谷川清隆 訳

Inventiones mathematicae (1974), **27**, 191-227

直線三体問題の三体衝突
Triple collision in the collinear three-body problem

Richard McGehee

1. 序

古典力学の法則にしたがって k 次元空間の中で動いている n 個の質点を考えよう．粒子 i が質量 $m_i > 0$ および位置 $q_i \in R^k$ を持てば、負のポテンシャルエネルギーは次式で与えられる．

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{||q_i - q_j||}. \tag{1.1}$$

ここで $||\ ||$ は R^k のユークリッドノルムを表わす．粒子の運動は微分方程式系

$$m_i \ddot{q}_i = \nabla_{q_i} U, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

によって記述される．ここで $\nabla_{q_i} U$ は q_i に関する U の勾配である．

粒子の位置 $(q_1, \ldots, q_n)$ は、ある $i \neq j$ に対して $q_i = q_j$ のとき衝突と呼ばれる．上の方程式系は衝突を除いていたるところ定義されている．時刻 $t = 0$ に粒子の位置と運動量が与えられているものとする．衝突から始めない限り、微分方程式の標準的定理により、ある極大区間 $[0, t^*)$ の上で方程式 (1.2) の解の存在と一意性が保証されている．$t^* < \infty$ なら解は t^* で特異性 (singularity) を経験するといわれる．

特異性に近づくときの解のふるまいは完全には理解されておらず、いくつかの可能性が知られている．$t \to t^*$ のときすべての粒子が極限的位置に近づくなら、この極限位置が衝突であることをしめすのは難しくない [12,17]．特異性はこのとき衝突特異性と呼ばれ、解は衝突で終わるといわれる．m 個の粒子が一致し、残りは異なる位置にあるとき、衝突は m 重衝突と呼ばれる．衝突以外の特異性があるかどうか知られていない．

二体問題の場合、変数変換によって二体衝突を方程式の正則点に変換できる [6]．このような変換は二体衝突の正則化 (regularization) と呼ばれる．このとき解は特異性を越えて延長できる．この延長は物理的には弾性反発に対応する．

Sundman[14] は、二体衝突が三体問題でも正則化できることを示した．つまり、解が新しい時間変数の解析関数として二体衝突を通って接続できるように変数を変換できるのである．この場合も延長は弾性反発に対応する．

二体より多い粒子を含む衝突はもちろんもっと複雑であるが、そのふるまいのいくつかの局面は知られている．粒子の配位 (configuration) を、物理的には慣性モーメントに対応するノルムで割った位置と定義する．三体問題の三体衝突において、配位がいわゆる中心図形のひとつに近づくことを Sundman[15] は示している ([12,17]、また以下の 6、7 節参照)．Wintner[17]

が観察したところによると、Sundman の技術を使って n 体問題で n 体衝突に終わる解も中心図形に近づくことが示せる．しかし、$n \geq 4$ の中心図形に関しては少ししか知られていない．

二体衝突は正則化できるから、ほかの特異性にも同じことが出来ないかと疑問が生じる．Siegel[11] は三体問題における三体衝突でこの問題に取り組んだ．彼の発見によれば、たいていの解が三体衝突を通って変換後の時間変数の解析関数として延長できない．彼はまた三体衝突に終わる軌道の集合が相空間の滑らかな部分多様体をなすことを示した．

この論文では、三体衝突による特異性について考える．この特異性を持つ解だけでなく、特異性を持つ解に近い解も記述したい．三体衝突でいちばん簡単な場合は直線三体問題で生じる．この場合、$n = 3$ かつ $k = 1$ であるから粒子の位置 (q_1, q_2, q_3) は R^3 の点である．重心を原点に固定すれば、粒子の位置は $m_1q_1 + m_2q_2 + m_3q_3 = 0$ で決まる平面 $\mathbf{Q}$ に制限される．運動量も平面に制限され、方程式 (1.2) は４次元の１階方程式系に帰着できる．エネルギー保存により、系はさらに３次元エネルギー曲面上のベクトル場へと帰着する．

三体衝突は $\mathbf{Q}$ の原点に対応する．原点を円に膨らませるような変換を行なおう．運動量空間での適当な座標変換により、この変換は定エネルギー曲面の上に、今後「三体衝突多様体」と呼ぶ、２次元境界を貼りつける効果を持つ．時間の変換によりベクトル場を尺度変換し、境界まで延長できるようにする．境界は拡張されたベクトル場で不変である．この境界の点はすべて、もとの座標では三体衝突に対応する．三体衝突多様体上の流れは全く仮想的である．その上の軌道はもとの座標のどんな軌道にも対応しないからである．しかしながら、定エネルギー曲面上の流れは仮想的な境界上も含めて連続である．ゆえに境界近くの流れは、任意に長い時間の間、境界上の流れにしたがう．したがって三体衝突多様体上の軌道のふるまいを利用して、この多様体の近くの、すなわち三体衝突近くの軌道のふるまいを決定できる．

三体衝突多様体を Fig.2 に示しておいた．この上の流れは勾配的であり、また２つのサドル不動点を持つ．三体衝突に終わる軌道はすべて三体衝突多様体に漸近する．

三体衝突多様体の性質をどのように利用するかを示す例として、すでに知られている２つの結果の新しい証明を与える．最初のものは、すでに指摘した Sundman の結果であって、三体衝突軌道は中心図形に近づくというものである．三体衝突軌道は２つの不動点のどれかに漸近するはずであることを示す．この性質が直線問題の場合に Sundman の結果を含んでいることを示す．第二の結果は Siegel のものであって、三体衝突に終わる軌道の集合は定エネルギー曲面のなめらかな部分多様体をなすというものである．直線問題の場合に、これが２つの不動点に適用した安定多様体定理から出ることを示す．

また三体衝突多様体の性質を使って、軌道が三体衝突を越えて延長できるかという問題を調べる．Sundman や Siegel よりもむしろ Easton[4,5] の見方を採用する．Sundman や Siegel は単一の解が時間の解析関数として延長できるかどうかを問題にしたが、Easton は解が近傍の解に関して連続的に延長できるかどうかを問題にする．三体衝突多様体上の流れを吟味することにより、三体衝突は、少なくともいくつかの質量の組合せでは、Easton の意味で「正則化」できないことを示す．

最後に、三体衝突多様体上の流れを使って、いくつかの質量の組合せの場合、以下の性質が成り立つことを示す．すなわち、三体衝突の近くを通過した後では、系は任意に大きな運動エネルギーを持つ．つまり、粒子の１つが一つの方向に任意に大きな速度を持ち、残りの２つが互いに近いまま大きな速度で逆方向に動く．このふるまいはかなり驚くべきものであって、n 体問題において衝突によらない特異性の存在の問題に関係する可能性がある．Painlevé[8] が

示すところによると、このような特異性は三体問題では起こらない．しかし $n \geq 4$ では問題は未解決である．この問題に関し、$n = 5$ の場合に予想を立てる．

2. 準備

運動方程式をハミルトン形式で書くことから始めよう．$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \in R^3$ とおき、また次のようにおく．

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}.$$

直線三体問題の場合、方程式 (1.1) と (1.2) は次のようになる．

$$\begin{aligned} &U(q) = \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|} + \frac{m_1 m_3}{|q_1 - q_3|} + \frac{m_2 m_3}{|q_2 - q_3|}, \\ &M\ddot{\mathbf{q}} = \nabla U(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

$p_i = m_i \dot{q}_i$ を i 番目の粒子の運動量とし、$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in R^3$ とおく．系の運動エネルギーを次のように定義する．

$$T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} + \frac{p_3^2}{m_3}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p}.$$

ハミルトン関数を

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}), \tag{2.2}$$

で定義すれば、方程式 (2.1) は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= H_p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \nabla T(\mathbf{p}) = M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -H_q(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \nabla U(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

関数 T は R^3 上いたるところ定義されている．関数 U は衝突点を除いていたるところ定義されている．

$$\Delta = \{\mathbf{q} \in R^3 : q_1 = q_2, q_2 = q_3, \text{または}\ q_3 = q_1\}$$

を衝突点の集合とする．方程式 (2.3) は $(R^3 - \Delta) \times R^3$ 上のベクトル場を定義する．いくつかの点で定義されていないベクトル場のことを「特異性を持つベクトル場」(vectorfield with singularities) ということにする．だから方程式 (2.3) は $R^3 \times R^3$ 上に特異性を持つベクトル場を定義するという．

重心と直進運動量を取り除いて系 (2.3) の次元を下げることができる．原点に重心を固定すれば、位置座標を線形部分空間

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{q} \in R^3 : m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0\},$$

に制限でき (Fig.1 参照)、運動量座標を部分空間

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in R^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 0\},$$

に制限できる．方程式 (2.3) は 4 次元線形空間 $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ 上に特異性を持つベクトル場を決める．方程式 (2.3) は $(\mathbf{Q} - \Delta) \times \mathbf{P}$ 上にベクトル場を決める．

ハミルトン関数 (2.2) は (2.3) の解に沿って一定であるから、各実数 h に対して不変集合

$$\mathbf{M}(h) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbf{Q} - \Delta) \times \mathbf{P} : H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\}, \tag{2.4}$$

を定義する．この集合は 3 次元多様体である．これを定エネルギー面と呼ぶことにする．だから方程式 (2.3) は $\mathbf{M}(h)$ 上にベクトル場を定義する．

しかし、このベクトル場は完備でない．すなわち、解はすべての時間にわたって存在するわけではない．有限の時間内に、ある解は衝突に向かい、ゆえに $\mathbf{M}(h)$ を去る．二体衝突で終わる解は Sundman[14] のものに似た技術で延長できる．三体衝突に終わる解は衝突に無限時間かかって到達するように減速させよう．

3. 三体衝突による特異性

はじめに $\mathbf{q} = 0$ における特異性を調べよう．

$$r = (m_1 q_1^2 + m_2 q_2^2 + m_3 q_3^2)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{q}^T M \mathbf{q})^{\frac{1}{2}},$$

と定義する．r^2 は粒子系の慣性モーメントであることおよび三体衝突は $r = 0$ に対応することに注意しよう．

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{q} \in \mathbf{Q} : r^2 = \mathbf{q}^T M \mathbf{q} = 1\},$$

は慣性モーメントで与えられるノルムでの $\mathbf{Q}$ における単位円であるとする．$\mathbf{S}$ 上の点は粒子系の配位と呼ばれる．$(r, \mathbf{s}) \in (0, \infty) \times \mathbf{S}$ を写像 $(r, \mathbf{s}) \mapsto r\mathbf{s}$ により、$\mathbf{Q} - \{0\}$ 上の極座標とみなす．

ここで変数を定義する．

$$\begin{aligned}
&r = (\mathbf{q}^T M \mathbf{q})^{\frac{1}{2}}, \\
&\mathbf{s} = r^{-1}\mathbf{q}, \\
&y = \mathbf{p}^T \mathbf{s}, \\
&\mathbf{x} = \mathbf{p} - yM\mathbf{s}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ および $\mathbf{x}^T\mathbf{s} = 0$ に注意する．こうして、運動量 $\mathbf{p}$ を動径成分 y と接線成分 $\mathbf{x}$ に分けた．ここで

$$\mathbf{T} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{P} : \mathbf{q} \in \mathbf{S}, \mathbf{p}^T\mathbf{q} = 0\},$$

とおく．これは $\mathbf{S}$ の接バンドルとみなすことができる．このとき $r \in (0, \infty), y \in R^1$ および $(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \in \mathbf{T}$ である．古い変数は新しい変数によって次のように表わされることに注意する．

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= r\mathbf{s}, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{x} + yM\mathbf{s}. \end{aligned}$$

こうして実解析微分同相

$$(0, \infty) \times R^1 \times \mathbf{T} \to (\mathbf{Q} - \{0\}) \times \mathbf{P} : (r, y, (\mathbf{s}, \mathbf{x})) \mapsto (r\mathbf{s}, \mathbf{x} + yM\mathbf{s}), \tag{3.1}$$

を定義したことになる．

この新しい座標で運動エネルギーは

$$T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T M^{-1}\mathbf{x} + y^2),$$

と書け、ポテンシャルエネルギーは

$$U(\mathbf{q}) = r^{-1}U(\mathbf{s}),$$

と書ける．だからエネルギー関係式 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h$ は次のように書ける．

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T M^{-1}\mathbf{x} + y^2) - r^{-1}U(\mathbf{s}) = h. \tag{3.2}$$

運動方程式 (2.3) は次のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{r} &= y, \\ \dot{y} &= r^{-1}\mathbf{x}^T M^{-1}\mathbf{x} - r^{-2}U(\mathbf{s}), \\ \dot{\mathbf{s}} &= r^{-1}M^{-1}\mathbf{x}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= -r^{-1}y\mathbf{x} - r^{-1}(\mathbf{x}^T M^{-1}\mathbf{x})M\mathbf{s} + r^{-2}U(\mathbf{s})M\mathbf{s} + r^{-2}\nabla U(\mathbf{s}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

U が -1 次の同次式であることに注意すればこれらの方程式を簡単に導出できる．ゆえに ∇U は -2 次の同次式であり、Euler の公式より、

$$\mathbf{q}^T\nabla U(\mathbf{q}) = -U(\mathbf{q}).$$

方程式 (3.3) は $[0, \infty) \times R^1 \times \mathbf{T}$ 上に特異性を持つベクトル場を定義する．三体衝突による特異性を膨らませたことになる．方程式 (2.3) では、三体衝突点の集合は $\{0\} \times \mathbf{P}$ であったが、方程式 (3.3) では、$\{0\} \times R^1 \times \mathbf{T}$、すなわち $r = 0$ の集合になった．二体衝突点の集合は $(0, \infty) \times R^1 \times (\mathbf{T} \cap (\Delta \times \mathbf{P}))$、すなわち $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ が $s_1 = s_2, s_2 = s_3$ または $s_3 = s_1$ を満たす集合になった．二体衝突は 5 節で扱う．まず $r = 0$ の特異性を取り除こう．

ふたたび新しい変数

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r^{1/2}\mathbf{x}, \\
v &= r^{1/2}y,
\end{aligned}
$$

を導入しよう．すなわち、実解析的微分同相

$$
(0,\infty)\times R^1 \times \mathbf{T} \to (0,\infty)\times R^1 \times \mathbf{T} : (r, v, (\mathbf{s}, \mathbf{u})) \mapsto (r, r^{-1/2}v, (\mathbf{s}, r^{-1/2}\mathbf{u})), \tag{3.4}
$$

を導入する．このときエネルギー関係式 (3.2) は次のように書ける．

$$
\frac{1}{2}(\mathbf{u}^T M^{-1}\mathbf{u} + v^2) - U(\mathbf{s}) = rh. \tag{3.5}
$$

また運動方程式 (3.3) は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= r^{-1/2}v, \\
\dot{v} &= r^{-3/2}[(1/2)v^2 + \mathbf{u}^T M^{-1}\mathbf{u} - U(\mathbf{s})], \\
\dot{\mathbf{s}} &= r^{-3/2}M^{-1}\mathbf{u}, \\
\dot{\mathbf{u}} &= -r^{-3/2}[-(1/2)v\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T M^{-1}\mathbf{u})M\mathbf{s} + U(\mathbf{s})M\mathbf{s} + \nabla U(\mathbf{s})].
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

前と同様、これらの方程式は $[0,\infty)\times R^1\times \mathbf{T}$ 上に特異性を持つベクトル場を定義する．二体および三体衝突点は方程式 (3.3) の場合とまったく同じである．けれどもこんどは、時間変換

$$
dt = r^{3/2}dt', \tag{3.7}
$$

によってベクトル場の尺度変換を行なえば、$r=0$ の特異性を取り除ける．方程式 (3.6) は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt'} &= rv, \\
\frac{dv}{dt'} &= \frac{1}{2}v^2 + \mathbf{u}^T M^{-1}\mathbf{u} - U(\mathbf{s}), \\
\frac{d\mathbf{s}}{dt'} &= M^{-1}\mathbf{u}, \\
\frac{d\mathbf{u}}{dt'} &= -\frac{1}{2}v\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T M^{-1}\mathbf{u})M\mathbf{s} + U(\mathbf{s})M\mathbf{s} + \nabla U(\mathbf{s}).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

上の方程式は $r=0$ に特異性を持たないから、三体衝突を含むように運動方程式を拡張したことになる．$\{r=0\}$ は方程式 (3.8) において不変であることに注意しよう．時間変換 (3.7) により、小さな r に対して軌道が減速されるので、三体衝突に終わる軌道は無限時間かかってそこに到達する．三体衝突に終わる軌道の集合はいまや不変集合 $\{r=0\}$ に漸近する軌道の集合である．また、不変集合 $\{r=0\}$ 上の軌道を使えば r が小さいときの (3.8) の軌道、つまり三体衝突の近くを通過する軌道を記述できる．

4. 座標

三体衝突の場所に導入された不変集合について議論する前に、二体衝突による特異性を取り除きたい．次節では軌道を二体衝突を越えて弾性反発として延長するつもりである．計算を楽にするために新しい座標系を導入し、方程式 (3.8) を R^4 上のベクトル場に変換する．

直線上に $q_1 < q_2 < q_3$ の順序で並んだ粒子から話を始めよう．これらの粒子は任意の二体衝突のあとでも順序を保つ．ゆえに任意の軌道に沿って順序は保存される．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_0 &= \{\mathbf{s} \in \mathbf{S} : s_1 < s_2 < s_3\}, \\
\mathbf{S}_1 &= \{\mathbf{s} \in \mathbf{S} : s_1 \le s_2 \le s_3\}, \\
\mathbf{T}_0 &= \{(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in \mathbf{T} : \mathbf{s} \in \mathbf{S}_0\}, \\
\mathbf{T}_1 &= \{(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in \mathbf{T} : \mathbf{s} \in \mathbf{S}_1\},
\end{aligned}
$$

とおく．また $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ および $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ は $\mathbf{S}$ 上で $a_1 = a_2 < a_3$ および $b_1 < b_2 = b_3$ なる一意の点とする．$\mathbf{S}_1$ は $\mathbf{S}$ 上の $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ を端点とする閉区間であり、一方 $\mathbf{S}_0$ は対応する開区間である．端点は二体衝突に対応する．(Fig.1 参照.)

$\mathbf{T}_1$ はコンパクトな区間と実軸との直積に同相であることに注意する．R^6 の部分集合より R^2 の部分集合を取り扱う方が都合がよいので、次に $[-1, 1] \times R^1$ と $\mathbf{T}_1$ の間の微分同相を定義する．

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},
$$

とおき、次を定義する．

$$
A = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} A_1 M + \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^{1/2} M^{-1} A_2.
$$

初等的な計算より、A が以下の性質を持つことが示せる．

$$A^T M A = M, \tag{4.1}$$

$$A : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{q}^T M A \mathbf{q} = 0 \quad \text{if} \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \tag{4.3}$$

$$A^2 \mathbf{q} = -\mathbf{q} \quad \text{if} \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{a}^T A^T M \mathbf{b} > 0. \tag{4.5}$$

$\mathbf{Q}$ が M によって誘導される内積を持てば、A は $\mathbf{Q}$ における 90° の回転であり、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は単位長さを持ち、$\{\mathbf{a}, A\mathbf{a}\}$ は $\mathbf{Q}$ の直交基である．したがって

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}^T M \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a}^T A^T M \mathbf{b}) A \mathbf{a}, \tag{4.6}$$

を得る．

$\mathbf{a}^T M \mathbf{b}$ は質量のみに依存する定数であること、また

$$0 < \mathbf{a}^T M \mathbf{b} < 1,$$

に注意する．λ は

$$\cos 2\lambda = \mathbf{a}^T M \mathbf{b}, \tag{4.7}$$

を満たす最小の正数とする．λ は質量 m_1, m_2 および m_3 のみに依存する定数であることに注意する．このとき式 (4.6) および性質 (4.7) から

$$\mathbf{b} = (\cos 2\lambda)\mathbf{a} + (\sin 2\lambda)A\mathbf{a}, \tag{4.8}$$

である．さて任意の実数 s に対して

$$S(s) = (\sin 2\lambda)^{-1}[(\sin\lambda(1-s))\mathbf{a} + (\sin\lambda(1+s))\mathbf{b}], \tag{4.9}$$

を定義する．

補題 4.1. $S : [-1,1] \to \mathbf{S}_1$ は実解析的微分同相であって次を満たす.

$$S'(s) = \lambda A S(s). \tag{4.10}$$

証明. 明らかに S は実解析的であって、$S(-1) = \mathbf{a}$ および $S(1) = \mathbf{b}$ である．$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}$ であるから、すべての実数 s に対して $S(s) \in \mathbf{Q}$ である．式 (4.8) およびいくらかの三角法の計算から

$$S(s) = (\cos\lambda(1+s))\mathbf{a} + (\sin\lambda(1+s))A\mathbf{a}, \tag{4.11}$$

が得られる．性質 (4.1) および (4.3) から $S(s)^T M S(s) = 1$ が得られ、よってすべての s に対して $S(s) \in \mathbf{S}$ である．ここで性質 (4.4) と公式 (4.11) を使って式 (4.10) が導き出せる．残っているのは $S : [-1,1] \to \mathbf{S}_1$ が一対一であることを示すことだけである．なぜなら、このとき式 (4.10) および逆関数定理から S が実解析的微分同相であることがいえるからである.

$$S(s) = (S_1(s), S_2(s), S_3(s)),$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
S_2(s) - S_1(s) &= (\sin 2\lambda)^{-1}(b_2 - b_1)\sin\lambda(1+s), \\
S_3(s) - S_2(s) &= (\sin 2\lambda)^{-1}(a_3 - a_2)\sin\lambda(1-s), \\
S_3(s) - S_1(s) &= (\sin 2\lambda)^{-1}[(b_2 - b_1)\sin\lambda(1+s) + (a_3 - a_2)\sin\lambda(1-s)],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

を得る．$0 < \lambda < \pi/4$ かつ $s \in [-1,1]$ であるから、$\sin\lambda(1+s)$ と $\sin\lambda(1-s)$ は逆を有し、上の数は 3 つとも正である．したがって $S : [-1,1] \to \mathbf{S}$ は一対一で $s \in [-1,1]$ に対して $S(s) \in \mathbf{S}_1$ である． □

次に関数 S を使って、$(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in T_1$ に対して新しい変数を定義しよう.

$$\begin{aligned}
s &= S^{-1}(\mathbf{s}), \\
u &= \mathbf{s}^T A^T \mathbf{u},
\end{aligned}$$

とおく．このとき $s \in [-1,1]$ および $u \in R^1$ である.

$$\mathcal{R} = [0,\infty) \times R^1 \times [-1,1] \times R^1,$$

とおけば、実解析的微分同相

$$\mathcal{R} \to [0,\infty) \times R^1 \times \mathbf{T}_1 : (r,v,s,u) \mapsto (r,v,(S(s),uMAS(s))), \tag{4.13}$$

を定義したことになる．この写像を $[0,\infty)\times R^1\times(-1,1)\times R^1$ に制限すれば、$[0,\infty)\times R^1\times\mathbf{T}_0$ の上への微分同相となることに注意しよう．

次に式 (3.8) で与えられるベクトル場を変換する．

$$V : (-1,1) \to R^1 : s \mapsto U(S(s)),$$

とおく．将来のために、式 (4.12) を用いてきちんと書けば

$$V(s) = \sin 2\lambda \left[\frac{m_1m_2}{(b_2-b_1)\sin\lambda(1+s)} + \frac{m_2m_3}{(a_3-a_2)\sin\lambda(1-s)} + \frac{m_1m_3}{(b_2-b_1)\sin\lambda(1+s)+(a_3-a_2)\sin\lambda(1-s)}\right]. \tag{4.14}$$

式 (4.10) により、この写像の微分が計算できて

$$V'(s) = \lambda DU(S(s))AS(s). \tag{4.15}$$

変換 (4.13) で定義される新しい変数では、エネルギー関係 (3.5) は

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2) - V(s) = rh, \tag{4.16}$$

となる．一方運動方程式 (3.8) は

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt'} &= rv, \\ \frac{dv}{dt'} &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - V(s), \\ \frac{ds}{dt'} &= \lambda^{-1}u, \\ \frac{du}{dt'} &= -\frac{1}{2}vu + \lambda^{-1}V'(s), \end{aligned} \tag{4.17}$$

となる．

上の式は $\mathcal{R}$ 上に特異性を持つベクトル場を定義する．特異性は $s=\pm1$ のとき生じる．ベクトル場は変換 (4.13) により、式 (3.8) で与えられる $[0,\infty)\times R^1\times\mathbf{T}_1$ 上のベクトル場と微分同相である．だから $\{r=0\}$ は三体衝突に対応し、$\{s=\pm1\}$ は二体衝突に対応する．いま $q_1 \le q_2 \le q_3$ の場合に制限していることに注意しよう．したがって起こり得る二体衝突は粒子 1 と 2($s=-1$) の間、または粒子 2 と 3($s=+1$) の間のもののみである．次節では、式 (4.17) を $\mathcal{R}$ 上の特異性なしのベクトル場へ変換することによって二体衝突を越えて軌道を延長する．

5．二体衝突の正則化

3 次元の三体問題においても軌道が二体衝突を越えて延長できることはよく知られている．Sundman[14] はこのような延長のための解析的技術を与えている．Easton[4,5] は位相的技術を

与え、それを用いて平面三体問題の正則化エネルギー多様体を記述した．ここではSundmanのに似た変換を使ってエネルギー多様体上のすべての二体衝突を大域的に正則化する．正則化は物理的には弾性反発に対応する．

$s \in (-1,1)$ に対して

$$W(s) = 2(1-s^2)V(s), \tag{5.1}$$

を定義する．(4.14) 式を使ってこの関数を書き換えると、

$$W(s) = 2\lambda^{-1}\sin 2\lambda[W_1(s)+W_2(s)+W_3(s)]. \tag{5.2}$$

ここで

$$\begin{aligned}
W_1(s) &= \frac{m_1m_2(1-s)}{(b_2-b_1)Sn(\lambda(1+s))},\\
W_2(s) &= \frac{m_2m_3(1+s)}{(a_3-a_2)Sn(\lambda(1-s))},\\
W_3(s) &= \frac{\lambda m_1m_3(1-s^2)}{(b_2-b_1)\sin\lambda(1+s)+(a_3-a_2)\sin\lambda(1-s)}.
\end{aligned}$$

ただし

$$Sn(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

$Sn(x)$ は $[0,\pi/2]$ 上の正の実解析関数に拡張できるし、$0<\lambda<\pi/4$ であるから、W_1 と W_2 は $[-1,1]$ 上の実解析関数となる．だから、W は $[-1,1]$ 上の正の実解析関数に拡張できる．それを同じく W で表わそう．

さて新しい変数

$$w = (1-s^2)W(s)^{-1/2}u,$$

を定義する．すなわち、実解析関数

$$\begin{aligned}
[0,\infty)\times R^1\times(-1,1)\times R^1 &\to [0,\infty)\times R^1\times(-1,1)\times R^1 :\\
(r,v,s,w) &\mapsto (r,v,s,(1-s^2)^{-1}W(s)^{1/2}w),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

を定義する．エネルギー関係式 (4.16) は

$$w^2+s^2-1+(1-s^2)^2W(s)^{-1}(v^2-2rh)=0, \tag{5.4}$$

となり、運動方程式 (4.17) は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt'} &= rv,\\
\frac{dv}{dt'} &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{W(s)}{2(1-s^2)}(1-\frac{2w^2}{1-s^2}),\\
\frac{ds}{dt'} &= \frac{W(s)^{1/2}}{\lambda(1-s^2)}w,\\
\frac{dw}{dt'} &= -\frac{1}{2}vw + \frac{W(s)^{1/2}}{\lambda(1-s^2)}\left[s(1-\frac{2w^2}{1-s^2})+\frac{1}{2}\frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2)\right].
\end{aligned}$$

二体衝突による特異性は $s=\pm 1$ で生じる．時間変換を行い、またエネルギー関係式を使ってこの特異性を取り除ける．まず時間変換

$$dt' = \lambda(1-s^2)W(s)^{-1/2}d\tau, \tag{5.5}$$

を行なう．このとき上の方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\tau} &= \frac{\lambda(1-s^2)}{W(s)^{1/2}}rv,\\
\frac{dv}{d\tau} &= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{(1-s^2)}{W(s)^{1/2}}v^2 - W(s)^{1/2}(1-\frac{2w^2}{1-s^2})\right],\\
\frac{ds}{d\tau} &= w,\\
\frac{dw}{d\tau} &= s\left(1-\frac{2w^2}{1-s^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2)-\frac{\lambda(1-s^2)}{2W(s)^{1/2}}vw.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

エネルギー関係式 (5.4) から

$$1-\frac{2w^2}{(1-s^2)} = \frac{2(1-s^2)}{W(s)}(v^2-2rh)-1,$$

が得られる．これを (5.6) 式に代入して次が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\tau} &= \frac{\lambda(1-s^2)}{W(s)^{1/2}}rv,\\
\frac{dv}{d\tau} &= \frac{\lambda}{2}W(s)^{1/2}\left[1-\frac{(1-s^2)}{W(s)}(v^2-4rh)\right],\\
\frac{ds}{d\tau} &= w,\\
\frac{dw}{d\tau} &= -s+\frac{2s(1-s^2)}{W(s)}(v^2-2rh)+\frac{1}{2}\frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2)-\frac{\lambda(1-s^2)}{2W(s)^{1/2}}vw.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

これらの方程式は $\mathcal{R}$ 上に実解析ベクトル場を定義する．

各実数 h に対して

$$N(h) = \{(r,v,s,w)\in\mathcal{R} : (5.4)\ \text{が成り立つ}\},$$

とおく．表式 (5.4) の勾配は $N(h)$ 上でゼロにならないから、$N(h)$ は $\mathcal{R}$ の３次元実解析的部分多様体である．(5.4) 式は変換されたハミルトン関数であるから、$N(h)$ はベクトル場 (5.6) のもとで不変である．したがって (5.6) 式は $N(h)$ 上、それが定義されている部分の上でのベクトル場であって、(5.7) は (5.6) を $N(h)$ の全体に拡張したものである．

この時点で、いままで我々がなし得たことを概観してみよう．

$$\begin{aligned}
N_3(h) &= \{(r,v,s,w)\in N(h) : r=0\},\\
N_2(h) &= \{(r,v,s,w)\in N(h) : s=\pm 1\},\\
N_1(h) &= N(h)-(N_3(h)\cup N_2(h)),
\end{aligned}$$

とおく．各固定した実数 h に対して多様体 $\mathbf{M}(h)$ 上に定義されたベクトル場から始めた．次々と変換 (3.1)、(3.4)、(4.13)、および (5.3) をほどこした．これら変換の合成により埋め込み $\mathbf{M}(h) \to N(h)$ を定義する．事実、この埋め込みは $N_1(h)$ の上への実解析的微分同相である．時間変換 (3.7) と (5.5) で定義される尺度変換の後に、$\mathbf{M}(h)$ 上のベクトル場 (2.3) は $N_1(h)$ 上のベクトル場 (5.7) へと移る．ところが、この新しいベクトル場は $N(h)$ 上の実解析的ベクトル場へと拡張できる．$N_2(h)$ の点への拡張は二体衝突の正則化に対応する．$N_3(h)$ の点への拡張は三体衝突点の不変境界を「貼りつける」ことに対応する．$\mathbf{M}(h)$ 上の任意の軌道は $N_1(h)$ 上の任意の軌道へと移される．しかし、$M(h)$ 上の二体衝突で終わる軌道はいまや $N_2(h)$ の点を通って延長される．$\mathbf{M}(h)$ 上の三体衝突で終わる軌道はいまや減速され、$N_3(h)$ に漸近的に近づく．

三体衝突に終わる軌道はいまではすべての時間にわたって定義される．ベクトル場 (5.7) は、時間変換 (3.7) のために r が大きいときに軌道の速度が増し、ある種の解は有限時間で無限遠に到達してしまうことを除いて完備になる．(3.7) を

$$dt = \frac{r^{3/2}}{1+r^{3/2}} dt',$$

で置き換えれば、この問題は回避できる．ベクトル場 (5.7) はそのときスカラー $1+r^{3/2}$ で割ったものになり、完備になるだろう．しかし、この論文では $r=0$ の近くの軌道のみ扱うから、簡単な方の変換 (3.7) を選んだ．

任意の点 $x=(r,v,s,w) \in N(h)$ に対して、$t=0$ に x を出発する (5.7) 式の解を $\varphi(x,t)$ で表わす．今後ややあらっぽく、φ を「ベクトル場 (5.7) によって決定される流れ」と呼ぶことにする．

6. 三体衝突多様体

今度は三体衝突点の不変集合に注意を向けよう．3 次元多様体 $N(h)$、$N(h)$ 上のベクトル場 (5.7)、およびこのベクトル場で与えられる流れ φ がある．不変境界 $N_3(h)$ は三体衝突に対応する．エネルギー関係式 (5.4) で $r=0$ とおけば、

$$w^2 + s^2 - 1 + (1-s^2)^2 W(s)^{-1} v^2 = 0, \tag{6.1}$$

が得られる．こうして

$$N_3(h) = \{(r,v,s,w) \in \mathcal{R} : r=0 \text{ かつ (6.1) が満たされる} \},$$

である．だから今後これを「三体衝突多様体」と呼ぼう．三体衝突多様体はエネルギー h に依らないことに注意しよう．記号の便宜のために次のように書く．

$$C = N_3(h).$$

三体衝突多様体 C は 2 次元球から 4 点を除いたものに同相な 2 次元多様体である．(Fig.2 参照)．これは変換によって導入され、その上の軌道はもとの方程式の実際の軌道でないという意味で仮想的な存在である．しかし、流れ φ は連続であるから C 上の流れを使って C の近くの流れを記述でき、ゆえにもとの方程式の三体衝突近くの解を記述するのに使える．

C 上のベクトル場は (5.7) 式で $r = 0$ とおいて与えられる．

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\lambda}{2} W(s)^{1/2} \left[1 - v^2 \frac{(1-s^2)}{W(s)} \right], \tag{6.2a}$$

$$\frac{ds}{d\tau} = w, \tag{6.2b}$$

$$\frac{dw}{d\tau} = -s + \frac{2s(1-s^2)}{W(s)} v^2 + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)} (1 - s^2 - w^2) - \frac{\lambda}{2} \frac{(1-s^2)}{W(s)^{1/2}} vw. \tag{6.2c}$$

このベクトル場を調べる前に中心図形の概念を思い出しておくのが都合よい (Wintner[17] 参照)．

定義. 点 $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{S}$ が中心図形と呼ばれるのは

$$\nabla U(\mathbf{s}_0) = \mu M \mathbf{s}_0,$$

が、ある実数 μ に対して成り立つときである．

中心図形の重要性の一部はいわゆる同形(ホモグラフィック) 解から出てくる．もとの 2 階運動方程式 (2.1) を思いだそう．$\rho(t)$ は

$$\ddot{\rho}(t) = -\mu \rho(t)^{-2}, \tag{6.3}$$

を満たす正の関数であるとする．このとき $\mathbf{q}(t) = \rho(t)\mathbf{s}_0$ が (2.1) の解であることがわかる．粒子の配位が時間とともに変わらないので、この解は同形 (homographic) と呼ばれる．(6.3) のすべての解はある有限時間の間にゼロに向かうから、同形解は三体衝突に始まるかまたは終わる．だから三体衝突軌道は存在する．

上で導入した座標で、中心図形は V の臨界点に対応する．

命題 6.1． $\mathbf{s}_0 = S(s_0)$ が中心図形であるのは $V'(s_0) = 0$ のときまたそのときのみである．

<u>証明.</u> $\mathbf{s}_0$ が中心図形であるとする．このとき (4.15) 式は

$$V'(s_0) = \lambda DU(\mathbf{s}_0)A\mathbf{s}_0 = \lambda\mu\mathbf{s}_0^T MA\mathbf{s}_0,$$

を意味する．だから性質 (4.3) より、$V'(s_0) = 0$ である．

逆に $V'(s_0) = 0$ と仮定する．このとき、ふたたび (4.15) 式より

$$\mathbf{s}_0^T A^T \nabla U(\mathbf{s}_0) = DU(\mathbf{s}_0)A\mathbf{s}_0 = 0,$$

を得る．$\nabla U(\mathbf{s}_0) \in P$ であるから、ある実数 α および β に対して

$$\nabla U(\mathbf{s}_0) = \alpha M\mathbf{s}_0 + \beta MA\mathbf{s}_0,$$

と書ける．したがって性質 (4.1) および (4.3) より

$$0 = \alpha\mathbf{s}_0^T A^T M\mathbf{s}_0 + \beta\mathbf{s}_0^T A^T MA\mathbf{s}_0 = \beta,$$

を得、よって $\nabla U(\mathbf{s}_0) = \alpha M\mathbf{s}_0$ となる．だから $\mathbf{s}_0$ は中心図形である． □

三体問題の中心図形はよく知られている (Wintner[17] 参照)．いわゆる直線中心図形で $s_1 < s_2 < s_3$ となるものはひとつしかない．

命題 6.2． 唯一の中心図形 $\mathbf{s}_c \in \mathbf{S}_1$ がある．

<u>証明.</u> 前の命題より V が $(-1, 1)$ 上に唯一の臨界点を持つことを示さねばならない．$s \to \pm 1$ のとき $V(s) \to \infty$ であるから、V は臨界点を持つ．(4.15)、(4.10)、(4.4) および Euler の公式を使って

$$V''(s) = \lambda^2[D^2U(S(s))(AS(s), AS(s)) + V(s)], \tag{6.4}$$

と計算できる．U の定義より

$$D^2U(\mathbf{q})(\xi, \eta) = \sum_{i<j} \frac{2m_i m_j(\xi_i - \xi_j)(\eta_i - \eta_j)}{|q_i - q_j|^3},$$

と計算できる．ゆえに $D^2U(\mathbf{q})$ は正定値である．$V(s) > 0$ であるから、(6.4) 式よりすべての $s \in (-1, 1)$ に対して $V''(s) > 0$ が出る．だから V は唯一の臨界点 (最小) を持つ． □

いまや C 上の流れの不動点を計算できる．$\mathbf{s}_c = S(s_c)$ を $\mathbf{S}_1$ 上の中心図形とし、

$$v_c = (2V(s_c))^{1/2} = \left(\frac{W(s_c)}{1 - s_c^2}\right)^{1/2}, \tag{6.5}$$

とする．C 上に次の 2 点を定義する (Fig.2 参照)．

$$\begin{aligned} c &= (0, -v_c, s_c, 0), \\ d &= (0, v_c, s_c, 0). \end{aligned}$$

命題 6.3. C に制限した流れ φ はちょうど 2 つの不動点 c と d を持つ.

証明. 点 $x = (0, v, s, w) \in C$ が φ の不動点であるのは、x がベクトル場 (6.2) のゼロであるときまたそのときのみである. (6.2b) および (6.2a) より、x がゼロであるのは $w = 0$ かつ

$$v^2 = \frac{W(s)}{(1 - s^2)}, \tag{6.6}$$

のときのみである. だから (6.2c) より

$$s + \frac{1}{2}\frac{W'(s)}{W(s)}(1 - s^2) = 0,$$

が得られる. ところが W の定義より

$$\frac{W'(s)}{W(s)} = -\frac{2s}{1 - s^2} + \frac{V'(s)}{V(s)}.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\frac{V'(s)}{V(s)} = 0,$$

が得られる. したがって $s = s_c$ である. このとき (6.6) より $v = \pm v_c$、すなわち $x = c$ または $x = d$ を得る. □

以下で (6.2) 式の解に沿って座標 v が増加することを示そう. だから C 上の流れ φ は「勾配的」と我々が呼ぶところの性質を示す.

定義. ψ は完備距離空間 X の流れであるとする. 連続関数 $g : X \to R^1$ があって、x が不動点でない限り

$$g(\psi(x, t)) < g(x) \quad \text{if} \quad t > 0,$$

が成り立つとする. さらに、ψ の不動点は孤立 (isolated) しているとする. このとき ψ は (g に関して)「勾配的」(gradient-like) といわれる.

命題 6.4. C に制限した流れ φ は

$$g : C \to R^1 : (0, v, s, w) \mapsto -v,$$

に関して勾配的である.

証明. (6.2a) 式は $s = \pm 1$ のとき $\frac{dv}{d\tau} > 0$ を意味する. (6.2a) を (6.1) と結合して、$s \neq \pm 1$ のとき

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\lambda}{2} W(s)^{1/2} \frac{w^2}{1 - s^2},$$

を得る. したがって

$$\frac{dv}{d\tau} > 0 \quad \text{if} \quad w \neq 0 \quad \text{or} \quad s = \pm 1.$$

$w=0$ かつ $s \neq \pm 1$ のとき

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d^2v}{d\tau^2} = 0,$$
$$\frac{d^3v}{d\tau^3} = \frac{\lambda(1-s^2)^3}{W(s)^{3/2}} V'(s)^2.$$

と計算できる．命題 6.1 より、最後の表式は $s=s_c$ のときを除いて正である．だから v は 2 つの不動点を除いていたるところで増大する． □

命題 6.3 および 6.4 から三体衝突多様体 C 上の流れが記述できる．10 節では、ある種の質量に対してもっと完全な記述を展開するが、まず三体衝突に終わる軌道の集合に関して知られている 2 つの定理について議論しよう．

7. 三体衝突軌道の漸近的ふるまい

Sundman[15] は 3 次元三体問題において三体衝突に終わる軌道が漸近的に中心図形に近づくことを証明した．この節では、直線問題で別の証明を与えよう．

(2.3) 式の解 $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ は、ある実数 t_1 に対して、$t \to t_1$ のとき $\mathbf{q}(t) \to 0$ となるならば三体衝突軌道と呼ばれる．$t \to t_1-$ のとき $\mathbf{q}(t) \to 0$ となるなら三体衝突に終わるといわれ、$t \to t_1+$ のとき $\mathbf{q}(t) \to 0$ となるなら三体衝突に始まるといわれる．

定理 7.1.(Sundman). $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ を三体衝突軌道とする．すると $t \to t_1$ のとき

(a)
$$\frac{\mathbf{q}(t)}{r(t)} \to \mathbf{s}_c, \quad \text{および}$$

(b)
$$r(t) \sim \kappa(t_1 - t)^{2/3}.$$

$r(t)^2$ が慣性モーメントであったことを思いだそう．だから Sundman は三体衝突軌道が中心図形に近づくことばかりでなく、慣性モーメントが $(t_1-t)^{4/3}$ の形でゼロに近づくことを証明した．陳述 (a) と (b) はときに結合して

$$\mathbf{q}(t) \sim \kappa(t_1 - t)^{2/3} \mathbf{s}_c,$$

とも書かれる．定数 κ の値は以下の証明で与える．

直線の場合の Sundman の定理を証明するのに、これ以前の節で導入した変換を使い、距離空間の流れの一般的考察を基礎にする．完備距離空間 X 上の流れ ψ に対して、点 $x_0 \in X$ の ω 極限集合を

$$\omega(x_0) = \cap_{t>0} \overline{\psi(x, [t, \infty))}.$$

で表わす．ここで上つきの線は位相閉包を表わす．定理 7.1 は次の補題の帰結である．この補題の証明は補遺で与える．

補題 7.2. ψ は局所コンパクトな距離空間 X 上の流れとする．$x_0 \in X$ は $\omega(x_0)$ が空でなくコンパクトな集合であるような点とする．ψ を $\omega(x_0)$ に制限すると勾配的であるとする．このとき $\omega(x_0)$ は 1 点である．

三体衝突軌道の ω 極限集合が空でなくコンパクトであることを示せれば、定理 7.1 はほぼ直ちに上の補題から出る．以下の記法が必要である．この記法は 9 節でも用いる．

$\nu > \alpha > 0$ に対して、変換された定エネルギー多様体 $N(h)$ の部分集合を以下のように定義する (Fig.3 参照).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{B}(h,\alpha) = \{(r,v,s,w) \in N(h) : r \le \alpha\},\\
&B_0(h,\alpha,\nu) = \{(r,v,s,w) \in \mathbf{B}(h,\alpha) : |v| \le \nu - r\},\\
&B^-(h,\alpha,\nu) = \{(r,v,s,w) \in \mathbf{B}(h,\alpha) : v \ge \nu - r\},\\
&B^+(h,\alpha,\nu) = \{(r,v,s,w) \in \mathbf{B}(h,\alpha) : -v \ge \nu - r\},\\
&b^\pm(h,\alpha,\nu) = \{(r,v,s,w) \in B^\pm(h,\alpha,\nu) : r = \alpha\},\\
&\sigma^\pm(h,\alpha,\nu) = B^\pm(h,\alpha,\nu) \cap B_0(h,\alpha,\nu).
\end{aligned}
$$

軌道孤 $\varphi(x_0,[\tau,\tau'])$ が閉集合 K において極大であるとは、それが K の部分集合であって、任意の大きな区間 $I \supset [\tau,\tau']$ に対して $\varphi(x_0,I) \not\subset K$ のときである．

命題 7.3. $\nu > \alpha - h$ とする．$\varphi(x_0,[\tau,\tau'])$ が $B^-(h,\alpha,\nu)$ における極大軌道孤なら、$\varphi(x_0,\tau) \in \sigma^-(h,\alpha,\nu)$ かつ $\varphi(x_0,\tau') \in b^-(h,\alpha,\nu)$ である．

証明. (5.7) 式の最初の 2 つを加え (5.4) をそれに代入すれば、$s \ne \pm 1$ に対して

$$
\frac{d}{d\tau}(v+r) = \lambda\left[\frac{W(s)^{1/2}}{2(1-s^2)}w^2 + r\frac{(1-s^2)}{W(s)^{1/2}}(h+v)\right],
$$

を得、$s = \pm 1$ に対して

$$
\frac{d}{d\tau}(v+r) = \frac{1}{2}\lambda W(s)^{1/2},
$$

を得る．$(r,v,s,w) \in \sigma^-$ なら $v = \nu - r$ かつ $r \le \alpha$ であるから、$v \ge \nu - \alpha$ である．仮定により $\nu > \alpha - h$ であるから $v + h > 0$ である．したがって $(r,v,s,w) \in \sigma^-$ に対して $\frac{d}{d\tau}(v+r) > 0$ である．だから σ^- 上の点は B^- に入るから $\varphi(x_0,\tau') \in b^-$ である．$(r,v,s,w) \in b^-$ は $v > 0$ を意味するから、(5.7) の第一式から b^- 上の点は B^- を出ていく．つまり $\varphi(x_0,\tau) \in \sigma^-$ である．□

同様な議論により次が証明できる．

命題 7.4. $\nu > \alpha - h$ とする．$\varphi(x_0,[\tau,\tau'])$ が $B^+(h,\alpha,\nu)$ における極大軌道孤なら、$\varphi(x_0,\tau) \in b^+(h,\alpha,\nu)$ かつ $\varphi(x_0,\tau') \in \sigma^+(h,\alpha,\nu)$ である．

定理 7.1 の証明. 三体衝突に終わる軌道の場合のみを考えよう．三体衝突に始まる軌道の証明も本質的におなじである．

$x_0 = (r_0, s_0, v_0, w_0) \in N(h)$ を変換 (3.1)、(3.4)、(4.13)、および (5.3) のもとでの $(q(0), p(0))$ の像とする．だから軌道

$$\{(q(t), p(t)) : t \in [0, t_1)\},$$

は軌道 $\varphi(x_0, [0, \tau_1))$ に写される．三体衝突軌道の定義より $\tau \to \tau_1$ のとき $r(\tau) \to 0$ であり、また $\{r = 0\}$ は流れに対して不変な集合であるから、$\tau_1 = \infty$ のはずである．

$\alpha > 0$ を固定する．$r(\tau) \to 0$ であるから、$\tau_2 > 0$ があってすべての $\tau \geq \tau_2$ に対して $r(\tau) < \alpha$ であり、ゆえに $\varphi(x_0, \tau) \in \mathbf{B}(h, \alpha)$ である．次のように ν を選ぶ．

$$\nu > \alpha + \max(-h, |v(\tau_2)|).$$

このとき $\varphi(x_0, \tau_2) \in B_0(h, \alpha, \nu)$ である．背理法により

$$\varphi(x_0, \tau) \in B_0(h, \alpha, \nu) \quad \text{for all} \quad \tau \geq \tau_2, \tag{7.1}$$

を示そう．

ある $\tau_3 \geq \tau_2$ に対して $\varphi(x_0, \tau_3) \in B^-(h, \alpha, \nu)$ と仮定する．このとき命題 7.3 および $r(\tau) < \alpha$ であることはすべての $\tau \geq \tau_3$ に対して $\varphi(x_0, \tau) \in B^-$ を意味する．ところが B^- の点に対しては $v > 0$ であるから、(5.7) の最初の式より $\tau \geq \tau_3$ に対して $\frac{dr}{d\tau} \geq 0$ が出る．ところがこれは $r(\tau) \to 0$ に矛盾する．したがって $\tau \geq \tau_2$ に対して $\varphi(x_0, \tau) \notin B^-$ である．命題 7.4 から、$\tau \geq \tau_2$ に対して $\varphi(x_0, \tau) \notin B^+$ が出る．だから (7.1) が示された．

B_0 はコンパクトであるから、$\omega(x_0)$ は空でないコンパクトな集合である．$r(\tau) \to 0$ であるから $\omega(x_0) \in C$ である．命題 6.4 より $\omega(x_0)$ に制限した流れは勾配的である．したがって補題 7.2 より $\omega(x_0)$ は正確に 1 点からなり、必然的に不動点である．命題 6.3 よりただ 2 つの不動点は c と d であるから

$$(r, v, s, w) \to (0, \pm v_c, s_c, 0) \quad \text{as} \quad \tau \to \infty,$$

である．だから $\tau \to \infty$ のとき $r^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{s} \to \mathbf{s}_c$ であり、定理 7.1 の (a) が確立された．

(5.7) の第一式から $v(\tau) \not\to v_c$ である．$\frac{dr}{d\tau} > 0$ だからである．したがって

$$\varphi(x_0, \tau) \to c \quad \text{as} \quad \tau \to \infty,$$

であり、

$$\frac{dr}{d\tau} \sim -\frac{\lambda(1 - s_c^2)}{W(s_c)^{1/2}} v_c r \quad \text{as} \quad \tau \to \infty,$$

を得る．時間変換 (3.7) と (5.5) は

$$\frac{dr}{dt} \sim -v_c r^{-1/2},$$

を意味するから、

$$r(t) \sim (\tfrac{3}{2} v_c)^{2/3} (t_1 - t)^{2/3} \quad \text{as} \quad t \to t_1-,$$

である．だから定理 7.1 の (b) も確立した． □

三体衝突に始まる軌道は性質

$$\varphi(x_0,\tau)\to d \quad \text{as} \quad \tau\to\infty,$$

を持つことに注意すべきである． **8．三体衝突軌道の集合**

Siegel[11,12] は３次元三体問題の三体衝突軌道すべての集合を記述した．彼は主として三体衝突が「正則化」できるかどうかを問題にした．正則化問題は次節にまわして、ここでは三体衝突に終わる軌道の集合はエネルギー曲面の滑らかな部分多様体をなすという Siegel の仕事の系 (corollary) を問題にしよう．この節では直線の場合の Siegel の系の証明を与える．

証明は三体衝突多様体上の臨界点 c に安定多様体定理を適用して得られる．定理 7.1 より三体衝突に終わる軌道の集合は正確に点 c の安定多様体である．c におけるヤコビ行列式が１つは正の、２つは負の固有値を持つこと、したがって c の安定多様体は２次元であることを計算で出そう．(Fig.4 参照)

図 4

定理 8.1 (Siegel). 三体衝突に終わる軌道の集合は３次元定エネルギー曲面の実解析的２次元はめ込み部分多様体である．

<u>証明.</u> 上の注意より、ヤコビ行列

$$J:T_cN(h)\to T_cN(h),$$

の固有値を計算すればよい．ここで T_cN は c における N への接空間である．

$F=(F_1,F_2,F_3,F_4):\mathcal{R}\to R^4$ を (5.7) 式で定義されるベクトル場とする．このとき $DF(c):R^4\to R^4$ は $T_cN(h)$ を不変にし、J は $DF(c)$ の $T_cN(h)$ への制限である．

$c = (0, -v_c, s_c, 0)$ であることを思いだそう．(5.1) 式と (6.5) 式を使って次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
DF_1(c)(\rho,\gamma,\sigma,\chi) &= -\lambda(1-s_c^2)^{1/2}\rho,\\
DF_2(c)(\rho,\gamma,\sigma,\chi) &= \frac{\lambda(1-s_c^2)^{1/2}}{v_c}(2h\rho+v_c\gamma),\\
DF_3(c)(\rho,\gamma,\sigma,\chi) &= \chi,\\
DF_4(c)(\rho,\gamma,\sigma,\chi) &= -\frac{4s_c}{v_c^2}(h\rho+v_c\gamma)+\frac{V''(s_c)}{v_c^2}(1-s_c^2)\sigma+\frac{\lambda}{2}(1-s_c^2)^{1/2}\chi.
\end{aligned}
$$

$N(h)$ の定義 (5.4) より

$$
T_cN(h) = \{(\rho,\gamma,\sigma,\chi)\in R^4 : h\rho+v_c\gamma=0\},
$$

であることがわかる．だから、$(\rho,\gamma,\sigma,\chi)\in T_cN(h)$ に対して

$$
\begin{aligned}
J(\rho,\gamma,\sigma,\chi) &= DF(c)(\rho,\gamma,\sigma,\chi)\\
&= \left(-\lambda(1-s_c^2)^{1/2}\rho, \frac{\lambda(1-s_c^2)^{1/2}}{v_c}h\rho, \chi, \frac{V''(s_c)}{v_c^2}(1-s_c^2)\sigma+\frac{\lambda}{2}(1-s_c^2)^{1/2}\chi\right),
\end{aligned}
$$

を得る．ここで $T_cN(h)$ の基 $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ として次のものをとる．

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= (-v_c, h, 0, 0),\\
\xi_2 &= (0,0,1,0),\\
\xi_3 &= (0,0,0,1).
\end{aligned}
$$

$\{\xi_2,\xi_3\}$ は T_cC の基であることに注意しよう．この基において J の行列は

$$
\begin{bmatrix}
-\lambda(1-s_c^2)^{1/2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 1\\
0 & (1-s_c^2)\dfrac{V''(s_c)}{v_c^2} & \dfrac{\lambda}{2}(1-s_c^2)^{1/2}
\end{bmatrix}.
$$

だから ξ_1 は固有値 $-\lambda(1-s_c^2)^{1/2}$ に属する固有ベクトルである．J の特性方程式は T_cC に制限すると

$$
x^2-\frac{\lambda}{2}(1-s_c^2)^{1/2}x-(1-s_c^2)\frac{V''(s_c)}{v_c^2}=0,
$$

となる．命題 6.2 の証明の中で $V''(s_c)>0$ を示した．したがって上の方程式は負の根を 1 つと正の根を 1 つ持つ．だから c は C 内に 1 次元安定多様体と 1 次元不安定多様体を持つ．$N(h)$ 上に負の固有値が加わるから、安定多様体は 2 次元になる． □

三体衝突に始まる軌道の集合に関しても同じ定理が成り立つ．この場合、d の不安定多様体が 2 次元であることが証明できる．$-v_c$ を $+v_c$ に置き換えれば議論はまったく同じである．

9. 三体衝突のまわりの孤立化ブロック

三体衝突を越えて軌道を延長できるのだろうか?もちろん三体衝突に終わる軌道を三体衝突に始まる軌道のどれかと勝手に結ぶことはできる．問題はこの接続が意味ある仕方でできるかどうかである．

Siegel は解析的な観点からこの問題を調べた [11,12]．彼は三体衝突に終わる単一の軌道に注目し、軌道が時間の関数として接続できるかどうかを問題にした．一般にこれができないことを彼は見つけた．

しかしながら、多様体上の流れという文脈からすると、別の見方がもっと自然かもしれない．流れができるような仕方で、三体衝突に終わるすべての軌道を三体衝突に始まる軌道と接続できないものか?この接続をするためには、互いの近くから出発し、しかも三体衝突の近くから出発する各 2 本の軌道が長い時間の間近くにとどまる必要がある．

Easton は上で述べた概念を精密にするような正則化の定義を与えた [4]．彼はこの定義を使って二体衝突を延長した後の三体問題の積分曲面を記述した [5]．この節では、Easton の定義を簡単に述べ、それを使って、ある質量の場合には三体衝突を越えて軌道を延長できないことを示す．これらの定義の背後の動機に関する広範な議論については Easton[4,5]、Conley and Easton[3] および Churchill[1] を参照して欲しい．

はじめに記法を導入する必要がある．ψ を多様体 M 上の流れとし、$\mathbf{B}$ を同じ次元の部分多様体とする．$\mathbf{b}$ を $\mathbf{B}$ の境界とし、次を定義する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^+ &= \{x \in \mathbf{b} : \psi(x,(-\varepsilon,0)) \cap \mathbf{B} = \emptyset \quad \text{for some} \quad \varepsilon > 0\}, \\
\mathbf{b}^- &= \{x \in \mathbf{b} : \psi(x,(0,\varepsilon)) \cap \mathbf{B} = \emptyset \quad \text{for some} \quad \varepsilon > 0\}.
\end{aligned}$$

<u>定義.</u> $\mathbf{b}^+ \cup \mathbf{b}^- = \mathbf{b}$ のとき $\mathbf{B}$ を孤立化ブロックと呼ぶ．

次のようにおく．

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^+ &= \{x \in \mathbf{b}^+ : \psi(x,t) \in \mathbf{B} \quad \text{for all} \quad t \geq 0\}, \\
\mathbf{a}^- &= \{x \in \mathbf{b}^- : \psi(x,t) \in \mathbf{B} \quad \text{for all} \quad t \leq 0\}
\end{aligned}$$

また流れに沿って $\mathbf{b}^- - \mathbf{a}^-$ に当たるまで行き、$\Psi : \mathbf{b}^+ - \mathbf{a}^+ \to \mathbf{b}^- - \mathbf{a}^-$ を定義する．Ψ を「ブロック $\mathbf{B}$ を横切る写像」と呼ぶ．孤立化ブロックの重要な性質は写像 Ψ が同相写像であることである [3,1]．

<u>定義.</u> Ψ が同相写像 $\mathbf{b}^+ \to \mathbf{b}^-$ に拡張できるとき $\mathbf{B}$ は <u>正則化可能</u> といわれる．そうでないとき <u>正則化不可能</u> といわれる．

(5.7) 式で与えられる流れ φ を考えよう．7 節の $\mathbf{B}(h,\alpha)$ の定義を思いだそう．任意に h が与えられたとき、$\mathbf{B}(h,\alpha)$ は十分小さな α に対して孤立化ブロックである．実際、

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^+(h,\alpha) &= \{(r,v,s,w) \in \mathbf{B}(h,\alpha) : r = \alpha, v \leq 0\}, \\
\mathbf{b}^-(h,\alpha) &= \{(r,v,s,w) \in \mathbf{B}(h,\alpha) : r = \alpha, v \geq 0\}.
\end{aligned}$$

さらに、$\mathbf{a}^+(h,\alpha)$ は $\mathbf{b}^+(h,\alpha)$ と c の安定多様体との共通部分であり、$\mathbf{a}^-(h,\alpha)$ は $\mathbf{b}^-$ と d の不安定多様体との共通部分である．$\mathbf{B}(h,\alpha)$ が正則化不可能なら、$\mathbf{B}(h,\gamma)$ はすべての $\gamma \leq \alpha$ に対して正則化不可能である．だから $\mathbf{B}(h,\alpha)$ がある α に対して正則化不可能のとき三体衝突はエネルギー h に対して正則化不可能ということにする．次の定理を証明したい．

定理 9.1. 質量 m_1, m_2 および m_3 があって、三体衝突はすべてのエネルギーに対して正則化不可能である.

この定理の証明は三体衝突多様体 C 上の流れを詳しく調べることに依存している．とくに、c の不安定多様体を構成する 2 つの軌道の位置を決める必要がある.

<u>定義.</u> C 上の流れ φ が全縮退であるとは、c の不安定多様体が d の安定多様体と完全に一致するときである．(Fig.5 参照).

図 5

次節では、ある質量の値に対して φ が全縮退でないことを示す．この節の残りでは φ が全縮退でないとき、三体衝突は正則化不可能であることを証明する.

7 節の B^-, b^- および σ^- の定義を思いだそう．今後エネルギー h を固定し $\alpha > 0$ を選んで $\mathbf{B}(h,\alpha)$ が孤立化ブロックになるようにする．記法を効率的にするために、$\mathbf{B} = \mathbf{B}(h,\alpha)$, $B^-(\nu) = B^-(h,\alpha,\nu)$ 等々と書く．Φ をブロック $\mathbf{B}$ を横切る写像とする.

命題 9.2. C 上の φ は全縮退でないとする．$a_0 \in \mathbf{a}^+$ とし、U は a_0 を含む $\mathbf{b}^+$ の開部分集合とし、$\nu > v_c$ とする．このとき $x_\nu \in U$ が存在して $\Phi(x_\nu) \in b^-(\nu)$ である．(Fig.6 参照).

<u>証明.</u> C 上の φ の勾配的性質および非縮退性条件から、c の不安定多様体の少なくとも 1 つの分枝は $\sigma^-(\nu)$ と交わることがわかる．命題 7.3 の証明から分かるように、$\sigma^-(\nu)$ は流れの断面である．また定義から分かるように、$\mathbf{b}^+$ も断面である．φ は c の近傍では線形部分で近似できるから、点 $x_\nu \in U$ および点 $y_\nu \in \sigma^-(\nu)$ があって、ある $\tau > 0$ に対して $\varphi(x_\nu, \tau) = y_\nu$ である．だから x_ν を通る軌道は $\sigma^-(\nu)$ を横切り $B^-(\nu)$ に入る．命題 7.3 より、軌道は $b^-(\nu)$ においてのみ $B^-(\nu)$ から出られる．よって $\Phi(x_\nu) \in b^-(\nu)$ であり、証明が完結した. $\square$

命題 9.3. C 上の φ が全縮退でなければ三体衝突は正則化不可能である.

<u>証明.</u> $a_0 \in \mathbf{a}^+, \nu > v_c$ とする. a_0 に任意に近い x があって $\Phi(x) \in b^-(\nu)$ である. $\cap\{b^-(\nu) : \nu > v_c\} = \emptyset$ であるから Φ は a_0 まで延長できない. $\square$

Easton の定義した正則化と Siegel の調べた正則化には違いがあることに注意すべきである. 命題 9.3 の示すところによれば、同形解は三体衝突を越えて延長できない. しかしながら、同形解を記述する (6.3) 式をよく見ると、この解は二体衝突と同じようにふるまうことが分かる. だから同形解は時間の関数として延長できるが、近傍の軌道に関しての連続性が得られない.

ちょっと見たところ、この結果は高度に技術的で直線上を動く 3 粒子の問題に漠然としか関係しないように思える. ところが座標 r, v, s および w ともとの座標 $\mathbf{q}$ および $\mathbf{p}$ との関係を調べると、命題 9.2 が驚くべき内容を持つことに気づく.

図 6

まず r^2 が粒子系の慣性モーメントであったことを思いだそう. 三体衝突のまわりの孤立化ブロック $\mathbf{B}$ は $r \leq \alpha$ なる点の集合である. $\mathbf{B}$ の境界 $\mathbf{b}$ は $r = \alpha$ なる点の集合である. $\mathbf{b}^+$ 上に、1 次元の点集合 $\mathbf{a}^+$ があり、その点を出発する軌道は三体衝突に終わる. 命題 9.2 によれば $\mathbf{a}^+$ の近くから始まる軌道は任意に大きな v で孤立化ブロックを出ていく.

さてエネルギー関係式 (5.4) を考えよう. 孤立化ブロックの点は $r \leq \alpha$ であるから、v が大きいとき $|w| \leq 1$ である. また v の値が大きいということは $1 - s^2$ の値が小さいということである. よって ν の値が大きいとき集合 $B^-(\nu)$ は 2 つの成分を持つ. 1 つは s が $+1$ に近い点を含み、もう 1 つは s が -1 に近い点を含む. したがって三体衝突の近くを通る軌道は、$r = \alpha, |w| \leq 1$、大きな v および ± 1 に近い s で孤立化ブロックを出る. s が $+1$ に近いということは、粒子 2 と 3 が近い配位であり、s が -1 に近いということは粒子 1 と 2 が近い配位である.

変換 (3.1)、(3.4)、(4.13) および (5.3) を行なえば、運動量ベクトルは次のように書ける.

$$\mathbf{p} = \frac{1}{r^{1/2}} \left[vMS(s) + w\frac{W(s)^{1/2}}{1 - s^2} MAS(s) \right].$$

(4.11) 式を使えば粒子 3 の運動量が次のように計算できる.

$$p_3 = \frac{m_3 a_3}{r^{1/2}} \left[v \cos \lambda(1 + s) - w\frac{W(s)^{1/2}}{1 - s^2} \sin \lambda(1 + s) \right].$$

さて三体衝突の近くを通過し s が -1 の近くで孤立化ブロックから出て来る軌道を考えよう. $r = \alpha, |w| \leq 1$ で v が大きいから、p_3 は大きいはずである. s が -1 に近いから粒子 1 と 2 が近

いはずである．同様な議論によれば、三体衝突の近くを通過し s が $+1$ の近くで孤立化ブロックから出てくる軌道の場合、粒子 1 の運動量が大きいはずである．だから序で述べた陳述を確立したことになる．すなわち、三体衝突の近くを通過した後で粒子の 1 つが任意に大きな速度で 1 つの方向に向い、他の 2 つが互いに近いまま反対方向に高速で走る．

次に集合 $\{(r,v,s,w)\in C : v>\nu\}$ を考えよう．上で指摘したように、この集合は ν が大きいとき 2 つの成分を持つ．$C_+(\nu)$ は s が $+1$ に近い点を含み、$C_-(\nu)$ は s が -1 に近い点を含む．C 上の非縮退の流れの面白い場合として、c の不安定多様体の分枝の 1 つが $C_+(\nu)$ と交わり、もう 1 つの分枝が $C_-(\nu)$ と交わる場合がある．(Fig.7 参照)．次節では C 上のこのような非縮退の流れが、ある質量の場合に起こることを示す．そのような場合、命題 9.2 より、三体衝突の近くを通過する軌道は、c の安定多様体のどちら側から出発したかに応じて、s が $+1$ または -1 の近くで孤立化ブロックを出てくる．だから互いに近く、また三体衝突軌道の近くから出発する軌道は任意に大きな速度を持ち得るが、同時にまったく異なる配位をとり得る．

C 上の流れ φ が全縮退でないような質量 m_1, m_2 および m_3 が存在することを示せれば、定理 9.1 は命題 9.3 から出る．流れ φ は質量の連続関数である．φ が全縮退でなければ、小さな摂動のもとで、やはり全縮退でない．したがって φ が全縮退でないような質量の集合は開である．次節ではこの集合が空でないことを示す．そうすれば定理 9.1 が証明されたことになる．

10. 特別な場合

この節では、外側 2 つの質量が等しく内側の質量が小さい場合を考え次のようにおく．

$$m_1 = m_3 = m, \quad m_2 = \varepsilon m.$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の定義は 4 節のはじめに、また λ の定義は (4.7) 式にあることを思いだそう．この場合

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (m(1+\varepsilon)(2+\varepsilon))^{-1/2}(-1,-1,1+\varepsilon),\\ \mathbf{b} &= (m(1+\varepsilon)(2+\varepsilon))^{-1/2}(-1-\varepsilon,1,1),\end{aligned}$$

とあからさまに書ける．$\mathbf{a}^T M\mathbf{b} = (1+\varepsilon)^{-1}$ と計算できるから、λ は

$$\cos 2\lambda = \frac{1}{1+\varepsilon},$$

を満たす最小の正数である．だから $\varepsilon \to 0$ のとき $\lambda \to 0$ である．

このように質量を選ぶと、(4.14) 式を次のように書き換えることができる．

$$V(s) = m^{3/2}\left(\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{1/2}\sin 2\lambda\left\{\frac{\varepsilon}{\sin\lambda(1+s)} + \frac{\varepsilon}{\sin\lambda(1-s)} + \frac{1}{\sin\lambda(1+s)+\sin\lambda(1-s)}\right\}. \tag{10.1}$$

上の表式および (5.1) 式の $W(s)$ の定義より、V も W も偶関数であることがわかる．

図 7

命題 10.1. 任意に固定した m に対して C 上の流れ φ が全縮退でないような ε の値がある．

証明. c の不安定多様体の分枝の 1 つは単一の軌道 $\varphi(x_0,(-\infty,\infty))$ であって、$\tau\to-\infty$ のとき $\varphi(x_0,\tau)\to c$ である．$\tau_1\in(-\infty,\infty]$ は $\varphi(x_0,\tau_1)$ における v の値が v_c であるときの τ の値とする．$\tau\to+\infty$ のとき $\varphi(x_0,\tau)\to d$ のことを考えて、$\tau_1=+\infty$ を含めた．φ の勾配的性質より、τ_1 は一意である．(6.2c) 式より、直線 $\{s=+1\}$ は C 上の流れの断面である．$Z(\varepsilon)$ は $\varphi(x_0,(-\infty,\tau_1))$ が直線 $\{s=+1\}$ を横切る回数とする．ふたたび φ の勾配的性質より、$Z(\varepsilon)$ は有限な正整数である．

さて、すべての ε に対して φ は全縮退であると仮定する．このとき $Z(\varepsilon)$ は一定である．$\varepsilon\to 0$ のとき $Z(\varepsilon)\to\infty$ であることを示そう．だから仮定に矛盾し、命題が証明されたことになる．

命題 6.2 の証明において V が $[-1,1]$ 上で唯一の最小を持つことを示した．今の場合、V は偶関数であるから、最小は $s=0$ で生じるはずである．(10.1) 式より

$$V(0)\to 2^{-1/2}m^{5/2}\quad\text{as}\quad\varepsilon\to 0,$$

であることがわかる．そこで次のようにおく．

$$\mu=v_c^{-2}=(2V(0))^{-1}=W(0)^{-1}.$$

このとき μ は質量に依存する定数で、$\varepsilon\to 0$ のとき正の極限に近づく．

さて次を考えよう．

$$g(v,s)=\frac{1-(1-s^2)v^2W(s)^{-1}}{1-\mu v^2},\tag{10.2}$$

このとき g は $(-v_c,v_c)\times[-1,1]$ 上の正の連続関数である．新しい変数

$$\eta=g(v,s)^{-1/2}w,$$

を定義する．すなわち、変換

$$\begin{aligned}(-v_c,v_c)\times[-1,1]\times R^1\ &\to(-v_c,v_c)\times[-1,1]\times R^1:\\ (v,s,w)\ &\mapsto(v,s,g(v,s)^{-1/2}w),\end{aligned}$$

を定義する．そこで次のようにおく．

$$C_0=\{(v,s,w)\in C:-v_c<v<v_c\}.$$

(6.1) 式より、上の変換は C_0 から

$$C'=\{(v,s,\eta)\in(-\mu,\mu)\times[-1,1]\times R:\eta^2-(1-s^2)(1-\mu v^2)=0\},$$

への微分同相であることがわかる．ベクトル場 (6.2) は C' へ変換されると次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau}&=\frac{\lambda}{2}W(s)^{1/2}g(v,s)(1-\mu v^2),\\ \frac{ds}{d\tau}&=g(v,s)^{1/2}\eta,\\ \frac{d\eta}{d\tau}&=-g(v,s)^{1/2}s(1-\mu v^2)-\frac{\lambda}{2}\mu W(s)^{1/2}g(v,s)v\eta.\end{aligned}\tag{10.3}$$

時間変換

$$d\tau = g(v,s)^{1/2} d\tau',$$

を行なうと、C' 上のベクトル場は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau'} &= \frac{\lambda}{2} W(s)^{1/2} g(v,s)^{1/2}(1-\mu v^2), \\ \frac{ds}{d\tau'} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau'} &= -s(1-\mu v^2) - \frac{\lambda}{2}\mu W(s)^{1/2} g(v,s)^{1/2} v\eta. \end{aligned} \tag{10.4}$$

さて (5.2) 式より、$[-1,1]$ 上で一様に

$$W(s) \to \sqrt{2} m^{5/2}(1-s^2) \quad \text{as} \quad \lambda \to 0,$$

であることがわかる．だから (10.2) 式から、$(-v_c, v_c) \times [-1,1]$ のコンパクトな部分集合上で一様に

$$W(s) g(v,s) \to \sqrt{2} m^{5/2}(1-s^2) \quad \text{as} \quad \lambda \to 0,$$

となる．したがってコンパクトな部分集合上で一様に

$$\lambda W(s)^{1/2} g(v,s)^{1/2} \to 0 \quad \text{as} \quad \lambda \to 0.$$

よってベクトル場 (10.4) の軌道は $\lambda \to 0$ のときベクトル場

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau'} &= 0, \\ \frac{ds}{d\tau'} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau'} &= -s(1-\mu v^2), \end{aligned} \tag{10.5}$$

の軌道に近づく．ところが上のベクトル場の軌道は、C' 上の v 一定の円そのものである．だからベクトル場 (10.4) の軌道は $\lambda \to 0$ のときシリンダー C' のまわりを任意に大きな回数巻くはずである．したがって同じことがベクトル場 (10.3) でも成り立つ．(10.3) で与えられる C' 上の流れは (6.2) で与えられる C_0 上の流れに同相であるから、$\varepsilon \to 0$ のときに $Z(\varepsilon) \to \infty$ という示すべき陳述を得たことになる． □

ベクトル場 (10.4) は次のように解釈できる．粒子の質量は $m_1 = m_3 = m$ および $m_2 = \varepsilon m$ である．$\lambda \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ かつ $m_2 \to 0$ である．だから (10.5) 式は中心粒子の質量がゼロのときの三体衝突を表わす．各種の変換が特異になるから $\varepsilon = 0$ を物理的に解釈するのは難しい．しかしながら ε が小さいとき、C' のまわりにきつく巻きついていることは、中心粒子が 2 つの外側の粒子の間を行ったり来たりしながら多数回跳ね返り、しかも三体衝突の近くを通ることを表わしている．跳ね返りの回数は $\varepsilon \to 0$ のとき無限大になる．

今の場合、つまり $m_1 = m_3$ のとき、C 上の流れに対称性がある．W が偶関数であるから、(6.2) 式は変換

$$(v,s,w) \to (v,-s,-w),$$

のもとで不変である．したがって c の不安定多様体の 2 つの分枝は互いの反転である．9 節の最後の $C_+(\nu)$ と $C_-(\nu)$ の定義を思いだそう．対称性により、c の不安定多様体の分枝の 1 つが $C_+(\nu)$ と交われば、もう 1 つの分枝は $C_-(\nu)$ と交わるはずである．だから命題 10.1 により Fig.7 に示される流れの存在が確立された．

11．所見および推測

たくさんの問題が未解決のまま残された．たとえば、三体衝突が正則化不可能であるような質量の組合せの集合を記述できるか?この問題は、もとの運動方程式 (2.1) が $\mu > 0$ なる変換

$$M = \mu M',$$
$$\mathbf{q} = \mu^{1/2}\mathbf{q}',$$

のもとで不変であることに注意すればいくらか簡単になる．こうして、三体衝突が質量 (m_1, m_2, m_3) に対して正則化不可能であるための必要十分条件は、任意の $\mu > 0$ に対して三体衝突が質量 $(\mu m_1, \mu m_2, \mu m_3)$ に対して正則化不可能であることである．したがって、単体

$$\mathcal{M} = \{(m_1, m_2, m_3) : m_1 + m_2 + m_3 = 1, \text{すべての } k \text{ に対して } m_k > 0\},$$

上の質量の値を考えるだけでよい．

9 節で、三体衝突多様体上の流れが全縮退でないとき三体衝突が正則化不可能であることを示した．また流れが全縮退でないような質量の集合は開であることを見た．この集合が大きいことが期待される．

予想. 三体衝突多様体上の流れが全縮退でないような質量の集合は $\mathcal{M}$ 内で稠密である．

この予想が正しければ、三体衝突多様体が正則化不可能であるような質量の集合は $\mathcal{M}$ 内で稠密である．それでも三体衝突多様体上の流れが全縮退のときに三体衝突が正則化可能かという問題が残っている．2 つの不動点の固有値がなんらかの役割を果たすだろうが、著者は何の予想も持たない．

この論文の結果と方法が直線三体問題の三体衝突以外の状況に適用できるかという疑問が生じ得る．直線問題の流れは高次元の問題の流れの中に不変集合として含まれる．したがって直線上で三体衝突が正則化不可能なら、自動的に平面でも 3 次元でも正則化不可能である．しかしながらある種の質量は直線問題で正則化可能であっても平面問題では正則化不可能である．

3 節で用いた変換は任意の次元の n 体問題の n 重衝突に適用できる．すなわち、原点を膨らまし、また時間変数の変換で n 重衝突に有限時間で到達するような軌道が 1 つもないようにできるので、n 重衝突は不変多様体にできる．この方法によって何か新しい結果が出るかどうか、著者は変換後の方程式を十分詳しく調べていない．

衝突以外の特異性の存在の問題は長い間未解決であった．Painlevé[8] は、三体問題では特異性はすべて衝突によることを証明した．Painlevé[8]、Von Zeipel[16]、および Sperling[13] の仕事によれば、粒子の位置が有界である限り、衝突特異性のみが n 体問題の解に生じ得る．したがって衝突以外の特異性を見つけることは、すくなくともどれか 1 つの位置が有限時間に非有界になる軌道を見つけることと同値である．

9 節の結果からすると、このような軌道は存在し得る．直線 5 体問題を考え、二体衝突はすべて正則化したものとする．$m_1, \cdots, m_5$ を順番通りに直線上に並んだ 5 体とする．m および ε

を選んで、質量 $(m, \varepsilon m, m)$ の三体問題の三体衝突多様体上の流れが全縮退でないようにする．$m_1 = m_3 = m_5 = m$ および $m_2 = m_4 = \varepsilon m$ とする．5 体問題の三体衝突が三体問題の三体衝突と同じようにふるまうことが示せれば、9 節で示したように、粒子 1、2、および 3 または粒子 3、4、および 5 が三体衝突の近くを通過するたびに系は任意に大きな運動エネルギーを取り出すことができる．

単位時間未満に非有界になる軌道を記述しよう．粒子 1 と 2 はつねに互いに近くにある．これを連星系 A と呼ぶ．粒子 4 と 5 もつねに互いに近くにある．これを連星系 B と呼ぶ．粒子 3 は 2 つの連星系の間を行ったり来たりする．時刻 $t = 0$ に粒子 3 は連星系 A に向い、$t_1 < 1/2$ に追いつく．粒子 1、2、および 3 が三体衝突の近くを通過した後で、粒子 3 は連星系 B に時刻 $t_2 < 1/4$ に追いつくような高速度を得る．粒子 3、4、および 5 が三体衝突の近くを通過した後で、粒子 3 は連星系 A に $t_3 < 1/8$ に追いつくような高速度を得る．以下同様．単位時間未満に連星系 A は $-\infty$ に行き、連星系 B は $+\infty$ に行き、粒子 3 はこれらの間を無限回行ったり来たりする．

<u>予想.</u> 上で記述した軌道は存在する．

明らかに、この予想を証明することは簡単な仕事ではない．しかし、この論文で使った方法が、そのような証明のための最初のステップであって欲しいと思っている．

上の予想と Saari の定理 [9] は明らかに矛盾することを注意しておく．Saari は直線 n 体問題においてすべての特異性は衝突によることを証明した．しかし Saari は二体衝突を越えて軌道を延長していない．上で記述した軌道には二体衝突が無限個あることがわかる． **補遺**

補題 7.2 を証明したい．Sacker and Sell[10] の発想を利用してかなり直接的な証明ができる．しかし、Conley[2] の導入した方法を使うことにする．点の ω 極限集合を特徴付けるやり方だからである．この特徴付けは以下の定理 A.2 で行なう．これはそれ自身としても面白い．

我々の方法は「鎖極小」流れの概念を導入して、点の ω 極限集合が鎖極小であることを証明する．そこで勾配的鎖極小流れは単一点であることを示す．こうして補題が証明される．

以下の 2 つの定義は Conley[2] により展開された．

<u>定義.</u> φ は距離 d を持つ完備距離空間 X 上の流れとする．$x, y \in X$ とし、ε と T を正数とする．集まり $(x_1, \ldots, x_{n+1}, t_1, \ldots, t_n)$ は、$i = 1, \ldots, n$ に対して以下の条件を満たすとき x から y への $(\varepsilon, T, \varphi)$ 鎖と呼ばれる．

(a) $x_i \in X, x = x_1, y = x_{n+1}$,

(b) $t_i \geq T$,

(c) $d(\varphi(x_i, t_i), x_{i+1}) \leq \varepsilon$.

<u>定義.</u> $x, y \in X$ とする．すべての正の ε と T に対して x から y への $(\varepsilon, T, \varphi)$ 鎖があるとき、$x > y$ と書く．

Conley は「$>$」は X 上の推移関係であるが反射的でも反対称的でもないことを示した．ここではやや不正確ではあるが「$>$」を順序と呼ぶことにする．勾配的な流れの場合、この順序は次の意味で勾配関数と一致する．

補題 A.1. φ はコンパクトな距離空間 X 上の流れとする．φ は g に関して勾配的であるとし、

$x, y \in X$ とする．このとき
$$x > y \Rightarrow g(x) \geq g(y).$$

<u>証明.</u> $x > y$ かつ $g(x) < g(y)$ と仮定する．実数 a_1 と a_2 を選んで
$$g(x) < a_1 < a_2 < g(y),$$
とし、また $K = g^{-1}([a_1, a_2])$ は不動点を含まないようにする．
$$K_1 = g^{-1}((-\infty, a_1]), \quad K_2 = g^{-1}([a_2, -\infty)),$$
とおく．このとき K_1 と K_2 は互いに素なコンパクトな集合である．$\delta = d(K_1, K_2)$ とおく．K はコンパクトで不動点を含まないから、正の T があって
$$x \in K, \quad t \geq T \Rightarrow \varphi(x, t) \in K_1.$$
だから $\varepsilon < \delta$ および $T' > T$ に対して x から y への $(\varepsilon, T', \varphi)$ 鎖はない．これは $x > y$ に矛盾するから補題は証明された． □

ここで極小流れを次のように一般化しよう．

<u>定義.</u> φ は完備距離空間 X 上の流れとする．すべての $x, y \in X$ に対して $x > y$ なら φ を <u>鎖極小</u> と呼ぶ.

Conley[2] はすべての $x \in X$ に対して $x > x$ のとき、流れを「鎖回帰的」と呼んだ．コンパクトな連結空間上では鎖回帰性と鎖極小性が同値であることが示せる．
ω 極限集合の性質として次を得る．

定理 A.2. φ は局所コンパクトな距離空間 X 上の流れとする．$x_0 \in X$ は $\omega(x_0)$ が空でなくコンパクトな集合であるような点とする．このとき $\omega(x_0)$ に制限した φ は鎖極小である．

いま ω 極限集合に制限した流れを考えていることに注意することが重要である．簡単に示せるように、$x, y \in \omega(x_0)$ なら X 上の φ によって与えられる順序に対して $x > y$ である．しかし制限した流れによって与えられる $\omega(x_0)$ 上の順序は制限した順序と異なる．この違いは非遊走点を考えれば一目了然である．$\omega(x_0)$ の点はすべて流れ φ に関して非遊走的である．しかしこれらは $\omega(x_0)$ に制限した流れの中では遊走的で有り得る．
X がコンパクトなら、$\omega(x_0)$ は自動的に空でなくなりコンパクトであることにも注意すべきである．だから $\omega(x_0)$ はコンパクト距離空間上の流れにおいてはつねに鎖極小である．
定理 A.2 を証明するのに次の命題が必要である．

命題 A.3. φ は局所コンパクトな距離空間 X 上の流れとする．$x_0 \in X$ は $\omega(x_0)$ が空でなくコンパクトな集合であるような点とする．このとき $\omega(x_0)$ は連結である．さらに $\omega(x_0)$ を含む各開集合 U に対して正の t' があって、$t \geq t'$ に対して $\varphi(x_0, t) \in U$ である．

X がコンパクトなら命題 A.3 は標準的な結果である [7]．$\omega(x_0)$ が空でなくてコンパクトであるという仮定は標準的証明が X が局所コンパクトのときに正しいことを保証している．

定理 A.2 の証明. $\Omega = \omega(x_0)$ とおき、ψ は φ を Ω に制限した流れとする．$y, y' \in \Omega$ とし、ε と T が与えられたとする．y から y' への (ε, T, ψ) 鎖を構成せねばならない．

U は X の開部分集合であって Ω を含み閉包はコンパクトであるとする (?)．$\delta < \varepsilon/2$ を選んで

$$u_1, u_2 \in \bar{U}, \quad d(u_1, u_2) \Rightarrow d(\varphi(u_1, t), \varphi(u_2, t)) < \varepsilon/2 \quad \text{任意の } t \in [0, 2T], \tag{A.1}$$

となるようにする．V は U の開部分集合であって $\Omega \subset U$ かつすべての $x \in V$ に対して $d(x, \Omega) < \delta$ であるとする．命題 A.3 より、t' があって $\varphi(x_0, [t', \infty)) \subset V$ である．

$x_1 \in \varphi(x_0, [t', \infty))$ を選んで $d(x_1, y) < \delta$ とする．$T' > T$ を選んで $d(\varphi(x_1, T'), y') < \varepsilon/2$ とする．n は T'/T 内の最大整数とし、$i = 2, \ldots, n$ に対して $x_i = \varphi(x_{i-1}, T)$ とおく．$x_{n+1} = \varphi(x_n, T' - (n-1)T) = \varphi(x_1, T')$ とおく．$i = 2, \ldots, n$ に対して $y_i \in \Omega$ を選んで $d(y_i, x_i) < \delta$ とする．$y_1 = y$ および $y_{n+1} = y'$ とおく．$i = 1, \ldots, n-1$ に対して $t_i = T$ とし、また $t_n = T' - (n-1)T$ とする．

$(y_1, \ldots, y_{n+1}, t_1, \ldots, t_n)$ は y から y' への (ε, T, ψ) 鎖であることを主張する．定義の (a) と (b) は構成法により満たされているから示すべきは (c)、すなわち、

$$d(\psi(y_i, t_i), y_{i+1}) \le \varepsilon \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{A.2}$$

である．ところが $d(y_i, x_i) < \delta$ かつ $t_i < 2T$ であるから、(A.1) 式より

$$d(\psi(y_i, t_i), y_{i+1}) = d(\varphi(y_i, t_i), \varphi(x_i, t_i)) < \varepsilon/2.$$

$d(y_{i+1}, x_{i+1}) < \delta < \varepsilon/2$ であるから、三角不等式より (A.2) が出る．だから $(y_1, \ldots, y_{n+1}, t_1, \ldots, t_n)$ は y から y' への (ε, T, ψ) 鎖であり、定理 A.2 は証明された． □

補題 6.2 は定理 A.2、命題 A.3、および次の命題の系として出る．

命題 A.4. φ はコンパクト、連結かつ空でない距離空間 X 上の鎖極小な勾配的流れとする．このとき X はただ 1 点からなる．

証明. $x, y \in X$ とする．$x > y$ であるから $g(x) \ge g(y)$ である．$y > x$ であるから $g(y) \ge g(x)$ である．だから g は X 上で一定であり、よって X は不動点のみ含む．不動点は孤立していて X はコンパクトであるから X は有限個の点しか含まない．X は連結で空でないから、1 点だけからなる． □

References

1. Churchill, R.: Isolated invariant sets in compact metric spaces. *J. Differential Equations* **12**, 330-352(1972).
2. Conley, C.: The gradient structure of a flow: I. *IBM Report*, Yorktown Heights, N.Y., 1972.
3. Conley, C., Easton, R.: Isolated invariant sets and isolating blocks. *Trans. A.M.S.* **158**, 35-61(1971).
4. Easton, R.: Regularization of vector fields by surgery. *J. Differential Equation* **10**, 92-99(1971).

5. Easton, C.: The topology of the regularized integral surfaces of the 3-body problem. *J. Differential Equation* **12**, 361-384(1972).

6. Moser, J.: regularization of Kepler's problem and averaging method on a manifold. *Comm. Pure Appl. Math.* **XXIII**, 609-636(1970).

7. Nemytskii, V., Stepanov, V.: *Qualitative theory of Differential equations.* Princeton Univ. Press, 1960.

8. Painlevé, P.: Lecon sur la théorie analytique des équations dufférentielles(Stockholm 1895). Hermann, Paris, 1897.

9. Saari, D.: Singularities and collisions of newtonian gravitationl systems. *Arch. rational Mech. Anal.* **49**,311-320(1973).

10. Sacker, R., Sell, G.: On the existence of nontrivial recurrent motions. *Duke math. J.*, to appear.

11. Siegel, C.: Der Dreierstoss. *Acta math.* **42**, 127-168(1941).

12. Siegel, C., Moser, J.: *Lectures on Celestial Mechanics.* Berlin, Springer, 1971.

13. Sperling, H.: On the real singularities of the n-body problem. *J. Reine Angew. math.* **245**, 14-50(1970).

14. Sundman, K.: Mémoire sur le probléme des trois corps. *Acta Math.* **36**, 105-179(1912).

15. Sundman, K.: Nouvelles recherches sur le probléme des trois corps. *Acta Soc. Sci. Fenn.* **35**, No.9(1909).

16. Zeipel, H. von: Sur les singularités du probléme des n corps. *Ark. Mat. Astr. Fys.* **4**, No.32(1908).

17. Wintner, A.: *The analytical foundations of celestial mechanics.* Princeton Univ. Press, 1941.