

Expositiones Mathematicae 4 (1986), 335-345

天体力学における特異性に関する von Zeipel の定理

Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics

Richard McGehee

1. 序

常微分方程式系の解が時刻 $t^* < \infty$ において 特異性 を経験すると言われるのは、解が t^* を越えて延長できない場合である。古典力学の n 体問題の解に生じ得る特異性を完全に理解することは今日まで数学者の目を免れてきた。この特異性に関する興味は 1895 年、パンルベ [6] から始まるようだ。当時、彼はすべての特異性は粒子同士の衝突によるかどうかを問うた。

パンルベの問題の解への重要な一步を Hugo von Zeipel が 1908 年に記した [15]。彼は、 t が t^* に近づくと、すべての粒子の位置が有界なら特異性は衝突によるはずであることを示した。言い換えると、有限時間に粒子系が非有界になるときのみ非衝突特異性が生じ得る。

von Zeipel の論文は何年もの間、歴史の闇に埋もれ、また最近の引用によれば、この論文の証明には「ギャップ」や「間違い」があるとのめかされている [14, p.431; 10, p.15; 8, p.312]。von Zeipel の 4 ページの論文は理想的な長さよりも短すぎるかもしれないが、完全な証明に必要な本質的内容をすべて含んでいる。実は、歴史的に見れば、印象的な洞察を含んでいる。

この論文の目的は von Zeipel の証明を現代的な記法と用語に翻訳することにある。それをするにあたって、von Zeipel のもとの発想を当代の研究者にもっと容易に得られるようにし、天体力学における特異性の理論への von Zeipel の貢献を明らかにするのが著者の望みである。

2. パンルベのストックホルム講義

1895 年秋、ミッターク・レフラーの招きおよびスウェーデンとノルウェイの王オスカー II 世の後援のもとに、ポール・パンルベはストックホルムで一連の講義を行なった。この講義はストックホルムの科学社会にとってたいへん重要な出来事であったので、最初の講義には王自身が出席した。特異性に関する von Zeipel の仕事はパンルベの仕事に刺激されたものである。この主題に関するパンルベの定理を記述することから始めよう。パンルベの講義ノートは 1897 年に出版され [9]、彼の全集に再録された [7]。

$m_i > 0$ を i 番目の粒子の質量とし、 $q_i \in R^3$ をその位置とする。この n 粒子系のポテンシャルエネルギーは

$$-U(q_1, \dots, q_n) \equiv -\sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|},$$

で与えられる。ここで $|\cdot|$ は R^3 のユークリッドノルムを表わす。この粒子系のニュートンの定式化は

$$m_i \ddot{q}_i = \nabla_i U(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

と書ける．ここで記号 ∇_i は i 番目の変数に関する勾配 (gradient) であり、二重点は時間 t に関する 2 階微分を表わす．

ポテンシャルエネルギーは 2 つ以上の粒子が一致するところでは定義されない．

$$q \equiv (q_1, \dots, q_n) \in (R^3)^n,$$

と書けば、この特異点集合を

$$\Delta \equiv \cup_{i < j} \Delta_{ij},$$

と書ける．ここで

$$\Delta_{ij} \equiv \{q \in (R^3)^n : q_i = q_j\}, \quad (2)$$

である． $U : (R^3)^n - \Delta \rightarrow (0, \infty)$ は実解析的であることに注意する．

初期位置 $q(0) \in (R^3)^n - \Delta$ と初期速度 $\dot{q}(0) \in (R^3)^n$ が与えられると、微分方程式の標準的存在および一意性理論により $t \in [0, t^*)$ に対して定義された一意の解 $q(t)$ が与えられる．ここで $t^* \in (0, \infty]$ は極大に選ばれている．ベクトル q は t の実解析的関数であり、点 t^* は有限ならこの関数の特異点である．

定義. $t^* < \infty$ なら、解 $q(t)$ は t^* において 特異性 を経験すると言われる．

ストックホルム講義において、パウルベは起こり得る特異性の性質を調べた．かれは次の定理を証明した．この定理は、特異点において粒子のすべての組の最小距離はゼロに近づかずであると述べた．きれいな証明が Siegel & Moser の本 [9] にある．ここでは

$$\rho(q) \equiv \min_{i < j} |q_i - q_j|,$$

で定義される関数 $\rho : (R^3)^n \rightarrow [0, \infty)$ を導入する．

定理 1. $q(t)$ が t^* において特異性を経験するなら、 $t \rightarrow t^*$ のとき $\rho(q(t)) \rightarrow 0$ である．

この定理は

$$\rho(q) = \sqrt{2}d(q, \Delta)$$

であることに注意すれば、やや違った解釈が可能である．ただし $d(q, \Delta)$ は点 q から集合 Δ への R^{3n} の標準的ユークリッド距離を表わす．定理 1 は $t \rightarrow t^*$ のとき $q(t) \rightarrow \Delta$ であることを述べている．

$q(t)$ が Δ 上のある特定の点に近づくのかと問うことは自然である．先験的には $q(t)$ は Δ に近づくにつれて激しく振動したり、 Δ との距離がゼロに近づくにつれて非有界になるかもしれない． $q(t)$ が $t \rightarrow t^*$ のときある点 q^* に近づくなら、各粒子は t^* において極限位置を持つ． $q^* \in \Delta$ であるから、極限位置のうち少なくとも 2 つは一致するはずである．つまり、これらの粒子は $t \rightarrow t^*$ のときぶつかるはずである．パウルベはこれを「衝突 (collision)」と呼んだ．衝突によらない特異性を「擬衝突 (pseudocollision)」と呼んだ．

定義. $q(t)$ が t^* において特異性を持つとする．この特異性が 衝突 と呼ばれるのは、 $q^* \in \Delta$ があって、 $t \rightarrow t^*$ のとき $q(t) \rightarrow q^*$ となるときである．そうでないとき特異性は 擬衝突 と呼ばれる．

パウルベは擬衝突が起こり得るかどうか疑問に思い、特定の参考文献なしに、この概念を示唆したとしてポアンカレを信じた [6, p.588] . パウルベは三体問題では擬衝突が起こり得ないことを示すのに成功した .

定理 2. $n = 3$ のとき、すべての特異性は衝突である .

パウルベはまた n 体問題において特異性が衝突であるための十分条件を与えた . しかし、この条件は単に同時三体衝突より複雑なふるまいを排除しただけに過ぎず、これらの特異性の性質に関してより以上の洞察を与えるものではなかった . パウルベは $m \geq 4$ のときに擬衝突が起こるのかという未解決の疑問を提出して、ストックホルム講義を締めくくった . この問題は今日も未解決である . ただ擬衝突の存在を支持する強い証拠はある [2,5] .

3. von Zeipel の定理

Edvard Hugo von Zeipel は 1873 年スウェーデンにドイツ移民の孫として生まれた . かれはストックホルムとウプサラで教育を受け、1904 年にウプサラ大学から Ph.D. を得た . かれの学位論文は三体問題の第三種の周期軌道の研究に関するものであった . かれは 1904 年 6 月から 1906 年 9 月までパリで研究し、ポアンカレから天体力学、パウルベから rational mechanics の講義を受けた [4] . 特異性への von Zeipel の興味はポアンカレおよびパウルベとの交際から芽生えたと想像される . というのは、この主題に関する論文は、かれがパリを離れた 2 年後、1908 年 5 月に現われるからである .

von Zeipel の論文に現われたかれの定理を紹介しよう . 著者がフランス語から英語に訳しておいた .

定理. t が t_1 に近づくにつれて粒子のどれかが有限の極限位置に向かわないならば、必然的に

$$\lim_{t \rightarrow t_1} R = \infty,$$

である . ただし R は相互距離の最大値である .

上に与えた定義からすると、von Zeipel の定理が述べるのは、特異性が衝突によるのは粒子系が有界にとどまる時である、ということである . もっと見やすい言葉で言えば、擬衝突が生じる唯一の道は、粒子系が有限時間に無限遠に爆発するときである .

1908 年以後、von Zeipel は天体力学の数学的側面から離れて天文学の実用的な方へ移ってしまったように見える . 彗星や小惑星の運動に関する仕事は続けたけれども恒星の構造や進化にもっと興味を持った . かれは 1915 年にスウェーデンの王立科学アカデミーに選出され、1919 年にウプサラの天文学の教授職 (personal chair) に指名された . 1926 年から 1935 年までスウェーデン天文学会の議長を務め、1931 年から 1948 年まで天文学の国立委員会 (National Committee) の議長を務めた . 1930 年に、恒星の進化および構造に関する仕事でニューヨーク科学アカデミーからモリソン賞を得た . 面白いことに、ミッターク・レフラーは 1920 年発行のポアンカレ特集の Acta Mathematica の 38 巻に von Zeipel を選んで寄稿させている .

Von Zeipel の華々しい経歴にもかかわらず、特異性に関する彼の定理は長い間歴史の闇に葬られていたように見える . 1920 年に Jean Chazy は Comptes Rendus 誌に同じ定理を発表している [1] . かれは von Zeipel の仕事をまったく引用していないので、それを知らなかったに違いない . 1941 年に本を書くに当たって、Wintner は von Zeipel の論文に気づいていたが、そ

の正しさに疑問を抱いていた ([14, p.431]) . Sperling によれば、1970 年まで「von Zeipel の陳述は実質的に知られていなかったように見える」 [10, p.15] .

幸いなことに、天体力学における特異性の問題への興味は Pollard と Saari の仕事のおかげで 1970 年代の初期に復活した . 1972 年に Saari は von Zeipel の結果を拡張して、慣性モーメントが「ゆっくり」変化するなら、擬衝突が起こり得ないことを示した [8] . 1974 年に Mather と McGehee は 4 体問題の解で有限時間に非有界なものを構成した [5] . しかし、この解は弾性反発により延長された無数の二体衝突を含んでいるので擬衝突の例ではない . Gerver は最近 5 体問題で擬衝突を構成することを指摘したが [2]、詳細はまだ完成していない .

今日、擬衝突の存在に関するパルベの疑問は、答えが肯定的であることにほとんど疑いはないけれども、解かれていない . この答えが出されたとしても von Zeipel の定理はこの分野の基本定理のひとつとして残るであろう .

4. 系の分解

von Zeipel の証明の重要な要素は粒子系の慣性モーメントを部分系に対応する成分に分解することにある . 今日、この分解は内積

$$\langle q, p \rangle \equiv \sum_{i=1}^n m_i(q_i, p_i),$$

を持つ空間 $(R^3)^n$ の幾何学を用いればもっともよく理解できる . ここで $(;)$ は R^3 上の標準的な内積である . 慣性モーメント はこの内積により誘導されるノルムとして定義される . すなわち、

$$I(q) \equiv \|q\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i |q_i|^2.$$

この内積に関する U の勾配を ∇U で表わす . すなわち、 $\nabla U(q)$ は $(R^3)^n$ のベクトルであって

$$\langle \nabla U(q), p \rangle = DU(q)p, \text{ for all } p \in (R^3)^n,$$

を満たす . ここで $DU(q) : (R^3)^n \rightarrow R^1$ は U の微分を表わす . このとき運動方程式 (1) は

$$\ddot{q} = \nabla U(q),$$

と書ける . n 粒子は 1 から n までの整数のラベルがついていたことを思いだそう . このラベルの集合を

$$N \equiv \{1, 2, \dots, n\},$$

と表わす . μ が N の部分集合なら、ラベルが μ 内にある粒子を 部分系 とみなす . この特異点集合 Δ 上の点集合のうち、部分系内のすべての粒子が一致してしまうことに対応する集合は

$$\Delta_\mu \equiv \{q \in (R^3)^n : q_i = q_j \text{ for all } i, j \in \mu\},$$

である . Δ_μ 内の点は部分系 μ の「全崩壊」の点とみなせる . μ が空なら Δ_μ は定義されない . μ が唯一の点を含めば $\Delta_\mu = (R^3)^n$ である . $\mu = \{i, j\}$ なら公式 (2) で定義されるとおり $\Delta_\mu = \Delta_{ij}$ である .

さて ω を N の分割 (partition) とする．すなわち、 N の互いに素な部分集合であって、それらの和は N 全体であるとする． N の分割は系全体の部分系への分解 (decomposition) に対応し、それぞれは分割の要素のひとつに対応する．各部分系における同時の全崩壊に対応する点集合は線形部分空間

$$\Delta_\omega \equiv \bigcap_{\mu \in \omega} \Delta_\mu,$$

である． Δ_ω と Δ_μ の違いは文脈から明らかである．ただし、 ω は N の分割であり、 μ は N の部分集合である．

μ が N の部分集合なら、対応する部分系の重心は

$$c_\mu q \equiv \left(\sum_{i \in \mu} m_i q_i \right) / \left(\sum_{i \in \mu} m_i \right),$$

と定義される．この物理量を使って次の線形写像を定義する．

$$\pi_\omega : (R^3)^n \rightarrow (R^3)^n : (\pi_\omega q)_i \equiv c_\mu q \quad \text{if } i \in \mu \in \omega.$$

簡単にチェックできるように、 π_ω は値域を Δ_ω およびゼロ空間 (nullspace)

$$X_\omega \equiv \{q \in (R^3)^n : \sum_{i \in \mu} m_i q_i = 0 \text{ for all } \mu \in \omega\},$$

とする直交射影である．だから各分割 ω に対して $(R^3)^n$ は直交部分空間 Δ_ω および X_ω の直和として書ける． $\Pi_\omega \equiv \text{id} - \pi_\omega$ と書けば、 Π_ω は $(R^3)^n$ から X_ω の上への直交射影を表わす．だから

$$\|q\|^2 = \|\pi_\omega q\|^2 + \|\Pi_\omega q\|^2, \quad (4)$$

である．すこし脇道にそれて最後の式の物理的解釈を行なおう．つぎのように計算できる．

$$I_\omega(q) \equiv \|\pi_\omega q\|^2 = \sum_{\mu \in \omega} \left(\sum_{i \in \mu} m_i \right) |c_\mu q|^2.$$

だから $I_\omega(q)$ は、各 $\mu \in \omega$ に対して、 μ に対応する部分系の重心に位置する質量 $\sum_{i \in \mu} m_i$ の仮想的粒子から成る粒子系の慣性モーメントである．また次のように計算できる．

$$J_\omega(q) \equiv \|\Pi_\omega q\|^2 = \sum_{\mu \in \omega} J_\mu(q).$$

ここで

$$J_\mu(q) \equiv \sum_{i \in \mu} m_i |q_i - c_\mu q|^2.$$

だから $J_\mu(q)$ は μ に対応する部分系の重心に関する慣性モーメントである．方程式 (4) によれば全慣性モーメントは各部分系の慣性モーメントと各部分系の重心に位置する仮想的粒子から成る系の慣性モーメントを加えたものである．

ポテンシャルエネルギーも同様に分解できる．すなわち、

$$U_{ij}(q) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|} & \text{for } i \neq j, \\ 0 & \text{for } i = j, \end{cases}$$

と置き、次のように書く .

$$U(q) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} U_{ij}(q).$$

系の残りの部分から孤立していると見て、 μ に対応する部分系はポテンシャルエネルギー

$$V_\mu(q) = \sum_{i \in \mu} \sum_{j \in \mu} U_{ij}(q),$$

を持つ . 分割 ω に対して

$$V_\omega(q) \equiv \sum_{\mu \in \omega} V_\mu(q), \quad (5)$$

と書く . これはすべての孤立部分系の全ポテンシャルエネルギーである . 残りのポテンシャルエネルギー

$$U_\omega(q) \equiv U(q) - V_\omega(q), \quad (6)$$

は部分系間の相互作用による . もっと詳しく言えば、

$$U_{\mu\nu}(q) \equiv \begin{cases} \sum_{i \in \mu} \sum_{j \in \nu} U_{ij}(q) & \text{for } \mu \cap \nu = \emptyset, \\ 0 & \text{for } \mu = \nu, \end{cases}$$

と置くことにより、次のように書ける .

$$U_\omega(q) = \sum_{\mu \in \omega} \sum_{\nu \in \omega} U_{\mu\nu}(q). \quad (7)$$

公式 (5) の解釈から次の恒等式が得られる .

$$V_\omega(q + z) = V_\omega(q) \quad \text{for all } z \in \Delta_\omega.$$

したがって次を得る .

$$V_\omega(q + \pi_\omega p) = V_\omega(q) \quad \text{for all } p \in (R^3)^n.$$

p に関して微分して $p = 0$ とおけば次を得る .

$$DV_\omega(q)\pi_\omega = 0.$$

π_ω が直交であるから、これから

$$\pi_\omega \nabla V_\omega(q) = 0,$$

が得られる . この式と (3) および (6) を結合して

$$\pi_\omega \ddot{q} = \pi_\omega \nabla U_\omega(q), \quad (8)$$

を得る . これを使って次を得る .

$$\frac{d^2}{dt^2} I_\omega(q(t)) = 2 \|\pi_\omega \dot{q}(t)\|^2 + 2 \langle \pi_\omega q(t), \nabla U_\omega(q(t)) \rangle. \quad (9)$$

5. von Zeipel の定理の証明

von Zeipel の証明を前節で展開した記法に翻訳してこの小論文を締めくくろう．証明は次の補題から始まる．これは $t \rightarrow t^*$ のとき慣性モーメントがある極限 (無限のこともあり得る) に近づくはずであることを述べる．

補題. $q(t)$ が t^* において特異性を経験するなら、 $I^* \in [0, \infty]$ があって、 $t \rightarrow t^*$ のとき $I(q(t)) \rightarrow I^*$ である．

この補題は定理 1 とラグランジュによる公式を使って証明する．Siegel and Moser の本 [9, p.26] に詳細がうまく示されている．Wintner はこの補題を Painlevé のストックホルム講義 [14, p.434] に帰しているが、わたしは講義録のどこにもこれを見つけられなかった．これは Sundman によって 1906 年 [11, p.8] に $n = 3$ に関して証明され、von Zeipel によって 1908 年 [15] に任意の n に関して証明された．これらは私の知るもっとも初期の文献である．

この補題を使って von Zeipel の定理と同値な版を述べ証明しよう．

定理. $q(t)$ が t^* において特異性を経験し、 $t \rightarrow t^*$ のとき $I(q(t)) \rightarrow I^* < \infty$ なら、 $q^* \in \Delta$ があって $t \rightarrow t^*$ のとき $q(t) \rightarrow q^*$ である．

証明. 次のようにおく．

$$\Delta^* \equiv \bigcap_{t < t^*} \text{cl}(q((t, t^*))).$$

ここで cl は $(R^3)^n$ における位相閉包を表わす． $q((t, t^*))$ は空でない有界集合であるから、その閉包は空でなくコンパクトである． Δ^* は入れ子になった空でないコンパクトな集合の交わりで書けるから、それ自身空でなくコンパクトである． Δ^* は Δ の部分集合であり、すべての $q \in \Delta^*$ に対して $I(q) = I^*$ であることに注意しよう．

この分割 ω に対して次を定義する．

$$\Delta_\omega^* \equiv \Delta^* \cap \Delta_\omega.$$

$\Delta_\omega^* \neq \emptyset$ なるすべての分割 ω の中から極小の濃度 (cardinality) のものを選ぶ．証明の残りでは、この分割を ω で表わす．この選択により、 $U_\omega(q)$ に関する公式 (7) のすべての分母が Δ_ω^* 内のすべての q に対して非ゼロであること、したがって $U_\omega(q)$ はこの集合上で定義されることに注意する． Δ_ω^* はコンパクトであるから、 $(R^3)^n$ における Δ_ω^* の近傍 G および有限の M があって

$$\|\nabla U_\omega(q)\| \leq M \quad \text{および} \quad |\langle \pi_\omega q, \nabla U_\omega(q) \rangle| \leq M \quad \text{for all } q \in G, \quad (10)$$

である．変数 z と x を次式で定義して導入する．

$$z \equiv \pi_\omega q \in \Delta_\omega \quad \text{および} \quad x \equiv \Pi_\omega q \in X_\omega.$$

X_ω と Δ_ω の Cartesian product をその直和と同一視して次のように書く．

$$(x, z) \equiv x + z = q \in (R^3)^n.$$

次の 2 つのケースのひとつが成り立つはずである．

ケース 1. Δ^* は Δ_ω の部分集合ではない．

ケース 2. Δ^* は Δ_ω の部分集合である .

はじめにケース 1 を仮定する . Δ_ω の開部分集合 B を選び、閉包 \bar{B} がコンパクトで、 $\Delta^* \subset B \subset \bar{B} \subset G$ であるとする . B の境界を $\partial B \equiv \bar{B} - B$ で表わす . 各 $\sigma > 0$ に対して

$$D_\sigma \equiv \{x \in X_\omega : \|x\| < \sigma\},$$

を定義する . ここでも \bar{D}_σ は閉包を表わし、 ∂D_σ は D_σ の境界を表わすとする . 次のように書く .

$$K_\sigma \equiv \bar{D}_\sigma \times \bar{B} \subset (R^3)^n.$$

∂B はコンパクトであり、 $\Delta^* \cap \partial B = \emptyset$ であるから、 $\sigma_0 > 0$ および $t_0 < t^*$ が存在して

$$q([t_0, t^*]) \cap (\bar{D}_{\sigma_0} \times \partial B) = \emptyset, \quad (11)$$

である . σ_0 は

$$K_{\sigma_0} \subset G, \quad (12)$$

が成り立つように十分小さくとってあるとする . Δ^* は Δ_ω の部分集合でないから、 $\sigma \in (0, \sigma_0)$ があって、 t^* に近い無限に多くの t の値に対して $q(t) \notin K_\sigma$ である . そこで、 σ をこの値に固定する . t_1 を t^* に近くとって

$$|I(q(t)) - I^*| < \sigma^2/12 \quad \text{for } t_1 \leq t < t^*, \quad (13)$$

が成り立つようにする . $t \rightarrow t^*$ のとき $q(t)$ は無限回 Δ_ω^* の任意の近くに来るから、 $t \rightarrow t^*$ のとき $q(t)$ は K_σ に無限回入ったり出たりする . 性質 (11) は、 $t > t_1$ である限り $q(t)$ が $\partial D_\sigma \times B$ を通って出入りするを意味する . したがって以下の条件を満たす区間 $[\tau_0, \tau_3]$ を見つけることができる .

$$q(t) \in K_\sigma \quad \text{for } \tau_0 \leq t \leq \tau_3, \quad (14)$$

$$J_\omega(q(\tau_0)) = J_\omega(q(\tau_3)) = \sigma^2, \quad (15)$$

$$\min_{\tau_0 \leq \tau \leq \tau_3} J_\omega(q(\tau)) < \sigma^2/2, \quad \text{および} \quad (16)$$

$$\tau_3 - \tau_0 < \sigma/\sqrt{3M}. \quad (17)$$

t^* に任意に近い t の値に対して $q(t)$ が Δ_ω^* の任意の近くに来るから条件 (16) は成り立つ . はじめの 3 つの条件を満たす区間が t^* の任意の近くに生じることから条件 (17) も成り立つ .

$\bar{\tau}$ は (τ_0, τ_3) の点であって、 $I_\omega(q(t))$ が極大値をとる点とする . 方程式 (4) は $I(q) = J_\omega(q) + I_\omega(q)$ を意味する . 方程式 (13) および (16) から次が出る .

$$I_\omega(q(\bar{\tau})) > I^* - 7\sigma^2/12.$$

一方、方程式 (13) および (15) から次が出る .

$$I_\omega(q(\tau_3)) < I^* - 11\sigma^2/12.$$

この2つの不等式を結びつけば

$$I_\omega(q(\bar{\tau})) - I_\omega(q(\tau_3)) > \sigma^2/3, \quad (18)$$

であることがわかる．一方、(9)、(10)、(12) および (14) から

$$\frac{d^2}{dt^2} I_\omega(q(t)) \geq -2M \quad \text{for } \tau_0 \leq t \leq \tau_3,$$

が出る． $\bar{\tau}$ は局所極大であるから、これから

$$I_\omega(q(\tau_3)) - I_\omega(q(\bar{\tau})) \geq -M(\tau_3 - \bar{\tau})^2,$$

を得る．すると条件 (17) から次が出る．

$$I_\omega(q(\bar{\tau})) - I_\omega(q(\tau_3)) < \sigma^2/3.$$

ところがこれは (18) に矛盾する．だからケース 1 は不可能である．

ケース 2 が成り立つはずであること、つまり Δ^* は Δ_ω の部分集合のはずであることを示した．したがって $t \rightarrow t^*$ のとき $x(t) \rightarrow 0$ がただちに出る．さらに、 $\Delta^* = \Delta_\omega^*$ であるから、 G は Δ^* の近傍である．したがって t_2 が存在して、 $t_2 < t < t^*$ のとき $q(t) \in G$ である．式 (8) から

$$\ddot{z}(t) = \pi_\omega \nabla U_\omega(q(t)),$$

が出る．これを (10) と結びつけると次が出る．

$$\|\ddot{z}(t)\| \leq M \quad \text{for } t_2 < t < t^*.$$

が出る．したがって $t \rightarrow t^*$ のとき $z(t)$ はある極限 $q^* \in \Delta_\omega$ に近づく．よって

$$q(t) = x(t) + z(t) \rightarrow 0 + q^* \quad \text{as } t \rightarrow t^*,$$

であり、証明が完結した．

謝辞

この論文の大部分は著者がスウェーデンは Djursholm のミッターク・レフラー研究所に滞在中に行なわれた．著者は Lennart Carleson および Peter Jones のもてなしに感謝する．スウェーデン語の文献を熱心に搜してくれた Michael Benedicks にとくに感謝する．Ake Wallenquist および Nils Sjolander が伝記資料を用意してくれたことに感謝する．この仕事は NSF Grants MCS-82-00765 および DMS-8506131 に部分的補助を受けた．

文献

- [1] J. Chazy, Sur les singularités impossible du problème des n corps, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **170**, No.10 (1920), 575-577.
- [2] J. Gerver, A possible model for a singularity without collisions in the five body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 76-90.

- [3] G. Malmquist, Edward Hugo von Zeipel, *Svensk Uppslagsbok* **32** (1955), Förlagshuset Norden AB, Malmö, 241-242.
- [4] G. Malmquist, Hugo von Zeipel, *Kungl. Vetenskaps societetens Arsbok* **1959**, Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB, Uppsala, 27-31.
- [5] J. Mather and R. McGehee, Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time, *Lecture notes in Physics* **38** (J.Moser, ed.) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, 573-597.
- [6] P. Painlevé, *Leçon sur la Théorie Analytique des Équation Différentielles*, A. Hermann, Paris, 1897.
- [7] P. Painlevé, *Oevres de Paul Painlevé, Tome I*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972.
- [8] D. Saari, Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **49**, no.4 (1973), 311-320.
- [9] C. L. Siegel and J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.
- [10] H. Sperling, On the real singularities of the N body problem, *J. für die reine und angewandte Mathematik* **245** (1970), 15-40.
- [11] K. Sundman, Recherches sur le problème des trois corps, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* XXXIV, No.6 (1906), 1-43.
- [12] A. Wallenquist, Edward Hugo von Zeipel, *Svenska Män och Kvinnor* VIII (1955), Albert Bonniers Förlag, Stockholm, p.465.
- [13] A. Wallenquist, Hugo von Zeipel, *Populär Astronmisk Tidskrift* **40** (1959), 143-145.
- [14] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1941.
- [15] H. von Zeipel, Sur les singularités du problème des n corps, *Arkive för Matematik, Astronomi och Fysik* **4**, 32 (1908), 1-4.