谷川清隆 訳

*Dokl. Akad. Nayk USSR* **133** (1960), 303-306

# 三体問題における振動運動の存在

# The existence of oscillatory motions in the three-body problem

K. Sitnikov

この論文ではニュートン重力相互作用のもとで運動する三体系を考え、振動現象を起こす三体系を構築する．振動運動とは $t \to \infty$ のとき物体 (1) と (2) の距離が有界で、これらと物体 (3) の距離が非有界でしかも無限にはならない運動である．この問題は、各種の近似において長軸の不変性に関するラグランジュおよびポアッソンの定理から提起された [1,2]．はじめに物体 (3) が無限小の質量を持つときの制限三体問題でこのような系を構成し、次に物体 (3) が有限だが任意に小さい質量を持つ場合を考える．

空間に慣性直交座標系 OXYZ を考える．任意の同一質量 $M$ を持つ 2 体 (1) と (2) を取り、重心をつねに座標原点 O に取る．2 体は重力相互作用のもとで OXY 平面を楕円に沿って運動し、長軸と離心率は $R$ と $e \neq 0$ であるとする．系の状態は物体 (1) の動径ベクトル $\mathbf{r}$ と $X$ 軸との角度 $\varphi$ によって決まる．次に 2 つのパラメータ $\varphi(0)$ と $v(0)$ に依存する三体系 (1)、(2)、(3) を次のように定義しよう．$t = 0$ に角度 $\varphi(0)$ を選び、無限小質量の物体 (3) の座標を $(0, 0, 0)$ と取り、速度を $(0, 0, v(0))$ と取る[1]．$\varphi(0)$ の各値および任意の数列 $\{S_k\}$(とくに無限大に向かう任意の列) に対して、$v(0)$ の値が存在して、$t > 0$ に対する系 $v(0), \varphi(0)$ において物体 (3) が点 O を無限回通過し、$k$ 回目の通過の後 O からの距離が $S_k$ より大きくなることを示そう．

簡単に判るように、すべての時間にわたって物体 (3) は Z 軸上にとどまる．その上、任意の $\varphi(0)$ に対して極小の $v_\varphi(0)$ があって、$v(0)$ が $v_\varphi(0)$ 以上なら物体 (3) の座標 $z(t)$ は $t > 0$ のとき単調に正の無限大に向かう．

**補題 1**. 任意に $\varphi(0)$ および $t > 0$ を与えたとき、正の $v(0) < v_\varphi(0)$ があって、物体 (3) は点 O に初めて時刻 $t$ に戻ってくる．

はじめに、$v(0) < v_\varphi(0)$ が十分 $v_\varphi(0)$ に近ければ、最初の回帰の時刻は任意に大きいことを示そう．実際、$v(0) < v_\varphi(0)$ が十分 $v_\varphi(0)$ に近ければ、物体 (3) の運動方程式の解の初期値に関する連続性より、物体 (3) と点 O の極大距離 $\sigma$ は任意に大きい．線分 $(0, \sigma]$ のすべての点において、「上向き」の運動の間の物体 (3) の速度の大きさは $v(0)$ より小さく、したがって最初の回帰時刻は $\sigma$ とともに無限大に向かう．

そこで $v_1(0)$ として最初の回帰時刻 $t' > t$ なるものを取ろう．物体 (3) の初期速度を 0 から $v_1(0)$ まで変えると、点 O への最初の回帰時間は連続的に 0 から $t'$ まで連続的に変化する．そして連続関数がその中間の値をすべて取ることから補題が出る．

[1] $z$ 軸に関して対称なこの種の系は A.N. Kolmogorov が考察した.

**補題 2**．次の条件を満たす数 $S$($R$ と $e \neq 0$ に依存する) がある．系 $\varphi(0), v(0)$ において時刻 $t_1 < 0$ に物体 (1) と (2) が極小の距離にあり、時刻 $t_2 > 0$ に物体 (1) と (2) が極大の距離にある．また、この性質を持つ時刻のうち、$t_1$ にもっとも近いものを $t_2$ とし、線分 $[z(t_1), z(t_2)]$ が $O$ によって 2 等分され、時間が 0 から減少するときに座標 $z(t)$ が $S$ を越えて増大するなら、時間が 0 から増大するときに座標 $z(t)$ は単調に負の無限大まで減少する．

はじめに、補題の条件が十分大きな $S$ に対して満たされれば $z(t_1) = |z(t_2)| > R\sqrt{3/2}$ であることを示そう．実際、物体 (3) が点 $z$ において時刻 $t$ に経験する加速度は $\dfrac{2Mz}{[z^2+r^2(t)]^{3/2}}$ であり、これは $z > R\sqrt{3/2} > r(t)\sqrt{3/2}$ なら絶対値で $\dfrac{2M}{z^2\sqrt{6}}$ より大きい．したがって $S$ が十分大きいとき、物体 (3) の点 $z = R\sqrt{3/2}$ における速度の値は $\sqrt{4M/3R}$ より大きい．線分 $(-R\sqrt{3/2}, R\sqrt{3/2})$ 上のすべての点において物体 (3) の速度は端点 $R\sqrt{3/2}$ におけるより大きいから、線分を横切る時間は $R\sqrt{\dfrac{R}{M}}\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ より少ない．この時間は物体 (1) と (2) の楕円上の公転周期の半分 $T/2 = t_2 - t_1$、すなわち $\dfrac{\pi R}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{R}{M}}$ より小さく、したがって $z(t_1) = |z(t_2)| > R\sqrt{3/2}$ である．

線分 $(0, z(t_1)]$ の各点 $z$ において、物体 (3) の加速度は点 $-z$ における加速度より絶対値で大きい．なぜなら、前者の場合物体 (1) と (2) の距離は近いからである．だから $|v(t_2)| - |v(t_1)| > \alpha$ である．各 $t_1 - t,\ t > 0$ に対して点 $z(t_1 - t)$ における物体 (3) の加速度 $a(t)$ を、時刻 $t_2 + t$ に平面 OXY に関して対称な点 $-z(t_1 - t)$ において物体 (1) と (2) によって作られる加速度 $a^*(t)$ と比較しよう．表式

$$W(t) = \int_0^t |a(t')|dt' > \int_0^t a^*(t')dt' = W^*(t), \quad \int_0^t |W(t')|dt' > \int_0^t W^*(t')dt' \tag{1}$$

が、$z(t_1 - t)$ が単調に増大する限り $t$ において成立ち、また最初の不等式の場合は $n$ を整数として $t = nT$ においても成立することを示そう．

差 $\varphi(t) = |a(t)| - a^*(t)$ は

$$\frac{2Mz(t_1-t)}{[z^2(t_1-t)+r^2(t_1-t)]^{3/2}} - \frac{2Mz(t_1-t)}{[z^2(t_1-t)+r^2(t_2+t)]^{3/2}},$$

等しいが、これは $0 < t < T/4$ において正である．なぜならこの $t$ に対して $r(t_1-t) < r(t_2+t)$ だからである．同様にこの差は $T/4 < t < T/2$ において負であり、$T/2 < t < 3T/4$ において負であり、$3T/4 < t < T$ において正である．各 $\tau_1,\ 0 < \tau_1 < T/4$ において、対応する動径ベクトルの組 $r_1(t_1 - \tau_1)$ と $r_2(t_2 + \tau_1)$ は残りの 3 つの区間内の組と一度だけ時刻 $\tau_2 = T/2 - \tau_1, \tau_3 = T/2 + \tau_1, \tau_4 = T - \tau_1$ に出会う．ここで $\tau_2 - \tau_1 = \tau_4 - \tau_3$ である．これらの時刻の物体 (3) の座標は $z_1, z_2, z_3, z_4$ である．

値 $|\varphi(\tau_k)| = f(z_k), k = 1,2,3,4$ を考えよう．ただし $f(z) = \dfrac{2Mz}{[z^2+r_1^2]^{3/2}} - \dfrac{2Mz}{[z^2+r_2^2]^{3/2}}$ である．$R\sqrt{3/2} < z_1 < z_2 < z_3 < z_4,\ z_2 - z_1 > z_4 - z_3$ であり、$z > R\sqrt{3/2}$ のとき $f'(z) < 0, f''(z) > 0$ であるから、$\varphi(\tau_1) > |\varphi(\tau_2)| > |\varphi(\tau_3)| > \varphi(\tau_4)$ および $\varphi(\tau_1) - |\varphi(\tau_2)| > |\varphi(\tau_3)| - \varphi(\tau_4)$ である．

後の時刻にも成り立つ $\varphi(t)$ に関するこれらの性質から不等式 (1) が出る．これらの不等式から、$z(t_1-t)$ が単調に増大する限り $t$ において $z(t_1-t)<|z(t_2+t)|$ が言える．逆が正しいとして $\tau$ を $z(t_1-\tau)=|z(t_2+\tau)|$ なる最初の時刻 $t>0$ とする．各 $t<\tau$ に対して $t_2+t$ における物体 (3) の加速度は $a^*(t)$ より小さい．なぜなら、$z(t_2+t)<-z(t_1-t)$ であり、関数 $\dfrac{2Mz}{[z^2+r^2(t_2+t)]^{3/2}}$ は $z>R\sqrt{3/2}>r(t)\sqrt{3/2}$ において減少するからである．ところが物体 (3) が $a^*(t)$ に等しい加速度をもっていたとしても不等式 (1) および $|v(t_2)|-|v(t_1)|>\alpha$ より、等式 $z(t_1-\tau)=|z(t_2+\tau)|$ は成り立たない．

不等式 (1) より、時間の増大とともに、十分遠くにある物体 (3) は $-\alpha$ より小さな速度を持ち、したがって $S$ も $4/\alpha^2$ より大きければ、$z(t)$ は単調に負の無限大まで減少する．これで補題 2 は証明された．

<u>振動の存在</u>．こうして、$\varphi(0)$ および $\{S_k\}$ が与えられたとき $v(0)$ を見つける必要がある．$v_\varphi(0)>0$ および区間 $O_1$ を取る．この区間の右側の端点は $v_\varphi$ にあって長さは十分小さく、そのため $O_1$ に属する各 $v(0)$ に対して物体 (3) は点 $O$ から単調に遠ざかって $S$ より大きな距離にいたるとする (補題 2 参照)．

時刻 $t_n$ および $t_n+\frac{1}{2}T$ を取る．この時刻において物体 (1) と (2) は極小と極大の距離にあり、時刻が十分大きいので補題 1 から得られる $v_n(0)$ と $v_n'(0)$ の値は $O_1$ に属する．系 $\varphi(0), v_n(0)$ において、物体 (3) が時刻 $t_n$ から $t_n+\frac{1}{2}T$ の間に運動する線分は点 $O$ の下にあり、系 $\varphi(0), v_n'(0)$ の場合は上にある．位置と長さは $v(0)$ の変化とともに連続に変化するから、$v''(0)$ があって $v_n(0)$ と $v_n'(0)$ の間にあり、系 $\varphi(0), v''(0)$ の場合にはこの線分は点 $O$ によって二等分される．したがって補題 2 により、系 $\varphi(0), v''(0)$ において物体 (3) は点 $O$ への最初の回帰の後で単調に負の無限大に去る．系 $\varphi(0), v_n(0)$ においては時刻 $t_n+t$ および $t_n-t$ での物体 (3) の位置は平面 $OXY$ に関して対称であり、したがって点 $O$ への最初の回帰の後で、物体 (3) は最初の「上昇」と同じ高さまで下に「落ちる」だけである．

$v(0)$ を $v_n(0)$ から $v''(0)$ まで変化させ、物体 (3) が点 $O$ への最初の回帰の後に単調に負の無限大まで去るようなはじめて $v_2(0)$ の値をとり、また端点を $v_2(0)$ とする小さな区間 $O_2$ として、$O_2$ に属する各 $v(0)$ に対して物体 (3) が点 $O$ への最初の回帰の後でそこから有限の距離ではあるが $S$ や $\{S_k\}$ に属する $S_1$ よりも大きく遠ざかるものを取る．

同様に、$O_2$ 内に、$v_3(0)$ があって、$v(0)$ が $v_3(0)$ に等しいと、物体 (3) は点 $O$ への 2 回目の回帰の後で単調に正の無限遠に去り、また $v_3(0)$ を端点とする区間 $O_3$ があって、$O_3$ に属する $v(0)$ の値に対しては、物体 (3) は点 $O$ への 2 回目の回帰の後でそこから $S_2$ および $S$ よりも大きな有限の距離まで放出される．この際、$\overline{O}_3\subset O_2$ である。すなわち $O_3$ は端点も含めて $O_2$ に含まれる．

この過程をさらに続けて、減少区間列 $O_k$, $\overline{O}_{k+1}\subset O_k$ を得る．ここで $O_{k+1}$ は次の性質を持つ．$O_{k+1}$ に属する $v(0)$ の値に対して、物体 (3) は点 $O$ へ $k$ 回だけ回帰し、その後 $S_k$ より大きな有限距離だけ放り出されるが、$O_k$ の端点のひとつに等しい $v(0)$ の値に対しては物体 (3) は $k$ 回目の回帰の後で無限遠に去る．この事実から、すべての $O_k$ に属する $v(0)$ が存在して、これが求める初期値である．すなわち、$S_k\to\infty$ なら系 $v(0), \varphi(0)$ において物体 (3) は振動運動を行う．

<u>物体 (3) が有限質量の場合</u>. $t=0$ に物体 (1)、(2)、(3) の位置と速度が慣性座標系 $OXYZ$ で

系 $\varphi(0), v(0)$ と同様与えられたとする．物体 (1) と (2) の質量は前と同様 $M$ に等しいとし、物体 (3) の質量は $m$ であるとする．3 つのパラメータ $\varphi(0), v(0), m$ に依存する系が得られる．$\alpha$ が存在して、任意の $\varphi(0), m < \alpha$ および $\{S_k\}$ に対して $v(0)$ があって、$t > 0$ のとき系 $\varphi(0), v(0), m$ において物体 (3) は物体 (1) と (2) の重心 $O'$ を無限回通過し、$k$ 回目の通過後は距離 $S_k$ より大きく遠ざかり、物体 (1) と (2) の距離はつねに $2R$ より小さいままである．

**補題 3**. 任意の $\delta > 0$ および $T' > 0$ に対して $\alpha' > 0$ があって、$m < \alpha'$ なる任意の系 $\varphi(0), v(0), m$ において、任意の時刻 $\tau_0$ に対して物体 (1) と (2) の $\tau_0 < t < \tau_0 + T'$ の間の運動は、物体 (3) の影響を無視して互いの相互作用のみで動いているとしたときの物体 (1) と (2) の $R, e$(基本となる楕円のパラメータ) なる楕円運動から $\delta$ 未満しか違わない．

すべての時間 $t > 0$ を任意の長さ $T^*$ の区間に分割し、その各区間上で系 $\varphi(0), v(0), m$ の物体 (1) と (2) の運動を楕円運動で近似する．この近似内で、物体 (1) と (2) の極小および極大距離の時刻を $t_n$ とする．その際、$m$ が十分小さければ、任意の $\varphi(0)$ および $v(0)$ に対して補題 3 より $t_n = t_0 + \frac{1}{2}nT + \theta\varepsilon$ を得る．ただし $n$ は整数全体を動き、$|\theta| < 1$ および $\varepsilon$ はいくらでも小さくとれる．

振動運動の例を構成するスキームは制限問題と同じである．系 $\varphi(0), 0, m$ において $t_n$ と $t'_n = t_n + \frac{1}{2}T + \varepsilon$ を十分大きく取る．$v(0)$ が 0 から増大すると、物体 (3) が点 $O'$ に回帰する時刻は無限大に増大する．また極小および極大の時刻 $t_n$ と $t'_n$ は有界な範囲で不連続に変化する．しかしこの跳びは $m$ が十分小さければいくらでも小さくできる．だから $v_n(0)$ および $v'_n(0)$ があって、回帰時刻は対応する $t_n$ および $t'_n$ と任意に小さな値しか違わない．構成法はさらに続けることができて、系 $\varphi(0), v(0), m$ に対して、$m$ が十分小さいという仮定の下で、補題 2 がやはり成り立つようにできる．

参考文献

J. Chazy, *J. Math. pure et appl.* **8** (1929), 354.

H. Poincaré, *Methodes nouvelles de la méchanique celeste* 3 (Paris, 1899), p.141.