は次のようになる．

$$re = (1/2)v^2 + (1/2)u^2 + V(\theta). \tag{1.10}$$

ここで e はハミルトン関数の一定値であり、また

$$V(\theta) = -\frac{m_1^2}{\sqrt{2/m_1}\cos\theta} - \frac{4m_1m_3}{\sqrt{(2/m_1)\cos^2\theta + \frac{2M}{m_1m_3}\sin^2\theta}}. \tag{1.11}$$

$x_1 = 0$ かつ $x_2 > 0$ における二体衝突は $\theta = \pi/2$ に対応し、$x_1 = 0$ かつ $x_2 < 0$ における二体衝突は $\theta = -\pi/2$ に対応することに注意しよう．最後に、三体衝突 $x_1 = x_2 = 0$ は $r = 0$ に対応する．

さて、系 (1.9) は $r = 0$ で解析的である．事実、$r = 0$ のとき $dr/d\tau = 0$ である．ゆえに $r = 0$ は流れの不変多様体である．だから三体衝突に対応する特異性を取り除いたことになる．特異点の場所に三体衝突多様体と呼ばれる滑らかな多様体を塗り込めたのである．いままで有限時間で三体衝突ではじまったり終わったりした軌道はいまや減速されて、$t \to -\infty$ や $t \to \infty$ で三体衝突多様体に近づく．そして三体衝突の近くを通過する軌道は、いまや三体衝突多様体自身の上の軌道と非常によく似たふるまいをする．だからこの多様体上の流れを理解すれば、これら近衝突軌道に関してたくさんの情報が得られる．これから調べるのがこの流れである．

系 (1.9) は $0 \le r < \infty, v \in \mathbf{R}, -\pi/2 < \theta < \pi/2, u \in \mathbf{R}$ に対して解析的なベクトル場を定義する．まずこの系を境界 $\theta = \pm\pi/2$ まで拡張しよう．これは Sundman[11,12] の正則化を用いて実行できる．われわれの取扱いは McGehee のものとやや異なる．

$W(\theta) = -(\cos\theta)V(\theta)$ とおく．W は $[-\pi/2, \pi/2]$ 上で正解析関数であることに注意しよう．新しい変数

$$w = \frac{\cos\theta}{\sqrt{W(\theta)}}u,$$

およびもうひとつの時間尺度の変換

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{W(\theta)}},$$

を導入する．この新しい時間変数 t はもとの時間変数と異なることに注意しよう．

系 (1.9) は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{W(\theta)}}rv, \\
\frac{dv}{dt} &= \sqrt{W(\theta)}\left(1 - \frac{\cos\theta}{2W(\theta)}(v^2 - 4re)\right), \\
\frac{d\theta}{dt} &= w \\
\frac{dw}{dt} &= (\sin\theta)\left(-1 + \frac{\cos\theta}{W(\theta)}(v^2 - 2re)\right) \\
&\quad - \frac{vw\cos\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} + \frac{W'(\theta)}{W(\theta)}(\cos\theta - w^2/2).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

エネルギー関係式は

$$\frac{w^2}{2\cos\theta} - 1 = \frac{\cos\theta}{W(\theta)}(re - v^2/2), \tag{1.13}$$

となる．この系は $[0,\infty)\times\mathbf{R}\times[-\pi/2,\pi/2]\times\mathbf{R}$ 上で解析的なベクトル場であるから、二体衝突による特異性は取り除かれている．実際、$\theta=\pm\pi/2$ のとき $dv/dt>0$ であるから、解は弾性衝突として二体衝突後にも拡張されている．

三体衝突多様体はこの変数変換のもとでは、そのまま手つかずで残っており、$r=0$ でのエネルギー関係式として与えられる：

$$w^2/2 + \frac{v^2\cos^2\theta}{2W(\theta)} = \cos\theta. \tag{1.14}$$

この曲面の略図は Fig.2 にある．これは位相的には 4 点を取り除いた球であることに注意しよう．これは直線三体問題の場合とまったく同じである．しかし、(1.12) からこの面に誘導される流れは直線問題の場合と劇的に異なる．

この多様体上の流れは次の微分方程式によって決まる．

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= \sqrt{W(\theta)}\left(1-\frac{\cos\theta}{2W(\theta)}v^2\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= w,\\
\frac{dw}{dt} &= (\sin\theta)\left(-1+\frac{v^2\cos\theta}{W(\theta)}\right)-\frac{vw\cos\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}\\
&\quad +\frac{W'(\theta)}{W(\theta)}(\cos\theta-w^2/2).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

この流れの主な性質は次節で議論する．

<u>注意.</u> $W(\theta)$、したがって衝突多様体は、m_1 と m_3 の選び方に依存する．この依存性は $\eta=$

$v/\sqrt{W(\theta)}$ を導入すれば取り除ける．このとき微分方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dt} &= 1-(1/2)\eta^2\cos\theta-(1/2)\frac{W'(\theta)}{W(\theta)}\eta w,\\
\frac{d\theta}{dt} &= w,\\
\frac{dw}{dt} &= (\sin\theta)(-1+\eta^2\cos\theta)-(1/2)\eta w\cos\theta\\
&\quad +\frac{W'(\theta)}{W(\theta)}(\cos\theta-w^2/2),
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

となり、エネルギー関係式は

$$
w^2/2+\eta^2\cos^2\theta=2\cos\theta, \tag{1.17}
$$

となり、質量に依らない.

注意. 質量比 m_3/m_1 を ε とおけば、簡単に計算できるように、

$$
\begin{aligned}
W(\theta) &= m_1^{5/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4\varepsilon^{3/2}\cos\theta}{\sqrt{2\varepsilon+4\sin^2\theta}}\right),\\
\frac{W'(\theta)}{W(\theta)} &= \frac{-8\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}(2+\varepsilon)\sin\theta}{(2\varepsilon+4\sin^2\theta)(\sqrt{2\varepsilon+4\sin^2\theta}+4\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}\cos\theta)},
\end{aligned}
$$

である．W'/W は ε だけにしか依らないから、(1.16) は質量比に依存するベクトル場の１パラメータ族を表わす.

2. 三体衝突多様体上の流れ

この節の目的は三体衝突多様体上に (1.15) によって生成される流れを詳しく記述することである．この流れと直線三体問題で McGehee の調べた流れの間には、いくつか顕著な違いがあることを示そう．次の節では、これらの結果が何を意味するのか、二等辺問題の実際の衝突および近衝突軌道を用いて解釈する.

三体衝突多様体上の流れのもっとも重要な特徴の一つは平衡点つまり不動点である．以下で示すように、これは二等辺問題の中心図形に対応する．しかし、まず三体衝突多様体上の平衡解を計算しよう.

命題 1. (v_0,θ_0,w_0) を三体衝突多様体上の流れの不動点とする．このとき

1. $w_0=0$,
2. $V'(\theta_0)=0$,
3. $v_0^2=-2V(\theta_0)$.

証明. エネルギー関係式 (1.14) より、dv/dt と $d\theta/dt$ は $w_0=0$ のとき、しかもそのときのみゼロになる．$w_0=0$ なら、$V(\theta)=-W(\theta)/\cos\theta$ であるから、同時に

$$
\frac{dw}{dt}=\sin\theta+\frac{W'(\theta)}{W(\theta)}\cos\theta=\frac{-\cos^2\theta V'(\theta)}{W(\theta)},
$$

を得る．ゆえに $V'(\theta_0)=0$ のときかつそのときのみ $\dfrac{dw}{dt}=0$ となる．ゆえに $w_0=0$ かつ $V'(\theta_0)=0$ のときかつそのときのみ不動点がある．このときエネルギー関係式が v_0 を決める．
□

だから、$V(\theta)$ の各臨界点 θ_0 に、三体衝突多様体上の流れのちょうど２つの平衡解が対応する．１つは $v_0<0$ であり、もう１つは $v_0>0$ である．このような臨界点は「中心図形」と呼ばれる．以下の我々の結果の一つによれば、任意の衝突軌道はこれらの平衡解の一つに近づく．すなわち、三体衝突に近づくにつれて、質点は中心図形に近づくという古典的結果を証明したことになる．

これを証明する前に、二等辺問題における中心図形の数を計算しよう．

命題 2. 平面２等辺三角形三体問題には中心図形が３つある．これらは $\theta=0$ における非縮退極小および $\theta=\arctan(\pm\sqrt{3m_3/M})$ における２つの非縮退極大である．

証明. 簡単な計算から出る． □

次に流れが勾配的 (gradient-like) であることを確認しよう．これは、静止していないすべての解に沿って増加する滑らかな実関数がある、ということを意味することを思い起こそう．三体衝突多様体上で、v 軸への射影がこの勾配関数の役割を果たす．事実、(1.15) から、

$$\frac{dv}{dt}=W(\theta)^{1/2}\left(\frac{w^2}{2\cos\theta}\right)\geq 0,$$

である．だから、v は軌道に沿って非減少である．$w=0$ のときのみ $dv/dt=0$ である．ところが、このような点では、$V'(\theta)\neq 0$ として

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \sin\theta+\frac{W'(\theta)}{W(\theta)}\cos\theta\\ &= \frac{-V'(\theta)\cos^2\theta}{W(\theta)}\neq 0,\end{aligned}$$

である．ゆえに事実、v は系の静止していない軌道すべてに沿って増加する．この事実をもう一つの命題として記録しておこう．

命題 3. 三体衝突多様体上の流れの非平衡解のすべてに沿って座標 v は増加する．ゆえに流れは勾配的である．

二等辺問題の解が三体衝突に始まるか終わるかすると仮定しよう．このような解は未来か過去に三体衝突多様体に漸近するはずである．流れは勾配的であるから、三体衝突軌道は平衡点の１つに漸近するはずである．この事実は中心図形による古典的解釈が可能である．

はじめに、三体衝突軌道が $\theta=0$ の２つの平衡点のどちらかに近づくとしよう．これをもとの座標で解釈すれば、

$$x_2/x_1=(M/4m_3)^{1/2}\sin\theta/\cos\theta\to 0,$$

となり、衝突に近づくにつれて質点は直線配位に向かう．これはオイラー (Euler) が発見した直線中心図形である．同様に、軌道が $\theta=\arctan(\pm 3m_3/M)^{1/2})$ にある平衡点に近づけば、

$$x_2^2/x_1^2=M\sin^2\theta/4m_3\cos^2\theta\to 3/4,$$

である．これは衝突に近づくにつれて質点が正三角形配位に近づくことを意味する．こうして、古典的定理を再現した．つまり、

定理. (オイラー、ラグランジュ). 二等辺三角形三体問題における任意の三体衝突軌道は直線中心図形 ($\theta = 0$) に向かうか、正三角形中心図形 ($\theta \neq 0$) に向かう.

以下では、直線中心図形を θ_0 と記し、2 つの正三角形中心図形を、$\theta_- < 0 < \theta_+$ として、θ_+ および θ_- と記そう.

注意. この時点で、新しい r, v, θ, w 座標と古いヤコビ座標との関係を思い出しておくのが有益であろう．変数 r と θ は配位空間の極座標 ($A-$ 計量で) であり、v と w は動径方向と θ 方向の速度座標を縮尺したものである．三体衝突の近くを通過する解の場合、r はゼロの近くを通過し、$\theta-$ 座標はこのとき 3 つの粒子が取る配位を記述する．たとえば、$\theta = 0$ なら、粒子は直線状に並び、$\theta = \pm\pi/2$ なら質量の等しい 2 つの粒子は二体衝突に近く、m_3 は (比較的) 遠くにあって、2 粒子の上または下にある．Fig.3 参照.

こんどは、三体衝突多様体上の不動点の特性指数を計算しよう．三体衝突多様体を横断する方向にもう一つ特性指数があるが、これはあとで計算する．これらの特性指数はすべて不動点 $(0, v, \theta, 0)$ における (1.12) の線形化の固有値として生じる．得られる行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{v\cos\theta}{W(\theta)^{1/2}} & 0 & & * \\ \dfrac{2e\cos\theta}{W(\theta)^{1/2}} & \dfrac{-v\cos\theta}{W(\theta)^{1/2}} & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\cos^2\theta V''(\theta)}{W(\theta)} & -(\cos\theta/2)^{1/2}\mathrm{sgn} v \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

である．これは、(1.12) から簡単に計算できる．その際、エネルギー関係 (1.13)、命題 1 を利用し、また不動点において

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dw}{dt}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta + \frac{W'(\theta)\cos\theta}{W(\theta)}\right) \\ &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\cos^2\theta V'(\theta)}{W(\theta)}\right) \\ &= \frac{-\cos^2\theta V''(\theta)}{W(\theta)}, \end{aligned}$$

であることを利用する.

このとき、流れを三体衝突多様体に制限して得られる特性指数は部分行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-\cos^2\theta V''(\theta)}{W(\theta)} & -((\cos\theta)/2)^{1/2}\mathrm{sgn}v \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

の固有値によって与えられることは簡単に確認できる．これらの固有値は簡単に計算でき、次の値を持つ．

$$\zeta^{\pm} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)^{1/2}\mathrm{sgn}v \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos\theta}{2} - \frac{4\cos^2\theta V''(\theta)}{W(\theta)}}.$$

ラグランジュ(正三角形) 平衡点では、命題 2 より $V''(\theta) < 0$ であるから、根号内の表式は正で $((\cos\theta)/2)^{1/2}/2$ より大きい．ゆえに $\zeta^{\pm}$ の１つは正で、もう１つは負である．したがってラグランジュ平衡点は質量のすべての範囲にわたってサドルである．

オイラー中心図形 θ_0 では状況はまったく異なる．命題２から $V''(\theta) > 0$ であるから、$\zeta^{\pm}$ は両方とも同じ符合の実部 $-(1/2)((\cos\theta)/2)^{1/2}\mathrm{sgn}v$ を持つ．とくに、平衡点は $v > 0$ のとき沈点であり、$v < 0$ のとき源点である．そのうえ、根号内の表式は質量のある範囲では負である．

命題 4. θ_0 にある沈点と源点は、$m_3 < (55/4)m_1$ のとき複素固有値を持つ．

証明. $\theta_0 = 0$ であるから $\zeta^{\pm}$ の式の根号内の表式は

$$1 + \frac{8V''(0)}{V(0)} < 0,$$

のとき負である．簡単に計算できるように

$$V(0) = -\frac{m_1^{5/2}}{\sqrt{2}} - \frac{4m_1^{3/2}m_3}{\sqrt{2}},$$
$$V''(0) = 7m_1^{5/2}/\sqrt{2},$$

であるから、結果はただちにしたがう． □

とくに、m_3 が相対的に小さいとき、三体衝突多様体上の軌道は源点から遠ざかって沈点に巻き込む．これは直線中心図形の近くで三体衝突に近づく軌道に劇的な効果を及ぼす．

次に、三体衝突多様体上の流れの残りの定性的特徴—正三角形配位 $\theta_\pm$ に同伴する４つの平衡点の安定および不安定多様体の最終的ふるまい—に注意を向けよう．安定多様体が発生し、不安定多様体が消滅する場所は近衝突軌道を理解するのに決定的な重要性を持つ．不安定多様体に関しては３つの大きな可能性がある．v は軌道に沿って増加するはずだから、不安定多様体の典型的分枝は三体衝突多様体の左または右「腕」を登っていくか、沈点で消滅する．不安定多様体がちょうどどれかのサドルの安定多様体とつながるという縮退の状況の可能性もある．

最初に確認することは、対称性により、不変多様体のいくつかを調べればよいことである．実際、方程式系 (1.15) は反転 $(v, \theta, w) \to (v, -\theta, -w)$ のもとで不変であり、反転 (reflection) $(v, \theta, w) \to (-v, -\theta, w)$ のもとで時間反転する．したがって、系はこれらの反転の合成 $(v, \theta, w) \to (-v, \theta, -w)$ のもとでやはり時間反転する．ゆえにこれらの対称性により系の不変多様体の構造は保存される．

次に確認することは、サドルの不変多様体のうちいくつかは簡単に記述できることである．たとえば、$v_0 > 0$ として不動点 $(-v_0, \theta_+, 0)$ において、安定多様体の分枝の１つは源点から出るはずであり、もう１つは $\theta = \pi/2$ の低い腕を登って来るはずである．これは流れの勾配的な性質および $w > 0$ のときは $d\theta/dt > 0$ かつ $w < 0$ のときは $d\theta/dt < 0$ という事実からただちに出る．このとき上に述べた対称性から、$(-v_0, \theta_-, 0)$ における安定多様体、$(+v_0, \theta_+, 0)$ および $(+v_0, \theta_-, 0)$ における不安定多様体を決定できる．これらは Fig.4 に描かれている．

こんどは $(-v_0, \theta_\pm, 0)$ における不安定多様体の分枝のうち局所不安定多様体に沿っての w 座標が正のものを考えよう．γ_+ を $(-v_0, \theta_+, 0)$ における分枝とし、γ_- をもう一つの平衡点における分枝とする．上と同じように、対称性の議論により、残りの不変多様体は γ_+ と γ_- を用いて決定できる．たとえば、第一の対称性により、γ_+ と γ_- はそれぞれ θ_- および θ_+ における不安定多様体の分枝に写る．ゆえに残りの不変多様体すべての最終的ふるまいは γ_+ と γ_- のふるまいに依存する．これらは数値的に決定すべきである．R.Moeckel[15] はこの線に沿って、この問題や平面問題そのものに関していくつかの結果を出している．

いままでに計算したすべての質量の値に対して、γ_+ は、Fig.5 に図示したように、$\theta = -\pi/2$ の三体衝突多様体の上の腕を登っていく．これがすべての質量に対して成り立つであろうと予想する．γ_- の場合、状況はもっと微妙である．吟味した質量の範囲では、やはり γ_- も γ_+ と同様、同じ腕を登っていく．ところが、その間、γ_- はサドル $(v_0, \theta_-, 0)$ の近くを通る．ある質量の値に対して、γ_- がこのサドルの安定多様体と交わるか、あるいは沈点に落ち込むことも考えられる．容易に確認できるとおり、γ_+ が $\theta = -\pi/2$ の腕を登るなら、γ_- は $\theta = \pi/2$ の腕を登ることはできない．

以下の我々の結果の大部分は γ_+ のふるまいのみに依存する．γ_+ と γ_- がともに $\theta = -\pi/2$ の腕を登っていくとき、粒子の質量の組は「許される」ということにする．Fig.6. には許される質量の組の場合の流れの完全な図が描かれている．この図が、すべての質量に対して成り立つかどうかはおもしろい問題であり、数値的研究が期待される．

3. 衝突軌道

この節では前節の結果を使って三体衝突に始まったり終わったりする軌道の集合を記述する．衝突にはじまる軌道は「放出」(ejection) 軌道と呼ばれる．三体衝突に終わる軌道は「衝突」軌道と呼ばれる．衝突にはじまり衝突に終わる軌道は「放出 – 衝突」(ejection-collision) 軌道と呼ばれる．前節で示したように、このような軌道はどれも中心図形に同伴する平衡点のどれかに漸近するはずである．つまり、これらは平衡点の安定または不安定多様体上にある．θ_0 における放出軌道および衝突軌道の集合をそれぞれ $E(\theta_0)$ および $C(\theta_0)$ で表わす．同様に、$E(\theta_\pm)$ および $C(\theta_\pm)$ は正三角形中心図形における放出軌道および衝突軌道の集合を表わす．

線形化 (2.1) を使えば、衝突多様体上の平衡点はすべて双曲的であって、放出軌道と衝突軌道は相空間にはめ込まれた部分多様体であることが示せる．これを見るために、$v\cos\theta/W(\theta)^{1/2}$ が (2.1) の固有ベクトル $(v, e, 0, 0)$ に同伴する固有値であることを確認して欲しい．この固有ベクトルは e に対応するエネルギーレベルに接する．これは (1.13) を微分すれば分かる．ゆえに、三体衝突多様体内の次元に加えて、$v_0 > 0$ ならいつも不安定固有値、また $v_0 < 0$ ならいつも安定固有値をひとつ持つ．

ゆえに次の結果を得る．

命題 5. 任意のエネルギーレベル $H = e$ において、$E(\theta_\pm)$ および $C(\theta_\pm)$ はともに 2 次元多様体であるが、$E(\theta_0)$ および $C(\theta_0)$ は 1 次元である．放出軌道はすべて $v_0 > 0$ の平衡点から出発し、衝突軌道はすべて $v_0 < 0$ の平衡点に漸近する．

これは、衝突および放出軌道の集合は各エネルギーレベルの低次元部分多様体の和を構成するという Siegel の古典的結果を再証明したことになる．これはまた、二等辺問題の場合、三体衝突はリュベーグ測度の意味で有り得ないという Saari[6] の結果をも再証明している．(二体衝突は初期条件の大きな開集合に対して起こり得ることを注意しておく.)

各中心図形に伴う三体問題の古典的解がいくつかある．$V'(\theta)=0$ と仮定する．すると θ は中心図形のどれかである．さらに $w=0$ と仮定する．このような点で、系 (1.12) は次のように簡単になる．

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{W(\theta)}}rv,\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{re\cos\theta}{\sqrt{W(\theta)}},\\ \frac{d\theta}{dt} &= 0 = \frac{dw}{dt}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

だから 2 次元 $r, v-$ 平面は、$V'(\theta)=0$ かつ $w=0$ のときはいつも不変である．(3.1) の解の概略を Fig.7 に示した．

これらの曲線はエネルギー関係を $r, v-$ 面に制限したレベル集合として得られることに注意しよう．これらは次式で与えられる．

$$\frac{\cos\theta}{2W(\theta)}v^2 - 1 = \frac{\cos\theta}{W(\theta)}re.$$

Fig.7 の２つの水平な解は $e=0$ のときに生じる．$e<0$ の場合、$v>0$ の平衡点からはじまって $v<0$ の平衡点で終わる唯一の解が存在する．この解は系の平行相似(homothetic) 解と呼ばれている．これは、すべての時間に対して質点が (尺度の不定性を除いて) 同じ配位を取る解である．詳しくは Wintner[14] を参照して欲しい．

とくに、上の考察から、１次元集合 $C(\theta_0)$ および $E(\theta_0)$ がまさに三体問題のこの特殊な解から成っていることが出る．したがって、負エネルギーの場合、$C(\theta_0)=E(\theta_0)$ であり、θ_0 に伴う 2 つの平衡点を結ぶヘテロクリニックな解が得られる．この軌道を配位空間に描くのは簡単である．第三体は原点に固定し、残りの二体はその両側から放出され、有限距離 x 軸に沿って動いた後に速度ゼロに達し、最終的に原点に戻ってきて三体衝突する．

4. 近接衝突軌道

この節では、三体衝突多様体上の流れをどの様に使えば三体衝突の近くを通過する軌道の定性的ふるまいをほとんど完全に記述できるかを示す．簡単のため、負のエネルギー曲面１つに話を限ろう．以下の結果のいくつかはエネルギーレベルがゼロまたは正のところへ適当な修正のもとで拡張できる．

はじめに、前節の最後に記述した直線平行相似軌道の近傍を考えよう．$v_0 < 0$ の両方のラグランジュ平衡点の安定多様体の分枝の１つは θ_0 に対応する源点から出る．m_3 が十分小さい場合、これらの分枝の各々は、命題 4 で見たように、源点のまわりを無限回まわる．したがって、$C(\theta_0)$ は $C(\theta_+)$ および $C(\theta_-)$ の閉包の中にあり、$C(\theta_0)$ を局所的横断面 S で切れば $C(\theta_\pm) \cap S$ は、m_3 が十分小さければ、やはり $C(\theta_0) \cap S$ へ無限回まわりながら落ちていく．

同様なことが $E(\theta_0)$ および $E(\theta_\pm)$ に対しても成り立つ．

さて横断面 S 内に初期条件 p を考える．S が十分小さければ、p を通る軌道は $C(\theta_\pm) \cap S$ と交わるか、$C(\theta_0) \cap S$ と交わるか、あるいは三体衝突に近づくが衝突はしない．最後の場合、軌道は源点の不安定多様体内の軌道を追随するように向かうが、$v_0 < 0$ のサドルの安定多様体にはない．Fig.5 が示すところによれば、許される場合、このような軌道はすべて三体衝突多様体の上側の腕を登る．ゆえに p を通る軌道は S を十分小さく取れば同様にふるまう．

これは次のように解釈できる．直線平行相似解に十分近い軌道は三体衝突で終わるか、三体衝突の近くを通過して、次の２つのどちらかの仕方で離れていく．m_3 が $y-$ 軸の上に向い連星が $y-$ 軸を下に向かうかその逆．軌道が三体衝突に近づけば近づくほど、三体衝突の近傍を離れるとき大きな v の値を達成する．これは各質点が非常に大きな速度で離れていくことを意味している．三体衝突多様体内の軌道が腕を無限回巻くように向かうという事実は全体の流れに関する解釈も与える．すなわち、三体衝突の十分近くに来る軌道は、三体衝突の近傍から離れていく間に、m_1 と m_2 の間の任意に大きな回数の二体衝突を繰り返す．

p を通る後向きの軌道に対しても同様のことが言える．このような軌道は源点から放出されたか、あるいは上で述べたのと同様な仕方で三体衝突の近傍に近づいてはなれていくかである．これから、三体衝突に始まりかつ終わる直線平行相似軌道に近づく、つまり新たな放出－衝突軌道の、可能性が出る．これらの軌道はもちろん直線配位でなく、正三角形中心図形にはじまりかつ終わるはずである．

m_3 が十分に小さくて源点が複素固有値を持つと仮定しよう．局所横断面 S_0 を選んで、エネルギー面のゼロ速度曲線の滑らかな小片を含み、直線平行相似軌道とゼロ速度曲線の交点にある点 q を含むようにする．上の結果によれば、$C(\theta_\pm) \cap S_0$ はともに S_0 において q に収束する滑らかな螺旋である．したがってこれらの螺旋はどれもゼロ速度曲線と無限回交わるはずであ

る．対称性により、このような交点はどれも $E(\theta_{\pm})$ 内にも属すはずである．ゆえにこのような初期条件は放出 – 衝突軌道に導く．Fig.8 を参照して欲しい．

これらの軌道の１つが三体衝突に近づくにつれて、多数回超曲面 $\theta = 0$ を通過することを確認して欲しい．これは、各通過において $x_2 = 0$ を意味する．ゆえにこれらの放出 – 衝突軌道は連星の重心を通って m_3 が振動することを特徴づけている．

また、このような軌道は、三体衝突の直前に質点が三角形配位にジャンプするまではほとんど直線衝突軌道に似ている．

最後に、三体衝突の近くを通過する軌道が、はじめ m_3 が y 軸を上に向かって動いているとして、この軌道のふるまいの可能なすべてを記述しよう．γ は三体衝突多様体上の軌道で $\theta = -\pi/2$ の低い腕を登る軌道とする．γ に近い非衝突軌道を記述しよう．

γ に対して、許される場合において主たる可能性が３つある．

i. γ は $v > 0, \theta = -\pi/2$ の腕を登る．

ii. γ は $v > 0, \theta = +\pi/2$ の腕を登る．

iii. γ は沈点で死ぬ．

各々の場合、近くの軌道は劇的に異なるふるまいを示す．場合 i では、m_3 は三体衝突の近傍から、来たときと同じ方向、つまり $y-$ 軸を下向きに離れていく．一方 m_1 と m_2 は近接連星となって多数の二体衝突を繰り返しながら $y-$ 軸を上方に進む．

場合 ii では、状況はまったく逆である．m_3 は y 軸を上に動き、連星は二体衝突を経験しながら y 軸を下に向かって動く．

場合 iii はおそらく最もおもしろい．これらは「ビリアード shot」と呼ぶ軌道である．三体衝突に近づくにつれて、「キュー球」m_3 は $y-$ 軸を登り、残りの m_1 と m_2 は近接連星となって $y-$ 軸を下に動きながら振動する．三体衝突の近くを通過した後で m_3 は m_1 と m_2 の重心の近くで振動しながら取り残され、二体は (ほぼ)$x-$ 軸に沿って反対方向に飛び去る．

References

1. Broucke, R.: On the isosceles triangle configuration in the planar general three body problem. *Astron. Astrophys.* **73**, 303-313 (1979).

2. Devaney, R.: Morse-Smale singularities in simple mechanical systems. To appear in *J. Diff. Geometry.*

3. McGehee, R.: Triple collision in the collinear three body problem. *Inventiones Math.* **27**, 191-227 (1974).

4. Pollard, H.: *Celestial mechanics*, The Carus Mathematical Monographs, No.18. Mathematical Association of America, 1976.

5. Saari, D.: Singularities and collisions in Newtonian gravitational systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* **49**, 311-320 (1973).

6. Saari, D.: Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems, I and II. *Tans. Amer. Math. Soc.* **162**, 267-271 (1971) and **181**, 351-368 (1973).

7. Samarov, K.L.: Regularization of the Isosceles three-body problem for a non-zero area vector. *Soviet Math. Dokl.* **18**, 245-248 (1977).

8. Siegel, C., Moser, J.: Lectures on Celestial Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1971.

9. Simo, C.: Regularization of triple collision in the general three body problem. In Instabilities in Dynamical Sysytems, (V.Szebehely, ed.), pp.301-307. Dordrecht, D.Reidel, 1979.

10. Simo, C.: Masses for which triple collision is regularizable. To appear in the Proceedings of mathematical Methods in Celestial Mechanics, Oberwolfach, 1978.

11. Sundman, K.: Memoire sur le probleme des trois corps, *Acta Math.* **36**, 105-179 (1912).

12. Sundman, K.: Nouvelles recherches sur le probleme des trois corps. *Acta Soc. Sci. Fenn.* **35**, No.9 (1909).

13. Waldvogel, J.: Stable and unstable manifolds in planar triple collision. In Instabilities in Dynamical Sysytems, (V.Szebehely, ed.), pp.263-271. Dordrecht, D.Reidel, 1979.

14. Wintner, A.: *The Analytical Foundation of Celestial mechanics.* Princeton University Press, 1941.

15. Moeckel, R.: Thesis, University of Wisconsin, Madison.

16. Simo, C.: Analysis of triple collision in the Isosceles problem. In Classical Mechanics and Dynamical Systems. New York, Marcel Dekker, 1980.