谷川清隆 訳

Celestial mechanics **41** (1988), 179-251

平面二等辺三体問題の定性的研究

Qualitative study of the planar isosceles three-body problem

Carles Simó and Regina Martínez

要約. 平面三体問題で質点のつくる三角形がずっと二等辺三角形であるとして得られる特別の場合を考える．多数の著者 ([1,2,12,8,9,13,10]) がこの問題で三体衝突や周期軌道の族に関する知識に貢献した．ここでは負に固定したエネルギー面上での流れを調べる．まず三体衝突や無限遠を境界多様体として含むエネルギー多様体の位相表現を求める．三体衝突と無限遠を結ぶ軌道の存在から、いくつかホモクリニックおよびヘテロクリニック軌道の存在が決まる．これらの軌道やホモクリニック軌道を用いて、三体衝突の近くや無限遠の近くを通過する軌道を一組の列で特徴づける．列のひとつは軌道が訪れる領域を記述し、もうひとつは、適当に選んだ横断面を軌道が相続けて横切る間の軌道のふるまいに関係する．位相的性格を持つこの記号力学は抽象的な形で与えられ、その後二等辺問題に適用される．大域性をできる限り追求する．いくつかの不変多様体と赤道面 (v=0) との交わりがうまい具合に渦を巻いているという事実にこのことは強く依存する．渦を巻く性質は、いくつか局所的な場合に解析的に証明される．補遺 A の数値計算はこの性質が大域的に成り立つことを明らかにする．

1. 三体衝突多様体

平面内に 3 つの質量 m_1, m_2 および m_3 が二等辺三角形の頂点にあると考える．x_1 を m_1 と m_2 の距離、x_2 を m_1, m_2 の重心と m_3 の (符号付き) 距離とする (図 1.1 参照)．m_1, m_2, m_3 の重心を原点に固定し、$m_1 = m_2$ とし、3 質点が二等辺三角形の形状を保つように適当に速度をとる．質量比 $\varepsilon = m_3/m_1$ をパラメータにとり、適当な尺度変換を行なって $m_1 = 1$ にする．運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{2}{x_1^2} - \frac{8\varepsilon x_1}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}, \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{8(2+\varepsilon)x_2}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

エネルギー積分は次の関数で与えられる．

$$H = \frac{\dot{x}_1^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\dot{x}_2^2 + V(x_1, x_2). \tag{1.2}$$

ここで

$$V(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} - \frac{4\varepsilon}{(x_1^2+4x_2^2)^{1/2}},$$

はポテンシャルである．

図 1.1

エネルギーの値 h を固定すると、運動は 3 次元多様体 $\mathcal{V}$ 上で起こる．エネルギーが正またはゼロなら、すべての初期条件に対して 3 つの質量が無限遠に逃げることが知られている ([4] 参照)．ここではエネルギー負の場合を考える．変数と時間を適当に尺度変換すると $h = -1$ 面に制限できる．したがってこれ以後は $\mathcal{V}$ はエネルギー $= -1$ の多様体であるとする．

ゼロ速度曲線 (図 1.2 参照) は

$$-V(x_1, x_2) - 1 = 0 \tag{1.3}$$

で与えられ、これは運動可能領域の境界になっている．この領域を座標平面に射影したものは Hill 領域と呼ばれ $-V(x_1, x_2) - 1 \geq 0$ で与えられる．

系 (1.1) には特異点が 2 つある．$x_1 = 0$ は二体衝突に対応し、$x_1 = x_2 = 0$ は三体衝突である．

三体衝突の近くを通過する軌道のふるまいを調べるために McGehee[6] による膨らましの方法を使う．二等辺問題の場合、膨らまし変数変換を Devaney[2] が行った．この節の残りでは二等辺問題の三体衝突に関する周知の結果をまとめる．

記法を導入しよう．$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2), \mathbf{p} = A\dot{\mathbf{x}}, A = \mathrm{diag}(1/2, 2\varepsilon/(2+\varepsilon))$ とおく．

新しい変数 $r, \mathbf{s}, v, \mathbf{u}, \theta, u, w$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
&r = (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^{1/2}, \\
&\mathbf{s} = r^{-1}\mathbf{x} = (A^{-1})^{1/2}(\cos\theta, \sin\theta),\ \ \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \\
&v = r^{1/2}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \\
&\mathbf{u} = r^{1/2}(A^{-1}\mathbf{p} - (\mathbf{s}, \mathbf{p})\mathbf{s}) = u(A^{-1})^{1/2}(-\sin\theta, \cos\theta), \\
&w = u\cos\theta(W(\theta))^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで

$$V(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} - \frac{4\varepsilon^{3/2}}{(2\varepsilon + 4\sin^2\theta)^{1/2}}, \quad W(\theta) = -\cos\theta V(\theta).$$

図 1.2

時間を $dt/d\tau = r^{3/2}$ および $d\tau/d\bar{\tau} = \cos\theta/(W(\theta))^{1/2}$ で尺度変換すると、(1.1) より次が得られる．

$$
\begin{aligned}
r' =& \quad rv\frac{\cos\theta}{\sqrt{W(\theta)}}, \\
v' =& \quad \sqrt{W(\theta)}\left(1 - \frac{\cos\theta(v^2 - 4rh)}{2W(\theta)}\right), \\
\theta' =& \quad w, \\
w' =& \quad \sin\theta\left(-1 + \frac{\cos\theta(v^2 - 2rh)}{W(\theta)}\right) - vw\frac{\cos\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} + \\
& \quad (\cos\theta - \frac{w^2}{2})\frac{W'(\theta)}{W(\theta)}.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

(1.5) において $'$ は $\bar{\tau}$ に関する微分のことである．ただし、$W'(\theta)$ だけは $dW(\theta)/d\theta$ を意味する．$t = \bar{\tau}$ と名前を付けかえる．変換 (1.4) の後では、エネルギー積分は次のように書ける．

$$
\frac{w^2}{2\cos\theta} - 1 = \frac{\cos\theta}{W(\theta)}\left(rh - \frac{v^2}{2}\right). \tag{1.6}
$$

変換 (1.4) は $r > 0$ で解析的であり、相空間の $r > 0$ なる点において解析的なベクトル場を定義する．このベクトル場は $r = 0$ なる点、すなわち三体衝突へ解析接続可能である．

三体衝突多様体 $\mathcal{C}$ を $(r, v, \theta, w) \in [0, \infty) \times \mathbf{R} \times [-\pi/2, \pi/2] \times \mathbf{R}$ なる集合の $r = 0$ の点で

$$
\frac{w^2}{2\cos\theta} + \frac{v^2\cos\theta}{2W(\theta)} = 1 \tag{1.7}
$$

を満たすものとして定義する．$\mathcal{C}$ は 2 次元不変多様体であり、位相的に 4 つ穴のある球に等しい (図 1.3 参照)．(1.5) で $r = 0$ とおいて定義される流れは v に関して勾配的であり、簡単に証

明できるように、6 個の臨界点 $(v,\theta,w)=(\pm\sqrt{-2V(\theta)},\theta,0)$ がある．ここで θ は中心図形のひとつである．実のところ、これらは全系 (1.5) の臨界点のすべてでもある．

図 1.3

オイラー図形は $\theta=0$ に対応し、$V(\theta)$ の局所極小である．ラグランジュ型の中心図形が 2 つあり、$V(\theta)$ の局所極大になっている．場所は $\theta=\pm\theta_L(\varepsilon)=\pm\arctan((3\varepsilon/(2+\varepsilon))^{1/2})$ である．混乱が生じない場合には $\theta_L=\theta_L(\varepsilon)$ と書く．

$\mathcal{C}$ 上でラグランジュ点 $L^{i,s}, M^{i,s}$ はサドルであり、オイラー点は $\mathcal{C}$ に制限した流れに関して沈点 (E^s) または源点 (E^i) であり、$\varepsilon<55/4$ なら複素固有値を持ち、$\varepsilon\geq 55/4$ なら実固有値を持つ．これ以後 $\varepsilon<55/4$ と仮定する．まず $\mathcal{C}$ 上の流れの性質をいくつか思い出そう．

P をラグランジュ点のひとつとする．$a\in\{s,u\}$ として P の安定 $(a=s)$ または不安定 $(a=u)$ 多様体を W_p^a で表す．$b\in\{1,2\}$ として、P に達する分枝のうち $w>0(b=1)$ または $w<0(b=2)$ なるものを $W_P^{a,b}$ で表す．$W_{E^i}^1(W_{E^i}^2)$ を $W_{M^i}^{s,2}, W_{L^i}^{s,1}, W_{M^i}^{u,1}$ および $W_{L^i}^{u,1}$ $(W_{L^i}^{s,1}, W_{M^i}^{s,2}, W_{L^i}^{u,2}$ および $W_{M^i}^{u,2})$ で限られる $\mathcal{C}$ 内の開集合と定義する．$W_{E^s}^1$ および $W_{E^s}^2$ も同様に定義する．

$W_{L^i}^{s,1}$ および $W_{L_i}^{s,2}$ のふるまいは図 1.3 に示されている．$W_{L^s}^u, W_{M_s}^u$ および $W_{M^i}^s$ は $\mathcal{C}$ 内の流れの対称性

$$L^1:(r,v,\theta,w,\tau)\to(r,-v,\theta,-w,-\tau),$$
$$L^2:(r,v,\theta,w,\tau)\to(r,-v,-\theta,w,-\tau),$$

を使えば得られる．

$W_{L^i}^{u,1(2)}(W_{L^s}^{s,1(2)})$ と $v=0$ との交点を $l^{i,1(2)}(l^{s,1(2)})$ と名付ける．$W_{M^i}^{u,1(2)}$ および $W_{M^s}^{s,1(2)}$ と $v=0$ との交点もそれぞれ $m^{i,1(2)}$ および $m^{s,1(2)}$ とする．

次の命題は simó[10] が証明した．

命題 1.1. ε の 2 つの臨界値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ があって次を満たす.

(i) $\varepsilon = \varepsilon_1$ (ケース II) なら、$m^{i,1} = (\pi/2, 0)$ であり、したがって $W^{u,1}_{M^i} = W^{s,2}_{M^s}$、また $\varepsilon = \varepsilon_2$ (ケース IV) なら、$l^{i,1} = (0, -\sqrt{2})$ かつ $W^{u,1}_{L^i} = W^{s,1}_{M^s}$ である.

(ii) $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ (ケース I) なら、$m^{i,1} = (\theta, w), \theta > 0, w > 0$ および $l^{i,1} = (\theta, w), \theta > 0, w < 0$ であり、したがって $W^{u,1}_{M^i}$ は E^s で死に、$W^{u,1}_{L^i}$ は二体衝突 $\theta = -\pi/2$ の上腕を登って逃げる.

(iii) $\varepsilon > \varepsilon_2$ (ケース V) なら、$m^{i,1} = (\theta, w), \theta > 0, w < 0$ および $l^{i,1} = (\theta, w), \theta < 0, w < 0$ である. このとき $W^{u,1}_{L^i}$ は E^s で死に、$W^{u,1}_{M^i}$ は $\theta = -\pi/2$ の上腕を登って逃げる.

(iv) $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ (ケース III) なら、$l^{i,1}$ および $m^{i,1}$ の座標は $\theta > 0, w < 0$ である. したがって $W^{u,1}_{L^i}$ も $W^{u,1}_{M^i}$ も $\theta = -\pi/2$ の上腕に巻き付く.

$\varepsilon_1 = 0.378532\ldots$ および $\varepsilon_2 = 2.661993\ldots$ が数値的に得られた. これらは上の 5 個の場合を決定する.

こんどは相空間全体の中で $\mathcal{C}$ を考えよう. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{V}$ の境界内にあり、全系 (1.5) の臨界点を含んでいる. $\mathcal{C}$ 上および $\mathcal{V} \cup \mathcal{C}$ 上の W^a_p の次元を表 1.1 に載せておいた.

表 1.1

計算については [2] を参照されたい.

衝突 (放出) 軌道は $\mathcal{V} \cup \mathcal{C}$ 上の $W^{s(u)}_{E^{i(s)}}, W^{s(u)}_{L^{i(s)}}$ および $W^{s(u)}_{M^{i(s)}}$ の和である.

図 1.4

平行相似図形解 (ホモセティック解、図 1.4 参照) が 3 個あって、$\theta=0$(直線)、$\theta=\theta_L$ および $\theta=-\theta_L$(正三角形) に対応する．これらは $w=0$ 面に含まれる (図 1.3 参照)．$W^u_{E^s}$ および $W^s_{E^i}$ はともに $\theta=0$ のオイラー平行相似図形軌道に一致することに注意する．

定理 1.1. $W^u_{L^s}(W^u_{M^s})$ は $\theta=\theta_L(-\theta_L)$ のラグランジュ平行相似図形軌道に沿って $W^s_{L^i}(W^s_{M^i})$ と横断的に交わる．

定理 1.1 はもっと一般的な形で [11] で証明されている．

変数 (1.4) ではゼロ速度曲線は線分

$$\gamma_1=\{(r,v,\theta,w)\in\mathcal{V}\mid v=0,w=0,-\pi/2<\theta<\pi/2\},$$

に帰着することに注意しよう．

次を定義する．

$$\begin{aligned}
S^+&=\{(r,v,\theta,w)\in\mathcal{V}\mid\theta=\pi/2\},\\
S^-&=\{(r,v,\theta,w)\in\mathcal{V}\mid\theta=-\pi/2\},\\
S_1&=\{(r,v,\theta,w)\in\mathcal{V}\mid\theta=0\},\\
\gamma_2&=\{(r,v,\theta,w)\in\mathcal{V}\mid\theta=0,v=0\}.
\end{aligned}$$

$\theta=\pm\pi/2$ のとき $w=0$ だから、$S^+\cup S^-$ の点を (r,v) と書ける．

S^+ および S^- 上の点は二体衝突を表し、S_1 は直線図形の集合であることに注意しよう．

2. 無限遠近くの流れ

$p\in\mathcal{V}$ に対して $(x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t))$ または簡単に $\varphi(t,p)$ は $t=0$ に p を通る軌道であるとする．

軌道が無限遠に逃げる (またはから来る) とは、$t\to+\infty(-\infty)$ のとき $x_2(t)$ が $\pm\infty$ に向かうときである．エネルギーが負のときにはゼロ速度曲線 (1.3) があるので、これは軌道が無限遠に逃げる (またはから来る) ための唯一の道である．

脱出 (到着) が放物的であるのは、t が $+\infty(-\infty)$ で $\dot{x}_2(t)$ がゼロに向かうときである．t が $+\infty(-\infty)$ で $\dot{x}_2(t)$ がゼロでない定数に向かうなら、軌道は双曲的といわれる．

McGehee[7] が直線三体問題で導入した変換を使う．

次のようにおく．

$$\begin{aligned}
x_2&=\frac{2(2+\varepsilon)^{1/3}}{x^2},\\
\dot{x}_2&=(2+\varepsilon)^{1/3}y,\\
x_1&=\xi^2,\\
\dot{x}_1&=\frac{2\eta}{\xi},\\
dt&=\xi^2d\kappa\quad\text{and}\quad{}'=\frac{d}{d\kappa}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

(2.1) を (1.2) に代入してエネルギー積分の新しい表式が得られる．

$$\eta^2+\xi^2+4d\xi^2(y^2-x^2)-4\varepsilon uf(u)=1.\tag{2.2}$$

ここで $d=\varepsilon(4(2+\varepsilon)^{1/3})^{-1}, u=d\xi^2x^2/\varepsilon$ および $f(u)=(1+u^2)^{-1/2}-1$ である．

こうして無限遠 $(x=0)$ で正則な次の方程式系が得られる．

$$
\begin{aligned}
x' &= -\frac{1}{4}\xi^2 y x^3,\\
y' &= -\frac{1}{4}\xi^2 x^4(1+g(u)),\\
\xi' &= \eta,\\
\eta' &= \xi\left(-1+4dx^2f(u)-4d(y^2-x^2)-\frac{G_1(u)}{\xi^2}\right).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ただし、$g(u)=(1+u^2)^{-3/2}-1=O(u^2), G_1(u)=4\varepsilon u^3(1+u^2)^{-3/2}$ であり、最後の式を出すのに (2.2) を使った．

Levi-Civita の正則化 (ξ,η) を使って二体衝突を正則化した．(ξ,η) 面に $\xi = R\cos\bar{\varphi}, \eta = R\sin\bar{\varphi}$ で与えられる極座標 $(R,\bar{\varphi})$ を導入すれば、(2.2) から

$$
R^2 = 1+\bar{R}(x,y,\bar{\varphi}),
$$

が得られる．ここで $\bar{R}$ は x,y に関し 2 次 (order)、$\bar{\varphi}$ に関し 2π 周期の関数である．

図 2.1

点 $x=0$ は不変多様体を形成する．これを無限遠多様体と呼ぶ．

$$
X = x\sqrt{\frac{4d}{1+4dx^2}},\ Y = y\sqrt{\frac{4d}{1+4dy^2}},\ \bar{\eta} = \eta\sqrt{1-Y^2},
$$

とおく．$X, Y, \bar{\eta}$ を (2.2) に代入すれば、$X=0$ に対して

$$
\bar{\eta}^2+\xi^2+Y^2=1,
$$

を得る．

これは 2 点 $(Y, \xi, \bar{\eta}) = (\pm 1, 0, 0)$ を除いた球である．実のところ、無限遠多様体は 2 つの球からそれぞれ両極を除いたものの和である．これらの球を x_2 の符号に応じて I_+ および I_- と記そう．

直線三体問題 [7] と同様、(2.3) は $(x, y) = (0, 0)$ に対して 2π 周期の解を持つ (I_+ 内に P.O.$_+$、I_- 内に P.O.$_-$)．$(x, y) = (0, 0)$ 近くの流れは図 2.1 を y 軸のまわりに回転して得られる．図 2.2 はこうして得られた．点 $(x, y) = (0, 0)$ はポアンカレ写像の双曲不動点と見ることもできる (縮退している場合であるが)．すなわち、$(0, 0)$ の近傍 (おそらく $(0, 0)$ 自身を除いて、[7] 参照) で解析的な安定および不安定多様体がある．

安定多様体を計算するのに、その表式を

$$x = F(y, \bar{\varphi}) = \sum_{1 \le n < \infty} a_n(\bar{\varphi}) y^n,$$

と書いてみる．$\bar{\varphi}$ を独立変数として (2.3) を書き換えると、

$$\frac{dx}{d\bar{\varphi}} = \frac{1}{4}\cos^2(\bar{\varphi}) y x^3 (1 + O_2),$$
$$\frac{dy}{d\bar{\varphi}} = \frac{1}{4}\cos^2(\bar{\varphi}) x^4 (1 + O_2).$$

ここで O_n は x, y に関し n 次の項を意味する．

$$\frac{dx}{d\bar{\varphi}} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\bar{\varphi}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}},$$

のはずである．ここで $dx/d\bar{\varphi}$ と $dy/d\bar{\varphi}$ の中で x を $F(y, \bar{\varphi})$ で置き換えた．y のそれぞれのべきの係数を等しいとおいて $n \ge 1$ に対して $a_n(\bar{\varphi})$ に関する微分方程式を得る．表式 $da_n(\bar{\varphi})/d\bar{\varphi}, n \ge 1$ には $\cos^2(\bar{\varphi})$ が因子として含まれることに注意する．こうして係数 $a_n(\bar{\varphi})$ が再帰的に決まる．$n \le 10$ ではゼロでない項は、$a_1(\bar{\varphi}) = 1$, $a_5(\bar{\varphi}) = 5/(512(2+\varepsilon)^{2/3})$, $a_8(\bar{\varphi}) = 3\sin(2\bar{\varphi})((1/3)\sin^2(2\bar{\varphi}) - (3/2)(\cos(2\bar{\varphi}) + 1))/(2048(2+\varepsilon)^{2/3})$, $a_9(\bar{\varphi}) = 43/(2^{18}(2+\varepsilon)^{4/3})$ だけである．

対称性 L^1 は新しい変数 (2.1) では次のように書ける．

$$(x, y, \bar{\varphi}, \kappa) \to (x, -y, -\bar{\varphi}, -\kappa). \tag{2.4}$$

(2.4) を使って不安定多様体 $x = F(-y, -\bar{\varphi})$ が得られる．さらに、(2.3) より、x の符号を変えても方程式が不変なことは明らかである．したがって不安定多様体は $x = -F(y, \bar{\varphi})$ とも表せる．これから、$a_n(\bar{\varphi})$ は n が偶数のときは $\bar{\varphi}$ の奇関数であり、n が奇数のときは偶関数である．

P.O.$_+$ および P.O.$_-$ の不変多様体の軌道は放物線である．$P^s_{+(-)}$ および $P^u_{+(-)}$ をそれぞれ t が $+\infty$ および $-\infty$ に向かうときの $I_{+(-)}$ における放物軌道の多様体と呼ぶ (図 2.1 参照)．

B_+ および B_- をそれぞれ I_+ および I_- の近くの球面とする (図 2.2 参照)．円 $e_1 = P^s_+ \cap B_+$ は B_+ の北半球上に双曲軌道に対応する領域 c_1 と楕円軌道に対応する領域 $\mathcal{E}_1$ を決める．今の文脈では、楕円軌道とは無限遠の近傍に入り、ある時間の後にそこから出ていく軌道のことである．同様に、円 $e_2 = P^u_+ \cap B_+, e_3 = P^s_- \cap B_-$ および $e_4 = P^u_- \cap B_-$ は B_+, B_- および B_- 内にそれぞれ c_2 と $\mathcal{E}_2$, c_3 と $\mathcal{E}_3$ および c_4 と $\mathcal{E}_4$ を決める．

図 2.2

無限遠近くの流れは面

$$S_2 = \{(x, y, \xi, \eta) \in \mathcal{V} | y = 0\}$$

を横切る．

したがって、流れに沿って次のような微分同相写像を得る．

$$i^1_{+(-)} : \mathcal{E}_{1(3)} \to S_2;\ i^2_{+(-)} : S_2 \to \mathcal{E}_{2(4)}.$$

このとき $i_+ : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ および $i_- : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_4$ をそれぞれ $i_+ = i^2_+ i^1_+$ および $i_- = i^2_- i^1_-$ で定義する．

補題 2.1. γ を $\mathcal{E}_{1(2)}$ 内の弧で $e_{1(2)}$ に端点を持つものとする．このとき $i_+(\gamma)(i_+^{-1}(\gamma))$ は $e_{2(1)}$ に巻き付く弧である．すなわち $\gamma' \subset \mathcal{E}_{2(1)}$ が $e_{2(1)}$ で終わる弧なら、$i_+(\gamma)$ は $e_{2(1)}$ の任意の近傍で γ' を無限個の点で横切る．

$\mathcal{E}_3$ および $\mathcal{E}_4$ でも同様な結果が成り立つ．

補題 2.1 は次の補題からただちに出る．後者の証明は本質的に [5]、p.170 から示唆を受けた．

補題 2.2. γ を $\mathcal{E}_1$ 内の弧で e_1 に端点を持つものとする．このとき流れに沿って平面 $y = 0$(図 2.2 の赤道面) まで進んだときの γ の像は P.O.$_+$ に巻き付く弧である．

証明. (2.3) より、ふたたび t を独立変数にとり、$\dot{} = d/dt$ と書いて、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -yx^3/4, \\ \dot{y} &= -x^4(1 + O_4)/4, \\ \dot{\bar{\varphi}} &= (-1 + O_2)/\cos^2(\bar{\varphi}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

を得、

$$\dot{b} = -\cos^2(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}, \tag{2.6}$$

で定義される新しい変数 b を導入して、$\dot{b} = 1 + O_2$ および

$$\bar{\varphi} + \sin(\bar{\varphi})\cos(\bar{\varphi}) = -2b + \text{定数}, \tag{2.7}$$

を得る．(2.5) および (2.6) より、以下を得る．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{db} &= -yx^3(1+O_2)/4, \\ \frac{dy}{db} &= -x^4(1+O_2)/4. \end{aligned} \tag{2.8}$$

最後に $dc/db = x^3/4$ で定義される新しい独立変数 c を導入し、これを使って (2.8) から次を得る．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dc} &= -y(1+O_2), \\ \frac{dy}{dc} &= -x(1+O_2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで従属変数を $u = x - F(y,\bar{\varphi}) = x - y + O_5, v = x + F(y,\bar{\varphi}) = x + y + O_5$ によって変える．ゆえに $u=0$ および $v=0$ はそれぞれ安定および不安定多様体に対応する．u,v に関する微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{du}{dc} &= \frac{dx}{dc} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dc} - \frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}}\frac{d\bar{\varphi}}{dc} = u(1+O_2), \\ \frac{dv}{dc} &= \frac{dx}{dc} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dc} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}}\frac{\bar{\varphi}}{dc} = -v(1+O_2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる．ここで (2.9) 式、$da_n(\bar{\varphi})/d\bar{\varphi}$ に関する注意、および $u=0$ および $v=0$ が不変多様体であることを利用した．$v=a$ 上の弧 γ を考えても (単に微分同相写像を使って)、議論は制限されない．γ 上の初期条件を $u_0 = \alpha z, v_0 = a, \bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}^* + \beta z + O(z^2), 0 \le z \le z_0$ ととれる．ここで $\alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha > 0$ であり、z は端点で $z=0$ になるような弧のパラメーターである．

任意の $\delta > 0$ に対して、a と z_0 を十分小さくとって以下の不等式を成り立たせることができる．

$$\begin{aligned} (1-\delta)u \le \frac{du}{dc} &\le (1+\delta)u, \\ -(1+\delta)v \le \frac{dv}{dc} &\le -(1-\delta)v. \end{aligned} \tag{2.11}$$

(2.11) より、u と v が a より小さい限り次を得る．

$$\begin{aligned} u_0 e^{(1-\delta)c} &\le u \le u_0 e^{(1+\delta)c}, \\ v_0 e^{-(1+\delta)c} &\le v \le v_0 e^{-(1-\delta)c}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

新しい変数の原点 $b=0, c=0$ は $v_0 = a$ のときであるとする．

平面 $y=0$ は $u-v=0$ と書ける．(2.12) より、$v-u \ge v_0 e^{-(1+\delta)c} - u_0 e^{(1+\delta)c}$ である．ゆえに $v-u$ は $c \le c_1 = (1/2)(1+\delta)^{-1}\ln(v_0/u_0)$ に対して非負である．b_1 を $v-u=0$ となる b の

最小の正値とする．対応する $\bar{\varphi}$ と x の値を $\bar{\varphi}_1$ および x_1 と書く．このとき次を得る．

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 32\int_0^{c_1}(u_0 e^{(1+\delta)c} + v_0 e^{-(1-\delta)c})^{-3}dc \\ &= 32(u_0 v_0)^{-3/2}\int_0^{c_1} e^{-3\delta c}(e^{c-(1+\delta)c_1} + e^{(1+\delta)c_1 - c})^{-3}dc. \end{aligned}$$

新しい変数 $w = c_1 - c$ を導入して次を得る．

$$b_1 > 32(u_0 v_0)^{-3/2}\left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{3\delta(2+\delta)/(2+2\delta)}\int_0^{c_1}(e^w + e^{-w})^{-3}dw.$$

$\rho > 0$ とする．このとき十分小さな a と z_0 に対して、

$$b_1 > C(1-\rho)u_0^{-(3/2)(1-\rho)},$$

である．ただし、$C = 32(v_0)^{-3/2}\int_0^\infty (e^w + e^{-w})^{-3}dw$ である．ゆえに b_1(したがって $\bar{\varphi}_1$) は z がゼロに向かうとき無限大になる．これで補題が証明された． □

注意 2.1 ここで渦巻きとは、z がゼロに向かうとき $y = 0$ 上の像点の角度 $\bar{\varphi}$ が無限大になることである．単調性は主張しない．しかし多数の数値計算 (FigA.1 参照) によれば単調であるように見える．すなわち、$d\bar{\varphi}_1/dz > 0$ かつ $dx_1/dz > 0$ である．適当な不等式を使えば、$b_1 < C(1+\rho)u_0^{-(3/2)(1+\rho)}$ である．事実、方程式内の大きな項だけを残しておけば、簡単に $\bar{\varphi}_1 = -2Cu_0^{-(3/2)}(1+o(1))$ が得られ、γ の点の像が $y = 0$ に達するときの x の値 x_1 は $(u_0 v_0)^{1/2}$ である．このことから、大きな項だけを使って、$\lim_{z\to 0}\bar{\varphi}_1 x_1^3 =$ 定数 となる．これがまさに数値計算で観察されるのである (補遺 A 参照).

3. 直線 $\theta = \pm\pi/2$ の膨らまし

三体衝突と無限遠を膨らませることは 2 つの境界を $\mathcal{V}$ に貼り付ける効果がある．ひとつは $r = 0$ において、もうひとつは $r = \infty$ においてである．$\mathcal{V}$ とその 2 つの境界を表すうまい位相表現を捜す．

いくつか記法を導入する．$c \in \mathbf{R}$ として次を定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c &= \{(r, v, \theta, w) \in \mathcal{V} | v = c\}, \\ \beta_c &= \{(r, v, \theta, w) \in \mathcal{C} | v = c\}. \end{aligned}$$

$c \in \mathbf{R}$ を固定すれば、β_c は (θ, w) 面の曲線であって

$$w^2 = 2\cos\theta\left(1 - \frac{c^2\cos\theta}{2W(\theta)}\right), \tag{3.1}$$

で定義される．

$\omega^c = \{(r, v, \theta, w) \in \mathcal{P}_c | v' = 0\}$ とおく．

(1.5) および (1.6) を使えば ω^c が

$$w^2 = \cos\theta\left(1 - \frac{c^2\cos\theta}{2W(\theta)}\right), \tag{3.2}$$

で与えられることがわかる．

$\mathcal{P}_c, \beta_c$ および ω^c の点は、紛らわしい場合を除いて座標 (θ, w) で表す．

(3.2) の実定数 c を動かすことにより曲面が得られるが、これは $\mathcal{V}$ を 2 つの成分、$v' < 0$ と $v' > 0$ の成分に分ける．

曲線 ω^0 は $w^2 = \cos\theta$ で与えられ、$\mathcal{P}_0$ 内に軌道に沿って r の極大に対応する (原点を含む) 内部領域と r の極小点である ($\mathcal{C}$ に近い) 外部領域 $\mathcal{M}$ を定義する．

$c \in \mathbf{R}$ を固定する．2 つの定数 w_0, θ_0 をとって、$w_0 > 0$ および $\pi/2 - \theta_0 > 0$ を十分小さくとる．次を定義する (図 3.1 参照)．

$$Q_c = \{(r, v, \theta, w) \in \mathcal{P}_c \mid |w| \le w_0, \theta_0 \le \theta \le \pi/2\}.$$

$w, |w| \le w_0$ を固定したとき、$r_w(\theta, c)$ を (1.6) で $h = -1$ とおいて θ の関数として定義できる．すなわち、

$$r_w(\theta, c) = -\frac{c^2}{2} + \frac{W(\theta)}{\cos\theta} - \frac{w^2 W(\theta)}{2\cos^2\theta}. \tag{3.3}$$

図 3.1

$w = 0$ のとき $r_0(\theta, c) = -(c^2/2) - V(\theta)$ は $\theta = \pi/2$ の近くで増加し、θ が $\pi/2$ に向かうと無限大になる (図 3.2 参照)．したがってこの点で不連続である．(1.4) で与えられる変数は $\mathcal{C}$ の外、二体衝突の近傍ではよくない．だから 2 本の直線 $\theta = \pm\pi/2$ を膨らまそう．

まず w の値が違うときの関数 $r_w(\theta, c)$ を調べる．

補題 3.1. $w \ne 0$ のとき $r_w(\theta, 0)$ は $\theta_m(w) < \theta^w$ において極大になる．ただし (θ^w, w) は $\omega^0 \cap Q_0$ の点である．

証明. (3.3) を微分して次を得る．

$$\frac{dr_w}{d\theta}(\theta, 0) = \frac{W'(\theta)}{\cos\theta}\left(1 - \frac{w^2}{2\cos\theta}\right) + \frac{W(\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\left(1 - \frac{w^2}{\cos\theta}\right). \tag{3.4}$$

図 3.2

$w, 0 < w < w_0$ を固定する ($-w_0 < w < 0$ の場合は対称的である)．$(\theta_w, w) \in \beta_0$ として $\theta^w < \theta < \theta_w$ のとき点 $(\theta, w) \in Q_0$ は β_0 と ω^0 の間にある．だから $\cos\theta < w^2 < 2\cos\theta$ である．さらに $W(\theta)$ は $\pi/2$ の近くで正の狭義単調減少関数である．このとき $\theta^w < \theta < \theta_w$ なら $dr_w(\theta, 0)/d\theta < 0$ である．

$\theta = \theta^w$ および $\theta = \theta_w$ に対して $dr_w(\theta, 0)/d\theta < 0$ は明らかである．これで証明ができた． □

こんどはゼロでない c の値を考え、次を定義する．

$$\omega_m = \left\{ (\theta, w) \in Q_c \,\middle|\, \frac{dr_w}{d\theta}(\theta, c) = 0 \right\}.$$

$c \neq 0$ のとき $dr_w(\theta, c)/d\theta = dr_w(\theta, 0)/d\theta$ である．このとき (3.4) から ω_m の表式として次を得る．

$$w^2 = 2\cos\theta \left(\frac{W'(\theta)\cos\theta + W(\theta)\sin\theta}{W'(\theta)\cos\theta + 2W(\theta)\sin\theta} \right). \tag{3.5}$$

ただし

$$W'(\theta) = \frac{dW(\theta)}{d\theta} = -\frac{4\varepsilon^{3/2}(2\varepsilon + 4)\sin\theta}{(2\varepsilon + 4\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{3.6}$$

$W(\theta) = -\cos\theta V(\theta)$ および (3.6) を使って計算をすれば、$\pi/2$ の近くの ω_m の表式として次を得る．

$$w^2 = \cos\theta \left(1 - \frac{8\varepsilon^{3/2}\cos^3\theta}{(\varepsilon + 2\sin^2\theta)^{3/2}} \right) \left(\frac{1}{1 + C\cos\theta} \right). \tag{3.7}$$

ただし

$$C = \frac{2\varepsilon^{3/2}(\varepsilon - 2 + 4\sin^2\theta)}{(\varepsilon + 2\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

曲線 ω_m は c に依存しない．

(3.7) からただちに次の補題が出る．

補題 3.2. (i) $\theta_m(w)$ は w がゼロに向かうとき $\pi/2$ に向かう．(ii) $w(\theta)$ が (3.7) 式で定義される関数なら、$dw(\theta)/d\theta$ は θ が $\pi/2$ に向かうとき $\pm\infty$ に向かう．

図 3.2 は Q_c 内の $r_w(\theta, c)$ の進化を示す.

補題 3.3. w_0 と θ_0 は実定数で、$w_0 > 0$ と $\pi/2 - \theta_0 > 0$ は十分小さいとする. このときすべての $c \in \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{Int}(Q_c) \cap \omega_m \neq \emptyset$ である.

証明. (3.1) および (3.5) から計算して、$\pi/2$ の近くの θ の値すべてに対して、

$$c^2 = \frac{2W^2 \sin\theta}{\cos\theta(W'(\theta)\cos\theta + 2W(\theta)\sin\theta)} \tag{3.8}$$

として ω_m が β_c および β_{-c} と交わることがわかる.

そのうえ、θ が $\pi/2$ に向かうと、$W(\theta)$ は $1/\sqrt{2}$ に、$W'(\theta)$ は $-4\varepsilon^{3/2}(2\varepsilon + 4)^{-1/2}$ に向かう. (3.8) より θ が $\pi/2$ に向かうと、c^2 は単調に $+\infty$ に向かう. このときすべての $c \in \mathbf{R}$ に対して ω_m は $\pi/2$ 以外の点で β_c および β_{-c} と交わる. □

図 3.3

二体衝突直線 $\theta = \pm\pi/2$ を膨らます主たる発想は次のとおりである. v の定レベル c を固定する. 適当な集合 Q_c において変数を変換して、$w = 0$ 上の点 $(\pi/2, 0)$ を線分 $[A, \pi/2]$ に膨らませる. この線分上で慣性モーメントは 0 から ∞ に向かう. その後、変数変換を直線 $\theta = \pi/2$ からその近傍に拡張する. 膨らましは C^∞ にできる.

(θ, w) 面内で、曲線 β_c は $|c|$ が十分大きいとき円に同相な 2 つの成分から成る. $|c|$ が無限大に向かうとき、成分のひとつは点 $(\pi/2, 0)$ に向かい、もうひとつは $(-\pi/2, 0)$ に向かう. したがって v が $\pm\infty$ に向かうときは Q_c を修正する必要がある. 補題 3.3 にしたがって、$|c|$ に依存する適当な定数 w_0 および θ_0 を用いてこの修正ができる. 簡単に計算できるように、$|c| \to \infty$ のとき、w_0 および $\pi/2 - \theta_0$ はそれぞれ $1/|c|$ および $1/c^2$ の形でゼロに近づくようにできる. 集合 $Q = \cup_{c \in \mathbf{R}} Q_c$ を定義する. 以下の構成では Q_c は固定しておく.

$A = \theta_m(w_0)$ とする (図 3.1b 参照). 関数族 $\alpha_w(\theta)$ を $|w| \le w_0$ に対して以下のように定義する (図 3.3 参照).

$$
\begin{array}{rlll}
 & \alpha_w(\theta) & = \theta & \text{if } |w| = w_0 \\
\alpha_i = & \alpha_w(\theta_0) & = \theta_0 & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{if } 0 < |w| < w_0, \\
 & \alpha_w(\theta_m(w)) & = A & \\
\alpha_f = & \alpha_w(\theta_w) & = \theta_w & \\
\alpha_0(\theta) = & \multicolumn{3}{l}{\begin{cases} \lim_{w\to 0} \alpha_w(\theta) & \text{if } \theta \neq \pi/2, \\ A & \text{if } \theta = \pi/2. \end{cases}}
\end{array}
\tag{3.9}
$$

区分的線形関数をとれば十分である．

(3.9) から新しい変数 α で $0 < |w| \leq w_0$ に対して α_i から α_f まで動くものが得られる．変数 α を θ の代わりに使う．$w = 0$ のとき α は α_i と A の間の値だけをとる．

$a^0 = \operatorname{arc}\cot r_w(\theta_0, c)$ および $a = (w_0 \operatorname{arc}\cot r_w(\theta_m(w), c) - w \operatorname{arc}\cot r_w(A, c))/(w_0 - w)$ とおく．$\lim_{w\to w_0} a = \operatorname{arc}\cot(r_{w_0}(A, c))$ であることに注意する．

$0 \leq w < w_0$ に対して定義された区分的線形関数の族として $\varphi_w(\alpha)$ を次式で導入する．

$$
\varphi_w(\alpha) = \begin{cases} a + \dfrac{a^0 - a}{\alpha_i - A}(\alpha - A) & \alpha_i \leq \alpha \leq A, \\ a + \dfrac{\pi/2 - a}{\alpha_f - A}(\alpha - A) & A < \alpha \leq \alpha_f. \end{cases}
$$

ここで $0 \leq w \leq w_0$ に対して以下のような関数族 $\psi_w(\alpha)$ を考える (w の負の値に対しては構成は対称的である)．

$$
\psi_w(\alpha) = \begin{cases} r_w(\theta(\alpha), c) & \text{if } w = w_0, \\ \cot\left(\dfrac{w}{w_0} \operatorname{arc}\cot r_w(\theta(\alpha), c) + \dfrac{w_0 - w}{w_0}\varphi_w(\alpha)\right) & \text{if } 0 < w < w_0, \\ \cot \varphi_w(\alpha) & \text{if } w = 0. \end{cases}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&\varphi_w(\alpha_i) = a^0, \\
&\varphi_w(A) = a, \\
&\varphi_w(\alpha_f) = \pi/2.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

図 3.4

(3.10) を使えば、族 $\psi_w(\alpha), 0 < w < w_0$ に対して次を得る (図 3.4 参照).

$$\begin{aligned}
&\psi_w(\alpha_i) = r_w(\theta_0, c),\\
&\psi_w(A) = r_w(\theta_m(w), c),\\
&\psi_w(\alpha_f) = 0.
\end{aligned}$$

θ の代わりに α また r の代わりに ψ を使えば、系の状態は Q 内で完全に決まる.

4. 多様体 $\mathcal{V}$

Q 内の直線で r が非有界のものは穴を 2 つ持つ球 I_+ に膨らますことができる．赤道は周期軌道 P.O.$_+$ である．放物軌道は P.O.$_+$ に漸近する．だからこの軌道を $\mathcal{P}_0\backslash\mathrm{Int}(\mathcal{M})$ 上に置ける．この事実に関し、若干のコメントが必要である．7 節で無限遠近くの軌道の $\mathcal{P}_0$ に相対的なふるまいを示すときにそのコメントをしよう.

$r > 0$ の点が「$\mathcal{C}$ に含まれる」と考えれば、$\mathcal{V}$ は図 4.1 のように表せる．点を打った領域は二体衝突を膨らましたあとの S^+ と S^- の点である．次を定義する.

$$\gamma_+ = S^+ \cap \mathcal{P}_0 \quad \text{および} \quad \gamma_- = S^- \cap \mathcal{P}_0. \tag{4.1}$$

図 4.1

図 4.1 には三体衝突から無限大の速度で無限遠に行く仮想的な軌道 s_1 がある．s_2, s_3 および s_4 は s_1 と対称な軌道である．これらの軌道に関するこれ以上の情報は補遺 B に与えた．

補題 4.1. $p \in (S^+ \cup S^-) \backslash (\gamma_+ \cup \gamma_-)$ なら、軌道 $\varphi(t,p)$ は p に r の変曲点を有する．$p \in \gamma_+ \cup \gamma_-$ なら $\varphi(t,p)$ は p に r の極小を有する．

証明. (1.5) の第一式を微分して次を得る．

$$\begin{aligned}\ddot{r} = \ & ((-\sin\theta)W^{-1/2} - \frac{1}{2}\cos\theta W' W^{-3/2})rvw \\ & + rv^2\frac{1}{2}\cos^2\theta W^{-1} + r\cos\theta - 2r^2\cos^2\theta W^{-1}.\end{aligned}$$

$\theta = \pi/2$ かつ $w = 0$ なら $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ である．さらに微分すると、$\theta = \pi/2$ のとき $\dddot{r} = rvW^{-1/2}$ であることがわかる．このとき $v \neq 0$ なら $\dddot{r} \neq 0$ である．$v = 0$ で $\theta = \pi/2, w = 0$ にしておくと、$\ddot{r} = 3r > 0$ である． □

二体衝突では r は極大にならない．したがって θ が $\pi/2$ または $-\pi/2$ に向かうと、曲線 ω^0 は無限遠に向かう (図 4.1 参照).

5. 放出-放物軌道

放出軌道のあるものは $\mathcal{C}$ の近傍を任意に大きな速度で離れる．この事実を使って三体衝突から始まる双曲および放物軌道の存在を示そう．

部分系 m_1, m_2 はエネルギー $h_{12} = (\dot{x}_1^2/4) - (1/x_1)$ を持つ．$h_{123} = h - h_{12}$ と定義する．h は負に固定した全エネルギーである (尺度変換をして $h = -1$ にしてある).

補題 5.1. 三体衝突から出発する放出軌道でエネルギー h_{123} が任意に大きなものがある．

これは McGehee[6] の発想を使って示せる．

証明. (1.4) より次を得る．

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{2}r\cos\theta, \\ \dot{x}_1 &= \sqrt{2}r^{-1/2}\left(v\cos\theta - w\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sqrt{W}\right).\end{aligned}$$

このとき (1.6) を使って次を得る．

$$\begin{aligned}h_{12} = \ & \frac{W}{r}\left[\frac{v^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{2W} - \frac{vw\sin\theta}{\sqrt{W}}\right. \\ & \left. + \frac{rh\sin^2\theta}{W} - \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}W}\right)\right].\end{aligned}$$

$p(r,v) \in S^+$ とおく．$W(\pi/2) = 2^{-1/2}$ であること、および θ が $\pi/2$ に向かうとき $(1/\cos\theta) \times [1 - (1/\sqrt{2}W)]$ が $4\varepsilon^{3/2}/\sqrt{2+\varepsilon}$ に向かうことより、p において

$$h_{12} = \frac{1}{r}\left[-\frac{v^2}{2} + \frac{4\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{2(2+\varepsilon)}}\right] + h.$$

N を $N > |h|$ なる定数とする．(r, v) が

$$v^2 > \frac{8\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{2(2+\varepsilon)}},$$

および

$$r < \left(\frac{v^2}{2} - \frac{4\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{2(2+\varepsilon)}}\right)(N+h)^{-1},$$

を満たせば $h_{12} < -N$ である．

$\mathcal{C}$ に含まれる $W^{u,1}_{L^s}$ の軌道は v が任意に大きいような点を無限個 S^+ 内に有する．(5.1) を満たすように $v = v_0$ を固定する．$W^{u,1}_{L^s}$ は 2 次元であり、流れは S^+ に横断的であるから、$W^{u,1}_{L^s}$ の軌道があって任意に小さな r で S^+ と交わる．この点で $h_{12} < -N$ である． □

$(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ は補題 5.1 で与えらる放出軌道とする．t_0 があって $x_1(t_0) = 0$ およびある大きな M に対して $h_{123} > M$ である．この不等式は

$$\frac{(\dot{x}_2(t_0))^2}{2} - \frac{(2+\varepsilon)}{x_2(t_0)} > B \tag{5.2}$$

と書ける．ここで $B = (2+\varepsilon)M/2\varepsilon$ である．(5.2) の左辺は質量 1 と $2+\varepsilon$ の二体問題のエネルギーである．距離 x_2 は対応する二体問題の場合に比べて大きな負の加速を得る．なぜなら

$$\ddot{x}_2 = -\frac{8(2+\varepsilon)x_2}{(x_1^2 + 4x_2^2)^{3/2}} > -\frac{(2+\varepsilon)}{x_2^2}$$

だからである．

エネルギー h のすべての値に対して、無限遠に双曲的に逃げる放出軌道が存在するといえる．連続性より次の補題を得る．

図 5.1

補題 5.2. 軌道 $\Omega_1 \subset P_+^s \cap W_{L^s}^{u,1}$ があって、図形 θ_L の三体衝突から出発して $x_2 = 0$ 軸を横切らずに無限遠に放物的に脱出する．(図 5.1 参照)

明らかに Ω_1 に対称な軌道、すなわち $\Omega_2 \subset P_+^u \cap W_{L^i}^{s,2}, \Omega_3 \subset P_-^s \cap W_{M^s}^{u,2}$ および $\Omega_4 \subset P_-^u \cap W_{M^i}^{s,1}$ が存在する．これらの軌道は $\mathcal{P}_0$ と交わらない．座標平面で m_3 は $x_2 = 0$ 軸を横切らない．

6. 放出-衝突軌道

不変多様体と平衡点の交わりに興味がある．これらの交点は t が $-\infty$ や $+\infty$ に向かうときに三体衝突に向かう軌道を与える．交点を求めるために、不変多様体をうまい平面で切る．

まず $\mathcal{P}_0$ を考えよう．流れは ω^0 の点を除いて $\mathcal{P}_0$ に横断的である．計算によれば、ω^0 上で $v'' = wW^{-1/2}\cos\theta(-V'(\theta))$ であるから、$\mathrm{sgn}(v'') = \mathrm{sgn}(-wV'(\theta))$ は $\theta = 0, \theta = \pm\theta_L$ および $\theta = \pm\pi/2$ で変化する．詳しくいうと、

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \{(\theta, w) \in \omega^0 | w < 0, \theta \in (-\theta_L, 0) \cup (\theta_L, \pi/2)\},\\
X_2 &= \{(\theta, w) \in \omega^0 | w > 0, \theta \in (-\pi/2, -\theta_L) \cup (0, \theta_L)\},\\
X_3 &= \{(\theta, w) \in \omega^0 | w < 0, \theta \in (-\pi/2, -\theta_L) \cup (0, \theta_L)\},\\
X_4 &= \{(\theta, w) \in \omega^0 | w > 0, \theta \in (-\theta_L, 0) \cup (\theta_L, \pi/2)\},
\end{aligned}
$$

と定義すると、$v(t)$ は $X_1 \cup X_2$ の点で局所極大となり、$X_3 \cup X_4$ の点で局所極小となる．ω^0 上の 3 階微分として次を得る．

$$
v''' = \frac{1}{2}W^{-1/2}(-W^{-1}(W')^2\cos\theta + 2W''\cos\theta - W'\sin\theta + 2W\cos\theta).
$$

このとき $\theta = 0$ なら $v''' = -7(1+4\varepsilon)^{-1/2}2^{1/4} < 0$ であり、$\theta = \pm\theta_L$ なら $v''' = 9(2^{7/4}(2+\varepsilon)^{1/2})^{-1} > 0$ である．$\omega^0 \backslash X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ の点は $v(t)$ の変曲点である．

補題 6.1. $p \in \mathcal{P}_0 \backslash \mathrm{cl}(\mathcal{M})$ とする．すべての $t > 0$ に対して $v(t) \neq 0$ または $\theta(t) \neq \pm\pi/2$ なら $\varphi(t, p)$ は衝突軌道である．すなわち、t が ∞ に向かうとき $r(t)$ はゼロに向かう．

<u>証明</u>. $r(t)$ は $p = \varphi(0, p)$ で極大である．だから正の小さな時間の間 $r(t)$ は減少する．このときすべての $t > 0$ に対して $v(t) < 0$ と仮定できる．t が $+\infty$ に向かうとき、$r(t)$ は非負の定数 r_0 に向かう減少関数のはずである．$r_0 \neq 0$ なら t が $+\infty$ に向かうとき、$v(t)$ はゼロに向かう．ところがこれは不可能である．$\varphi(t, p)$ が衝突多様体の外の平衡点に向かうことになってしまうからである．

(1.4) より $x_1 = \sqrt{2}r\cos\theta$ である．軌道に沿って $x_1(t)$ は正の有界な関数であり、すべての t に対して $\ddot{x}_1(t) < k, k = -2(1+4\varepsilon)^{-2}$ である．このとき t^* があって $x_1(t^*) = 0$ である．したがって t^* 有限であるか $t^* = \infty$ である．t^* が有限なら二体衝突であるが、これはおかしい．□

次を定義する．

$$
\begin{aligned}
\sigma_+^u &= \{p \in \mathcal{P}_0 \cap W_{M^s}^{u,1} |\ \text{任意の}\ t < 0\ \text{に対して}\ \varphi(t,p)\ \text{は}\ \mathcal{P}_0 \text{を横切らない}\ \}\\
\sigma_-^u &= \{p \in \mathcal{P}_0 \cap W_{L^s}^{u,2} |\ \text{任意の}\ t < 0\ \text{に対して}\ \varphi(t,p)\ \text{は}\ \mathcal{P}_0 \text{を横切らない}\ \}.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_0$ を $(0,0)$ の近傍とする．[8] で証明されたように、$\sigma_+^u \cap \mathcal{U}$ は、$\mathcal{U}$ が十分小さければ $(0,0)$ に巻き付く曲線である．もちろん $\varepsilon < 55/4$ と仮定している．この場合、σ_+^u は補題 6.2 に

示されるように連続曲線である．実は、数値計算によれば σ_+^u は大域的にきれいな (nice) 渦巻きとなっている (補遺 A 参照).

補題 6.2. σ_+^u を $l \in [0,\infty)$ でパラメーターづけ、$\sigma_+^u(0) = (-\theta_L, 0)$ とし、l が ∞ に向かうとき $\sigma_+^u(l)$ は $(0,0)$ に向かうようにする．このとき σ_+^u は連続曲線であり、$l_1 = 0$ なる増大列 $\{l_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ があって、$q_i = \sigma_+^u(l_i) = (\theta_i, 0)$ なら $\sigma_+^u \cap \{w=0\} \supseteq \cup_{i\in\mathbf{N}}\{q_i\}$ であり、i が偶数なら $\theta_i > 0$、i が奇数なら $\theta_i < 0$ である．σ_-^u に関しても同様な主張が成り立つ．

証明. $-\theta_L$ に伴う平行相似図形軌道は点 $\sigma_+^u(0)$ で $\mathcal{P}_0$ を横切る．したがって十分小さな $l > 0$ に対して $\sigma_+^u(l)$ は半平面 $w > 0$ に含まれる連続曲線である．この事実は平行相似図形ラグランジュ解の近くで変分方程式を使って求めることができる (詳しくは [11] 参照)．$\sigma_+^u \subset \mathcal{P}_0 \backslash \mathrm{cl}(\mathcal{M})$ なら、すなわち σ_+^u が ω^0 と交わらないなら、σ_+^u は連続弧である．

$l_2 = \min\{l > 0 | \sigma_+^u(l) = (\theta_i, 0) \text{ with } \theta_i > 0\}$ とおく．σ_+^u は原点の近くで渦を巻いているからこの数は存在する ([8] におけるように平行相似図形オイラー解の近くで変分方程式をつかう)．(1.5) より、$w = 0$ および $\theta \in (-\theta_L, 0)$ なら $\dot{w} > 0$ である．したがって弧 $B = \{\sigma_+^u(l) | 0 < l < l_2\}$ は半平面 $w > 0$ に含まれる．$\sigma_+^u \cap \omega^0 = \emptyset$ を証明するには $B \cap \omega^0$ を示せば十分である．というのは σ_-^u と σ_+^u は交わらず $\sigma_-^u = L^2 \circ L^1(\sigma_+^u)$ だからである．$W^{u,1}_{M^s}$ の軌道は最初に $X_1 \cup X_2$ の点にはたどりつかない．だから B が $w > 0$ かつ $-\theta_L < \theta < 0$ なる点 (θ, w) で ω^0 を横切らなければ十分である．

二体衝突が正則化されていなければ、(1.4) より、曲線 ω^0 は $u^2 = -V(\theta)$ であり、$-\theta_L < \theta < 0$ に対して $u^2 = -V(\theta) > -V(-\theta_L)$ である．(1.4) と (1.5) より $du/d\tau = \frac{1}{2}vu - V'(\theta)$ である．このとき $du/d\theta = -\frac{1}{2}v - V'(\theta)/u$ であり、$v > 0$ なら $du/d\theta < -V'(\theta)/u$ である．積分して

$$u_1^2 < 2\int_{-\theta_L}^{0} -V'(\theta)d\theta = 2(-V(0) + V(-\theta_L)).$$

$V(0) = -(1+4\varepsilon)/\sqrt{2}$ および $V(-\theta_L) = -(1+2\varepsilon)^{3/2}(2+\varepsilon)^{-1/2}$ から $u_1^2 < -V(-\theta_L)$ が証明される．ゆえに $B \cap \omega^0 = \emptyset$ である．

補題の条件の中の列 $\{l_i\}$ の存在は $w = 0$ 上での $\mathrm{sign}(\dot{w})$ の変化から出る．(1.5) の最後の式から、$w = 0$ 上で、$\theta \in (-\theta_L, 0) \cup (\theta_L, \pi/2)$ なら $\dot{w} > 0$ であり、$\theta \in (-\pi/2, -\theta_L) \cup (0, \theta_L)$ なら $\dot{w} < 0$ である．　□

$\sigma_+^s = L^1(\sigma_+^u)$ および $\sigma_-^s = L^1(\sigma_-^u)$ を定義する (図 6.1 参照)．だから $\sigma_+^s \subset W^{s,2}_{M^i}$ および $\sigma_-^s \subset W^{s,1}_{L^i}$ である．図 6.1 では数値計算にしたがってきれいに大域的に渦を巻いていることを仮定している (補遺 A 参照)．この性質に関しては注意 2.1 を引用しておく．しかし、この場合、渦巻きの半径は必ずしも単調減少関数ではないが、数値計算によれば曲線 $\sigma_+^s, \sigma_-^s, \sigma_+^u$ および σ_-^u は $w = 0$ 上または $\theta = 0$ のみで交わる．数値結果を考慮しなければ、この性質は $(0,0)$ の近傍でだけ保証される．$D \subset \mathcal{P}_0 \backslash \mathrm{cl}(\mathcal{M})$ を、図 6.1 のように $\sigma_+^s, \sigma_-^u, \sigma_+^u$ および σ_-^s の弧で囲まれる集合とする．$(-\theta_L, 0)$ の近くで D を通る軌道は、ある正の時間の後、M^i の近傍から $W^1_{E^i}$ にしたがって逃げて行く．D^1 を $D \backslash (\sigma_+^s \cup \sigma_-^s \cup \{(0,0)\})$ の成分でこれらの軌道を含むものとする．D^2 を $D \backslash (\sigma_+^s \cup \sigma_-^s \cup \{(0,0)\})$ のもうひとつ成分とする．$D^3 = L^2(D^1)$ および $D^4 = L^1(D^1)$ を定義する．D^1 は、図 6.1 に示されるように、2 つの線分族 $\{c_j^1\}$ および $\{d_j^1\}$ をそれぞれ γ_1 および γ_2 内に決める．D^2 内の対応する族を $\{c_j^2\}$ および $\{d_j^2\}$ と書く．

図 6.1

図 6.2

正の整数 $j \geq 2$ に対して、Q_j^1 を、D^1 内で d_{j-1}^1 および d_j^1 に限られる閉集合として定義し (図 6.1 を見よ)、$Q_1^1 = D^1 \backslash \cup_{j \geq 2} Q_j^1$ とおく．さらに 3 つの集合族 $\{Q_j^2\}, \{Q_j^3\}$ および $\{Q_j^4\}$ をそれぞれ $\mathrm{cl}(D^2), \mathrm{cl}(D^3)$ および $\mathrm{cl}(D^4)$ 内に、すべての $j \in \mathbf{N}$ に対して $Q_j^2 = L^2L^1(Q_j^1), Q_j^3 = L^2(Q_j^1)$ および $Q_j^4 = L^1(Q_j^1)$ で定義する．

$p \in D$ が与えられたとき、$t_b(p) = \min\{t > 0 | \varphi(t,p) \in S^+ \cup S^-\}$, $t_{-b}(p) = \min\{t < 0 | \varphi(t,p) \in S^+ \cup S^-\}$ を定義する．(混乱がなければ t_b および t_{-b} と書く)．補題 6.1 より、どの $p \in D \backslash (\sigma_+^s \cup \sigma_-^s \cup \{(0,0)\})$ に対しても t_b は存在し、どの $p \in D \backslash (\sigma_+^u \cup \sigma_-^u \cup \{(0,0)\})$ に対しても t_{-b} が存在する

$p \in \mathrm{Int}(Q_j^1 \cap Q_j^2)(p \in \mathrm{Int}(Q_j^3 \cap Q_j^4))$, $j \in \mathbf{N}$ なら、$\{\varphi(t,p) | t \in \mathrm{Int}\langle 0, t_{b(-b)}(p)\rangle\}$ は S_1 内に j 個の点を持つことに注意する．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は凸閉包である．$D^1 \cap \sigma_-^u$ および $D^1 \cap \sigma_+^u$ の孤は D^1 内に閉集合の集まりを決める．それに図 6.2 で示されるように $P_2^1, P_3^1, P_4^1, \ldots$ と順番をつける．対称な集合 $P_j^2 = L^2L^1(P_j^1)$ は D^2 に含まれる．実のところ族 $\{P_j^1\}$ は族 $\{Q_j^1\}, \{Q_j^2\}, \{Q_j^3\}$ および $\{Q_j^4\}$ の交わりであって次のようになっている．$j \geq 1$ に対して $P_{2j}^1 = Q_j^1 \cap Q_j^4$ および

$P^1_{2j+1} = (Q^1_j \cap Q^3_{j+1}) \cup (Q^1_{j+1} \cap Q^3_j)$．$P^1_2$ を c^1_1 および σ^u_+, σ^u_- の対応する弧で限られる集合に制限する．P^2_2 も同様にする．

図 6.3

したがって、$j \geq 2$ のとき $p \in \mathrm{Int}(P_j^1)$ または $p \in \mathrm{Int}(P_j^2)$ なら、$\{\varphi(t,p) | t_{-b} < t < t_b\}$ は S_1 内に j 個の点を持つ．開弧 $\{d_j^1\}$ および $\{d_j^2\}$ の点は族 Q の境界にあるけれども、これらは集合族 P の内点と同じ条件にあることに注意する．

命題 6.1. どの正整数 n に対してもラグランジュ図形を結ぶ 2 つの対称な放出-衝突軌道 $(E-C)$ があって、m_3 が $x_2 = 0$ 軸を n 回横切り、しかも二体衝突をしない．n が偶数なら初期および最終図形は等しく、n が奇数なら異なる．(図 6.3 参照.)

証明. $\sigma_+^u \cap \sigma_+^s$ および $\sigma_-^u \cap \sigma_-^s$ の点は偶数の n の E-C 軌道に対応する．これらの軌道がゼロ速度曲線上に点を持つことはあきらかである (図 6.3 参照)．n が奇数なら軌道は $\sigma_+^u \cap \sigma_-^s$ および $\sigma_-^u \cap \sigma_+^s$ から得られる． □

命題 6.1 の軌道は [10] で Simó により得られた．

次にラグランジュ点に付いている不変分枝のうち二体衝突のある分枝に巻き付くものを調べよう．無限遠近くの面 S_2 を考える．変数 $(x, y, \bar{\varphi}, R)$ で、周期軌道 P.O.$_+$ は γ_1 の点を $\bar{\varphi} = 0$ および $\bar{\varphi} = \pi$ に対して持つ．Levi-Civita の正則化を使っているから、この 2 つの点は現実の点 1 つに対応する．必要な同一視が行われたとする．このとき S_2 上無限遠の近くで、$\bar{\varphi} = 0$ はゼロ速度曲線であり、同じ理由により $\bar{\varphi} = \pi/2$ は二体衝突である．

5 節で $W_{L^s}^{u,1}$ に属する双曲放出軌道の存在を証明した．すると補題 2.1 の仮定中の弧 $\gamma \in W_{L^s}^{u,1} \cap \mathcal{E}_1$ がある．弧 $\sigma_{L^s}^\infty = i_+^1(\gamma \cap \mathcal{E}_1)$ は P.O.$_+$ の周りに巻きつく．$\sigma_{L^s}^\infty$ の巻きつき方に関しては注意 2.1 を参照して欲しい．そこで次の補題が得られる．

補題 6.3. $\sigma_{L^s}^\infty$ を $l \in [0, \infty)$ でパラメーターづけ、l が ∞ に向かうとき $\sigma_{L^s}^\infty(l)$ は P.O.$_+$ に向かうようにする．このとき増大列 $\{l_i\}_{i \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ があって、$\sigma_{L^s}^\infty \cap \gamma_1 \supseteq \cup_{i \in \mathbf{N} \cup \{0\}} \{p_{2i}\}$ であり、$\sigma_{L^s}^\infty \cap S^+ \supseteq \cup_{i \in \mathbf{N}} \{p_{2i-1}\}$ である．ただし $p_i = \sigma_{L^s}^\infty(l_i)$ である．

同様にして、弧 $\gamma \subset W_{M^s}^{u,2} \cap \mathcal{E}_3$ があって、i_+^3 を作用させると P.O.$_-$ に巻き付く弧 $\sigma_{M^s}^\infty$ になる．$\sigma_{L^i}^\infty$ および $\sigma_{M^i}^\infty$ は対称性 L^1 により、それぞれ $\sigma_{L^s}^\infty$ および $\sigma_{M^s}^\infty$ に対称な弧である．$j \geq 0$ に対して、補題 6.3 で与えられる点 p_{2j} および p_{2j+2} で限られる開線分 γ_1 として x_j を定義する (図 6.4 参照)．$j \geq 0$ に対して x_j' は p_{2j-1} および p_{2j+1} で限られる開線分であるとする．D_+ は

S_2 の領域であって、弧 $\{\sigma^\infty_{L^s}(l)|l_0 \le l \le l_2\}, x_0$ および P.O.$_+$ に囲まれるものと定義する．L^2 によってそれぞれ $\{x_j\}$ および $\{x'_j\}$ に対称な開線分族を $\{y_j\}$ および $\{y'_j\}$ と呼ぶ．$D'_+ = L^1(D_+)$ なら $D_- = L^2(D'_+)$ および $D'_- = L^2(D_+)$ を定義できる．

図 6.4

すでに $(0,0) \in \mathcal{P}_0$ の近くで行なったように、$D_+ \cup D'_+$ 内に閉集合の族 $\{Q^+_j\}$ を図 6.4 に示されるように定義できる．$j \ge 1$ のとき対称な集合 $\{Q^-_j\}$ の対称形が $D_- \cup D'_-$ 内に得られる．図 6.4(および関連する図 11.1 および 11.4) ではきれいな (nice) 渦巻き性が成り立つことを仮定している．これはすでに述べたとおり、数値的な証拠に裏付けされている (補遺 A 参照).

図 6.5

$p \in \mathcal{V}$ とおく．$t_{-x}(p) = \max\{t < 0|\varphi(t,p) \in S_1\}$ および $t_x(p) = \min\{t > 0|\varphi(t,p) \in S_1\}$ を定義する．混乱がなければ t_{-x} および t_x と簡単に書く．このときどの点 $p \in (D_+ \cup D'_+)\backslash\sigma^\infty_{L^i}$ または $p \in (D_- \cup D'_-)\backslash\sigma^\infty_{M^i}$ に対しても t_x は存在し、どの点 $p \in (D_+ \cup D'_+)\backslash\sigma^\infty_{L^s}$ または $p \in (D_- \cup D'_-)\backslash\sigma^\infty_{M^s}$ に対しても t_{-x} は存在する．

ある $j \ge 1$ に対して $p \in \mathrm{Int}(Q^+_j)$ $(p \in \mathrm{Int}(Q^-_j))$ なら、弧 $a = \{\varphi(t,p)|t_{-x} < t < t_x\}$ は $S^+(S^-)$ を $j + m^1$ 回横切ることに注意する．m^1 は無限遠の近くで使われる近傍の大きさに本

質的に依存する．これは二体衝突のある決まった回数に関係している．簡単化するため、集合 $\{Q_j^+\}$ および $\{Q_j^-\}$ の番号を定数 m^1 から始まるように付け替える．このとき集合の副添字 j は弧 a の二体衝突の回数を正確に表す.

命題 6.2. 十分大きな各正整数 n に対して初期および最終図形がラグランジュ型である 2 つの放出-衝突軌道があって、m_3 が $x_2 = 0$ 軸を横切らず、m_1 は m_2 と n 回二体衝突を行う (図 6.5 参照).

証明. 軌道はそれぞれ交点 $\sigma^\infty_{L^s} \cap \sigma^\infty_{L^i}$ および $\sigma^\infty_{M^s} \cap \sigma^\infty_{M^i}$ から得られる (図 6.4 参照). □

7. 横断面 S_0

2 つの横断面 $\mathcal{P}_0$ と S_2 を使ってきた．面 $S_2(y=0)$ は大域的な横断面としてはよくないけれども $\theta_L \le \theta \le \pi/2$ のときはよい．双曲軌道、放物軌道およびオイラー平行相似図形軌道を除いて、任意の軌道は S_2 を横切る.

面 $\mathcal{P}_0$ も無限遠の近くではよくない．つまり無限遠の任意の近傍に $\mathcal{P}_0$ に接する軌道があるのである．これを示すために $v=0$ を (x,y,ξ,η) 座標で書く．(1.4) より、

$$v = r^{-1/2}\left(\frac{1}{2}x_1\dot{x}_1 + (2\varepsilon/(2+\varepsilon))x_2\dot{x}_2\right),$$

であり、(2.1) を使って

$$v = (\xi^4x^4/2 + 8\varepsilon/(2+\varepsilon)^{1/3})^{-1/4}(\xi\eta x + 4\varepsilon(2+\varepsilon)^{-1/3}y/x). \tag{7.1}$$

このとき $v=0$ および $x \ne 0$ に対して

$$y = -\frac{(2+\varepsilon)^{1/3}}{4\varepsilon}\xi\eta x^2. \tag{7.2}$$

周期軌道 $(x,y) = [0,0]$ は $\mathcal{P}_0$ に含まれる．そのうえ $\mathcal{P}_0$ はゼロ速度曲線 $(\eta = 0)$ において、また $\xi = 0$ に対応する二体衝突において S_2 を横切る．(ξ,η) 面において極座標を使えば、$\xi\eta = R^2\sin(2\bar{\varphi})/2$ と書ける．x, y が十分小さければ R は 1 に近い．このとき $\bar{\varphi}$ を固定すると、(7.2) は (x,y) 面内の 2 次 (degree) の放物線に近く、$\xi\eta < 0$ なら正係数であり、$\xi\eta > 0$ なら負係数である．図 7.1 には Levi-Civita の同一視をした後の P.O.$_+$ の近くの $\mathcal{P}_0$ が S_2 との関係で描かれている.

図 7.1

v が無限遠の近くでよい変数でないことをはっきりさせるもう一つの方法は、周期軌道 P.O.$_+$ が $v=0$ に含まれているのに、関係する不変多様体での v の値が $\pm 4\varepsilon(8\varepsilon(2+\varepsilon))^{-1/4}$ ($+$ は安定多様体、$-$ は不安定多様体) に向かうことである．

放物軌道に十分近い楕円軌道が B^+ に入るとき、$\mathcal{P}_0$ との最初の交点が領域 $\xi\eta<0$ にあること、すなわち、$w>0$ であることを言いたい．この主張を証明するためには、$\overline{\varphi}=3\pi/4 \pmod \pi$ を通る無限遠近くのポアンカレ写像 $\overline{F}$ を考えれば十分である．$\overline{F}$ は $\overline{F}(x,y)=(x-\frac{1}{4}\pi x^2(y+r_1), y-\frac{1}{4}\pi x^3(x+r_2))$ で与えられる．ここで r_1 および r_2 は x,y に関する 3 次の実解析関数である ([6] 参照)．楕円軌道と $\mathcal{P}_0$ との最初の交差が $y<0$ の領域で起これば (すなわち $\xi\eta>0$)、この軌道は $y<0$ なるポアンカレ断面に到着するはずである．いま考えている断面内で直線 $y=0$ の前像が v の負の値を持つことを証明すれば十分である．ところが x が十分小さければ、前像は $y=\frac{1}{4}\pi x^3(x+r_2)<(2+\varepsilon)^{1/3}R^2x^2/(8\varepsilon)$ である．

式

$$w=u\cos\theta/\sqrt{W}=r^{-1/2}(\varepsilon/(2+\varepsilon))^{1/2}(-x_2\dot{x}_1+x_1\dot{x}_2)\cos\theta/\sqrt{W},$$

を使えば、最初の交差が半平面 $w>0$ で起こることがわかる．

$f_1(x)$ は C^∞ 関数であって、$x\le\alpha_1$ なら $f_1(x)\equiv 1$、$x\ge\alpha_2$ なら $f_1(x)\equiv 0$ であるとする．ここで $0<\alpha_1<\alpha_2$ は 2 つとも小さな実定数である．さらに $x\in(\alpha_1,\alpha_2)$ なら $f_1'(x)<0$、$0<z<(\alpha_2-\alpha_1)/2$ なら $f_1''(\alpha_1+z)<0$、また $0\le z\le(\alpha_2-\alpha_1)/2$ なら $f_1(\alpha_1+z)=1-f_1(\alpha_2-z)$ とする．次を定義する．

$$\overline{\psi}(x,y,\xi,\eta)=yf_1(x)+(1-f_1(x))v.$$

ここで v は (7.1) で与えられる x,y,ξ,η の関数である．関数 $\overline{\psi}$ は曲面

$$S_0=\{(x,y,\xi,\eta)\in\mathcal{V}|\overline{\psi}(x,y,\xi,\eta)=0\},$$

を定義する．

α_1 が十分小さければ、$x\le\alpha_1$ に対して流れは S_0 に横断的であることに注意する．

補題 7.1. α_2 が十分小さくて $\alpha_2\le 2\alpha_1$ を満たせば、$0<\alpha_1<x<\alpha_2$ なるどの x の値に対しても、$\bar{\psi}$ の物理時間 t に関する微分はちょうど 2 点 $p_1,p_2\in S_0$ でゼロになる．x が α_1 まで減少すると 2 つの点は同じ極限を持つ．

<u>証明</u>. $\alpha_1<x<\alpha_2$ なら S_0 上で

$$v=-f_1(1-f_1)^{-1}y \tag{7.3}$$

である．このとき、この領域で $dt=\xi^2d\kappa$(2 節参照) であることを思い出せば

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\kappa}=f_1\frac{dy}{d\kappa}+(1-f_1)\frac{dv}{d\kappa}+y\frac{f_1'}{1-f_1}\frac{dx}{d\kappa}. \tag{7.4}$$

(7.1) および (7.3) より

$$\eta=-\frac{y}{\xi x^2}\left(\frac{f_1'}{1-f_1}\tilde{r}^{1/2}x+\frac{4\varepsilon}{(2+\varepsilon)^{1/3}}\right). \tag{7.5}$$

ただし $\tilde{r} = (\xi^4 x^4/2 + 8\varepsilon/(2+\varepsilon)^{1/3})^{1/2}$ である．エネルギー積分 (2.2) と (7.5) を使えば、

$$y^2 = \frac{(1-f_1)^2}{A_1}\xi^2 x^4 (1 - \xi^2 + A_2 \xi^2 x^2), \tag{7.6}$$

である．ただし $A_1 = \varepsilon(2+\varepsilon)^{-1/3}(1-f_1)^2\xi^4 x^4 + (\tilde{r}^{1/2} f_1 x + 4\varepsilon(2+\varepsilon)^{-1/3}(1-f_1))^2$, $A_2 = \varepsilon(2+\varepsilon)^{-1/3}(1+u^2)^{-1/2}$ および $u = (4(2+\varepsilon)^{1/3})^{-1}\xi^2 x^2$ である．

また (7.5) および (7.6) より $\alpha_1 < x < \alpha_2$ のときは S_0 上で $dv/d\kappa$ を ξ, η の関数として次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\kappa} = \;& \frac{x}{\tilde{r}^{1/2}} - \frac{2x\xi^2}{\tilde{r}^{1/2}} + \frac{4\varepsilon\xi^2 x^3}{\tilde{r}^{1/2}(\xi^4 x^4 + 16(2+\varepsilon)^{2/3})^{1/2}} - \\ & - \frac{f_1^2 \xi^4 x^7}{2\tilde{r}^{3/2} A_1}(1 - \xi^2 + A_2\xi^2 x^2).\end{aligned} \tag{7.7}$$

(7.7) を (7.4) に代入し、(2.3) を使えば、ある程度の計算の後、次を得る．

$$\frac{d\overline{\psi}}{d\kappa} = (1-f_1)\tilde{r}_0^{-1/2} x(1+o(1)) - \left(2(1-f_1)\tilde{r}_0^{-1/2} x + f_1 x^4/4\right)\xi^2(1+o(1)).$$

ここで $\tilde{r}_0 = (8\varepsilon(2+\varepsilon)^{-1/3})^{1/2}$ である．

$d\overline{\psi}/d\kappa = 0$ の解を求める．すなわち、

$$1 = \xi^2 \left(2 + \frac{f_1}{4(1-f_1)}\tilde{r}_0^{1/2} x^3\right)(1+o(1)). \tag{7.8}$$

x が α_1 から α_2 に向かうとき、表式 $2 + f_1\tilde{r}_0^{1/2}x^3/4(1-f_1)$ が単調に ∞ からある定数に向かって減少することを確かめればよい．

$f_1(1-f_1)^{-1}x^3$ の微分は

$$\overline{g}(x) = 3\overline{f}_1(1-\overline{f}_1) - x\overline{f}_1' < 0,$$

なら負である．ここで $\overline{f}_1 = 1 - f_1$ とおいた．$\overline{f}_1'$ が点 $x = (\alpha_1+\alpha_2)/2$ に関して対称であることを使えば、$\alpha_1 < x \le (\alpha_1+\alpha_2)/2$ に対して $\overline{g}(x) < 0$ を証明すれば十分である．x のこの値に対して、平均値の定理および f_1'' に関する仮定より

$$3\overline{f}_1(1-\overline{f}_1) < 3\overline{f}_1'(x)(x-\alpha_1)$$

を得る．このとき $x \le 3\alpha_1/2$ なら $\overline{g}(x) < 0$ である．$\alpha_2 \le 2\alpha_1$ なら (7.8) の解 ξ^2 は x が α_1 から α_2 に向かうとき増大することが言える．ところで x が α_2 に向かうと $f_1(x)$ は 0 に向かい、(7.8) を満たす ξ^2 の値はただひとつであることに注意しよう．x が α_1 に向かうと、ξ^2 のこの値は 0 に向かう．したがって $x = x^*, \alpha_1 < x^* < \alpha_2$ を固定すると、$d\overline{\psi}/dt = 0$ は 2 つの解 $\pm\xi^*$ を持つ．このとき (7.6) および (7.5) から y および η を求めると、4 点

$$\begin{aligned} q_1 &= (x^*, \xi^*, y^*, -\eta^*), \quad q_2 = (x^*, \xi^*, -y^*, \eta^*), \\ q_3 &= (x^*, -\xi^*, y^*, \eta^*), \quad q_4 = (x^*, -\xi^*, -y^*, -\eta^*), \end{aligned} \tag{7.9}$$

が得られる．

(2.1) より、ξ, η は Levi-Civita の変数であることを思い出せば、q_1 を q_3 と、また q_2 と q_4 を同一視するべきである．(7.9) には実の点が 2 つある．ひとつは $\dot{x}_1 > 0$ および $\dot{x}_2 < 0$ で半平面 $w < 0$ にあり、もうひとつは $\dot{x}_1 < 0$ および $\dot{x}_2 > 0$ で半平面 $w > 0$ にある．

$\alpha_1 < x < \alpha_2$ のとき $d\overline{\psi}/dt = 0$ は $d\overline{\psi}/d\kappa = 0$ と同じ解を持つことに注意する． □

図 7.2

補題 7.1 より、S_0 内に曲線 ω^* があって、領域を $d\overline{\psi}/dt > 0$(領域 $\mathcal{M}^*$) および $d\overline{\psi}/dt < 0$ に分ける (図 7.2 参照).

$p \in \mathcal{V}$ とする．$t_1(p), t_2(p)$ を、存在するならば

$$\begin{aligned} t_1(p) &= \min\{t > 0 | \varphi(t, p) \in S_0\}, \\ t_2(p) &= \max\{t < 0 | \varphi(t, p) \in S_0\}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

によって定義する．混乱がなければこれらを t_1, t_2 と略記する．

$p \in \mathcal{M}^*$ とし、t_1, t_2 が存在すれば、2つの写像 ψ, Φ を $\psi(p) = \varphi(t_1, p)$ および $\Phi^{-1}(p) = \varphi(t_2, p)$ で定義する．この場合、$\mathcal{M}^*$ 上のポアンカレ写像は $f = \Phi \circ \psi$ で与えられる．

これらの写像は微分同相写像である．

S_0 を横断面として使おう．S_0 を定義する定数 α_1 および α_2 は補題 7.1 の仮説を満たすとし、しかも円環 $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$ の任意の点において S_0 は $P_+^s \cup P_+^u$ を横切らないものとする．α_1 および α_2 が小さければこれは成り立つ．そこで 2 節で定義した $x < \alpha_1$ に含まれる球 B_+ および B_- を固定する．

さて放物多様体の過去および未来における S_0 との交点に興味がある．ε のある種の値に対してはこれらの交点が連続曲線であって端点 2 つが $\mathcal{C}$ 上にあることを主張する．この主張に関する解析的および数値的な証拠を次節で挙げる．ω^0 を通過する軌道の研究は、この目標にとって有益である．$P_{+,-}^{u,s}$ の S_0 との交点が得られれば、$t \to \pm\infty$ のときに放物的に脱出する軌道の存在を示すのは簡単である．この種の軌道は記号力学の定理を確立するのに本質的である．

8. 放物軌道多様体

S_0 と放物軌道の多様体との最初の (未来および過去へ向けての) 交点を求めよう．

$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ および $\mathcal{E}_4$(2 節参照) 上の写像 i_1^{-1}, i_2, i_3^{-1} および i_4 をそれぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned} i_k^{-1}(p) &= \varphi(t_2, p) \quad \text{if} \quad k = 1, 3, \\ i_k(p) &= \varphi(t_1, p) \quad \text{if} \quad k = 2, 4. \end{aligned}$$

ここで t_1, t_2 は (7.10) に与えられている．

Ω_1(補題 5.2 参照) の近くの P_+^s の軌道は流れに逆らって戻れば L^s の近傍を横切る．これらは Ω_1 に関して P_+^s 内でどちら側にいるかに応じてこの近傍を $W_{L^s}^{s,1}$ または $W_{L^s}^{s,2}$ にしたがって逃げていく．このとき、$i_1^{-1}(e_1)$ は $l^{s,1}$ および $l^{s,2}$ を両端とする弧 ξ_1 を含む．Ω_1 としては $W_{L^s}^{u,1} \cap P_+^s$ 内に複数の軌道が存在し得る．$W_{L^s}^{u,1}$ が P_+^s と交わらなければ、この型の軌道を問題にしない．これらは $l^{s,1}$ に始まり $l^{s,2}$ で終わるループを作るだけである．一方、$W_{L^s}^{u,1}$ が P_+^s と交わる場合の $W_{L^s}^{u,1} \cap P_+^s$ 内の軌道の数は有限のはずであり (解析性とコンパクト性より)、したがって奇数のはずである．このとき $i_1^{-1}(e_1)$ は $l^{s,1}$ と $l^{s,2}$ の間に奇数個の弧を含む．この場合 ω^0 からもっとも遠い弧 ξ_1 のみ考える．α_1 および α_2 は ξ_1 が $\mathcal{M}^*$ に含まれるように選ばれていたことを思い出そう．

ξ_1 が不連続であり得るのは明らかである．事実、ε の値が小さいときはそうである (補題 8.2 参照)．これは $\xi_1 \cap \omega^0 \neq \emptyset$ を意味する．$X_1 \cup X_2$(6 節参照) の点は軌道上 $v(t)$ の局所極大に対応する．したがって、ξ_1 の連続性を証明するには ξ_1 と $X_3 \cup X_4$ の交点を捜せばよい．ところが対称性により、以下の主張が成り立てば ξ_1 は連続である．

<u>主張 1</u>. $p = (\theta, w) \in \omega^0, w > 0, 0 < \theta \leq \theta_L$ なら $v(t_0) = 0$ なる $t_0 < 0$ がある．

<u>主張 2</u>. $p = (\theta, w) \in \omega^0, w > 0, \theta_L < \theta \leq \pi/2$ なら $v(t_0) = 0$ なる $t_0 > 0$ がある．

補題 8.1. 臨界値 $\varepsilon^* < 0.502$ があって、$\varepsilon \in (\varepsilon^*, 55/4)$ ならどの点 $p = (\theta, w) \in \omega^0, w > 0, \theta_L \leq \theta < \pi/2$ に対しても $\theta(t_0) = 0$ なる $t_0 > 0$ がある．

<u>証明</u>. エネルギー積分 (1.6) より、ω^0 上で $r = -V(\theta)/2$ である．このとき座標平面への ω^0 の射影はゼロ速度曲線と平行相似であり、$V(x_1, x_2) = -2$ で与えられる．

p の座標 $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ は θ の関数として以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} x_{1,p} &= \frac{W}{\sqrt{2}}, \\ x_{2,p} &= \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \frac{W \sin\theta}{2\cos\theta}, \\ \dot{x}_{1,p} &= -2\sin\theta, \\ \dot{x}_{2,p} &= \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}} \cos\theta. \end{aligned} \tag{8.1}$$

すべての $t > 0$ に対して $x_2(t) > 0$ と仮定する．(1.1) より、b を $x_1(t)$ の上限として、つまり、すべての $t > 0$ に対して $x_1(t) < b$ として

$$\ddot{x}_2 < -\frac{8(2+\varepsilon)x_2}{(b^2 + 4x_2^2)^{3/2}}, \tag{8.2}$$

を得る．(8.2) より次を得る．

$$\frac{\dot{x}_2^2}{2} < \frac{2(2+\varepsilon)}{(b^2+4x_2^2)^{1/2}} + F.$$

ただし

$$F = \frac{\dot{x}_{2,p}^2}{2} - \frac{2(2+\varepsilon)}{(b^2+4x_{2,p}^2)^{1/2}}.$$

$F \leq 0$ なら $x_2(t)$ は任意に大きくなれず、ある $t_0 > 0$ においてゼロになるはずである．$F < 0$ になるような ε の値を決定しよう．簡単にわかるように、初期条件 (8.1) に対して、$F < 0$ のための必要十分条件は関数

$$\tilde{F}(\theta, \varepsilon) = 2\varepsilon b^2 \cos^4\theta + (2+\varepsilon)W^2 \sin^2\theta \cos^2\theta - 32\varepsilon^3$$

が負になることである．

$b = z_1$ ととる．ここで $(z_1, x_{2,p})$ はゼロ速度曲線上の点である．すなわち、

$$\frac{1}{z_1} + \frac{4\varepsilon}{\left(z_1^2 + \dfrac{(2+\varepsilon)}{2\varepsilon}W^2\tan^2\theta\right)^{1/2}} = 1. \tag{8.3}$$

(8.3) を使えば、$\tilde{F}(\theta, \varepsilon) < 0$ となるのは $z_1 > 1/\sin^2\theta$ のときしかもそのときのみである．

$\alpha \geq 0$ を定数とすると、ゼロ速度曲線で与えられる関数

$$g(z_1) = \frac{1}{z_1} + \frac{4\varepsilon}{(z_1^2+\alpha)^{1/2}}$$

は z_1 の減少関数である．このとき $z_1 > 1/\sin^2\theta$ は $g(z_1) < g(1/\sin^2\theta)$ と同値である．すなわち、

$$G_1(\theta, \varepsilon) = \frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta} + \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}W^2 \sin^2\theta\cos^2\theta - 16\varepsilon^2 < 0. \tag{8.4}$$

$W(\theta)$ と $\cos^4\theta/\sin^4\theta$ は区間 $[\theta_L, \pi/2)$ において減少関数であることに注意する．すると $W(\theta_L) = (1+2\varepsilon)2^{-1/2}$ と $\cos^4\theta_L/\sin^4\theta_L$ をこれらの上限として使える．したがって、$\theta \in [\theta_L, \pi/2)$ なら

$$G_1(\theta, \varepsilon) \leq \left[\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}\right]^2 + \frac{(2+\varepsilon)(1+2\varepsilon)^2}{16\varepsilon} - 16\varepsilon^2 = G_1(\varepsilon)$$

である．

これで証明は終わった．というのは $\varepsilon > 0.502$ のとき $G_1(\varepsilon) < 0$ だからである． □

とくに補題 8.1 から、主張 2 の仮説の点 p は $x_2 = 0$ 軸を横切らずには I_+ に脱出できないことがわかる．

主張 1 および 2 に関してさらに情報を得るために、$0 < \varepsilon < 55/4$ の範囲の異なる ε の値に対して数値計算を行なった．その結果を示す前に、いくつかコメントをしておく．

(8.4) より $0<\varepsilon<55/4$ に対して

$$
\begin{aligned}
G_1(\theta,\varepsilon) \le\ & \varepsilon^2\left[\frac{\cos^4\theta}{\varepsilon^2\sin^4\theta}+\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right]\right.\\
& \left.\left[\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}+\frac{4\cos\theta}{\sqrt{2+16\sin^2\theta/55}}\right]^2\cos^2\theta\sin^2\theta-16\right]\\
=\ & \varepsilon^2 G_2(\theta,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

であることを注意しておく．

ε を固定し、$\theta\in[\theta_L(\varepsilon),\pi/2)$ として $p=(\theta,w)\in\omega^0$ を $G_2(\theta,\varepsilon)<0$ なる点とする．このとき補題 8.1 と同様、$\theta(t_0)=0$ なる $t_0>0$ が存在する．

$0<\varepsilon<55/4$ を固定すれば、$G_2(\theta,\varepsilon)$ は $\theta\in[\pi/4,\pi/2)$ なら θ の減少関数である．そのうえ、この区間に θ を固定し、ある $\varepsilon_0>0$ に対して $G_2(\theta,\varepsilon_0)<0$ なら、すべての $\varepsilon_0\le\varepsilon<55/4$ に対して $G_2(\theta,\varepsilon)<0$ である．

上の論拠および計算 $G_2(0.87,0.35)<0$ を使えば、すべての $\varepsilon\ge 0.35$ に対して $p=(\theta,w)\in\omega^0$ で $\theta\in[0.87,\pi/2)$ なら軌道 $\varphi(t,p)$ は、ある正の時刻に x_1 軸を横切ることがわかる．ε がこの範囲にあるときケース I、III および V のパラメーターの値があることに注意しよう．この 3 つの場合を数値的に調べた．

実は、

$$
r_p<r_z, \tag{8.5}
$$

を満たす点 $p\in\omega^0$ のふるまいを調べれば十分である．ここで $r_z=(1+4\varepsilon)/\sqrt{2}$ は $\theta=0$ のゼロ速度曲線の点における運動量 r の値であり、r_p は p における運動量である．$r_p>r_z$ であって軌道 $\varphi(t,p)$ がある正の時刻に $x_2=0$ 軸を横切るなら、$\varphi(t,p)$ は横断の前に領域 $r<r_z$ に入るはずである．したがって $\varphi(t,p)$ は平面 $\mathcal{P}_0$ を通過してしまう．

簡単にわかるように、

$$\theta_z(\varepsilon) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2+\varepsilon}}{(2+8\varepsilon)\sqrt{2+\varepsilon} - 4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

として、$\theta > \theta_z(\varepsilon)$ なら、点 $p = (\theta, w) \in \omega^0$ は (8.5) を満たす．$\theta_z(\varepsilon)$ は ε の増加関数であり、$\theta_z(0.35) \geq 1.33$ である．つまり、すべての $0.35 \leq \varepsilon < 55/4$ およびすべての $\theta_z(\varepsilon) \leq \theta < \pi/2$ に対して、対応する点 $p = (\theta, w) \in \omega^0$ の軌道 $\varphi(t, p)$ は x_1 軸を横切る．だから $\varphi(t, p)$ は $\mathcal{P}_0$ を横切る．

数値結果の一部を表 8.I、8.II、8.III、8.IV、8.V および 8.VI に与えた．表中、θ_0 は $p \in \omega^0$ の θ 座標であり、(θ_i, w_i) は流れに沿って $\varphi(t, p)$ が $\mathcal{P}_0$ を横切る回数 i であって、$i > 0$ なら正の時刻、$i < 0$ なら負の時刻の場合である．

表 8.Ia および 8.Ib

表 8.Ia で、w_1 には 0.7 と 0.72 の間に不連続がある．これは $0.7 < \theta' < 0.72$ に一点 $p(\theta', w')$ があって、$\varphi(t,p)$ と $\mathcal{P}_0$ の最初の交点が ω^0 の点であることによる．これを見るために、表 8I.b を追加した．表 8.IV、8.V および 8.VI にも同じ型の不連続性がある．

一方、次の結果を得る．

補題 8.2. $0 < \varepsilon < \varepsilon_e = 2\sqrt{3}/(16-\sqrt{3}) \approx 0.242789\ldots$ なら ω^0 の点があって、その軌道は $\mathcal{P}_0$ を横切らずに無限遠に脱出する．

証明. $p = (\theta, w)$ を主張 2 の仮説のものとする．

(1.1) より、$\ddot{x}_2 \geq -(2+\varepsilon)/x_2^2$ であり、積分すれば $\dot{x}_2 \geq 0$ なら $\dot{x}_2^2/2 - (2+\varepsilon)/x_2 \geq F$ である．ここで $F = \dot{x}_{2,p}^2/2 - (2+\varepsilon)/x_{2,p}$ は二体問題のエネルギーである．(8.1) を使って $\theta = \theta_L$ のときの F を計算できる．すなわち、

$$F = \frac{2+\varepsilon}{1+2\varepsilon}\left[\frac{2+\varepsilon}{4\varepsilon} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right].$$

このとき $\varepsilon < 2\sqrt{3}/(16-\sqrt{3})$ なら $\theta = \theta_L$ において $F > 0$ である．□

表 8.II および 8.III

補題 8.2 により、ε が小さいとき ξ_1 が途切れることが証明された．

数値計算によれば、$\varepsilon^{(1)} \in (0.2847, 0.2948)$ および $\varepsilon^{(2)} \in (0.2733, 0.2734)$ があって、主張 1 および 2 はそれぞれ $\varepsilon^{(1)} < \varepsilon < 55/4$ および $\varepsilon^{(2)} < \varepsilon < 55/4$ のときに成り立つ．この数値結果から、次のような予想が定式化できる．

表 8.IV, 8.V および 8.VI

予想. 臨界値 $\varepsilon_c \in (0.2847, 0.2848)$ があって、主張 1 および 2 がすべての $\varepsilon_c < \varepsilon < 55/4$ に対して成り立つ.

$\varepsilon \in (\varepsilon_c, 55/4)$ に対して予想を使えば、ξ_1 と ω^0 の交わりはない. 以下で、命題 1.1 で定義されるケース I を ε の値 $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_1$ に帰着させる.

図 8.1

同様にして、$i_2(e_2)$、$i_3^{-1}(e_3)$ および $i_4(e_4)$ はそれぞれ $\xi_1 = L^1(\xi_2)$、$\xi_3 = L^2(\xi_2)$ および $\xi_4 = L^1(\xi_3)$ なる孤 ξ_2、ξ_3 および ξ_4 を含む. 図 8.1 はこれらの孤の ε の関数としての進化を示している. ケース I では、ξ_2 は少なくとも 1 点で ξ_3 を横切る. だから PP_{+-} の型の双放物的軌道がある (図 8.2 参照). つまり軌道は一方の無限遠 (いまの場合 I_+) から放物的にやって来て、もう一方の無限遠 I_- に放物的に去る. $\xi_1 \cap \xi_4$ は PP_{-+} の型の対称軌道を与える. ケース III では、同一の無限遠から来てそこに去る新しい型の双放物軌道が現われる.

これらを PP_{++}(図 8.3 参照) および PP_{--} と書く. ケース V では後者の双放物軌道のみ現われる.

図 8.2 および 図 8.3

9. ポアンカレ写像のいくつかの性質

$R_1 = \psi^{-1}(D_+), R_2 = \Phi(D'_+), R_3 = \psi^{-1}(D_-)$ および $R_4 = \Phi(D'_-)$ を定義する．$i = 1, 2, 3, 4$ に対して $\xi_i \subset \mathcal{M}$ なので、$R_i \subset \mathcal{M}$ と仮定できる．

補題 9.1. γ を $\mathcal{M}$ 内の弧とする．

(i) $\gamma \subset R_1(R_3)$ が $\xi_1(\xi_3)$ に端点を持てば、$\psi(\gamma)$ は $D_+(D_-)$ 内の渦巻きであって、P.O.$_+$(P.O.$_-$) に向かう．

(ii) $\gamma \subset R_2(R_4)$ が $\xi_2(\xi_4)$ に端点を持てば、$\Phi^{-1}(\gamma)$ は $D'_+(D'_-)$ 内の渦巻きであって、P.O.$_+$(P.O.$_-$) に向かう．

補題 9.1 は補題 2.1 の帰結である．

図 9.1

D^1(6 節参照) 内に定義される線分族 $\{c^1_j\}$ を考える．$m^2 = \min\{j \in \mathbf{N} | \Phi(d^1_j)$ は S_0内の連続弧$\} + 1$ とする．このとき $\Phi(P^1_k), k = 2m^2$ は $\mathcal{M}$ に含まれ、．しかも ω^0 の点を含まない．$l^{i,1}$ と $m^{i,1}$ の間の β_0 の弧、および $\Phi(P^1_k), k = 2m^2$ の境界は $\Phi(D^1)$ 内に、すべての $j \geq 2m^2$ に対して $\Phi(P^1_j)$ を含むような領域を決める．この領域を $\mathcal{U}_1$ と記す．簡単のため、D^1 という記号は $\mathcal{U}_1 = \Phi(D^1)$ なる領域のためにとっておく．同様に、集合 D^3, D^2 および D^4 を還元 (reduce)

する．$\mathcal{M}$ 内に次の集合を定義できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^3 &= \psi^{-1}(D^3), & \mathcal{U}^4 &= \psi^{-1}(D^4),\\ \mathcal{U}^1 &= \Phi(D^1), & \mathcal{U}^2 &= \Phi(D^2).\end{aligned}$$

明らかに、ε に応じて集合 $\mathcal{U}^{1,2,3,4}$ に対して定性的に異なる描像を得ることができる．

補題 9.2. $\gamma = \{(\theta, w) \in \mathcal{M} | \theta = \theta(\tau), w = w(\tau), 0 < \tau \le 1\}$ は τ がゼロに向かうとき $\gamma(\tau)$ が点 $p \in \beta_0$ に向かうものとする．$0 < \tau \le 1$ に対して $\gamma(1) \in \psi^{-1}(c_m^2)(\Phi(c_m^2))$ および $\gamma(\tau) \subset \mathcal{U}^3(\mathcal{U}^1)$ なら、ゼロに向かう列 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ があって、$f(\gamma) \supset \cup_{j \in \mathbf{N}} \gamma'_j (f^{-1}(\gamma) \supset \cup_{j \in \mathbf{N}} \gamma')$ である．ただし、

$$\gamma'_j = \{(\theta, w) \in f(\gamma)(f^{-1}(\gamma)) \mid \theta = \theta(\tau), w = w(\tau), \tau_j < \tau < \tau_{j+1}\}$$

は、j が奇数なら $\gamma'_j \subset \mathcal{U}^1(\mathcal{U}^3)$ で、τ が τ_j に向かうと $\gamma'_j(\tau)$ は $m^{i,1}(l^{s,1})$ に向かい、τ が τ_{j+1} に向かうと $\gamma'_j(\tau)$ は $l^{i,1}(m^{s,1})$ に向かい、一方、j が偶数なら $\gamma'_j \subset \mathcal{U}^2(\mathcal{U}^4)$ で、τ が τ_j に向かうと $\gamma'_j(\tau)$ は $l^{i,2}(l^{s,2})$ に向かい、τ が τ_{j+1} に向かうと $\gamma'_j(\tau)$ は $m^{i,2}(m^{s,2})$ に向かう．

<u>証明</u>. $\gamma(1) \in \psi^{-1}(c_m^2)$ および $\gamma(\tau) \subset \mathcal{U}^3$ を考える (その他の場合は対称的である)．このとき $\psi(\gamma(\tau))$ は D^3 内の渦巻きであって、τ が 0 に向かうとき $(0, 0)$ に向かう．$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ を σ_+^s, σ_-^s と $\psi(\gamma(\tau))$ との交点におけるパラメーター値の増大列ととれば、補題 9.1 が出る． □

集合 $\mathcal{U}^1$,$\mathcal{U}^3$,$\mathcal{U}^2$,$\mathcal{U}^4, R_1, R_2, R_3$ および R_4 の交点からオイラー平行相似図形解および無限遠の近くの通過の間の異なるつながりが得られる．

ケース I, III および V の場合、次の集合を定義する (図 9.1 参照)．

ケース I

$$\begin{aligned}A1 &= \mathcal{U}^3 \cap \mathcal{U}^2, & A5 &= \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}^4,\\ A2 &= \mathcal{U}^3 \cap R_2, & A6 &= \mathcal{U}^4 \cap R_4,\\ A3 &= R_2 \cap R_3, & A7 &= R_4 \cap R_1,\\ A4 &= R_3 \cap \mathcal{U}^1, & A8 &= R_1 \cap \mathcal{U}^2.\end{aligned} \tag{9.1}$$

ケース III

$$\begin{aligned}A1 &= R_1 \cap R_2, & A3 &= R_2 \cap R_3,\\ A2 &= R_3 \cap R_4, & A4 &= R_4 \cap R_1.\end{aligned} \tag{9.2}$$

ケース V

$$\begin{aligned}A1 &= R_1 \cap R_2, & A5 &= R_3 \cap R_4,\\ A2 &= R_2 \cap \mathcal{U}^3, & A6 &= R_4 \cap \mathcal{U}^4,\\ A3 &= \mathcal{U}^3 \cap \mathcal{U}^1, & A7 &= \mathcal{U}^4 \cap \mathcal{U}^2,\\ A4 &= \mathcal{U}^1 \cap R_3, & A8 &= \mathcal{U}^2 \cap R_1.\end{aligned} \tag{9.3}$$

われわれの目標は上で記号列で定義された集合 Ai を横切る軌道を特徴づけることにある．だからまず記号力学の抽象的定理を述べる．次にこの定理を二等辺問題のケース I、III および V に適用する．

10. 記号力学のある定理

(x, y) 面に n 個の有界、連結かつどの 2 つも互いに素な集合 $A1, A2, \ldots, An$ を考える．$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ として $A = \cup_{i \in I} Ai$ とし、f を A から $f(A) \subset \mathbf{R}^2$ への同相写像とする．f に次で定義される $n \times n$ の遷移行列 $\mathcal{A}_0 = (\overline{\alpha}_{ij})$ を組み合わせる (associate).

$$\overline{\alpha}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad f(Ai) \cap Aj \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if} \quad f(Ai) \cap Aj = \emptyset. \end{cases} \tag{10.1}$$

特別な記号の集合 $S = \{\dot{N}, L, M, \dot{n}, l, m\}$ を考える (有限集合 S は任意であって、完全な構成は同じように行える)．f に 0 と 1 から成る新しい行列 $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = (\alpha_{i,j}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 & O_6 \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

を組み合わせることができると仮定する．

これを $J = I \cup S$ に関する遷移行列と呼ぶ．(10.2) において、O_6 は 6×6 のゼロ行列である．$\mathcal{A}_0$ は (10.1) で与えられる．$\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ はそれぞれ $n \times 6$ および $6 \times n$ 次であり、以下の性質を満たす．

$$\begin{aligned} &(1) && \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{j,i} \neq 0 \quad \text{if} \quad j \in \{\dot{n}, l, m\}, \\ &(2) && \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \neq 0 \quad \text{if} \quad j \in \{\dot{N}, L, M\}, \\ &(3) && \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{j,i} = 0 \quad \text{if} \quad j \in \{\dot{N}, L, M\}, \\ &(4) && \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0 \quad \text{if} \quad j \in \{\dot{n}, l, m\}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Σ' を以下の型の列 (a', a) の組の集合とする．

(a) $(a', a) = ((\ldots a'_{-1}; a'_0, a'_1, \ldots), (\ldots a_{-1}; a_0, a_1, \ldots))$ であって、すべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して $a'_i \in I$ および $a_i \in \mathbf{N}$、

(b1) $(a', a) = ((a'_k, a'_{k+1}, \ldots), (a_k, ; a_{k+1}, \ldots)), k < 0$ であって, すべての $i \in \mathbf{Z}, k < i$ に対して $a'_i \in I, a_i \in \mathbf{N}$、また $a'_k = \dot{n}, a_k = \infty$、

(b2) $(a', a) = ((a'_k, a'_{k+1}, \ldots), (a_k, ; a_{k+1}, \ldots)), k < 0$ であって、$k < i$ なら $a'_i \in I$、またすべての $i \in \mathbf{Z}, k \leq i$ に対して $a'_k \in \{l, m\}, a_i \in \mathbf{N}$、

(c1) $(a', a) = ((\ldots a'_{h-1}, a'_h), (a_{h-2}, ; a_{h-1})), h > 0$ であって、すべての $i \in \mathbf{Z}, i < h-1$ に対して $a'_{i+1} \in I, a_i \in \mathbf{N}$ および $a'_h = \dot{N}, a_{h-1} = \infty$、

(c2) $(a', a) = ((a'_{h-1}, a'_h), (a_{h-2}, ; a_{h-1})), h > 0$ であって、$i < h$ なら $a'_i \in I$、またすべての $i \in \mathbf{Z}, i \leq h-1$ に対して、$a'_h \in \{L, M\}, a_i \in \mathbf{N}$.

またはタイプ (b) および (c) をつなげて得られる、左および右に有限な 4 つのタイプの列のどれかである．これらを (d11)、(d12)、(d21) および (d22) と呼ぶ．ここで左の数字は左が終わるときのタイプを表し、右の数字は右が終わるときのタイプを表す．

Σ' の部分集合 Σ を次のように定義する．すなわち各組 $(a', a) \in \Sigma$ の列 a' は行列 $\mathcal{A}$ に関して許容 (admissible) である．許容とは、a'_{i-1} および a'_i が定義される限りすべての $i \in \mathbf{Z}$ に対して、$u = a'_{i-1}$ および $v = a'_i$ として $\alpha_{u,v} = 1$ なるときである．

すべての $i \in I$ に対して次を定義する．

$$\begin{aligned} I_i &= \{j \in I | \alpha_{i,j} = 1\}, & c(i) &= \mathrm{card}(I_i), \\ I'_i &= \{j \in I | \alpha_{j,i} = 1\}, & g(i) &= \mathrm{card}(I'_i), \\ \mathbf{S}_i &= \{j \in S | \alpha_{i,j} = 1\} \backslash \{\dot{N}, \dot{n}\}, & r(i) &= \mathrm{card}(\mathbf{S}_i), \\ \mathbf{S}'_i &= \{j \in S | \alpha_{j,i} = 1\} \backslash \{\dot{N}, \dot{n}\}, & z(i) &= \mathrm{card}(\mathbf{S}'_i). \end{aligned}$$

集合 Ai およびこの集合上の f のふるまいについていくつか仮説が必要である．これらの仮説は、Moser([5] 参照) では距離空間的な性格であったが、ここでは位相的な性格を持つ．

ある集合 Ai を固定し、

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x = x(\tau), y = y(\tau), 0 \le \tau \le 1\} \tag{10.4}$$

のタイプの曲線族を定義し、すべての $0 < \tau < 1$ に対して $\gamma(\tau) = (x(\tau), y(\tau)) \in \mathrm{Int}(Ai)$ かつ $\gamma(0) \in \partial Ai$ およんび $\gamma(1) \in \partial Ai$ であるとする．

仮説 1. ∂Ai 内に 4 つの異なる弧 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ および Γ_4 があって、すべての曲線 γ は (10.4) のように $\gamma(0) \in \Gamma_1$ および $\gamma(1) \in \Gamma_2$ であって、ある点 $\gamma(\tau), 0 < \tau < 1$ において $\gamma'(0) \in \Gamma_3$ および $\gamma'(1) \in \Gamma_4$ なる任意の曲線 γ' と交わる．このとき孤 $\Gamma_j, j = 1, 2, 3, 4$ は Ai 内に水平線 (h.c.) および鉛直線 (v.c.) と呼ばれる 2 つの型の曲線を定義する．

2 本の水平線 γ と γ' は点 $\gamma(\tau), 0 < \tau < 1$ で交わらないとき水平片 H(h.s.) を定義する．H の直径 (d(H)) とは γ と γ' のハウスドルフ距離であるとする．鉛直片 (v.s.) も同様に定義する．

2 つの水平片 (鉛直片) が互いに素であるとは、交わるとしてもたかだか ∂Ai においてのみのときである．

孤 Γ_j のあるものは点になってしまうことがあることに注意する．これ以後すべての Ai において孤 $\Gamma_j, j = 1, 2, 3, 4$ が固定されたものとする．

仮説 2. すべての $i \in I$ に対して、Ai 内にどの 2 つも互いに素な $g(i)$ 個の水平片の可算族 $\{\{Hji\}\}_{j \in I'_i}$ があり、どの 2 つも互いに素な $c(i)$ 個の鉛直片の可算族 $\{\{Vmi\}\}_{m \in I_i}$ があって以下の性質を満たす．

(a) これらは順序づけられており、intercalated されていて、大域的に水平片には番号 $\{Hi(k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ がついていて、すべての $g(i)$ 個の水平片は図 10.1 のように並んでいる．鉛直片の族も同様に $\{Vi(k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ と番号づけられている．その上、極限片を次のように定義できるとする．

$$\begin{aligned} Hi(\infty) = \ & \{(x, y) \in \partial Ai \mid \text{すべての } k \in \mathbf{N} \text{ に対して点列 } (x, y)_k \in Hi(k) \text{ があって} \\ & k \text{ が } \infty \text{ に向かうとき } (x, y)_k \text{は } (x, y) \text{ に向かう } \}, \\ Vi(\infty) = \ & \{(x, y) \in \partial Ai \mid \text{すべての } k \in \mathbf{N} \text{ に対して点列 } (x, y)_k \in Vi(k) \text{ があって} \\ & k \text{ が } \infty \text{ に向かうとき } (x, y)_k \text{は } (x, y) \text{ に向かう } \}. \end{aligned}$$

(b) f は鉛直片を水平片に同相的に写像する．すなわち

$$f(Vmi(k)) = Him(k). \tag{10.5}$$

f が定義されている限り、水平 (鉛直) 境界は水平 (鉛直) 境界に写される．

図 10.1

仮説 3.　すべての $i \in I$ に対して $z(i)$ 個の水平線の族 $\{\{Eji\}\}_{j\in \mathbf{S}'_i}$ と $r(i)$ 個の鉛直線の族 $\{\{Cji\}\}_{j\in \mathbf{S}'_i}$ があって次を満たす．

(a) f^{-1} は水平線の上で定義されず、f は鉛直線の上で定義されない．

(b) C は Ai 内の鉛直線であって、ある $m \in \mathbf{N}$ に対して $C \subset Vi(m)$ であるか、上の族のどれかに属する Ai 内の鉛直線である．

このとき $f^{-1}(C) \cap Vij(k)$ はすべての $j \in I'_i$ およびすべての $k \in \mathbf{N}$ に対して Aj 内の鉛直線である．同様に、E が Ai 内の水平線であって、ある $m \in \mathbf{N}$ に対して $E \subset Hi(m)$ であるか、E は上の族のどれかの水平線であれば、$f(E) \cap Hij(k)$ はすべての $j \in I_i$ およびすべての $k \in \mathbf{N}$ に対して Aj 内の水平線である．族 $\{Eji\}_{j\in \mathbf{S}'_j}$ および $\{Cji\}_{j\in \mathbf{S}'_j}$ は仮説 2 の水平線および鉛直線の族に含まれる可能性がある．この場合、すべての $j \in \mathbf{S}'_i$ に対して $m \in I_i$ があって、すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $Eji(k) \subset Hmi(k)$ であり、またすべての $j \in \mathbf{S}_i$ に対して $m \in I'_i$ があって、すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $Cji(k) \subset Vmi(k)$ である．

すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して、仮説 3 より、$f^{-1}(V) \cap Vij(k)$ はすべての $j \in I'_i$ に対して鉛直線であり、$f(H) \cap Hij(k)$ はすべての $j \in I_i$ に対して水平線であることに注意する．

$(a', a) \in \Sigma$ とする．(a', a) にその型に応じて鉛直線の族および水平線の族を以下のように組み合わせる．

(a) 次を定義する．

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= Va'_{i+1}a'_i(a_i) \quad \text{for all } i \in \mathbf{Z}, \\ \bar{H}_i &= Ha'_{i-1}a'_i(a_{i-1}) \quad \text{for all } i \in \mathbf{Z}, i \leq 0. \end{aligned} \tag{10.6}$$

(b) $i > k+1$ なら (10.6) と同様 $\bar{V}_i$ および $\bar{H}_i$ を定義し、(a', a) がタイプ (b1) なら

$$\begin{aligned}\bar{V}_{k+1} &= Va'_{k+2}a'_{k+1}(a_{k+1}) \cap Ha'_{k+1}(\infty),\\ \bar{H}_{k+1} &= Ha'_{k+1}(a_\infty),\end{aligned} \tag{10.7}$$

と定義し、(a', a) がタイプ (b2) なら

$$\begin{aligned}\bar{V}_{k+1} &= Va'_{k+2}a'_{k+1}(a_{k+1}) \cap Ea'_k a'_{k+1}(a_k),\\ \bar{H}_{k+1} &= Ea'_k a'_{k+1}(a_k),\end{aligned} \tag{10.8}$$

と定義する.

(c) $i < h-1$ なら $\bar{V}_i$ および $\bar{H}_i$ は (10.6) のものとし、タイプ (c1) の列なら

$$\bar{V}_{h-1} = Va'_{h-1}(\infty), \tag{10.8a}$$

とし、タイプ (c2) なら

$$\bar{V}_{h-1} = Ca'_h a'_{h-1}(a_{h-1}), \tag{10.8b}$$

とする.

(a', a) がタイプ (d) なら $\bar{V}_i$ および $\bar{H}_i$ は $k+1 < i < h-1$ のとき (10.6) のものとし、(a', a) のタイプに応じて $\bar{V}_{k+1}$、$\bar{H}_{k+1}$ および $\bar{V}_{h-1}$ はケース (b) または (c) のものとする.

点 $p \in A$ が組 $(a', a) \in \Sigma$ を満たすとは、$\bar{V}_m$ が定義される限りすべての $m \in \mathbf{Z}$ に対して、$f^m(p) \in \bar{V}_m$ のときを言う.

定理 10.1. $A = \cup_{i \in I} A_i, I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. ただし、各 $i \in I$ に対して Ai は平面の有界連結集合である. f を A から $f(A)$ への同相写像とし、(10.2) の形の遷移行列 $\mathcal{A}$ は仮説 1、2、3 を満たすとする. このとき各列の組 $(a', a) \in \Sigma$ に対してそれを満たす点 p が存在する.

証明. $(a', a) \in \Sigma$ が (a) タイプの組であるとする.

$$\begin{aligned}B_1 &= \{p \in A \mid f^m(p) \in \bar{V}_m, m = 0, 1, 2, \ldots\}, \quad \text{および}\\ B_2 &= \{p \in A \mid f^{-m}(p) \in \bar{V}_{-m}, m = 1, 2, \ldots\}.\end{aligned}$$

とおく.

再帰的に

$$\begin{aligned}\bar{V}_{0,1,2,\ldots,n} &= \{p \in A \mid f^m(p) \in \bar{V}_m, m = 0, 1, 2, \ldots, n\}\\ &= \bar{V}_0 \cap f^{-1}(\bar{V}_1 \cap f^{-1}(\ldots \bar{V}_{n-1} \cap f^{-1}(\bar{V}_n)) \ldots),\end{aligned}$$

を定義する.

仮説 3 より、$\bar{V}_{n-1} \cap f^{-1}(\bar{V}_n)$ は Aa'_{n-1} 内の鉛直線である. 再帰性により、$\bar{V}_{0,1,2,\ldots,n}$ は Aa'_0 内の鉛直線である.

定義より、$\bar{V}_{0,1,2,\ldots,n+1} \subset \bar{V}_{0,1,2,\ldots,n}$ はすべての $n \in \mathbf{N}$ に対してコンパクト集合である. このとき $B_1 = \cap_{n \geq 0} \bar{V}_{0,1,2,\ldots,n} \neq \emptyset$ は鉛直片である (鉛直線の可能性もある).

(10.5) より $\bar{H}_{-m+1} = f(\bar{V}_{-m})$ である. したがって

$$B_2 = \{p \in A \mid f^{-m}(p) \in \bar{H}_{-m}, m = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

次を定義する．

$$\begin{aligned}\bar{H}_{0,-1,-2,\ldots,-n} &= \{p \in A \mid f^{-m}(p) \in \bar{H}_{-m}, m = 0,1,2,\ldots,n\} \\ &= \bar{H}_0 \cap f(\bar{H}_{-1} \cap \ldots \bar{H}_{-n+1} \cap f(\bar{H}_{-n}))\ldots).\end{aligned}$$

上と同じ議論より、$B_2 = \cap_{n\geq 0}\bar{H}_{0,-1,\ldots,-n}$ は Aa'_0 内の水平片である (水平線の可能性もある).
仮説 1 より $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ である．
$(a', a) \in \Sigma$ が (b1) または (b2) タイプの組であるとする．鉛直片 B_1 をケース (a) のように定義する．次のようにおく．

$$B_2 = \{p \in A \mid f^{-m}(p) \in \bar{V}_{-m}, m = 1,2,\ldots,-(k+1)\}.$$

(10.5) より、$m < -(k+1)$ なら $\bar{H}_{-m+1} = f(\bar{V}_{-m})$ である．さらに、(10.7) と (10.5) を使えば、$f^{k+1}(p) \in \bar{V}_{k+1}$ のとき $f^{k+1}(p) \in \bar{H}_{k+1}$ および $f^{k+2}(p) \in \bar{H}_{k+2}$ である．よって

$$\begin{aligned}B_2 &= \{p \in A \mid f^{-m}(p) \in \bar{H}_{-m}, m = 0,1,2,\ldots,-(k+1)\} \\ &= \bar{H}_0 \cap f(\bar{H}_{-1} \cap \ldots \cap f(\bar{H}_{k+2} \cap f(\bar{H}_{k+1}))\ldots).\end{aligned}$$

上と同様、$\bar{H}_{k+2} \cap f(\bar{H}_{k+1})$ は $\bar{H}_{k+2}$ 内の水平線である．再帰性により、B_2 は $\bar{H}_0$ 内の水平線である．このとき $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ である．
同様にして、(a', a) が (c) または (d) タイプの組のときも定理が証明できる． □

仮説 2 および 3 の線および片が次の性質を持つとする．
(a) Ai 内のどの水平線も Ai 内の各鉛直線を 1 点でのみ横切る．
(b) ある $m \in \mathbf{N}$ に対して V が鉛直線 $V \subset Vi_m$ なら、$\nu, 0 < \nu < 1$ があって、すべての $j \in I'_i$ およびすべての $k \in \mathbf{N}$ に対して次を満たす.

$$d(f^{-1}(V) \cap Vij(k)) \leq \nu d(V).$$

同様に、ある $m \in \mathbf{N}$ に対して H が水平線 $H \subset Hi_m$ なら、すべての $j \in I_i$ およびすべての $k \in \mathbf{N}$ に対して次を満たす.

$$d(f(H) \cap Hij(k)) \leq \nu d(H).$$

このとき明らかに定理 10.1 の点 p は一意である．

11．二等辺問題の記号力学

定理 10.1 によって二等辺問題の異なるタイプのふるまいが与えられる．ケース V の場合に仮説 1、2 および 3 を証明しよう．ケース I および III の場合は結果だけを与える．
ケース V では $A = \cup_{i\in I} Ai, I = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ととる．ここで Ai 集合は (9.3) で定義される．表 II.I が示すのは、仮説 1 を満たすように各 Ai の中で孤 $\Gamma_j, j = 1,2,3,4$ がどのように選ばれるか、である．ある場合には、Γ_j は β_0 上の 1 点になってしまうことが見える．(∗) は定義されたどの孤 Γ_j にも ∂Ai の点が含まれないことを意味する．

表 11.I

どの Ai に対しても、孤 γ は (10.4) におけるように、$\gamma(0) \in \Gamma_1$ および $\gamma(1) \in \Gamma_2$ なら水平線である．$\gamma(0) \in \Gamma_3$ および $\gamma(1) \in \Gamma_4$ なら鉛直線である．

図 11.1

補題 9.1 および 9.2 を使って、水平および鉛直の線と片の族のいくつかを定義しよう．$\psi(A1)$ および $\psi(A8)$ は図 11.1 に示すように 2 本の渦巻片である．D_- 内には、$\psi(A4)$ および $\psi(A5)$ についてこれと対称な図が描ける．さらに、$\psi(A2)$、$\psi(A3)$、$\psi(A6)$ および $\psi(A7)$ は図 11.2 に示すように $D^3 \cup D^4$ 内の渦巻片である．このとき以下のような水平片および線の族を定義できる．

すなわち、$i = 1, 4, 5$ または 8 のときは $k > m^1$ に対して、また $i = 2, 3, 6$ または 7 のときは $k > m^2$ に対して

$$\begin{aligned}
Hij(k) &= \Phi(\mathrm{cl}(\psi(Ai)) \cap Q_k^+) \cap Aj, && i = 1, 8,\ j = 1, 2, \\
Hij(k) &= \Phi(\mathrm{cl}(\psi(Ai)) \cap Q_k^-) \cap Aj, && i = 4, 5,\ j = 5, 6, \\
Hij(k) &= \Phi(\mathrm{cl}(\psi(Ai)) \cap P_{2k+1}^1) \cap Aj, && i = 2, 3,\ j = 3, 4, \\
Hij(k) &= \Phi(\mathrm{cl}(\psi(Ai)) \cap P_{2k}^1) \cap Aj, && i = 6, 7,\ j = 3, 4, \\
Hij(k) &= \Phi(\mathrm{cl}(\psi(Ai)) \cap P_{2k}^2) \cap Aj, && i = 2, 3,\ j = 7, 8, \\
Hij(k) &= \Phi(\mathrm{cl}(\psi(Ai)) \cap P_{2k+1}^2) \cap Aj, && i = 6, 7,\ j = 7, 8.
\end{aligned} \tag{11.1a}$$

また、$i = 1, 2, 5$ または 6 のときは $k > m^1$ に対して、また $i = 3, 4, 7$ または 8 のときは $k > m^2$

に対して

$$
\begin{aligned}
&Eli(k) = H8i(k) \cap \Phi(\sigma^{\infty}_{L^s}), &&i = 1, 2,\\
&Emi(k) = H4i(k) \cap \Phi(\sigma^{\infty}_{M^s}), &&i = 5, 6,\\
&Eli(k) = H7i(k) \cap \Phi(\sigma^{u}_{-}), &&i = 3, 4, 7, 8,\\
&Emi(k) = H3i(k) \cap \Phi(\sigma^{u}_{+}), &&i = 3, 4, 7, 8.
\end{aligned}
\tag{11.1b}
$$

　ある k および i に対して $p \in Eli(k)(Emi(k))$ なら $f^{-1}(p)$ は定義されず、$\varphi(t, p)$ は放出軌道であって、t が $-\infty$ に向かうとき $\varphi(t, p)$ は $L^s(M^s)$ に向かう．

図 11.2

　同様の論拠から、以下のような鉛直片および線の族を定義できる．すなわち、$i = 1, 2, 5$ または 6 のときは $k > m^1$ に対して、また $i = 3, 4, 7$ または 8 のときは $k > m^2$ に対して

$$
\begin{aligned}
&Vij(k) = \psi^{-1}(\mathrm{cl}(\Phi^{-1}(Ai)) \cap Q^{+}_{k}) \cap Aj, &&i = 1, 2,\ j = 1, 8,\\
&Vij(k) = \psi^{-1}(\mathrm{cl}(\Phi^{-1}(Ai)) \cap Q^{-}_{k}) \cap Aj, &&i = 5, 6,\ j = 4, 5,\\
&Vij(k) = \psi^{-1}(\mathrm{cl}(\Phi^{-1}(Ai)) \cap P^{1}_{2k+1}) \cap Aj, &&i = 3, 4,\ j = 2, 3,\\
&Vij(k) = \psi^{-1}(\mathrm{cl}(\Phi^{-1}(Ai)) \cap P^{2}_{2k}) \cap Aj, &&i = 7, 8,\ j = 2, 3,\\
&Vij(k) = \psi^{-1}(\mathrm{cl}(\Phi^{-1}(Ai)) \cap P^{1}_{2k}) \cap Aj, &&i = 3, 4,\ j = 6, 7,\\
&Vij(k) = \psi^{-1}(\mathrm{cl}(\Phi^{-1}(Ai)) \cap P^{2}_{2k+1}) \cap Aj, &&i = 7, 8,\ j = 6, 7.
\end{aligned}
\tag{11.2a}
$$

また、$i = 1, 4, 5$ または 8 のときは $k > m^1$ に対して、また $i = 2, 3, 6$ または 7 のときは $k > m^2$ に対して

$$
\begin{aligned}
&CLi(k) = V2i(k) \cap \psi^{-1}(\sigma^{\infty}_{L^i}), &&i = 1, 8,\\
&CMi(k) = V6i(k) \cap \psi^{-1}(\sigma^{\infty}_{M^i}), &&i = 4, 5,\\
&CLi(k) = V3i(k) \cap \psi^{-1}(\sigma^{s}_{-}), &&i = 2, 3, 6, 7,\\
&CMi(k) = V7i(k) \cap \psi^{-1}(\sigma^{s}_{+}), &&i = 2, 3, 6, 7.
\end{aligned}
\tag{11.2b}
$$

　ポアンカレ写像 f は鉛直線上では定義されない．ある k, i に対して $p \in CLi(k)(CMi(k))$ なる軌道 $\varphi(t, p)$ は衝突軌道である．つまり t が $+\infty$ に向かうとき $\varphi(t, p)$ は $L^i(M^i)$ に向かう．

極限片は次のとおりである．

$$
\begin{array}{ll}
H1(\infty) = \xi_2 \cap \partial A1, & V1(\infty) = \xi_1 \cap \partial A1, \\
H2(\infty) = \xi_2 \cap \partial A2, & V2(\infty) = \{l^{i,1}\}, \\
H4(\infty) = \{m^{s,1}\}, & V4(\infty) = \xi_3 \cap \partial A4, \\
H5(\infty) = \xi_4 \cap \partial A5, & V5(\infty) = \xi_3 \cap \partial A5, \\
H6(\infty) = \xi_4 \cap \partial A6, & V6(\infty) = \{m^{i,2}\}, \\
H8(\infty) = \{l^{s,2}\}, & V8(\infty) = \xi_1 \cap \partial A8.
\end{array}
\tag{11.3}
$$

$H3(\infty) = V3(\infty)$ は $l^{i,1}$ と $m^{i,1}$ の間の β_0 の孤であり、$H7(\infty) = V7(\infty)$ は $l^{s,2}$ と $m^{s,2}$ の間の β_0 の孤である．

f に伴う遷移行列 $\mathcal{A}_0$ は (10.1) より

$$
\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
\tag{11.4}
$$

である．

$\mathcal{A}_0$ を拡張して (10.2) におけるように $I \cup S$ に関する行列 $\mathcal{A}$ にする．S を 10 節で定義した特殊記号の集合とする．$i \in I$ として次を定義する．

(i) $p \in \mathrm{cl}(Ai)$ があって $f(p)(f^{-1}(p))$ が定義されず、t が $+\infty(-\infty)$ のとき $\varphi(t,p)$ が無限遠に逃げるなら、$\alpha_{i,\dot{N}}(\alpha_{\dot{n},i}) = 1$.

(ii) $p \in Ai$ があって $f(p)(f^{-1}(p))$ が定義されず、t が $+\infty(-\infty)$ のとき $\varphi(t,p)$ が $L^i(L^s)$ に向かうなら、$\alpha_{i,L}(\alpha_{l,i}) = 1$.

(iii) $p \in Ai$ があって $f(p)(f^{-1}(p))$ が定義されず、t が $+\infty(-\infty)$ のとき $\varphi(t,p)$ が $M^i(M^s)$ に向かうなら、$\alpha_{i,M}(\alpha_{m,i}) = 1$.

(iv) その他の場合は $\alpha_{i,j} = 0$.

したがって次のように書ける．

$$
\mathcal{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & \\
1 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 1 & O_{8\times 3} \\
0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & 0 &
\end{array}\right],
\tag{11.5}
$$

$$\mathcal{A}_2 = \left[\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{8}{c}{O_{3\times 8}} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]. \tag{11.6}$$

ここで $O_{8\times 3}(O_{3\times 8})$ は $8\times 3(3\times 8)$ のゼロ行列である．10 節で与えられた $\mathcal{A}$ に伴う集合 Σ があって、その要素は列の組である．

(11.1)、(11.2) および (11.3) で定義される線と片の族は仮説 2 の (a) を満たす．(b) に関しては、たとえばある $k > m^1$ に対して鉛直片 $V18(k)$ を考えよう．定義 (11.2a) 使えば

$$\begin{aligned} f(V18(k)) &= \Phi[\Phi^{-1}(A1)\cap Q_k^+ \cap \mathrm{cl}(\psi(A8))] \\ &= A1 \cap \Phi[Q_k^+ \cap \mathrm{cl}(\psi(A8))] = H81(k) \end{aligned}$$

であり、$m = 1$ および $i = 8$ に対して (10.5) が出る．図 11.3 のように、$V18(k)$ の鉛直 (水平) 境界を v_1 および v_2(h_1 および h_2) で表わす．この場合、h_2 は $l^{s,2}$ になってしまうから、f はその上で定義されない．図 11.4 から簡単に判るように、f は境界 v_1, v_2 および h_1 を保存する．片の残りに関して仮説 2 の (b) を証明するのも同様にしてできる．

図 11.3

補題 11.1. $E(V)$ を Ai における水平線 (鉛直線) とし、ある $m\in\mathbf{N}$ に対して $E\subset Hi(m)(V\subset Vi(m))$ とする．このとき $f(E)\cap Hij(k)(f^{-1}(V)\cap Vij(k))$ は、$Hij(k)(Vij(k)$ が定義されるようなすべての $j\in I_i(j\in I_i')$ およびある k に対して A_j 内の水平線 (鉛直線) である．

<u>証明</u>. $\psi(E)$ は $\psi(Ai)$ 内の渦巻き曲線であって、$i = 1, 8$ なら D_+ に含まれ、$i = 4, 5$ なら D_- に含まれ、$i = 2, 3$ なら D^3 に含まれ、$i = 6, 7$ なら D^4 に含まれる．だから $\psi(E)$ は $i = 1, 8$ および $i = 4, 5$ ならそれぞれ $\sigma_{L^i}^\infty, \sigma_{M^i}^\infty$ を無限個の点で横切る．そのほかの場合、$\psi(E)$ は σ_+^s および σ_-^s を横切る．このとき $Hij(k)$ が定義されるすべての $j\in I_i$ およびすべての $k\in\mathbf{N}$ に対して $\psi(E)\cap\Phi^{-1}(Hij(k))\neq\emptyset$ である．証明は鉛直線に関しても同様である． □

仮説 1、2 および 3 をこれで証明した．そこで次の定理でまとめよう．

定理 11.1. $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ とし、Σ は $I\cup S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\cup\{\dot N, L, M, \dot n, l, m\}$ に属する要素列の組で形成される集合とする．ただし、(11.4)、(11.5) および (11.6) で与えられる遷

移行列

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 & O_6 \end{pmatrix}$$

に関して、これらはタイプ $(a), (bi), (ci), (dij), i = 1, 2, j = 1, 2$ のどれかである．

このとき $a_j > m^*(\varepsilon) = \max(m^1, m^2)$ なるすべての組 $(a', a) \in \Sigma$ に対して、それを満たす点 $p \in Aa'_0$ がある．

図 11.4

定理 11.1 で与えられる軌道の幾何学的解釈には若干のコメントが必要である．

$p \in A$ は $(a', a) \in \Sigma$ を満たす点とする．

(a', a) がタイプ (a) なら $\varphi(t, p)$ は正および負の時刻に S_0 を無限回横切る．列 a' は $\varphi(t, p)$ が S_0 を通過するたびに集合 Ai を与える．

(a', a) がタイプ (b1) であるとしよう．すると定義 (10.7a) より、ある $k < 0$ に対して

$$f^{k+1}(p) \in \overline{V}_{k+1} = Va'_{k+2}a'_{k+1}(a_{k+1}) \cap Ha'_{k+1}(\infty),$$

である．$\mathcal{A}_2$ より、a'_{k+1} は $1, 2, 3$ または 6 のはずである．このとき $Ha'_{k+1}(\infty) \subset \xi_2 \cup \xi_4$ であり、$\varphi(t, p)$ は放物的に無限遠から来る．タイプ (b2) の組 $(a', a) \in \Sigma$ の場合、ある $k < 0$ に対して $f^{k+1}(p) \in Ea'_k a'_{k+1}(a_k)$ である．このとき $\varphi(t, p)$ は $a'_k = 1$ なら L^s からの放出軌道であり、$a'_k = m$ なら M^s からの放出軌道である．同様の論拠から、(c1) の組は無限遠に放物的に逃げる軌道に対応する．(c2) の組は、$a'_h = L$ なら L^i での衝突軌道、$a'_h = M$ なら M^i での衝突軌道を与える．タイプ (d) の組は放物、放出および衝突軌道の組合せである．表 11.II は異なるタイプの組に対応する軌道のふるまいをまとめている．この表で、P は放物軌道、E と C は放出および衝突軌道を表わす.

表 11.II

A をとおる軌道を座標平面に表わすためにいくつかの事実を述べておく.

$p \in A2 \cup A3$ とし、$f(p)$ が存在するとする．p と $f(p)$ の間の $\varphi(t,p)$ の孤を $\bar{\gamma}$ で表わす．t_1, t_2 および t_3 が存在して、$\varphi(t_1,p) \in S^-, \varphi(t_2,p) \in D^3, \varphi(t_3,p) \in S^- \cup S^+$ であり、$\varphi(t,p) \in S^- \cup S^+$ なる $t \in (0,t_1) \cup (t_1,t_2) \cup (t_2,t_3)$ はない．さらに、$f(p) \in A3 \cup A4$ なら $\varphi(t_3,p) \in S^+$ であり、

表 11.III

$f(p) \in A7 \cup A8$ なら $\varphi(t_3,p) \in S^-$ である．$p \in A6 \cup A7 \subset \mathcal{U}^4$ のときも $\varphi(t_1,p) \in S^+$ であることを除いて結果は同じである.

$p \in A8$ の場合を考える．$\varphi(t,p)$ は ξ_1 の近くの S^+ に行く．$f(p) \in A2$ なら $\bar{\gamma}$ は $\theta = \pi/2$ においてのみ二体衝突をする．この二体衝突は $\bar{\gamma}$ が D_+ を通過するときに数える．$f(p) \in A1$ なら $f(p)$ の近くの S^- を一度通過するが、この通過は軌道が $A1$ を出たときに考える.

表 11.III に A を通過する軌道のふるまいをまとめておいた．t_1 欄は孤 $\bar{\gamma}$ が $S^+ \cup S^-$ を最初に横切るかどうかを示す．t_3 欄は $f(p)$ の直前に $S^+ \cup S^-$ を最後に横切るかどうかを示す．中央の欄は $\bar{\gamma}$ がオイラー平行相似図形解の近く、また I_+、I_- の近くを通過するかどうかを示す．列 a の要素 a_n は $\theta = \pi/2(S^+)$ または $\theta = -\pi/2(S^-)$ における二体衝突の数、または a'_n および a'_{n+1} に依存してオイラー平行相似図形解のまわりの公転数を表わす．これらの公転のどれも座標平面での m_3 の $x_2 = 0$ 軸のまわりの 1 振動であることを思いだそう.

次の 3 つの例を挙げよう.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & (a',a) = \;& ((\ldots 4,6;3,7,8,1,1,\ldots),\\
& & & (\ldots a_{-2},a_{-1};a_0,a_1,a_2,\ldots)),\\
&(2) \qquad & (a',a) = \;& ((l,1;2,4,\dot{N}),(a_{-2},a_{-1};a_0,\infty)),\\
&(3) \qquad & (a',a) = \;& ((m,3;4,6,7,L),(a_{-2},a_{-1};a_0,a_1,a_2)).
\end{aligned}$$

図 11.5、11.6 および 11.7 には座標平面での対応する軌道の進化が示されている．どの場合も、(a',a) は定理 11.1 の仮説を満たすとした．ただし、見やすくするために要素 a_n の小さな軌道を描いた.

ケース I、すなわち $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_1$ のときは、$A = \cup_{i \in I} Ai, I = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ととった．ここで集合 Ai は (9.1) で定義される．$I \cup S$ に関して f に伴う遷移行列は (10.2) の形で与えられ

る．ただし、

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.7}$$

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

こんどは Σ は (11.7) で与えられる遷移行列に関する列の組の集合とする．

ケース V に関する同様の調査を $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_1$ に対して行える．$a_j > m^*(\varepsilon)$ なる組 (a', a) すべてに対して、それを満たす点 $p \in Aa'_0$ を得る．

この場合、新しいタイプの遷移が現われることに注意する．たとえば、すべての $n \in \mathbf{Z}$ に対して $a'_n = 5$ なるタイプ (a) の (a', a) を考える．対応する軌道はオイラー平行相似図形解の近傍を無限回通過する．これは $\theta = \pi/2$ でのみ二体衝突する．この種のふるまいは $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ では不可能である．

図 11.5

ケース III の場合、集合 A は (9.2) で定義される 4 つの集合の和である．この場合の遷移行

列は次のとおりである.

$$
\mathcal{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \multicolumn{2}{c}{0} & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 1 & & & & & &
\end{array}\right].
$$

この場合、無限遠に逃げずに x_1 軸のまわりを多数回振動する軌道の存在は保証できない. 実際、この数が十分大きいと、軌道は逃げてしまう.

図 11.6

図 11.7

12. 対称周期軌道のいくつかの族

この節では対称周期軌道の族をいくつか分類する．これらの族はすべて二等辺問題の定理10.1で与えられる軌道の集合に含まれる．これらの軌道を得るのに、系 (1.5) が対称性 L^1 および L^2 に関して可逆であることを利用する．$L^1(L^2)$ のもとで不変な点の集合を $\mathrm{Fix}(L^1)(\mathrm{Fix}(L^2))$ で表わす．すでに知られているように ([3] 参照)、たとえば $p \in \mathrm{Fix}(L^1)$ で $\tau = \min\{t > 0 | \varphi(t,p) \in \mathrm{Fix}(L^1) \cup \mathrm{Fix}(L^2)\}$ がゼロでなければ、$\varphi(t,p)$ は対称周期軌道である．実際、$\varphi(t,p) \in \mathrm{Fix}(L^1)$ なら $\varphi(t,p)$ は L^1 に関して対称で 2τ 周期であり、$\varphi(t,p) \in \mathrm{Fix}(L^2)$ なら $\varphi(t,p)$ は L^1 および L^2 に関して対称で 4τ 周期である．

二等辺問題では $\mathrm{Fix}(L^1) = \gamma_1 \cup \gamma_+ \cup \gamma_-$ および $\mathrm{Fix}(L^2) = \gamma_2$ である．(4.1) で定義される線分 γ_+ と γ_- は運動量が局所極小であるような二体衝突の点に対応する．対称周期軌道を得るために、流れに沿って $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_+$ および γ_- を過去未来に追いかけ、得られた曲線の交点を捜す．

図 12.1

$D_+ \cup D'_+$ 内で定義される線分族 $\{x_j\}, \{x'_j\}$ および $D_- \cup D'_-$ 内で定義される線分族 $\{y_j\}, \{y'_j\}$ を考える．このとき $\{\Phi(x_j)\}, (\{\Phi(x'_j)\})$, $\{\psi^{-1}(x_j)\}, (\{\psi^{-1}(x'_j)\})$, $\{\Phi(y_j)\}, (\{\Phi(y'_j)\})$, $\{\psi^{-1}(y_j)\}$, $(\{\psi^{-1}(y'_j)\})$, はそれぞれ $l^{i,1}$ と $l^{i,2}$、$l^{s,1}$ と $l^{s,2}$、$m^{i,1}$ と $m^{i,2}$ および $m^{s,1}$ と $m^{s,2}$ の点の間の $\mathcal{M}$ 内の孤の族である．同様にして、$j \geq m^2$ のとき $\{c^1_j\}$, $\{c^2_j\}$, $\{d^1_j\}$ および $\{d^2_j\}$ は $\mathcal{M}$ 内に以下の孤族を与える．すなわち、$\{\Phi(c^1_j)\}, \{\Phi(c^2_j)\}$, $\{\Phi(d^1_j)\}, \{\Phi(d^2_j)\}$, $\{\psi^{-1}(c^1_j)\}, \{\psi^{-1}(c^2_j)\}$, $\{\psi^{-1}(d^1_j)\}$ および $\{\psi^{-1}(d^2_j)\}$ である．これらの族の要素は β_0 の 2 点に端点を持つ孤である．

命題 12.1. $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_2$ とする．十分大きな正整数 n, m の組すべてに対して、L^1 に関して対称な周期軌道があって (図 12.1 参照)、1 周期のあいだに $x_2 > 0$ で n 回の二体衝突、$x_2 < 0$ で m 回の二体衝突を行い、$x_2 = 0$ 軸を 2 回通過する．図 12.1 に表示される軌道は 1 周期のあいだに 2 度なぞられる．

証明. 交点 $\Phi(x_j) \cap \psi^{-1}(y_k), j, k \geq 0$ は n と m が偶数のとき周期軌道を与える．n と m が奇数なら、軌道は $\Phi(x'_j) \cap \psi^{-1}(y'_k), j, k > 0$ から得られる．交点 $\Phi(x_j) \cap \psi^{-1}(y'_k)$ および $\Phi(x'_k) \cap \psi^{-1}(y_j), j, k \geq 0$ からは別の軌道が得られる．

さらに $n = m$ なら軌道は L^2 に関して対称である．このとき座標平面への射影は x_1 軸に関して対称である (図 12.1c 参照). □

以下の各図では、見やすいように図 12.1 のように、n と m を小さくとって軌道を描いた．

命題 12.2. $\varepsilon_1 < \varepsilon < 55/4$ とし、n, m を十分大きな正整数とする．$n \neq m$ なら、L^1 に関して対称な周期軌道が 2 つあって、図 12.2a および 12.2b に示されるように、$\mathrm{sgn}(x_2)$ が一定の $n + m$ 回の二体衝突と x_2 の符号が反対の二体衝突を 1 回だけ行う．$n = m$ なら n 回の二体衝突のあとで 1 周期を終える (図 12.2 参照).

証明. 交点 $\Phi(x_j) \cap \psi^{-1}(x_k)$ から、n と m が偶数のとき $x_2 > 0$ で $n + m$ 回二体衝突する周期軌道が得られる．n と m が奇数なら、軌道は $\Phi(x'_j) \cap \psi^{-1}(x'_k)$ から得られ、残りの場合は $\Phi(x_j) \cap \psi^{-1}(x'_k)$ から得られる．半平面 $x_2 < 0$ で二体衝突する軌道はこれらと対称的である．
□

図 12.2

図 12.3

命題 12.3. $\varepsilon < \varepsilon_1$ または $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ とし、n, m を十分大きな正整数とする．

(i) L^1 に関して対称な周期軌道が 2 つあって、$\varepsilon < \varepsilon_1$ のときは図 12.3a に、また $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ のときは図 12.3b に示されるように、1 周期のあいだに m_3 が $x_2 = 0$ 軸を $n + m$ 回横切る．$n = m$ で $\varepsilon < \varepsilon_1$ なら、軌道は n 回 $x_2 = 0$ 軸を横切ったあとで 1 周期を終える (図 12.3c 参照).

(ii) L^1 に関して対称な周期軌道が 2 つあって、1 周期のあいだに m_3 が $x_2 = 0$ 軸を m 回横切り、$\mathrm{sgn}(x_2)$ が一定の n 回の二体衝突を行う (図 12.4 参照).

証明. (i) の軌道は $\varepsilon < \varepsilon_1$ なら $\Phi(c_j^1) \cap \psi^{-1}(c_k^1)$ および $\Phi(c_j^2) \cap \psi^{-1}(c_k^2)$ から得られ、$\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ なら $\Phi(c_j^1) \cap \psi^{-1}(c_k^2)$ および $\Phi(c_j^2) \cap \psi^{-1}(c_k^1)$ から得られる．(ii) の部分は仮説のすべての ε に対して $\Phi(x_j) \cap \psi^{-1}(c_k^2)$ および $\Phi(y_j) \cap \psi^{-1}(c_k^1)$ から得られる． $\square$

図 12.4

図 12.5

命題 12.4. $\varepsilon < \varepsilon_1$ または $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ とし、n, m を十分大きな奇正整数とする．

(i) L^2 に関して対称な周期軌道があって、1 周期のあいだに、$\varepsilon < \varepsilon_1$ のときは図 12.5a に示されるように、m_3 が $x_2 = 0$ 軸を $n+m$ 回横切り、また $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ のときは図 12.5b に示されるように、$n+m+1$ 回横切る．後者の場合、$n = m$ なら、1 周期のあいだに $n+1$ 回だけ横切る (図 12.5d 参照).

(ii) L^2 に関して対称な周期軌道があって、1 周期のあいだに m_3 が $x_2 = 0$ 軸を $2m$ 回横切り、$x_2 > 0$ の二体衝突を n 回、$x_2 < 0$ の二体衝突を n 回行う (図 12.6 参照).

証明. (i) の場合は、$\varepsilon < \varepsilon_1$ なら $\Phi(d_j^1) \cap \psi^{-1}(d_k^2)$ を使い、$\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ なら $\Phi(d_j^1) \cap \psi^{-1}(d_k^1)$ を使う．(ii) の軌道の場合は $\Phi(x_j') \cap \psi^{-1}(d_k^1)$ を考える． $\square$

図 12.6

命題 12.5. $\varepsilon < \varepsilon_1$ または $\varepsilon_2 < \varepsilon < 55/4$ とし、n, m を偶奇の異なる正整数とする．

(i) L^1 および L^2 に関して対称な周期軌道があって、1 周期のあいだに、$\varepsilon < \varepsilon_1$ のときは図

12.7a に、また残りの場合は図 12.7b に示されるように、m_3 が $x_2=0$ 軸を $2(n+m)$ 回横切る．

(ii) L^1 および L^2 に関して対称な周期軌道があって、1 周期のあいだに、m_3 が $x_2=0$ 軸を m 回横切り、$\mathrm{sgn}(x_2)$ が一定の n 回の二体衝突を行う (図 12.8 参照)．

証明. (i) の軌道は $\varepsilon<\varepsilon_1$ なら $\Phi(c_j^1)\cap\psi^{-1}(d_k^2)$ から得られ、$\varepsilon_2<\varepsilon<55/4$ なら $\Phi(d_j^1)\cap\psi^{-1}(c_k^2)$ から得られる．(ii) の軌道を得るには $\Phi(c_j^2)\cap\psi^{-1}(x_k')$ と $\Phi(c_j^1)\cap\psi^{-1}(y_k')$ を考える必要がある．
□

図 12.7

これらの周期軌道のいくつかはこの仕事以前に求められた．命題 12.3 および 12.4 の (i) の軌道の存在は [10] で証明されている．

図 12.8 and 9

最後に $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$ の場合について一言述べておく．オイラー平行相似図形解の近くを通過する軌道は無限遠に逃げる．つまり、k が十分に大きいと、たとえば $\psi^{-1}(c_k^1)$ は ξ_1 で決まる双

曲帯に含まれる (図 9.1b 参照)．k が小さいとき $\psi^{-1}(c_k^1)$ が ξ_1 を横切る可能性がある．$k=1$ のときそうであるとする．この場合、$\psi^{-1}(c_1^1)$ は族 $\{\Phi(x_j)\}$ の孤を横切る．この交点から図 12.9 の対称周期軌道の族が得られる．同様に、$\psi^{-1}(d_k^2)$ が $\{\Phi(x_j)\}$ の孤を横切れば、新しい対称周期軌道の族が得られる．Broucke([1]) はこの最後の族の軌道をいくつか二体衝突の数が少ない場合に計算した．これは、二体衝突の回数の大小にかかわらず $\psi^{-1}(c_1^1) \cap \Phi(x_j)$ に対応する族があることを意味する．

謝辞

Jaume Llibre 博士がこの論文の準備段階で最後の 3 章に関して助言を与えてくれたことに感謝する．この仕事は CAICYT 課題番号 3534/83C3(スペイン) の補助を部分的に受けた．

補遺 A．二等辺問題の不変多様体に関するいくつかの数値計算

図 A1

この論文で得た結果のいくつかは、面 $v=0$ または $y=0$(あるいは他の適当な面) と平衡点や周期点のいくつかの不変多様体との交線の相対位置に依存する．他の著者にも知られているものも含めて、解析的に証明された結果は部分的な正確のものであって、曲線のきれいな渦巻き性については何も語らない．いくつかの曲線のきれいな渦巻き性の十分な証拠を得るために、数値計算を行なった．以下では結果をまとめ、いくつかの図を例として挙げる．まず $W_{L^s}^{u,1}$ と平面 $\{y=0.5\}$ との交点を計算した．$W_{L^s}^{u,1}$ 内では運動は三体衝突多様体に沿っての運動より下り方が速い (L^s の固有値を比較せよ)．そこでまず、$W_{L^s}^{u,1}$ と三体衝突多様体 (つまり $r=0$ 上の軌道) の交点と、この軌道に伴う変分軌道で初期条件が L^s の近くの $W_{L^s}^{u,1}$(の線形近似) に含まれるものを計算した．このようにして細い片を得た．すなわち、$P \in W_{L^s}^{u,1} \cap \{r=0\}$ でかつ Q がこの点における変分解なら、線分 $\overline{PR}$ を考える．ただし $R = P + \rho_0 Q$ で ρ_0 は小さいとする．P が変わると線分は片を生成する．このとき R の点から出発して未来に向かって積分すると $W_{L^s}^{u,1}$ 全体を生成する軌道が得られる．ρ_0 を変えてチェックすれば、十分な精度で $W_{L^s}^{u,1}$ を記述できる．

こんどは $W^{u,1}_{L^s}$ をある平面 $y = y_0, y_0 > 0$ で切って得られる曲線の渦巻き性に興味がある．またこの曲線が、P^s_+ を同じ面で切って得られる曲線とどのように交わるかにも興味がある．y_1 を小さくとって y_1 から出発すれば、$y = y_1$ に制限した P^s_+ の近似が多様体の解析的expansion から得られる．このとき過去に向かっての積分から $y = y_0$ との交点が得られる．もちろん前と同様、y_1 の値をいくつかとってチェックも行なった．普通は $y_0 = 0.5$ を使った．

図 A1 には $\varepsilon = 1$ と $\varepsilon = 30$ の結果の例が示されている．今回計算を行なった $[0.1, 30]$ の範囲では、定性的ふるまいは同じである．すなわち、曲線はきれいな渦巻き性を示し、曲線は P^s_+ と一度だけ交わり、渦巻きは ε が増えるときつく巻いた．P^s_+ との交差が起こる領域は、いくつか異なる ε の値に対して、図 A2 に拡大図を示した．表 AI は $\{y = 0.5\}$ 上で P^s_+ との交点を生じる $\bar{\varphi}(\mathrm{mod}\ \pi)$ の値を示した．表 AII は $\{y = 0.5\}$ 上での $W^{u,1}_{L^s}$ と P^s_+ の横断性を測る角度 α の評価値をラジアン単位で載せた．

表 AI、AII

$W^{u,1}_{L^s}$ と P^s_+ と $\{y = 0\}$ との交点は 2 節で示したように無限渦巻きである．図 A3 には $\varepsilon = 1$ の場合にこの渦巻の一部を示した．この表示では、P.O.$_+$ は原点にある．さらに、定量的な観点からすると、2 節で主な項のみを使って予測した通り、角度 $\overline{\varphi}$ と動径 x の関係 $\overline{\varphi}x^3 =$ 一定が成り立つはずである．表 AIII には $\varepsilon = 1$ の場合に、$\overline{\varphi}$(回転数を単位として)、x (任意の単位で) および積 $\overline{\varphi}x^3$ の値をいくつか載せた．

表 AIII

このことから、$\overline{\varphi}(\mathrm{mod}\ \pi)$ を固定したとき、x の相続く値は定数 $\times n^{-1/2}, n \in N$ のようにふるまい、ゆっくりゼロに向かうようだ．

図 A2

図 A3

図 A4

図 A5

次の計算は $v=0$ 面が切る $W^{u,2}_{L^s}$ の計算である．図 A4 は $\varepsilon=0.3$ および $\varepsilon=3$ の場合の結果である．しかしこれは計算範囲 $[0.1,10]$ を通して定性的には変わらない．きれいな渦巻き性を検出するために対称的な曲線も描いておいた．期待通り、渦巻は幾何学的なふるまいをし、ε が大きくなるときつく巻く．完全を期すため、$\varepsilon=3$ の場合に $W^{u,1}_{L^s}$ およびそれと対称的な曲線と $v=0$ との交点を入れておいた．7 節で述べたように、これらの曲線は途切れており、無数の孤から成る．相続く孤は表 III に関係しているのでどんどんきつく巻いている．さらに、各孤 (曲線 $\dot{v}=0$ で終わる) のうち始点が領域 $w<0$ にあるものは有限個だけである．

表 AIV

最後の計算は、図 9.1 に示された領域の実際のふるまいに関するもので、記号力学で記述された部分である．図には 8 節で定義されたとおり、孤 $\xi_i, i=1,2,3,4$ が見える．また $l^{i,1}$ と $m^{i,1}$、$l^{i,2}$ と $m^{i,2}$、$l^{s,2}$ と $m^{s,2}$ および $l^{s,1}$ と $m^{s,1}$ の点を結ぶ孤も見える．後者の孤をそれぞれ $\Phi(C^1_1)$、$\Phi(C^2_1)$、$\Phi^{-1}(C^1_1)$ および $\Phi^{-1}(C^2_1)$ ととり、η_1,η_2,η_3 および η_4 と書く．これらの曲線はすでに連続であるから我々の目的にかなっている．ゆえに 9 節の用語を使えば $m^2=2$ である．孤 $\xi_i, i=1,2,3,4$ の端点 (extreme point) はタイプ l^{**} および m^{**} の点である．表 IV は孤となる ε に対して $l^{s,1}$ と $m^{s,2}$ の値をいくつか与えている．残りの点は対称性から得られた．

図 A6

図 A5 から A7 までは曲線 $\xi_,\eta_i, i=1,2,3,4$ とともに曲線 $r=0$ と $\dot{v}=0$ をそれぞれ $\varepsilon=0.3,1$ および 3 に対して示す．これらはすべて $v=0$ 面にある．図 A5 では ξ_i 曲線が $\dot{v}=0$ 曲線の近

くにあることがわかるが、8 節の予想どおり、これらはすでに連続である．図 A6 では曲線 ξ_1 と η_2 が 2 点で交わっているのが見える (対称なペアに関しても同様なことが成り立つ)．連続性だけを使ったのでは図 9.1 のように交わるとは言えないが、領域 A_j の定義には影響を与えない．同様に、図 A7 では曲線 ξ_1 と η_2 が 3 点で交わっている．連続性により、これらは少なくとも 1 点で交わる．しかし余分の交点の数は ε に依存し、2 つの余分の交点は ε が 3 より少し大きいと消えてしまう．

図 A7

補遺 B. 仮想的軌道 $s_j, j = 1, 2, 3, 4$

平面二等辺問題の大域的流れは、三体衝突と無限遠の境界をつけ加えた後では、図 4.1 に示されるように、3 次元閉球体から 2 つの開 3 次元球と 4 本の直線 $s_j, j = 1, 2, 3, 4$ を除いたものになる．直線 s_1 は、三体衝突に対応する 2 次元球から取り除かれた点のひとつ、無限に近い近接連星に関係する点から、無限遠にある 2 次元球から取り除かれた点のひとつ、第三体から無限大の速度で逃げる連星の双曲運動に関係する点を結ぶ．直線 $s_j, j = 2, 3, 4$ は対称性から得られる．

この補遺の目的はこれらの直線の近くの流れのふるまいを説明し、3 次元閉球体から 2 次元開球を除いた完全にコンパクト化された相空間として大域的な流れを得るのに、これらがつけ加えるべき自然な境界であることを見ることである．物理的には、これらの直線は無限遠と三体衝突の間を無限の速度で動く軌道として考えられる．質量の等しい 2 体の距離はゼロである．ゆえにこの連星のエネルギーは $-\infty$ であり、したがって連星と第三体から成る系のエネルギーは $+\infty$ である．

詳細を述べるまえに、極限的な場合について注意しておこう．$-h, h > 0$ を連星 $-h = \dot{x}_1^2/4 - 1/x_1$ のエネルギーとする．このとき連星の周期は $(\pi/2)h^{-3/2}$ である．残りのエネルギーから $(\varepsilon/(2+\varepsilon))\dot{x}_2^2 - 4\varepsilon(x_1^2 + 4x_2^2)^{-1/2} = h - 1$ が得られ、ゆえに x_2 が無限大に向かえば $\dot{x}_{2,\infty}((2+\varepsilon)(h-1)/\varepsilon)^{1/2}$ である．

連星の 1 周期の間に、すなわち相続く二体衝突の間に、連星と第三体の間の距離は、x_2 が大きければ、$O(h^{-1})$ だけ増加する．連星の振動を検出するために運動を遅くすれば、たとえば有限の極限的周期になるように時間の尺度を変えれば、第三体からの連星の脱出は h が無限大に向かうとき止まってしまう．

むしろ近接連星の近くの運動に興味を持っているから、無限遠の近くと三体衝突の近くの領域に同時に使える衝突近傍の適当な変数を導入する．

x, y, ξ, η を無限遠の近くの運動を記述するために (2.1) で導入された変数とし、κ をそこで用いた独立変数とする．また r は (1.4) で定義したものとし、$d = \varepsilon(4(2+\varepsilon)^{1/3})^{-1}$ とする．

$X, Y \hat{\xi}$ を次式で定義する．

$$
\begin{aligned}
X &= x\sqrt{\frac{4dr}{1 + r + 4drx^2}}, \\
Y &= y\sqrt{\frac{4dr}{1 + r + 4dry^2}}, \\
\hat{\xi} &= \xi\sqrt{\frac{1+r}{r(1-Y^2)}}.
\end{aligned}
\qquad (B.1)
$$

また独立変数 $\hat{\kappa}$ を $d\hat{\kappa} = (r(1-Y^2)/(1+r))^{1/2} d\kappa$ で定義する．こんども $'$ は $\hat{\kappa}$ に関する微分とする．このとき次の運動方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
X' = \; & -\frac{(2+\varepsilon)^{1/2}}{4\varepsilon^{3/2}} X^3 Y (1-Y^2)\hat{\xi}^2 + \frac{1}{2\rho^3} X^7 (1-X^2)(1-Y^2)\xi^3\eta + \\
& -\frac{2\varepsilon^{3/2}}{(2+\varepsilon)^{1/2}\rho^3} X^5 (1-X^2)^2 Y (1-Y^2)\hat{\xi}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& X^5(1-X^2)^2Y(1-Y^2)\hat{\xi}^2, \\
Y' = \quad & -\frac{(2+\varepsilon)^{1/2}}{4\varepsilon^{3/2}}X^4(1-X^2)^{-2}(1-Y^2)^3\hat{\xi}^2(1+u^2)^{-3/2}+ \\
& \tfrac{1}{2\rho^3}X^6Y(1-Y^2)^3\hat{\xi}^3\eta+\tfrac{2\varepsilon^{3/2}}{(2+\varepsilon)^{1/2}\rho^3}X^4(1-X^2)Y^2(1-Y^2)\hat{\xi}^2, \\
\hat{\xi}' = \quad & \eta-\frac{(2+\varepsilon)^{1/2}}{4\varepsilon^{3/2}}X^4(1-X^2)^{-2}Y(1-Y^2)^2\hat{\xi}^3(1+u^2)^{-3/2}- \\
& \tfrac{1}{2\rho^3}X^6(1-Y^2)^3\hat{\xi}^4\eta-\tfrac{2\varepsilon^{3/2}}{(2+\varepsilon)^{1/2}\rho^3}X^4(1-X^2)Y(1-Y^2)^2\hat{\xi}^3, \\
\eta' = \quad & -\hat{\xi}[Y^2+(1-X^2/\rho)(1-Y^2)]+X^2(1-X^2)^{-1}(1-Y^2)\hat{\xi}(1+u^2)^{-3/2}.
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

ここで

$$\rho^2=\frac{1}{2}X^4(1-Y^2)^2\hat{\xi}^4+(8\varepsilon^3/(2+\varepsilon))(1-X^2)^2,$$

および

$$u=\frac{1}{4\varepsilon}X^2(1-X^2)^{-1}(1-Y^2)\hat{\xi}^2,$$

である．

変数 r は次式から得られる．

$$(1+r)^2=\frac{1}{2}\hat{\xi}^4(1-Y^2)^2+(8\varepsilon^3/(2+\varepsilon))X^{-4}(1-X^2)^2. \tag{B.3}$$

またエネルギー関係は次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
& \eta^2+\hat{\xi}^2\left[Y^2+(1-X^2/\rho)(1-Y^2)\right]= \\
& 1+X^2(1-X^2)^{-1}(1-Y^2)\hat{\xi}^2\left[1+\frac{1}{16}X^4(1-X^2)^{-2}(1-Y^2)^2\hat{\xi}^4\right]^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

$X<X_1<1$ なら、方程式 (B2) は正則である．条件 $X<X_1$ は、(1.4) で定義される θ がある定数により下から抑えられているという条件と同値である．これ以後 $X<X_1<1$ と仮定する．後で、この条件がわれわれの考えている領域では成り立つことを見る．我々に興味があるのは高速脱出運動、つまり y の大きな値、したがって (B.1) によれば Y が 1 に近い場合である．(B.4) より、$|\eta|,|\hat{\xi}|$ は $1+O(\overline{Y})$ の形の表現によって抑えられることがわかる．簡単に判るように、運動方程式は次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
& X'=\frac{(2+\varepsilon)^{1/2}}{2\varepsilon^{3/2}}X^3\overline{Y}\hat{\xi}^2\left[-1+\left(\frac{2+\varepsilon}{8\varepsilon^3}\right)^{1/2}X^2(1-X^2)^{-1}+O(\overline{Y})\right], \\
& \overline{Y}'=-\frac{2+\varepsilon}{2\sqrt{2}\varepsilon^3}X^4(1-X^2)^{-2}\overline{Y}^2\hat{\xi}^2(1+O(\overline{Y})), \\
& \hat{\xi}'=\eta+O(\overline{Y}^2), \\
& \eta'=-\hat{\xi}+O(\overline{Y}).
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

三体衝突多様体は $(B.3)$ で $r=0$ と置いて得られる．さらに $Y=1$ とすれば、$X=X_0$ の値が得られ、この値に対して $((2+\varepsilon)/(8\varepsilon^3))^{1/2}X^2(1-X^2)^{-1}=1$ を得る．興味ある領域は X_0(三

体衝突多様体) の近くの X から $X = 0$(無限遠) の間に含まれる．ゆえに前に述べたとおり、$X < X_1$ なる $X_1 < 1$ がある．ψ を $\hat{\xi} + \sqrt{-1}\eta$ の偏角とし半径 R を Y^{-1} で定義する．図 B.1 は Y が 1 に近い相空間を示す．ここで R と ψ は極座標として使われ、X は鉛直座標である．

図 B1

$\overline{Y} = 0$ のとき $X' = \overline{Y}' = 0, \hat{\xi}' = \eta, \eta' = -\hat{\xi}$ を得、X の異なる値に対して各 1 つの周期軌道で葉層された円筒を得る．$X = 0$ ならやはり $X' = \overline{Y}' = 0, \hat{\xi}' = \eta, \eta' = -\hat{\xi}$ を得るが、こんどはすべての軌道に対して $X = 0$ であり、Y は 1 の近くの任意の値を取る．こんどは周期軌道で葉層された円環を得る．

$\overline{Y}'$ が X_0 に近い X に対して正でないこと、実のところ $\hat{\xi} = 0$ のとき以外は負であることから (連星を正則化するために避けられない時間尺度の変換によって $\hat{\xi} = 0$ のときはゼロである)、三体衝突多様体上で $X = X_0, Y = 1$ に向かって渦巻性を示す．これは図 1.3 の角 (つの) に沿っての渦巻を言い換えたものである．

三体衝突多様体および鉛直壁 $\overline{Y} = 0$ と十分小さな $\overline{Y}_0$ に対して $\overline{Y} = \overline{Y}_0$ を持つ無限遠 (?) に限られた円筒状円環は方程式 (B.5) によれば正に不変である．$X < X_0 - O(\overline{Y})$ なら $X' < 0$ となり、流れは下向きで円筒 $Y = 1$ に近づく．三体衝突多様体のほんの薄い近傍で変数 X は、これらの変数による三体衝突多様体の形に沿って上や下に流れる．円筒状円環に入り込む任意の軌道は下向きに無限遠まで行って底の円環の周期軌道のどれかで終わることを主張する．この主張を証明するには、この軌道が円筒 $Y = 1$ を葉層する周期軌道のどれにも行かないこ

とを注意すれば十分である．もし行くとすると物理軌道 (すなわち $x_1, x_1, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ の有限の値から来る) が $\dot{x}_2$ の無限の値に対して $x_2 \neq 0$ の有限の値に達してしまう．これはばかげている．

これ以上の情報は $\psi = \pi/2$ を通るポアンカレ写像で与えられる (正則化しているから、相続く衝突の後の $X, \overline{Y}$ の値を考えることに相当する)．$X, \overline{Y}$ を初期値とし、$X_n, \overline{Y}_n$ をポアンカレ写像のもとでの像とする．(B.5) から簡単に次の表式が得られる．

$$\begin{aligned} X_n &= X - \pi \frac{(2+\varepsilon)^{1/2}}{2\varepsilon^{3/2}} X^3 \overline{Y} \left[1 - \left(\frac{2+\varepsilon}{8\varepsilon^3} \right)^{1/2} X^2 (1-X^2)^{-1} + O(\overline{Y}) \right], \\ \overline{Y}_n &= \overline{Y} - \pi \frac{2+\varepsilon}{2\sqrt{2}\varepsilon^3} X^4 (1-X^2)^{-2} \overline{Y}^2 (1 + O(\overline{Y})). \end{aligned} \qquad (B.6)$$

写像 (B.6) は $X, \overline{Y}$ 変数のベクトル場の時間 1 流れと考えられる．図 B.2 はベクトル場の軌道を示す．

最後に円筒 $Y = 1$ を直線に縮めることができる．事実、変数 ξ または x_1 に戻ると、$Y = 1$ だから $\xi = x_1 = 0$ である．これはまさしく直線 s_1 である．ふたたび物理時間 t を独立変数として使えば明らかなように、この直線を動く速度は無限大である．これは次式による．

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = \; & \frac{(2+\varepsilon)^{1/2}}{4\varepsilon^{3/2}} \rho^3 (\rho^2 - X^2)^{-3/2} X^3 (1-Y^2)^{-1/2} \\ & \left[-1 + \left(\tfrac{2+\varepsilon}{8\varepsilon^3} \right)^{1/2} X^2 (1-X^2)^{-1} + O(\overline{Y}) \right]. \end{aligned}$$

図 B1

参考文献

1. Broucke, R.: Onthe isosceles triangle configurations in theplanar general three-body problem, *Astron. Astrophys.* **73** (1979), 303-313.

2. Devaney, R.: Triple collision in the planar isosceles three-body problem, *Inventiones Math.* **60** (1980), 249-267.

3. Devaney, R.: Reversible diffeomorphisms and flows, *Trans. Amer. Math. Soc.* **218** (1976), 89-113.

4. Lacomba, E., Simó, C.: Boundary manifolds for energy surfaces in celestial mechanics, *Cel. Mech.* **28** (1982), 37-48.

5. Moser, J.: *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton (1973).

6. McGehee, R.: Triple collision in the collinear three-body problem, *Inventiones Math.* **27** (1974), 191-227.

7. McGehee, R.: A stable manifold for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics, *J. Diff. Equations* **14** (1973), 70-88.

8. Moeckel, R.: Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple collision, *Amer. J. math.* **103** (1981), 1323-1341.

9. Moeckel, R.: Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, preprint.

10. Simó, C.: Analysis of triple collision in the isoscels problem, in *Classical Mechanics and Dynamical Systems*, 203-224, Marcel Dekker, 1981.

11. Simó, C.: Characterization of Transversal homothetic solutions in the n-body problem, *Archive for Rational Mechanics and Anal.* **77** (1981), 189-198.

12. Devaney, R.: Singularities in classical mechanical systems, in *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Proceedings of the Maryland Special Year, A. Katok (ed.), 211-333, Birkhäuser, 1981.

13. Moeckel, R.: Chaotic dynamics near triple collision, to appear in *Ergodic Theory and Dynamical Systems.*