谷川清隆 訳

Lecture Notes in Physics **38** (1975), 573-597

有限時間に非有界になる直線 4 体問題の解

Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time

J. N. Mather and R. McGehee

この論文では (ニュートン) 直線 4 体問題の解で有限時間に非有界になるものの存在を証明する．4 質点 m_1, m_2, m_3, m_4 が直線上を逆自乗法則

$$\ddot{q}_i = \sum_{j \neq i} m_j \frac{q_j - q_i}{|q_j - q_i|^3},$$

にしたがって動いていると考える．ここで q_i は i 番目の粒子の位置を表わす．二体衝突は正則化されているとするので、系は二体衝突を越えて定義されかつ連続である．しかし三体衝突は特異点とみなす．つまり t_0 に三体衝突が起これば、$q_i(t)$ は $t < t_0$ でのみ定義される．詳しい問題設定は [1] に記述されている．すべての時間にわたって $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq q_4$ であることに注意する．

正則化系の時間パラメータは元の系の時間パラメータと異なる．この論文では t はいつも元の系の時間パラメータのことである．

有限時間に非有界な解の存在を特殊な質量の値に対して示す．これらの解は次のようなタイプである．二体衝突を起こす増大する有界時間列 $t_1, t_2, t_3, \ldots$ が存在する．$t \to t_\infty = \lim t_i$ において $q_1 \to -\infty,\ q_3, q_4 \to +\infty$ であって、q_2 は q_1 と q_3 の間を無限回行ったり来たりする．また $q_4 - q_3 \to 0$ である．$q_4 - q_3 \to 0$ に起因するポテンシャルエネルギーの損失により、有界時間に非有界になる解の原因となる運動エネルギーが得られる．

1. 結果の陳述

相空間とは直線 4 体問題の相空間で条件 $q_1 \leq q_1 \leq q_3 \leq q_4$ を満たすものを意味することにする．ただし二体衝突は正則化されているものとする．相空間は 8 次元多様体である．重心を原点に固定することにより、6 次元部分多様体が得られる．Ω をこの多様体のエネルギー超曲面とする．すると Ω は 5 次元多様体である．

Σ を Ω の部分集合で 2 番目、3 番目および 4 番目の粒子の三体衝突、つまり $q_2 = q_3 = q_4$ で終わる軌跡の初期条件から成るものとする．以下の定理 2 は Σ が余次元 1 の (はめ込み) 多様体であることを主張する．

次の結果がこの論文の主定理である．

定理 1. 正の質量値 m_1, m_2, m_3, m_4 があって次が成り立つ．Γ は Σ を横切る Ω 内の任意の曲線とする．このとき Γ 上の点の非可算集合 A があって次の性質を持つ．$x \in A$ とする．$t_0 > 0$ が

あって、x を初期条件とする軌跡は $t < t_0$ で定義され、次を満たす．

$$q_1(t) \to -\infty,\ q_3(t), q_4(t) \to \infty,\ \text{as } t \to t_0.$$

論文の残りはこの定理の証明から成る．

$a \in \Sigma$ のとき $\tau(x)$ は x から出発する軌跡が三体衝突で終わる時刻を表わすとする．定理 1 の証明は次の定理に基づいている．

定理 **2.** Σ は Ω の余次元 1 のはめ込み部分多様体である．さらに、正の質量の値があって、

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} > \frac{m_2}{m_3 + m_4}$$

を満たし、次が成り立つ．

Γ を Ω の任意の孤で Σ を横切るものとする．このとき Γ の部分孤 Γ_0 があって、端点のひとつが $x_0 \in \Gamma$ にある．また Γ_0 上で定義される連続な正関数 τ_- で次を満たすものがある．

(a) $\tau_-(x_0) = \tau(x_0)$.

(b) $x \in \Gamma_0 - \{x_0\}$ なら初期条件 x の軌跡は $0 \le t \le \tau_-(x)$ で定義され、$q_2(\tau_-(x)) = 0$ である．

(c) $x \to x_0$ のとき $\dot{q}_2(\tau(x)) \to -\infty$ である．

定理 2 は 5 節で証明する．

定理 2 を仮定して定理 1 の証明の概略を述べよう．質量が (1) を満たし、定理 2 の結論が成り立つと仮定する．$x \in \Gamma_0,\ x \ne x_0$ とし、初期データ x の軌跡を考える．$t = \tau_-(x)$ において、粒子 2 は原点を通過し、負方向に非常な高速で動く．これは時刻 $\hat{\tau}(x) > \tau_-(x)$ に粒子 1 に衝突する．次に、これは時刻 $\tau_+(x) > \hat{\tau}(x)$ に原点を正方向に通過する．その次に、$\tau'(x) > \tau_+(x)$ に粒子 3 に衝突するか、粒子 3、4 と同時に衝突する．後者の場合、三体衝突であり、$x \in \Sigma$ である．

$\tau^*(x)$ を $\tau_-(x)$ 以前の粒子 2 と 3 の間の最後の衝突時刻とする．$N(x)$ は時間区間 $(\tau^*(x), \tau'(x))$ における粒子 3 と 4 の間の衝突回数とする．このとき $x \in \Gamma - x_0$ が x_0 に近づくにつれて $N(x) \to \infty$ である．N の値が変わるたびに Γ_0 は Σ を横切る．だから Γ_0 は Σ を無限回横切ると言える．

このとき定理 2 をこんどは Γ の代わりに Γ_0 に適用できる．つまり Γ_0 の内部に端点を $x_1 \in \Sigma$ とする部分孤 Γ_1 を見つけて、定理 2 の結論が成り立つようにできる．その上、$x \in \Gamma_0 - x_0$ が x_0 に近づくとき $\tau(x_1) \to \tau'(x_1), \tau'(x) \to \tau(x_0)$ であるから、任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\tau(x_1) \le \tau(x_0) + \varepsilon$ となるように x_1 を選ぶことができる．

これを続けて、Γ_1 の内部に $x_2 \in \Sigma$ を端点とする孤 Γ_2 を選んで定理 2 の結論が成り立つようにし、Γ_2 の内部に $x_3 \in \Sigma$ を端点とする孤 Γ_3 を選ぶ、等々．x_n が収束し、$\tau(x_n)$ が収束するように選ぶことができる．$x = \lim x_n$ および $t_0 = \lim \tau(x_n)$ と置く．すると初期値 x の軌跡は $t < t_0$ に対して定義され、$t \to \infty$ のとき条件 $q_1(t) \to -\infty,\ q_3(t), q_4(t) \to +\infty$ を満たす．

定理 1 の非可算集合 A を得るには、上の証明を少し修正するだけでよい．Γ_0 が Σ を無限回横切るから、Γ_0 の内部に互いに素な 2 つの孤 Γ_1^0 と Γ_1^1 を選んで、前に Γ_1 に要請した条件を満たすようにできる．同様に、Γ_1^i 内に互いに素な 2 つの孤 Γ_2^{i0} および Γ_2^{i1} を選んで、上で Γ_2 に要請した条件を満たすようにできる．これを続けて、カントール集合に収束する入れ子の孤列を得る．このカントール集合の任意の初期条件は求める型の軌跡を与える．

定理 1 の形式的な証明 (定理 2 を仮定して) を以下の節で与える．

2. 三体衝突への回帰

この節では前節の終わりにスケッチした定理 2 の証明の最初の部分を詳しく述べよう．主目的は、2、3、4 番目の粒子の三体衝突の近くを系が通過した後で、この系が同じ粒子の間の三体衝突に戻って来得ることを示すことである．

定義. α孤 とは、定理 2 の結論を満たす孤 Γ_0 のことである．Γ_0 の 終端点 を x_0 と呼び、τ_- を Γ_0 上の τ_-関数 と呼ぶ．$\mu(\Gamma_0) = \tau(x_0)$ と置く．

この節を通して、α 孤 Γ_0、終端点 x_0、および τ_- は固定する．$x \in \Gamma_0 - x_0$ とする．初期条件 x の軌跡を考える．次のように置く．

$$\begin{aligned}
\tau^*(x) &= \sup\{t : q_2(t) = q_3(t) \quad \text{および} \quad t < \tau_-(x)\} \\
\hat{\tau}(x) &= \inf\{t : q_1(t) = q_2(t) \quad \text{および} \quad t > \tau_-(x)\} \\
\tau_+(x) &= \inf\{t : q_2(t) = 0 \qquad \text{および} \quad t > \hat{\tau}(x)\} \\
\tau'(x) &= \inf\{t : q_2(t) = q_3(t) \quad \text{および} \quad t > \tau_+(x)\} \\
V_-(x) &= -\dot{q}_2(\tau_-(x)) \\
V_+(x) &= \dot{q}_2(\tau_+(x)).
\end{aligned}$$

明らかに、存在する限り、$\tau^*(x) < \tau_-(x) < \hat{\tau}(x) < \tau_+(x) < \tau'(x)$ である．

$\{1, 2, 3, 4\}$ の任意の部分集合 S に対して、重心を次のように定義する．

$$q_S = \sum_{i \in S} m_i q_i / \sum_{i \in S} m_i.$$

次のように置く．

$$\begin{aligned}
W_-(x) &= \dot{q}_{34}(\tau_-(x)) \\
W_+(x) &= \dot{q}_{34}(\tau_+(x)).
\end{aligned}$$

補題 **1.** x_0 に十分近い x に対して、$\tau^*(x), \hat{\tau}(x), \tau_+(x), \tau'(x)$ が存在する．その上、$x \to x_0$ のとき次が成り立つ．

$$V_+ = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_- + o(V_-) \tag{1}$$

$$W_- = \frac{m_2}{m_3 + m_4} V_- + o(V_-) \tag{2}$$

$$W_+ = W_- + O(V_-) \tag{3}$$

$$\tau^*, \tau_-, \hat{\tau}, \tau_+, \tau' \to \tau(x_0). \tag{4}$$

証明. $\tau^*(x)$ の存在および $\tau^* \to \tau(x_0)$ は明らかである．τ_- の存在および $\tau_- \to \tau(x_0)$ は定理 2 の一部である．残りの主張の証明のために $x \to x_0$ のとき $V_- \to \infty$ なることを使う．

残りの粒子から遠いところにある部分系の運動量やエネルギーの変化は比較的小さいという性質が必要である．運動量に関してはこれは簡単である．$S \subset \{1,2,3,4\}$ に対して、部分系 S の運動量を次のように定義する．

$$p_S = m_S \dot{q}_S = \sum_{i \in S} m_i \dot{q}_i.$$

ここで m_S は部分系 S の質量である．すなわち、

$$m_S = \sum_{i \in S} m_i.$$

逆自乗法則からただちに次が出る．

$$\dot{p}_S = \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} m_i m_j \frac{q_i - q_j}{|q_i - q_j|^3}.$$

簡単に判るように、$x \to x_0$ のとき $\tau_-(x) \to \tau(x_0)$ であるから、$x \to x_0$ のとき、$q_1(\tau_-(x))$, $p_1(\tau_-(x)), q_{234}(\tau_-(x)), p_{234}(\tau_-(x))$ は収束する．さらに、$q_2(\tau_-(x)) = 0$ であるから $x \to x_0$ のとき $q_{34}(\tau_-(x))$ は収束する．$x \to x_0$ のとき $\dot{q}_2(\tau_-(x)) \to -\infty$ であるから、粒子 2 は $x \to x_0$ のとき粒子 3、4 からの相対脱出速度より任意に大きな速度を持つと仮定できる．粒子 1 の位置と速度は $x \in \Gamma_0$ のとき有界であるから、x_0 に十分近い x に対して $\hat{\tau}(x)$ の存在が言える．

さらに先に進むために、部分系の内部エネルギーの変化を評価する必要がある．$S \subset \{1,2,3,4\}$ のとき S の内部エネルギーを次のように定義する．

$$h_S = \sum_{i \in S} \frac{m_i}{2} (\dot{q}_i - \dot{q}_S)^2 - \sum_{i,j \in S} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

$r_{ij} = |q_i - q_j|, S' = \{1,2,3,4\} - S$ および $r_{SS'} = \inf\{r_{ij} : i \in S, j \in S'\}$ と置く．

補題 2. $\rho, r^0 > 0$ とする．$C > 0$ が存在して、任意の軌跡に対して以下が成り立つ．$h_{12}(t_0) > 0, r_{12}(t_0) \leq r^0$ および $r_{SS'}(t_0) \geq \rho$ なら次が成り立つ．

$$\frac{d}{dt} \log h_{12}(t_0) \leq C (h_{12}(t_0))^{-1/2}.$$

これは 3 節で証明する．

x を x_0 に十分近く取ることにより、V_- を任意に大きく取ることができ、したがって $h_{12}(\tau_-)$ を任意に大きく取ることができる．$\varepsilon > 0$ とし、$\tau_+(x)$ が存在するなら $t_1(x) = \min(\tau_-(x) + \varepsilon, \tau_+(x))$ とし、そうでないときには $t_1(x) = \tau_-(x) + \varepsilon$ と置く．$-p_{12}(\tau_-)$ は任意に大きいから、補題が適用でき、x を x_0 に十分近く取ることによって $\log h_{12}(t)$ の変化が区間 $\tau_- \leq t \leq t_1$ で任意に小さくなるようにできることがわかる．したがって粒子 2 は任意に小さな時間で原点に戻って来るはずである．すなわち、$\tau_+(x)$ は存在し、$x \to x_0$ のとき $\tau_+(x) - \tau_-(x) \to 0$ である．(ここで $m_1 > m_2$ を使った.)

すると $x \to x_0$ のときとき $|\log h_{12}(\tau_+) - \log h_{12}(\tau_-)| \to 0$ であり、また $|p_{12}(\tau_+) - p_{12}(\tau_-)| \to 0$ であるから (1) を得る．$x \to 0$ のとき $p_{234}(\tau_-)$ は極限に近づくから (2) を得る．$x \to x_0$ のときとき $|p_{34}(\tau_-) - p_{34}(\tau_+)| \to 0$ であるから (3) を得る．(4) に関しては、$\tau^*, \tau_-, \hat{\tau}, \tau_+ \to \tau(x_0)$ をすでに示してある．

残っているのは、τ' が存在すること、および $\tau' \to \tau(x_0)$ となることである．しかし 1 節の不等式 (1) より、x が十分 x_0 に近ければ $V_+ > W_+$ であり、粒子 2 は最終的に粒子 3 および 4 に任意に小さな時間で追いつくはずである．

以下で行なうことのために次が必要である．

補題 3.

$$\sup_{\tau_- \le t \le \tau_+} |h_{34}(t) - h_{34}(\tau_-)| \to 0, \quad \text{as} \quad x \to x_0.$$

これは 3 節で証明する．

$x \to x_0$ のとき $V_- \to -\infty$ である．だから $C < m_2/2$ なら、x が x_0 に十分近いとき運動エネルギーは CV_-^2 より大きい．エネルギーが保存することおよび $q_1(\tau_-), q_2(\tau_-), q_{34}(\tau_-)$ が $x \to x_0$ のとき異なる極限に収束することより、$C_1 > 0$ が存在して、次の不等式が x_0 に十分近いすべての x に対して成り立つ．

$$h_{34}(\tau_-) < -C_1 V_-^2.$$

補題 3 より、$C_2 < C_1$ なら、次の不等式が x_0 に十分近いすべての x に対して成り立つ．

$$\sup_{\tau_- \le t \le \tau_+} h_{34}(t) < -C_2 V_-^2.$$

したがって、適当な $C_3 > 0$ および x_0 に十分近いすべての x に対して次が成り立つ．

$$\sup_{\tau_- \le t \le \tau_+} r_{34}(t) < C_3 V_-^{-2}. \tag{5}$$

逆自乗則を考えているから、$C_4 > 0$ があって、x_0 に十分近いすべての x に対して次が成り立つ．

$$\inf_{\tau_- \le t \le \tau_+} \ddot{r}_{34}(t) \le -C_4 V_-^4. \tag{6}$$

(ここで $q_3(t) = q_4(t)$ なら $\ddot{r}_{34}(t) \to -\infty$ と約束する.) (5) と (6) を結びつけて次を得る．

補題 4. $C_5 > 0$ が存在して、$\tau_- \le t \le \tau_+$ の間の粒子 3、4 の間の最大衝突時間間隔は $C_5 V_-^{-3}$ 以下である．

一方、簡単に判るように、x が x_0 に十分近ければ $C_6 > 0$ が存在して、$\tau_+ - \tau_- > C_6 V_-^{-1}$ である．この注意を補題 4 と合わせれば、時間区間 $[\tau_-, \tau_+]$ の間の粒子 3、4 間の衝突回数は $x \to x_0$ のとき ∞ に向かう．したがって時間区間 $[\tau^*, \tau']$ の間の粒子 3、4 間の衝突回数を $N(x)$ とすれば、次を得る．

$$N(x) \to \infty, \quad \text{as} \quad x \to x_0. \tag{7}$$

整数値関数 $N(x)$ の値は $x \in \Gamma_0$ が Σ を横切るときのみ変化するから、次を得る．

補題 **5.** Γ_0 は Σ を無限回横切る．その上、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、Γ_0 内に互いに素な α 孤の無限列 $\Gamma_1^0, \Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \ldots$ を選んで、すべての i に対して $\mu(\Gamma_1^i) < \tau(x_0) + \varepsilon$ となるようにできる．

3. 部分系のエネルギー変化

この節では、2 節の補題 2 と 3 を証明する．2 粒子部分系のエネルギー変化に興味がある．$S = \{1, 2\}$ とする．このとき次が成り立つ．

$$h_S = h_{12} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

ここで $r_{ij} = |q_i - q_j|$ である．その上、

$$\dot{h}_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}(q_1 - q_2)(\dot{q}_1 - \dot{q}_2).$$

逆自乗則より

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = -(m_1 + m_2)\frac{q_1 - q_2}{r_{12}^3} + R.$$

ここで

$$R = \sum_{i \notin S} m_i \left(\frac{q_i - q_1}{r_{i1}^3} - \frac{q_i - q_2}{r_{i2}^3} \right).$$

このとき

$$\dot{h}_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)R.$$

明らかに

$$R = \sum_{i \notin S} m_i \left(\frac{q_2 - q_1}{r_{i2}^3} + (q_1 - q_i)\left(\frac{1}{r_{i2}^3} - \frac{1}{r_{i1}^3} \right) \right).$$

$r_{i1} \le r_{i2}$ なら

$$\left| \frac{q_2 - q_1}{r_{i2}^3} + (q_1 - q_i)\left(\frac{1}{r_{i2}^3} - \frac{1}{r_{i1}^3} \right) \right| \le 4\frac{r_{12}}{r_{SS'}^3},$$

である．ここで $r_{SS'} = \inf\{r_{ij} : i \in S, j \in S'\}$ であり、S' は S の補集合を表わす．これは $r_{i2} \le r_{i1}$ のときも成り立つ．というのは、左辺の量は次のように書き換えることができる．

$$\left| \frac{q_i - q_1}{r_{i1}^3} - \frac{q_i - q_2}{r_{i2}^3} \right|$$

これは $\{1, 2\}$ の置き換え (transposition) で変わらない．したがって

$$|R| \le 4\left(\sum_{i \notin S} m_i \right) \frac{r_{12}}{r_{SS'}^3},$$

および

$$|\dot{h}_{12}| \le 4\left(\sum_{i \notin S} m_i \right) |\dot{q}_1 - \dot{q}_2| \frac{r_{12}}{r_{SS'}^3}. \tag{1}$$

$v = |\dot{q}_1 - \dot{q}_2|$ と置く．$h_{12} < 0$ なら、条件

$$h_{12} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 - \frac{m_1 m_2}{r_{12}}, \tag{2}$$

の下で vr_{12} を極大にする問題を解くことができ、極大が

$$r_{12} = -\frac{m_1 m_2}{2h_{12}}$$

で生じること、およびそのときの値が

$$vr_{12} = \sqrt{-\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2h_{12}}}$$

であることが判る．したがって

$$|\dot{h}_{12}| \le C(-h_{12})^{-1/2} r_{SS'}^{-3}$$

である．ここで

$$C = 4\left(\sum_{i \notin S} m_i\right)\sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)/2}.$$

明らかに、上の議論を部分系 $\{3, 4\}$ にも適用できるから、補題 3 がただちにしたがう．

こんどは $h_{12} > 0$ の場合を考えよう．$v = |\dot{q}_1 - \dot{q}_2|$ と置く．簡単に判るように、vr_{12} は $r_{12} > 0$ で h_{12} を固定したとき r_{12} の増加関数である．したがって (1) より次が得られる．

$$|\dot{h}_{12}| \le \sqrt{C_2 h_{12} + C_3}.$$

ここで

$$C_2 = \left(4\left(\sum_{i \notin S} m_i\right) r^0 \rho^{-3}\right)^2 \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2},$$
$$C_3 = \left(4\left(\sum_{i \notin S} m_i\right) r^0 \rho^{-3}\right)^2 \frac{2(m_1 + m_2)}{r^0}.$$

補題 2 はただちに言える．

4. 定理 1 の証明

定理 2 より、Γ 内に α 孤 Γ^0 が選べる．x_0 を Γ^0 の終端点とする．以下の主張は補題 5 および k に関する帰納法の帰結である．各 $i, 0 \le i \le k$ および 0 と 1 から成る各列 $(j_1, \ldots, j_i)$ に対して、α 孤 $\Gamma^i_{j_1 \ldots j_i}$ があって次を満たす．

(a) $\Gamma^i_{j_1 \ldots j_i} \subset \Gamma^{i-1}_{j_1 \ldots j_{i-1}}$, $\Gamma^1_j \subset \Gamma^0$.

(b) i を固定すると、いろいろな $\Gamma^i_{j_1 \ldots j_i}$ は素である．また

(c) $\mu(\Gamma^i_{j_1 \ldots j_i}) \le \tau(x_0) + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-i}$.

$\Gamma^i = \cup \Gamma^i_{j_1 \dots j_i}$ とする．ただし、和は 0 と 1 から成る長さ i の列 $(j_1 \dots j_i)$ すべての上で取る．次のように置く．

$$A \cap_i \Gamma^i.$$

明らかに A は非可算である．$x \in A$ に対して、初期値 x の軌跡は $t \to t_0 < \tau(x) + 1$ のとき原点を無限回横切るはずである．このような x に対して、軌跡は定理 1 で記述したふるまいをする．

5. 定理 **2** の証明

三体部分系 $\{2, 3, 4\}$ を考えよう．[1] の技術を使って、三体衝突の近くを通過する解の中に、粒子 2 が任意の高速で飛び出すものがあることを示そう．このふるまいは $m_2 = m_4$ の質量のある種の値に対して生じることは知られている．$m_2/(m_3 + m_4) < 1$ であるから、m_1 を大きく選んで (1) が成り立つようにできる．

i 番目の粒子の運動量を $p_i = m_i \dot{q}_i$ と表わし、$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ および $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ と書く．系のハミルトン関数は次のように書ける．

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}).$$

ここで

$$T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \frac{p_i^2}{m_i},$$
$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

系が 2 つの成分を持つと見なす．すなわち、(1) 三粒子系 $\{2, 3, 4\}$ と (2) 粒子 1 と部分系 $\{2, 3, 4\}$ の重心とで構成される 2 粒子系である．この重心を次のように書く．

$$\overline{x} = \frac{m_2 q_2 + m_3 q_3 + m_4 q_4}{m_2 + m_3 + m_4}.$$

また次のように置く．

$$\overline{y} = \frac{p_2 + p_3 + p_4}{m_2 + m_3 + m_4}.$$

部分系 $\{2, 3, 4\}$ に次の新しい変数を定義する．

$$x_1 = q_2 - \overline{x}, \quad y_1 = p_2 - m_2 \overline{y}$$
$$x_2 = q_3 - \overline{x}, \quad y_2 = p_3 - m_3 \overline{y}$$
$$x_3 = q_4 - \overline{x}, \quad y_3 = p_4 - m_4 \overline{y}.$$

次が成り立つことに注意する．

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in X = \{\mathbf{x} \in R^3 : m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\},$$
$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in Y = \{\mathbf{y} \in R^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

2 粒子系に次の新しい変数を定義する．

$$z_1 = q_1, \quad w_1 = p_1,$$
$$z_2 = \overline{x}, \quad w_2 = (m_2 + m_3 + m_4)\overline{y}.$$

全系の重心は原点に固定されているから次が成り立つ．

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in Z = \{\mathbf{z} \in R^2 : m_1 z_1 + (m_2 + m_3 + m_4) z_2 = 0\},$$
$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in W = \{\mathbf{w} \in R^2 : w_1 + w_2 = 0\}.$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ を列ベクトルと考え、2 つの対角行列を次のように定義する．

$$M_1 = \mathrm{diag}(m_2, m_3, m_4),$$
$$M_2 = \mathrm{diag}(m_1, m_2 + m_3 + m_4).$$

するとハミルトン関数は次のように書ける．

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T M_1^{-1}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{w}^T M_2^{-1}\mathbf{w} - U_1(\mathbf{x}) - U_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

ここで

$$U_1(\mathbf{x}) = \frac{m_2 m_3}{|x_2 - x_3|} + \frac{m_2 m_4}{|x_2 - x_4|} + \frac{m_3 m_4}{|x_3 - x_4|},$$
$$U_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2 - x_1|} + \frac{m_1 m_3}{|z_1 - z_2 - x_2|} + \frac{m_1 m_4}{|z_1 - z_2 - x_3|}.$$

この変数で運動方程式は次のようになる．

$$\dot{\mathbf{x}} = M_1^{-1}\mathbf{y},$$
$$\dot{\mathbf{y}} = \nabla U_1(\mathbf{x}) + \nabla_1 U_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$
$$\dot{\mathbf{z}} = M_2^{-1}\mathbf{w},$$
$$\dot{\mathbf{w}} = \nabla_2 U_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

ここで $\nabla_1 (\nabla_2)$ は第一 (第二) 変数に関する勾配である．
次に [1] で用いた変数を導入する．次のように置く．

$$r = (\mathbf{x}^T M_1 \mathbf{x})^{1/2},$$
$$\mathbf{s} = \mathbf{x}/r,$$
$$\mathbf{u} = r^{1/2}\mathbf{y}.$$

r^2 が三粒子系 $\{2, 3, 4\}$ のその重心に関する慣性モーメントであることに注意しよう．また

$$\mathbf{s} \in S = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x}^T M_1 \mathbf{x} = 1\}.$$

X は 2 次元線形空間であるから、S は円に同相である．この変数で運動方程式は次のようになる．

$$\dot{r} = r^{-1/2}\mathbf{u}^T\mathbf{s},$$
$$\dot{\mathbf{s}} = r^{-3/2}[-(\mathbf{u}^T\mathbf{s})\mathbf{s} + M_1^{-1}\mathbf{u}],$$
$$\dot{\mathbf{u}} = r^{-3/2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}^T\mathbf{s})\mathbf{u} + \nabla_1 U(\mathbf{s}) + r^2 \nabla_1 U_2(r\mathbf{s}, \mathbf{z})\right],$$
$$\dot{\mathbf{z}} = M_2^{-1}\mathbf{w},$$
$$\dot{\mathbf{w}} = \nabla_2 U_2(r\mathbf{s}, \mathbf{z}).$$

S 上の点は系 $\{2,3,4\}$ の配置に対応する．$q_2 \le q_3 \le q_4$ なる配置の孤がある．$\sigma : [-1,1] \to S^1$ はこの孤の上への微分同相写像であって、λ を定数として次の性質を満たすとする．

$$\sigma'(s)^T M_1 \sigma'(s) = \lambda^{-2}.$$

$s=-1$ が $q_2=q_3$ に対応し、$s=1$ が $q_3=q_4$ に対応するとすれば、σ は一意であり、あからさまに書き下せる [1]．$\mathbf{z}_0 \in Z$ は $q_1 < 0$ に対応し、$\mathbf{z}_0^T M_2 \mathbf{z}_0 = 1$ を満たすとする．

新しい変数 s, v, u, z および w を次のように導入する．

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s} = \sigma(s),\\
&\mathbf{u} = vM_1\sigma(s) + u\lambda M_1\sigma'(s),\\
&\mathbf{z} = z\mathbf{z}_0,\\
&\mathbf{w} = wM_2\mathbf{z}_0.
\end{aligned}$$

また次を定義する．

$$\begin{aligned}
&V_1(s) = U_1(\sigma(s)),\\
&V_2(r,s,z) = U_2(r\sigma(s), z\mathbf{z}_0).
\end{aligned}$$

運動方程式は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}
&\dot{r} = r^{-1/2}v,\\
&\dot{\mathbf{s}} = r^{-3/2}\lambda u,\\
&\dot{v} = r^{-3/2}\left[\frac{1}{2}v^2 + u^2 - V_1(s) + r^2\frac{\partial V_2}{\partial r}(r,s,z)\right],\\
&\dot{u} = r^{-3/2}\left[-\frac{1}{2}vu + \lambda V_1'(s) + \lambda r\frac{\partial V_2}{\partial s}(r,s,z)\right],\\
&\dot{z} = w,\\
&\dot{w} = \frac{\partial V_2}{\partial z}(r,s,z).
\end{aligned} \tag{1}$$

ふたたび [1] におけるように時間の変換

$$dt = r^{3/2}dt'$$

を行なって、三体衝突に終わる軌道を減速させる．このとき次を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt'} = rv,\\
&\frac{ds}{dt'} = \lambda u,\\
&\frac{dv}{dt'} = \frac{1}{2}v^2 + u^2 - V_1(s) + r^2\frac{\partial V_2}{\partial r}(r,s,z),\\
&\frac{du}{dt'} = -\frac{1}{2}vu + \lambda V_1'(s) + \lambda r\frac{\partial V_2}{\partial s}(r,s,z),\\
&\frac{dz}{dt'} = r^{3/2}w,\\
&\frac{dw}{dt'} = r^{3/2}\frac{\partial V_2}{\partial z}(r,s,z).
\end{aligned} \tag{2}$$

全エネルギー $H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = h_0$ を固定する．全エネルギーを三粒子系のエネルギー h_1 と二粒子系のエネルギー h_2 の和に書く．

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{y}^T M_1^{-1}\mathbf{y} - U_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2) - V_1(s)\right], \\
h_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{w}^T M_2^{-1}\mathbf{w} - U_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \frac{1}{2}w^2 - V_2(r,s,z), \\
h_1 &+ h_2 = h_0.
\end{aligned}
$$

h_0 は運動の定数であるが h_1 と h_2 はそうでないことに注意しよう．

$z \neq 0$(すなわち四体衝突は起こっていない) なら、$V_2(r,s,z)$ は $r=0$ で滑らかである．したがって運動方程式は $\{r=0\}$ に拡張される．そこでは多様体 $\Omega_C \times (0,\infty) \times R^1$ 上の流れが次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{dt'} &= \lambda u, \\
\frac{dv}{dt'} &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - V_1(s), \\
\frac{du}{dt'} &= -\frac{1}{2}vu + \lambda V_1'(s), \\
\frac{dz}{dt'} &= 0, \\
\frac{dw}{dt'} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで

$$
\begin{gathered}
(s,v,u) \in \Omega_C = \left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2) - V_1(s) = 0\right\}, \\
z \in (0,\infty),\ w \in R^1.
\end{gathered}
$$

上の流れは $(0,\infty) \times R^1$ 上の恒等流れと Ω_C 上の流れの積である．Ω_C 上の流れは [1] で調べた流れそのものである．すなわち、三体衝突に近づく極限で、粒子 1 の効果は消える．

ベクトル場 (2) と (3) は $s = \pm 1$ にまだ特異性を持っている．この特異性は粒子 2 と 3 および粒子 3 と 4 の二体衝突に対応する．軌道は [1] で使ったのとまったく同じ変換によって二体衝突を越えて延長できる．ここではこの変換を実行しないけれども、流れはあたかも二体衝突を越えて延長されているものと考える．

Σ の多様体構造は [1] での計算と [2] の定理 1 から出る．一意の点 $\omega \in \Omega_C$ があって、三体衝突に終わる軌道は Ω に漸近するはずである．だから Σ は不変集合 $\{\omega\} \times (0,\infty) \times R^1$ の安定多様体である．[1] で示されたように、ω は 2 つの吸引方向を持つ．$(0,\infty) \times R^1$ の 2 つの中性方向を加えて、Σ は 4 次元 (余次元 1) である．

Ω_C 内の ω の不安定多様体は 2 本の軌道から成る．[1] で示したように、$m_2 = m_4$ なる m_2, m_3, m_4 のある種の値に対して、v はこれらの軌道上で非有界になる．さらに、一方の軌道上で $s \to -1$ であり、もう一方の軌道上で $s \to +1$ である．上で述べたように、この節では、m_2, m_3, m_4 は Ω_C 上の流れがこれらの性質を満たすように固定しておく．

x_0 で Σ を横切る孤 Γ がある．x_0 を通る軌道は $\{\omega\} \times (0,\infty) \times R^1$ に漸近する．ゆえに点 (ω, z^*, w^*) に漸近する [3]．x_0 を通る軌道は時間座標 t' で、無限時間かかって三体衝突に達する．ただし、もとの時間座標 t では軌道は三体衝突に時刻 $\tau(x_0) < \infty$ に到達する．

こんどは $\rho(s,z)$ は位置座標 $(r=\rho(s,z),s,z)$ が位置座標 $(q_1,q_2=0,q_3,q_4)$ に対応するものとする．このとき ρ はうまく定義された連続関数である．次のように置く．

$$\Lambda=\{(r,s,u,v,z,w):r=\rho(s,z)\}.$$

次の補題で与えられる評価を仮定して定理 2 を証明しよう．この評価はこの節の終わりに証明する．

補題 **6.** $(r,s,v,u,z,w)(t')$ を (2) の解とする．$\overline{\mu}>0$ が存在して次が成り立つ．任意の $\overline{v}>0$ が与えられたとき、$\tilde{\varepsilon}>0$ と $\tilde{v}>0$ があって、

$$|z(0)-z^*|<\tilde{\varepsilon},\quad |w(0)-w^*|<\tilde{\varepsilon},\quad r(0)<\tilde{\varepsilon},\quad \text{および}\quad v(0)>\tilde{v},$$

なら、解が Λ を横切るまで

$$v(t')>\overline{v},\quad |h_1(t')|<\overline{\mu},\quad r(t')<\overline{\mu},\quad \text{および}\quad |w(t')-w^*|<\overline{\mu}$$

である．

定理 2 の証明. Σ が余次元 1 のはめ込み部分多様体であること、および質量が (1) を満たすように選べることはすでに証明した．残るは (a),(b),(c) を満たす Γ_0 と τ_- の存在を言えばよい．

$x\in\Gamma$ に対して $\tau_-(x)$ を、x を通る軌道が Λ に行きあたるまでにかかる最小時間とする．τ_- が定義される限り、それは (b) を満たす．

Σ は余次元 1 であるから、局所的に両側を持つ (two-sided)．Σ の片側を出発する軌道は ω の不安定多様体のひとつの分枝にしたがい、Σ のもう一方の側から出発する軌道はもうひとつの分枝にしたがう．Σ_0 を多様体位相に関して Σ 内の x_0 の小さな開近傍とする．Γ の部分孤 $\tilde{\Gamma}$ を取り、$\tilde{\Gamma}\cap\Sigma_0=\{x_0\}$ とし、また $\tilde{\Gamma}$ が $s\to+1$ なる不安定多様体の分枝に対応する Σ_0 の側にあるとする．

点の安定多様体の近くから出発する軌道は、任意に遠くまでその点の不安定多様体にしたがう傾向がある．したがって任意の $a>0$ と任意の $\tilde{v}>0$、および x_0 を通る正の軌道の閉包の任意の開近傍 $\mathcal{U}$ が与えられたとき、x_0 に接する $\tilde{\Gamma}$ の部分孤 $\hat{\Gamma}$ があって次の性質を持つ．すなわち、(1) 各 $x\in\hat{\Gamma}$ に対して x を通る軌道は v が $\tilde{v}$ を越えるまで $\mathcal{U}\cup\{r<a\}$ にとどまり、(2) $x\to x_0$ のとき軌道は (ω,z^*,w^*) の不安定多様体上の点の任意の近くを $v=\tilde{v}$ で通過する．この点は $z=z^*$ および $w=w^*$ であることに注意する．$dt=r^{3/2}dt'$ であったことを思いだそう．したがって時間座標 t では、軌道が $\hat{\Gamma}$ から $v=\tilde{v}$ へ行くまでの時間は a と $\mathcal{U}$ を小さく選ぶことによって $\tau(x_0)$ に任意に近くできる．

次に $\overline{\mu}$ は補題 6 で与えられるものとする．方程式 (1) より、$v>\overline{v}$ である限り次を得る．

$$\frac{dr}{dt}=r^{-1/2}v\geq\overline{\mu}^{-1/2}\overline{v}$$

したがって補題 6 に記述された軌道は $\overline{\mu}^{3/2}/\overline{v}$ 未満の時間で Λ を横切る．任意の $\overline{v}$ に対して、$\tilde{\varepsilon},\tilde{v}$ は補題 6 で与えられるものとする．$\hat{\Gamma}$ を小さく選んで、$\hat{\Gamma}$ 内を出発する軌道が v がはじめて $\tilde{v}$ になったときにその補題の仮定を満たすようにする．このとき τ_- は $\hat{\Gamma}$ 上で定義され、$x\to x_0$ のとき $\tau_-(x)\to\tau(x_0)$ である．$\Gamma_0=\hat{\Gamma}\cup\{x_0\}$ と取れば、(a) と (b) が証明できた．

(c) を証明するのに、まず $x \in \hat{\Gamma}$ に対して、x を通る軌道が Λ を横切るときの v の値が $x \to x_0$ なら無限大に向かうことに注意しよう．h_1 の定義から次が得られる．

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2) - V_1(s) = rh_1.$$

だから

$$\frac{1}{2}v^2 - \overline{\mu}^2 \le V_1(s).$$

したがって $v \to \infty$ のとき $s \to +1$ である．[1] に与えられる σ の表式から次のように書ける．

$$y_1 = \lambda_1 r^{-1/2}[v\cos\lambda(1-s) + u\sin\lambda(1-s)].$$

ここで $\lambda_1 < 0$ は質量のみに依存する定数である．ふたたび h_1 の定義より次を得る．

$$u^2 \le 2V_1(s) + 2\overline{\mu}^2.$$

$s \to +1$ のとき $(1-s)V_1(s)$ は有界であるから、$|u\sin\lambda(1-s)|$ は有界である．したがって $v \to \infty$ のとき $y_1 \to -\infty$ である．ところが次が成り立つ．

$$\dot{q}_2 = \dot{x}_1 + \dot{z}_2 = y_1/m_1 + w_2/(m_1+m_2+m_3).$$

w_2 は $|w^*| + \overline{\mu}$ の定数倍で抑えられるから、$v \to \infty$ のとき $\dot{q}_2 \to -\infty$ であり、これで (c) が確立された．$\dot{q}_2 < 0$ なら Λ は横断面であるから、τ_- は x_0 の近くで連続である．必要なら Γ_0 をもっと小さく取って、τ_- が Γ_0 上で連続であるようにする．定理 2 の証明が完結した．

以下の補題 7 から 10 までの一連の評価を使って補題 6 を証明しよう．$\mathcal{R} = \{(r,s,z) : r \le \rho(s,z)\}$ と置く．

補題 7. 正の ε_0 と μ_0 があって、$(r,s,z) \in R$ および $|z-z^*| < \varepsilon_0$ のときはいつも次が成り立つ．

$$|V_2(r,s,z)| < \mu_0, \quad \left|\frac{\partial V_2}{\partial r}(r,s,z)\right| < \mu_0, \quad \text{および} \quad \left|\frac{\partial V_2}{\partial z}(r,s,z)\right| < \mu_0.$$

証明. V_2 はコンパクト集合 $\{(r,s,z^*) : 0 \le r \le \rho(s,z^*), s \in [-1,1]\}$ の近傍で実解析的である．評価は連続性から出る．

補題 8、9、10 に対しては $(r,s,v,u,z,w)(t')$ を (2) の解で、$t' \in [0,\overline{t}']$ のとき $(r,s,z)(t') \in \mathcal{R}$ を満たすものとする．$\rho^* = \max\{\rho(s,z^*) : s \in [-1,1]\}$ と置き、$\varepsilon^* > 0$ を固定する．

補題 8. $\varepsilon_1 > 0$ と $\mu_1 > 0$ があって、$t' \in [0,\overline{t}')$ に対して

$$|w(t') - w^*| < \varepsilon_1, \quad r(t') < \rho^* + \varepsilon^*, \quad \text{および} \quad v(t') > \hat{v} > 0$$

のときはいつも次が成り立つ．

$$|z(\overline{t}') - z(0)| < \mu_1/\hat{v}.$$

証明. 任意の $\varepsilon_1 > 0$ を取り、$\mu_1 > \dfrac{2}{3}(\rho^* + \varepsilon^*)^{3/2}(|w^*| + \varepsilon_1)$ と置く．$\dfrac{dr}{dt'} = rv > 0$ であるから、次を得る．

$$z(\overline{t}') - z(0) = \int_0^{\overline{t}'} \frac{dz}{dt'} dt' = \int_{r(0)}^{r(\overline{t}')} \frac{dz}{dr} dr.$$

したがって

$$\begin{aligned} |z(\overline{t}') - z(0)| &\leq \int_{r(0)}^{r(\overline{t}')} r^{1/2} \frac{|w|}{v} dr \\ &\leq \frac{2}{3}(\rho^* + \varepsilon^*)^{3/2}(|w^*| + \varepsilon_1)/\hat{v} < \mu_1/\hat{v}. \end{aligned}$$

補題 **9.** 正の ε_2, v_2 および μ_2 があって、

$$\begin{aligned} &|w(\overline{t}') - w(0)| < \mu_2/\hat{v}, \\ &|h(\overline{t}')| < \mu_2, \\ &v(\overline{t}') > v(0) - \rho^* - \varepsilon^*, \end{aligned}$$

が、$|z(0) - z^*| < \varepsilon_2$ のときはつねに、また $t' \in [0, \overline{t}')$ に対して

$$|w(t') - w^*| < \varepsilon_2, \quad r(t') < \rho^* + \varepsilon^*, \quad \text{および} \quad v(t') > \hat{v} \geq v_2$$

が成り立つときにはつねに成り立つ．

証明. はじめに $\varepsilon_2 < \min(\varepsilon_1, \dfrac{\varepsilon_0}{2})$ と選ぶ．次に μ_2 を次のように選ぶ．

$$\mu_2 > \max\left(\frac{2}{3}(\rho^* + \varepsilon^*)^{3/2}\mu_0, |h_0| + \frac{1}{2}(|w^*| + \varepsilon_2)^2 + \mu_0\right).$$

最後に v_2 を次のように選ぶ．

$$v_2 > \max\left(2\mu_1/\varepsilon_0, \mu_2 + (\rho^* + \varepsilon^*)\mu_0\right)$$

補題 8 より次を得る．

$$|z(t') - z^*| < \mu_1/v_2 < \varepsilon_0/2.$$

したがって $|z(t') - z^*| < \varepsilon_0$ であり、補題 7 の評価が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned} |w(\overline{t}') - w(0)| &\leq \int_{r(0)}^{r(\overline{t}')} r^{1/2} \left|\frac{\partial V_2}{\partial z}(r, s, z)\right| / v dr \\ &\leq \frac{2}{3}(\rho^* + \varepsilon^*)^{3/2}\mu_0/\hat{v} < \mu_2/\hat{v}, \end{aligned}$$

であり、第一の評価式が確立された．

第二の評価式は次のように得られる．

$$h_1 = h_0 - h_2 = h_0 - \frac{1}{2}w^2 + V_2(r, s, z).$$

だから

$$|h_1(\overline{t}')| \le |h_0| + \frac{1}{2}(|w^*| + \varepsilon_2)^2 + \mu_0 < \mu_2.$$

第三の評価式に関しては、(2) より次式が成り立つことが判る．

$$\frac{d(r+v)}{dt'} = \frac{1}{2}u^2 + r\left[v + h_1 + r\frac{\partial V_2}{\partial r}(r,s,z)\right].$$

したがって

$$\frac{d(r+v)}{dt'} > r\left[v_2 - \mu_2 - (\rho^* + \varepsilon^*)\mu_0\right] > 0.$$

ゆえに

$$r(\overline{t}') + v(\overline{t}') > r(0) + v(0) > v(0),$$

および

$$v(\overline{t}') > v(0) - \rho^* - \varepsilon^*.$$

これで補題 9 の証明が完結した．

補題 10. 任意の正数 δ と ν が与えられたとき、正数 ε_3 と v_3 があって、次の評価が成り立つ．すなわち、

$$|w(\overline{t}') - w^*| < \delta \quad \text{および} \quad v(\overline{t}') > \nu$$

が、$t' \in [0, \overline{t}')$ に対して $r(t') < \rho^* + \varepsilon^*$ なるすべての $\hat{t}'$ に対して成立ち、

$$|z(0) - z^*| < \varepsilon_3, \quad |w(0) - w^*| < \varepsilon_3, \quad \text{および} \quad v(0) > v_3.$$

のときはつねに成り立つ．

証明. 一般性を失うことなく、$\delta < \varepsilon_2$ および $\nu > v_2$ と取れる．$\varepsilon_3 < \varepsilon_2$ および $v_3 > \nu + \rho^* + \varepsilon^*$ と選ぶ．また v_3 を十分大きく取って

$$\mu_2/(v_3 - \rho^* - \varepsilon^*) < \delta$$

となるようにする．

背理法を使う．$\hat{t}'$ があって $|w(\hat{t}') - w^*| \ge \delta$ または $v(\hat{t}') \le \nu$ であると仮定する．このような $\hat{t}'$ の最小のものを選ぶ．このとき、$t' \in [0, \hat{t}')$ に対して $|w(t') - w^*| < \delta < \varepsilon_2$ および $v(t') > \nu > v_2$ である．補題 9 から次を得る．

$$v(\hat{t}') > v_3 - \rho^* - \varepsilon^* > \nu.$$

したがって $|w(\hat{t}') - w^*| \ge \delta$ のはずである．ところがふたたび補題 9 より次を得る．

$$|w(\hat{t}') - w(0)| < \mu_2/(v_3 - \rho^* - \varepsilon^*) < \delta.$$

これは仮定に矛盾するから補題 10 が証明された．

補題 6 の証明. 解は $r = \rho(s,z)$ のとき Λ を横切る．ρ^* の定義より、ε_4 が存在して、すべての $t \in [0, \hat{t}']$ に対して $r(0) < \varepsilon_4, r(\hat{t}') \ge \rho^* + \varepsilon^*$ および $|z(t') - z^*| < \varepsilon_4$ なら、解は時間区間 $(0, \hat{t}')$ のどこかで Λ を横切る．

$\overline{\mu} > \max(\mu_2, \rho^* + \varepsilon^*)$ とする．任意に $\overline{v}$ が与えられたとき、$\nu > \max(\overline{v}, v_2, 2\mu_1/\varepsilon_4), \delta < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overline{\mu})$ を取り、ε_3 と v_3 を補題 10 で与えられるものとする．そこで $\tilde{\varepsilon} < \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4/2)$ および $\tilde{v} > v_3$ を取る．

任意の $\overline{t}'$ を取って、すべての $t' \in [0, \overline{t}')$ に対して $r(t') < \rho^* + \varepsilon^*$ となるようにする．すると補題 10 より、

$$|w(t') - w^*| < \delta < \varepsilon_1 \quad \text{および} \quad v(t') > \nu \quad \forall t' \in [0, \overline{t}'].$$

したがって補題 8 より、

$$|z(t') - z(0)| < \mu_1/\nu < \varepsilon_4/2.$$

ところが $|z(0) - z^*| < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_4/2$ であるから、

$$|z(t') - z^*| < \varepsilon_4 \quad \forall t' \in [0, \overline{t}'].$$

したがって、区間 $[0, \tilde{t}']$ 内では解が Λ を横切らないような任意の $\tilde{t}'$ に対して、$(r, s, z)(t') \in \mathcal{R}$ および

$$r(t') < \rho^* + \varepsilon^* \quad \forall t' \in [0, \tilde{t}'],$$

が成り立つはずである．

補題 10 より、

$$|w(t') - w^*| < \delta \quad \text{および} \quad v(t') > \nu \quad \forall t' \in [0, \tilde{t}'].$$

$\nu > \overline{v}$ および $\delta < \overline{\mu}$ であるから、補題 6 の 2 つの評価式が得られる．$\nu > v_2, \delta < \varepsilon_2$ および $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_2$ であるから、補題 9 が適用できて、次を得る．

$$|h(t')| < \mu_2 < \overline{\mu}, \quad \forall t' \in [0, \tilde{t}'].$$

最後に $r(t') < \rho^* + \varepsilon^* < \overline{\mu}$ を得、補題 6 の証明が完結した．

参考文献

[1] McGehee, R., Triple collision in the collinear three-body problem, *Inventiones Math.*, to appear.

[2] Fenichel, N., Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1971), 193-226.

[3] Fenichel, N., Asymptotic stability with rate conditions, *Indiana Univ. Math. J.* **23** (1974), 1109-1137.