谷川清隆 訳

Arch. Rational Mech. and Anal. **49** (1973), 311-320

ニュートン重力系の特異点と衝突
Singularities and Collisions of Newtonian Gravitational Systems

Donald G. Saari

1. 序

天体力学の n 体の重要な未解決問題の一つは何がカタストロフを構成しているかを決める問題である．もっと正確に言うと、微分方程式理論からすると n 体問題の解は独立変数 t の解析関数である．カタストロフを解の特異性と解釈すれば、どんな物理的事件が時刻 $t=0$ の特異性を引き起こし得るのか、と問題を言い換えることができる．著者の信ずるところによれば、特異性はすべて衝突による．すなわち、$t \to 0+$ のとき、位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ は慣性座標系で決まった極限位置に近づく．(この予想が正しければ、[5,6] より、ほとんどすべての初期条件に対して一意の解がすべての時間にわたって存在する.)

衝突でない特異性の存在は $t \to 0$ のときに非有界な運動の存在と等価であることが知られている．直観は有限時間内でのこの非有界運動の概念と相入れない (いったいどこで、またどのように系は必要な速度を得るのだ?)．また直観によれば、そのような運動が可能なら、解の拡大率は「遅い」はずであると推測される．(拡大率の自然な基準は慣性モーメントであり (1.2 節参照)、ここでもそれを採用する.)

この逆が成り立つことを示すのがこの論文の目的のひとつである．もっと詳しく言えば、慣性モーメントがゆっくり変わる関数なら、特異性は衝突による．すなわち、衝突でない特異性の存在は「高速で」非有界になる運動の存在と等価である．

この論文の第二の部分では、直線 n 体問題では特異性と衝突の問題は生じないこと、つまり直線 n 体問題では特異性はすべて衝突であることを証明する．

ここで採用する記法は標準的である．n 質点の重心が慣性系の原点に固定されているとし、i 番目の質点の質量、位置ベクトル、および速度ベクトルをそれぞれ $m_i, \mathbf{r}_i$ および $\mathbf{v}_i$ で表わす．同じ文字をベクトルの大きさを表わすのに用いる．たとえば、$r_i = |\mathbf{r}_i|, r_{kj} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k|$ などである．

重力定数を単位にとれば、運動方程式は $U = \sum^* m_i m_j / r_{ij}$ として $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \dfrac{m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3}$ $= \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$ である．和 (*) は添え字 $1 \le i < j \le n$ を動く．エネルギー積分の保存は $T = U + h$ となる．ただし、$2T = \sum m_i \mathbf{v}_i^2$ であり、h は積分定数である．$2I = \sum m_i \mathbf{r}_i^2$ と定義すれば、ラグランジュ-ヤコビ関係は

$$\ddot{I} = 2T - U = T + h = U + 2h, \tag{1.1}$$

となる．

重心が原点にあるから、

$$2MI = \sum^* m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2,$$

が成り立つ．ここで M は系の全質量である．これから $I^{1/2}$ は粒子間の最大間隔の尺度と見ることができる．これを見るために

$$R(t) = \max_{i \neq j} r_{ij}(t)$$

とし、m_0 を最小質量とする．するとすべての i, j の選び方に対して $2MI \geq m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \geq m_0^2 (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$ である．ところが各 t に対して、ある i, j があって $r_{ij}(t) = R(t)$ である．ゆえに $I^{1/2} \geq m_0 R/(2M)^{1/2}$ である．逆方向の不等式はもっと簡単である．すなわち、明らかに $2MI = \sum^* m_i m_j r_{ij}^2 \leq \sum^* m_i m_j R^2 = M^2 R^2/2$ を得る．同様に $r(t) = \min r_{ij}(t)$ を定義すれば、U^{-1} は粒子間の最小距離の尺度と見ることができる．これらのよく知られた事実を不等式

$$\begin{aligned} &m_0^2 R^2/(2M) \leq I \leq MR^2/4, \\ &m_0^2 r^{-1} \leq U \leq M^2 (2r)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

として記録しておく．

特異性と衝突の関係に関する最初の大きな結果はパンルベによる [2; 8, pp. 19-27]．1895 年に、彼は $t = 0$ に特異性が生じる必要十分条件は $t \to 0$ のとき $r \to 0$ であること (すなわち、(1.2) より、$t \to 0$ のとき $U \to \infty$) を示した．条件 $r \to 0$ は必ずしも特異性が衝突であることを意味しない．起こり得るのは、いくつかの相互距離が $r(t)$ の役割を変わるがわる受持ち、$r \to 0$ のとき $\limsup r_{ij} > 0$ であって $\liminf r_{ij} = 0$ となるようにふるまうことである．しかしパンルベは $n \leq 3$ ならこういうことは起こらず、特異性は衝突であることを示した．問題は $n > 3$ のとき未解決である．

1910 年、H. von Zeipel[10] は、$r \to 0$ のとき $I = O(1)$ なら $t = 0$ の特異性は衝突によるという陳述を発表した．不幸にも、彼の証明には飛躍と誤りがあった．

1968 年、Pollard & Saari[3] は $t = 0$ の特異性が衝突であるための必要十分条件は $t \to 0$ のとき $U \sim A/t^{2/3}$ であることを示した．ただし A はある正の定数である．(これは衝突粒子のふるまいに関し最初の評価を与えた.) 第二論文 [4] で、彼らは I の増大率を用いたいくつか別の条件を得た．

1970 年、H. Sperling[9] は von Zeipel の証明を修正し完成させた．ゆえに von Zeipel-Sperling の結果は非衝突特異性の存在が有限時間に非有界の運動の存在と等価であることを示す．今回の論文の結果は von Zeipel と Sperling の結果を一般化する．発想のいくつかは彼らの仕事から得た．

2. 主結果

関数 f が $t \to 0$ のときゆっくり変化するとは、任意の正定数 β に対して $f(\beta t)/f(t) \to 1$ のときであることを思いだそう [1, pp. 272-276]．たとえば $(\ln t^{-1})^3$ はゆっくり変化する関数である．

定理 1. $t=0$ に特異性があり、また $t\to 0$ のとき I がゆっくり変化するなら、特異性は衝突による.

系 1(von Zeipel, Sperling). $t\to 0$ のとき $I=O(1)$ なら、特異性は衝突による.

系の証明はただちにできる. $t=0$ に特異性があれば、パンルベの結果にしたがって $t\to 0$ のとき $U\to\infty$ のはずである. (1.1) より、$t\to 0$ のとき $\ddot{I}\to\infty$ である. ゆえに I は (上に) 凹であり、$t\to 0$ のとき非負の極限 ($I\geq 0$) あるいは無限大に向かう. 仮定 $I=O(1)$ により無限大は排除される. $I\to 0$ なら I の定義より $\mathbf{r}_i\to\mathbf{0}$ を得、衝突となる. I が正の極限に向かうなら、それはゆっくり変わる関数であって定理が適用できる.

定理の証明の基本的発想は以下の通りである.

1. 衝突でない特異性があるなら距離 r_{ij} があって、$\liminf r_{ij}/(I)^{1/2}=0$ かつ $\limsup r_{ij}/(I)^{1/2}>0$ である (補題 1).
2. この振動効果により、いくつかの粒子が「互いに近く」、残りの相互距離が $I^{1/2}$ の定数倍で下から抑えられているときに時刻列 $\{t_i\}, t_i\to 0$ を見つけることができる (補題 2).
3. (2 で定義された) 各 t_i において、自然な仕方で星団、すなわち、「近くの」粒子すべてから成る星団、が定義できる. これらの星団の重心の加速度はこのとき非常に小さい (実際 $O(I^{-1})$ 程度の大きさである).
4. (1) より、ある星団においては、少なくとも粒子 1 つが残りの粒子からいずれは離れて行くはずである. このためにこの星団の重心の位置は急激に変わる. 3 からすると、このことは高速の星団によってのみ説明可能である.
5. I がゆっくり変化するなら星団の速度は必要な大きさを達成できない.

3. 補題の陳述と証明

系の証明で示されたように、$t=0$ に特異性があれば $t=0$ の近くで関数 I は (上に) 凹であり、$t\to 0$ のとき非負の極限または無限大に向かう. この節の残りでは、この特異性が衝突でないと仮定する. すでに指摘したように、このことから I がゼロに向かわないことが言える. というのは、ゼロに向かうと $\mathbf{r}_i\to\mathbf{0}$ となり、衝突になってしまうからである.

補題 1. 添え字 i,j が存在して次が成り立つ.

$$\liminf r_{ij}/(I)^{1/2}=0 \quad \text{および} \quad \limsup r_{ij}/(I)^{1/2} \quad \text{as} \quad t\to 0+\,.$$

証明. 補題が間違いであると仮定しよう. n は有限であるから定数 $A>0$ があって、すべての r_{ij} に対して $r_{ij}/I^{1/2}$ であるか、またはある時間の後 $r_{ij}/I^{1/2}>A$ である. すると添え字は $t\to 0+$ のとき $r_{ij}/I^{1/2}\to 0$ であるときまたそのときのみ $i,j\in G_k$ である、という条件によって、互いに重ならない類 $G_k, k=1,2,\ldots,p<n$ に分割される.

s 番目の類の重心 $\mathbf{C}_s$ は $M_s\mathbf{C}_s=\sum_{i\in G_s} m_i\mathbf{r}_i$ で与えられる. ここで $M_s=\sum_{i\in G_s} m_i$ であり、

その加速度は次式で与えられる．

$$M_s\ddot{\mathbf{C}}_s = \sum m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j\in G_s}\frac{m_im_j(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p}\sum_{\substack{j\in G_k\\i\in G_s}}\frac{m_im_j(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3}. \tag{3.1}$$

最初の二重和は係数の対称性および添え字に関するベクトルの反対称性からゼロに等しく、第二の和の各項の大きさは $r_{ij}^{-2}\leq A^{-2}I^{-1}$ である．だから $M_s\ddot{\mathbf{C}}_s = O(I^{-1}) = O(1)$ である．

この最後の関係を t_1 から $t_2(0<t_1<t_2)$ まで積分して次を得る．

$$|\dot{\mathbf{C}}_s(t_2)-\dot{\mathbf{C}}_s(t_1)| = O(t_2-t_1).$$

$t_1,t_2\to 0$ のとき、右辺はゼロに向かうから左辺も同様である．ゆえに極限の存在に関するコーシーの判定条件により $\dot{\mathbf{C}}_s$ は極限に向かう．そのことより、$\dot{\mathbf{C}}_s = O(1)$ である．この議論をふたたび用いれば、$t\to 0$ のとき $s=1,2,\ldots,p$ に対して $\mathbf{C}_s\to\mathbf{L}_s$ を得る．$I=O(1)$ なら、類 G_s の定義より条件 $i,j\in G_s$ から $r_{ij}\to 0$ が出る．つまり、$\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j\to\mathbf{L}_s$ である．添え字はすべてどれかの類に属するから、特異性が衝突であることが言え、矛盾となる．

$I\neq O(1)$ なら $I\to\infty$ である．次の等式を考える．

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}\sum_{i\in G_s} m_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{C}_s)^2 = I - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} M_s\mathbf{C}_s^2. \tag{3.2}$$

右辺の第二項がある極限に近づくことをすでに示した．集合 G_s の構成法より、左辺の二重和は $o(I)$ である．ゆえに $I=o(I)$ という矛盾を得たので、補題は証明された． □

補題 2. 正定数 A があって、任意の $\varepsilon>0$ に対して列 $\{t_i\}, t_i\to 0$ で、すべての k,j に対して

$$r_{kj}(t_i) < \varepsilon(I(t_i))^{1/2}$$

あるいは $A(I(t_i))^{1/2} < r_{kj}(t_i)$ なる性質を持つものをみつけることができる．

証明. $\eta(\tau,d)$ を $t=\tau$ において $r_{ij}/I^{1/2}\geq d$ なる相互距離 r_{kj} の数と定義する．(1.2) より $d^2<4/M$ から $1\leq\eta(\tau,d)\leq n(n-1)/2$ が出ることに注意する．正の t および $d<2/(M)^{1/2}$ を固定して $D(t,d)=\{\eta(\tau,d):\tau\in(0,t)\}$ とおく．$E(t,d)=\text{g.l.b.}D(t,d)$ を定義する．集合 $D(t,d)$ の各要素は正整数であるから $E(t,d)$ は正整数である．$t_1\leq t$ なら $D(t_1,d)$ は $D(t,d)$ に含まれるから $E(t_1,d)\geq E(t,d)$ であることに注意する．同様に、$d_1\leq d$ なら、$\eta(\tau,d_1)\geq\eta(\tau,d)$ つまり $E(t,d_1)\geq E(t,d)$ である．この 2 つの陳述を結びつけて次を得る．

$$t_1\leq t,\ d_1\leq d,\ \text{なら}\ E(t_1,d_1)\geq E(t,d). \tag{3.3}$$

$F=\text{l.u.b.}E(t,d)$ とする．ただし、$0<t\leq 1, 0<d\leq 2/M^{1/2}$ である．F は有界な整数の集合の上限であるから F は整数である．つまり、ある $t=t_0$ および $d=d_0$ があって $E(t_0,d_0)=F$ である．(3.3) より、すべての $0<t\leq t_0$ および $0<d\leq d_0$ に対して $E(t,d)=F$ である．すなわち、区間 $(0,t_0]$ の各瞬間において少なくとも F 個の相互距離 r_{ij} があって、$0<d\leq d_0$ に対して $r_{ij}>d(I)^{1/2}$ である．

$2A = \min(d_0, \{\limsup r_{ij}/I^{1/2} | \limsup r_{ij}/I^{1/2} > 0\}$ を定義する．正の $\varepsilon < A$ が与えられたとする．すると $t < t_0$ に対して、ある $t_i < t$ を見つけて $t = t_i$ においてちょうど $(1/2)(n)(n-1)-F$ 個の相互距離 r_{ij} が $\varepsilon I^{1/2}$ で上から抑えられるようにできる．この陳述が間違いなら $0 < \tau \le t$ に対して $n(\tau, \varepsilon) > F$ のはずである．ところがこれから $E(t, \varepsilon) > F$ が言え、これは F の定義と (3.3) に矛盾する．だからこの陳述は正しい．

上の陳述より、時刻 t_i において $\varepsilon I^{1/2}$ で上から抑えられない相互距離は F 個しかない．すでに示したとおり、すべての $t < t_0$ に対して $2AI^{1/2}$ より大きな相互距離が少なくとも F 個あるから、これらの相互距離はまた $A(I)^{1/2}$ で下から抑えられており、補題が証明された． □

4. 定理の証明

δ を $\min(m_0A^2/8, A/2)$ より小さな正数とする．補題 2 より、列 $\{t_i\}$ を見つけて、(i) $t_i \to 0$、(ii) $t = t_i$ において、すべての $k \ne j, k, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $r_{kj} < \delta_1(I)^{1/2}$ または $r_{kj} > AI^{1/2}$ にできる．ただし $\delta_1 = (2\delta/M)^{1/2}$ である．そこで $t_i^1 = \sup\{t | t < t_i$ および添え字 i, j があって $r_{ij}(t_i) < \delta_1 I^{1/2}(t_i)$ であるが $r_{ij}(t) \ge AI^{1/2}(t)\}$ を定義する．

そのような値 t_i^1 が存在しなければ、すべての相互距離は時間区間 $(0, t_i)$ の間、$\delta_1 I^{1/2}$ より小さいか、$2AI^{12}$ より大きい．これは r_{ij} の連続性と補題 2 の証明で決まった F の性質から出る．r_{ij} は連続であるから、時刻 t_i に $2AI^{1/2}$ より大きな任意の相互距離は、少なくとも t_i^1 までは $2AI^{1/2}$ より大きいままである．そうでないとすると、区間 (t_i^1, t_i) 内のある t において $2AI^{1/2}$ より大きな相互距離が高々$F-1$ 個しかないことになる．ところがこれは F の定義に矛盾する．t_i^1 の値が存在しないことを仮定しているから、区間 $(0, t_i)$ の間、これは正しい．しかしこれは補題 1 および A の定義 ($2A \le \limsup r_{ij}/I^{1/2}$．ただし $\limsup r_{kj}/I^{1/2} > 0$) に矛盾する．ゆえに主張は証明された．

一般性を失うことなく $t_{i+1} < t_i^1$ と仮定する．$i > 1$ に対して、こんどは時刻 t_i^2 を次のように定義する．すなわち、$t_i^2 = \inf\{t \mid t_i < t < t_{i-1}$; ある添え字 i, j が存在して

$$r_{ij}(t_i) < \delta_1 I^{1/2}(t_1),$$

であるが、$r_{ij}(t) \ge AI^{1/2}(t)\Big\}$．$t_i^2$ の値が存在しなければ、こんども区間 $[t_i, t_{i-1}$ 内にはちょうど $\frac{1}{2}n(n-1) - F$ 個の相互距離が $AI^{1/2}$ より小さく、残りは $2AI^{1/2}$ より大きいはずである．これは t_{i-1}^1 の性質に矛盾するから t_i^2 の存在が証明される．まとめると、この構成法によって区間 $[t_i^1, t_i^2]$ が作られ、この区間内で r_{kj} は $AI^{1/2}$ により上から抑えられるか、$2AI^{1/2}$ により下から抑えられる．

補題 1 の証明におけると同様、添え字は類 G_k に分けられる．

$$G_k = \{i, j | r_{ij} < AI^{1/2} \text{ for } t \in [t_i^1, t_i^2]\}.$$

これらの類は t_i の選び方に依存し、これらは 2 つずつ互いに素であり、各添え字はどれかの類に属する (いくつかの類は要素をひとつしか含まないかもしれない)．s 番目の類 $\mathbf{C}_s$ の重心は $M_s\mathbf{C}_s$ で与えられ、次が成り立つ．

$$M_s\ddot{\mathbf{C}}_s = \sum_{k,i \in G_s} \frac{m_k m_i(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{r_{ki}^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{p} \sum_{\substack{k \in G_j \\ i \in G_s}} \frac{m_k m_i(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{r_{ki}^3}.$$

右辺の最初の二重和は添え字に関する係数の対称性とベクトルの反対称性によりゼロである．第二の和の各項は $m_k m_i/r_{ki}^2$ 程度の大きさである．k と i は同じ G 類に属さないから $r_{ki} \geq 2AI^{1/2}$ である．だから区間 $[t_i^1, t_i^2]$ 内で次を得る．

$$(4.1) \qquad |\ddot{\mathbf{C}}_s| \leq M/4A^2 I = B/I.$$

ある $|\mathbf{C}_s|$ はこの時間区間の間に大きく値を変えることを示そう．関係する項の定義より、ただちに次が出る．

$$(4.2) \qquad \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}\sum_{i\in G_s} m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_s)^2 = I - \frac{1}{2}\sum M_s \mathbf{C}_s^2 = I - J.$$

$\mathbf{C}_s$ が類 G_s の重心であることから、各 $i \in G_s$ に対して $j \in G_s$ があって $|\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_s| \leq |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ である．ゆえに δ および δ_1 の定義から、時刻 t_i に (4.2) の左辺は δI より小さい．すなわち、時刻 t_i に

$$(4.3) \qquad J \geq (1-\delta)I.$$

である．

時刻 $t_i^j, j = 1, 2$ において粒子間のある距離は $AI^{1/2}$ である．この粒子が $\mathbf{r}_1$ および $\mathbf{r}_2$ であるとする．関係 $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a-b)^2$ を使えば、(4.2) の左辺は下から

$$\frac{1}{2}m_0((\mathbf{r}_1 - \mathbf{C}_s)^2 + (\mathbf{C}_s - \mathbf{r}_2)^2) \geq \frac{1}{4}m_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \geq CI$$

によって抑えられる．ここで

$$(4.4) \qquad C = m_0 A^2/4.$$

($2\delta \leq C < 1$ に注意しよう．最後の不等式は $J > 0$ から出る.) すなわち、時刻 $t_i^j, j = 1, 2$ に $J \leq (1-C)I$ を得る．ゆえに

$$(4.5) \qquad J(t_i) - J(t_i^j) \geq (1-\delta)I(t_i) - (1-C)I(t_i^j).$$

$t \to 0$ のとき、$I \to L > 0$ の場合と $I \to \infty$ の場合がある．5 節の技術を使えばどちらの場合も証明を完結させせることができるが、この道具を動機づける (motivate) ため有界な場合を最初に解決する．正の ε が

$$(C-\delta)L/2(2-(\delta+C)),$$

より小さいとする．十分小さな t_{i-1} を選んで、$0 < t \leq t_{i-1}$ なら $|I - L| < \varepsilon$ となるようにする．だから (4.5) は

$$(4.6) \qquad J(t_i) - J(t_i^j) \geq (1-\delta)(L-\varepsilon) - (1-C)(L+\varepsilon) > (C-\delta)L/2$$

となる．ここで $j = 1, 2$ である．

(4.2) の J の定義より、これからある s に対して

$$\mathbf{C}_s^2(t_i) - \mathbf{C}_s^2(t_i^2) \geq (C-\delta)L/2pM_s > (C-\delta)L/2nM = D(8L/m_0)^{1/2}$$

である．ただし $D>0$ と仮定した．$m_0|\mathbf{C}_s(t_i)|^2<2L$ であるから次を得る．

$$|\mathbf{C}_s(t_i)-\mathbf{C}_s(t_i^2)|>D. \tag{4.7}$$

次に $I\to L>0$ なら不等式 (4.7) が成り立たないことを示そう．$I>L-\varepsilon$ なることを使い、(4.1) を積分すれば、$\xi,\xi_1\in[t_i^1,t_i^2]$ に対して次を得る．

$$|\dot{\mathbf{C}}_s(\xi)-\dot{\mathbf{C}}_s(\xi_1)|\le B(t_i^2-t)/(L-\varepsilon)\le Bt_{i-1}/(L-\varepsilon). \tag{4.8}$$

(4.6) より、J は区間 $[t_i^1,t_i^2]$ で極大になる．この点で $\ddot{J}\le 0$ である．J の定義、(4.1) および $M_s\mathbf{C}_s^2\le I$ なること (これは (4.2) から出る) より、この極大点で

$$\sum M_k\dot{\mathbf{C}}_k^2\le\sum M_k\mathbf{C}_k\cdot\ddot{\mathbf{C}}_k\le\sum(M_kI)^{1/2}B/I\le BnM^{1/2}/I^{1/2}\equiv B_1/I^{1/2}$$

である．ゆえに J の極大点で

$$|\dot{\mathbf{C}}_s|\le(B_1/M_sI^{1/2})^{1/2}\le(BnM^{1/2}/m_0(L-\varepsilon)^{1/2})^{1/2}.$$

この評価を (4.8) と結びつけて、区間 $[t_i^1,t_i^2]$ のすべての t に対して次を得る．

$$|\dot{\mathbf{C}}_s|\le(BnM^{1/2}/m_0(L-\varepsilon)^{1/2})^{1/2}+Bt_{i-1}/(L-\varepsilon). \tag{4.9}$$

平均値の定理および (4.7) より、ある $\xi\in[t_i,t_i^2]$ に対して次を得る．

$$\begin{aligned}0<D<|\mathbf{C}_s(t_i)-\mathbf{C}_s(t_i^2)| &=|t_i-t_i^2||\dot{\mathbf{C}}_s(\xi)|\\ &\le t_{i-1}\{(BnM^{1/2}/m_0(L-\varepsilon)^{1/2})^{1/2}+Bt_{i-1}/(L-\varepsilon)\}.\end{aligned}$$

この不等式は各 t_i において成り立つはずである．(定数 D,B および L は A,n および M によって定義されることに注意する．ゆえにこれらは t_i および G_s に依らない．) 矛盾を得るためには、単に t_{i-1} を十分小さく選んで右辺の最後の項が D より小さくなるようにすればよい．$t_i\to 0$ であるからこれは可能である．

5. 定理 1 の証明の完結

定理の証明の残りの証明に関しては、$t\to 0$ のとき $I\to\infty$ と仮定できるので、そう仮定する．しかし証明に戻る前に、準備が必要である．

補題 3. $t\to 0$ のとき I がゆっくり変わるなら、$t\to 0$ のとき $t\dot{I}/I\to 0$ である．$\varepsilon>0, 0<\beta<1$ なら、ある時間経ったのち、$(\beta t,t)$ の形の任意の区間において

$$\ddot{I}(\xi)\le\varepsilon I(t)/(t)^2.$$

なる ξ がある．

<u>証明</u>. パンルベ (1 節)、(1.1) および $I\to\infty$ であることより、$t\to\infty$ のとき単調に $\ddot{I}\to\infty$ および $\dot{I}\to-\infty$ である．I はゆっくり変わるから、任意の正定数 $\beta<1$ に対して $I(\beta t)/I(t)\to 1$

である．I のテイラー級数展開より、$I(\beta t)/I(t) = 1 + (\beta-1)t\dot{I}(\xi)/I(t)$ である．ゆえに $t \to 0$ のとき $(\beta-1)t\dot{I}(\xi)/I(t) \to 0$ である．$\beta < 1$ であり、$|\dot{I}|$ は単調減少であるから、$|\dot{I}(\xi)| > |\dot{I}(t)|$ であり、ゆえに $t\dot{I}(t)/I(t) \to 0$ である．

第二の主張を証明するために、$I(t)$ をふたたびテイラー級数展開する．

$$I(\beta t)/I(t) - 1 = ((\beta-1)t\dot{I}(t)/I(t)) + (\beta-1)^2t^2\ddot{I}(\xi)/I(t).$$

仮説により、左辺はゼロに近づく．上で示されたとおり、右辺の第一項もゼロに近づく．ゆえに t が十分小さければ、右辺の第二項を $(\beta-1)^2\varepsilon$ より小さくできる．これが証明すべきことであった．

定理の証明に戻ろう．I が無限大に向い、上に向かって凹であるから、I は t が十分小さければ単調増加である．ゆえに (4.6) は $J(t_i) - J(t_i^2) \geq (C-\delta)I(t_i)$ と表わせる．(4.7) を導いたときと同様に、各 t_i に対してある類 G_s が存在して

$$|\mathbf{C}_s(t_i) - \mathbf{C}_s(t_i^2)| \geq ((C-\delta)(m_0 I(t_i))^{1/2}/8nM, \tag{5.1}$$

なることが示せる．

(4.5) を導いたときの議論を使えば、$\xi, \xi_1 \in [t_i^1, t_i^2]$ に対して次を得る．

$$|\dot{\mathbf{C}}_s(\xi) - \dot{\mathbf{C}}_s(\xi_1)| \leq Bt_{i-1}/I(t_i^2). \tag{5.2}$$

区間 $[t_i^1, t_i^2]$ の任意の点で $\ddot{J}$ が非正なら、(4.9) を導いたときの議論を繰り返して次が得られるはずである．

$$\dot{\mathbf{C}}_s = O(t_i/I(t_i^2)) + O((I/t_i^2))^{-1/4}.$$

$I \to \infty$ であるから、i を十分大きく選んで、$\dot{\mathbf{C}}_s$ を区間 $[t_i^1, t_i^2]$ 内で任意に小さくできる．平均値の定理より、これは (5.1) に矛盾する．ゆえに $\ddot{J}$ が区間 $[t_i^1, t_i^2]$ 内で正であると仮定できる．

相互距離 r_{ki} が連続だから、t_i を含み $[t_i^1, t_i^2]$ に含まれる閉時間区間があって、この区間の各点において (4.2) の左辺が δI 以下となる．左辺がこの区間の内点で極小になれば、その点を t_i^3 とする．極小がなければ、この区間内にある点があって、そこでは (4.2) の左辺の微分は負である (I は $t \to 0$ のとき増加する)．この点を t_i^3 とする．(この点は一意に決まらないことに注意しよう.) (4.2) の左辺は t_i^3 において δI 以下であるから、(4.3)、(4.4)、(4.5) および (5.1) が t_i を t_i^3 に置き換えて成り立つ．点 t_i^3 はもうひとつの性質を持つことが (4.2) から出る．すなわち、

$$|\dot{J}(t_i^3)| \leq |\dot{I}(t_i^3)|. \tag{5.3}$$

次に任意の正定数 $\beta < 1$ および十分小さなすべての t_i に対して、$t_i^3 < \beta t_i^2$ を示そう．これが間違いであると仮定する．すると各 $\beta, 0 < \beta < 1$ に対して、任意に小さい t_i を見つけて $\beta t_i^2 \leq t_i^3 < t_i^2$ とできる．(4.5) の直前の関係式および J のテイラー級数展開より

$$(1-C)I(t_i^2) \geq J(t_i^2) = J(t_i^3) + (t_i^2 - t_i^3)\dot{J}(\xi)$$

を得る．ここで $\xi \in (t_i^3, t_i^2)$ である．$\ddot{J}$ は正であるから、$\dot{J}(\xi) > \dot{J}(t_i^3)$ である．これを (4.3)、(5.3)、$\dot{I}$ が負であること、および仮定 $\beta t_i^2 \leq t_i^3$ と併せて次を得る．

$$\begin{aligned}(1-C)I(t_i^2) &\geq (1-\delta)I(t_i^3) + (t_i^2 - t_i^3)\dot{I}(t_i^3)\\ &\geq (1-\delta)I(t_i^3) + (\beta^{-1}-1)t_i^3\dot{I}(t_i^3).\end{aligned}$$

つまり

$$(5.4)\qquad (1-C)\frac{I(t_i^2)}{I(t_i^3)} \geq (1-\delta) + (\beta^{-1}-1)t_i^3\frac{\dot{I}(t_i^3)}{I(t_i^3)}.$$

$t \to 0$ のとき単調に $I \to \infty$ であるから

$$1 \geq I(t_i^2)/I(t_i^3) \geq I(t_i^2)/I(\beta t_i^2),$$

であることがわかる．I はゆっくり変わるから右辺は 1 に近づく．ゆえに (5.4) の右辺は、ある定数より小さなすべての t_i に対して $(1-C)$ に任意に近づけることができる．補題 3 より、(5.4) の右辺の第二項はゼロに近づく．ところが $0 < 2\delta \leq C < 1$ であるから矛盾が導かれる．ゆえに $0 < \beta < 1$ なら、ある定数より小さなすべての t_i に対して $t_i^3 < \beta t_i^2$ である．

補題 3 より上の陳述は次を意味する．すなわち、正の

$$\varepsilon < m_0^{1/2}(C-\delta)/16nM$$

および十分小さなすべての t_i に対して、区間 $[t_i, t_i^2]$ 内にある ξ があって $\ddot{I}(\xi) \leq M\varepsilon^2 I(t_i^2)/4(t_i^2)^2$ である．含まれる項の定義により、

$$0 \leq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p} M_k^{-1} \sum_{i,j\in G_k} m_i m_j (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j)^2 = T - \frac{1}{2}\sum M_k \dot{\mathbf{C}}_k^2.$$

(1.1) および $\ddot{I} \to \infty$ より、(ある定数より小さな t_i に対して) 時刻 $t = \xi$ において

$$\frac{1}{2}\sum M_k \dot{\mathbf{C}}_s^2 \leq T(\xi) = \ddot{I}(\xi) - h < 2\ddot{I}(\xi) \leq M\varepsilon^2 I(t_i^2)/2(t_i^2)^2,$$

である．$(t_i^2)^2$ は t_i^2 の自乗であることに注意しよう．ゆえに $|\dot{\mathbf{C}}_s(\xi)| \leq \varepsilon I(t_i^2)^{1/2}/t_i^2$ である．(5.2) により、$t \in [t_i^1, t_i^2]$ に対して $|\dot{\mathbf{C}}_s(t)| \leq (\varepsilon I(t_i^2)^{1/2}/t_i^2) + Bt_{i-1}/I(t_i^2)$ である．

(5.1)、平均値の定理および $|\dot{\mathbf{C}}_s|$ に関する上の評価より、

$$\begin{aligned}(C-\delta)(m_0 I(t_i))^{1/2}/8nM \quad &\leq |\mathbf{C}_s(t_i) - \mathbf{C}_s(t_i^2)| = (t_i^2 - t_i)|\dot{\mathbf{C}}_s(\xi)| \\ &\leq t_i((\varepsilon I(t_i^2)^{1/2}/t_i^2) + Bt_{i-1}/I(t_i^2)).\end{aligned}$$

であることがわかる．$\varepsilon < m_0^{1/2}(C-\delta)/16nM$ および $I(t_i) > I(t_i^2)$ であるから、t_{i-1} を十分小さく選んで上の不等式に矛盾する結果が導ける．$t_i \to 0$ であるから、これはできる．よって定理が証明された．

6. 直線 n 体問題

定理 2. 直線 n 体問題では、すべての特異性は衝突による．

証明. n 粒子が x 軸上にあると仮定できる．またこれらが昇べき順に並んでいる、つまり、左から始めて $\mathbf{r}_1$ が最初の粒子、$\mathbf{r}_n$ が最後の粒子となっている、と仮定できる．$\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{r}_1 = x_1 \leq 0$ および $\mathbf{r}_n = x_n \geq 0$ である.

定理が間違いであると仮定する．定理 1 またはその系より、$t = 0$ における非衝突特異性の存在は $t \to 0$ のとき $I \to \infty$ を意味する．(1.2) より、これは粒子間の最大距離が無限大になることを意味する．粒子は x 軸に閉じこめられ、その順序を変えることができないから $|x_n - x_1|$ が最大距離であり $|x_n - x_1| \to \infty$ である．$\sum m_i x_i = 0$ を使うと、$t \to 0$ のとき x_n が非有界であるといえる (実は $t \to 0$ のとき $x_n \to \infty$ である)．これを見るために、x_n が上から抑えられていると仮定する．$|x_n - x_1| \to \infty$ であるから $m_1 x_1 \to -\infty$ である．重心は固定されているから、これから $\sum_2^n m_i x_i = -m_1 x_1 \to \infty$ が出る．つまりある粒子 x_i があって $\limsup x_i = \infty$ である．粒子の順序からして x_n は残りの粒子より右にある．だから $\limsup x_n = \infty$ である．この矛盾は陳述の正しさを証明する.

$\mathbf{r}_n = x_n$ の運動方程式は

$$m_n \ddot{x}_n = \sum_{j \neq n} \frac{m_n m_j (x_i - x_n)}{|x_j - x_n|^3}.$$

粒子の順序より、点 $x_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ は x_n の左にある．ゆえに運動が定義される限り、すべての時間にわたって $\ddot{x}_n < 0$ である．つまり、定義域において x_n は下に凹である．これは $t \to 0$ のとき x_n が有界であることを意味する．ところがこれは x_n が非有界であるという陳述に矛盾するから定理は証明された.

7. コメント

$t \to 0$ のとき I がゆっくり変わるという条件は補題 3 を求めるのに使った．しかし定理 1 の証明においてこの陳述全部は必要なかった．矛盾を得るのに 2 つの事実が必要である．ひとつは、$0 < \beta < 1$ および t が十分小さいとして、$(\beta t, t)$ の型の区間において、$t|\dot{I}(t)|/I(t)$ が上からある正の定数で抑えられることである．もうひとつは、これらの区間のある点において $t^2 \ddot{I}(t)/I(t)$ が第二の与えられた定数より小さいことである．これら定数の値は A に依存する.

この型の陳述は、I が正則に (regularly) 変化すれば得られる [1, p.269]．つまり、$L(t)$ をゆっくり変わる関数として $I(t) = t^\alpha L(t)$ のときである．A の値は α の下限を決めるはずである.

問題は A が初期条件とともに変わるのか、あるいは質量や n のような系の与えられた定数によって決まるのかである．これは A の定義 (補題 2) からは明らかでない．しかし 4 体問題では [7]、非衝突特異性が存在するなら、$\varepsilon > 0$ に対してゼロに近づく時刻列があって、これらの時刻において三体は互いに ε 以内にあって残りの粒子はこれらから距離 R だけ離れている ((1.2) 参照)．これは 2 つの配位のどちらかに変わるはずである．第一の配位では、2 つの連星があって成分はともに ε 以内にあり、連星同士は R 離れている．第二の配位では、上で述べたような $3-1$ の状況であるが、3 つの粒子は別の組合せである．ゆえに A は質量によって決めることができる．(粗っぽい評価は (1.2) から得られる.)

ゆえに、4 体問題で非衝突特異性が存在するなら、負の定数 $\gamma = \gamma(m_1, m_2, m_3, m_4)$ があって I は $\gamma \leq \alpha \leq 0$ なる α を指数とする正則変化関数では有り得ない.

同様な陳述は任意の n に関して成り立つであろうが、いまのところそれを見つける努力はしていない.

参考文献

1. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol.2. New York: J. Wiley, 1966.
2. Painlevé, P., Lecons sur la théorie analytique des équations différentielles. Paris: A. Hermann 1897.
3. Pollard, H., & D. G. Saari, Singularities of the n-body problem, I. *Arch. Rational Mech. and Math.* **30**, 263-269 (1968).
4. Pollard, H., & D. G. Saari, Singularities of the n-body problem, II. in: *Inequalities-II*, pp. 255-259. New York: Academic Press, 1970.
5. Saari, D. G., Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* **162**, 267-271 (1971).
6. Saari, D. G., Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems, II. To appear.
7. Saari, D. G., Singularities of Newtonian gravitational systems. To appear in Proceedings of Symposium on Global Analysis, Dynamical Systems and Celestial Mechanics, Brazil, August, 1971.
8. Siegel, C. L., & J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1971.
9. Sperling, H., On the real singularities of the n-body problem. *J. Reine Angew. Math.* **245**, 15-40 (1970).
10. Zeipel, H. von, Sur les singularités du problème des n corps. *Ark. Mat. Astr. Fys.* **4**, No.32 (1908).