谷川清隆 訳

Journal of Differential Equations **82** (1989), 342-355

ニュートン系における振動運動および超双曲運動の存在

The existence of oscillatory and superhyperbolic motions in newtonian systems

Donald G. Saari and Zhihong Xia

Department of Mathematics, Northwestern University, Evanston, Illinois

要約

直線ニュートン四体問題で $t \to \infty$ のとき粒子間の最大距離が任意に与えられた時間の関数より大きい解の存在を確立する．例として、最大距離が時間の任意の定数倍より速く増大する解が存在する．また、三体問題と四体問題が振動解を許すことも示す．

1. 序

ニュートン n 体問題は $t \to \infty$ のとき、粒子間の距離が時間の任意乗数倍より速く成長する解を許すか? これは $n \leq 3$ のときは不可能であるが、ここで証明するように、四体問題では相対論の性質に反する解がある．もっと一般に、ニュートン系が任意の大きさの速度を許すという事実を使って、うまい記号力学あるいは「カオス」力学を構築して、ニュートン n 体問題に関し長年懸案であった 3 つの問題に答える．最初の問題は上に挙げたものである．すなわち、$r_{jk}(t)$ を粒子 j と k の距離とし、$R(t) = \max\{r_{jk}(t)\}$ として、$t \to \infty$ のとき $R(t)/t \to \infty$ なる解があることを示す．t のスカラー倍が $R(t)$ を抑えなければ、一体なにが抑えるのか? だから当然ながら次の質問は、おそらく Harry Pollard[8] が最初に提出した質問で、$R(t)$ はなんらかの関数的上限を許すかどうかである．たとえば、$\exp(\exp(\exp(t)))$ あるいは $2^{\exp(\exp(\exp(t)))}$ のスカラー倍は $t \to \infty$ のときの $R(t)$ をいずれは上から抑えるだろうか? 答えは否である．四体問題では $R(t)$ はどんな普遍的関数上限も持たない．また特別な運動、振動解、が三体問題と四体問題に存在することを証明する．さらに、われわれの結論はすべて記号力学の議論に基づいているので、その他のいくつかの運動の存在もわれわれの証明から得られる．最後に、われわれの構成法を $n \geq 4$ のすべての値に拡張するにはほんの少しの修正でよいので、われわれの基本的な結論はすべての $n \geq 4$ でも成り立つ．

記法は標準的である．$m_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ をそれぞれ i 番目の粒子の質量、位置ベクトル、速度ベクトルとする．ただし重心は原点に固定してあるものとする．運動方程式は

$$m_i \mathbf{r}_i'' = \nabla_i U, \tag{1.1}$$

である．ここで $U=\sum_{j<k} m_j m_k/r_{jk}$ であり、∇_i は $\mathbf{r}_i$ に関する勾配である．エネルギー積分は

$$T=\frac{1}{2}\sum m_j \mathbf{v}_j^2 = U+h, \tag{1.2}$$

である．ここで h は積分定数である．

今回の結果を求めようとしたもともとの動機は、この結果が $t\to\infty$ のときの n 体系の進化についての残されたいくつかの疑問を解くことにある．それが何であるかを見るために、Saari[10] および Marshal and Saari[3] による n 体系の漸近分類から 2 つの一般的設定のあることを思いだそう．一番目は <u>超双曲運動</u> である．これは $t\to\infty$ のとき $R(t)/t\to\infty$ かつ $r(t)=\min_{j\neq k} r_{jk}(t)\to 0$ なる運動である．($r(t)$ は任意に小さくなるから、このような運動は <u>質点</u> を要請する.) 超双曲運動は $n\geq 4$ の場合に論理的可能性から生じる．しかし上に挙げた論文ではその存在は確立されなかった．(実のところ、$\limsup R(t)/t=\infty$ なる運動の可能性は少なくとも 1890 年代のパンルベの講義 [7] 以来指摘されてきた.) 我々の最初の主張では超双曲運動の存在を証明する．事実、我々の第二の主張は超双曲運動が関数的な上限を持たないことを証明する．このことと Pollard[8] の得た不等式を使えば、$t\to\infty$ のとき r のゼロへの近づき方に何の制限もないことが判る．

ニュートン軌道の漸近的分類に戻れば、解が超双曲的でない限り各粒子は $\mathbf{r}_i(t)=\mathbf{A}_i t+O(t^{2/3})$ と表わせる．ただし $\mathbf{A}_i,\ i=1,\ldots,n$ は定数ベクトルである．このため粒子が値 $\mathbf{A}_i$ に応じて群れることになる．$\mathbf{A}_i\neq\mathbf{A}_j$ なら、2 つの粒子 m_i と m_j は <u>双曲的に</u> 離れていく．運動が完全には双曲的でないとき (すなわち、ある添え字に関して $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_j$ のとき)、運動はさらに <u>放物運動</u> と <u>振動運動</u> に分けられる．放物運動とは粒子が互いに $t^{2/3}$ で離れていく場合である．(詳しくは Saari[11] 参照.) 振動運動とは、ある添え字に対して、$\limsup r_{ij}(t)=\infty$ かつ $\liminf r_{ij}<\infty$ なる運動である．どちらの場合も粒子の距離は $t^{2/3}$ のスカラー倍で上から抑えられる．両方とも三体問題で生じる．実際、振動解は最初は、Chazy[1] が三体問題の漸近的ふるまいを展開する中で論理的可能性として現われた．

いろいろな問題設定で双曲運動と放物運動の存在は容易に証明できるが、振動運動の存在は三次元三体問題において確立されたのみである (Sitnikov[12])．Sitnikov のモデルは強く対称的であって、粒子のひとつは z 軸に制限され、残りの 2 粒子は、三体がつねに二等辺三角形を為すように運動する．また二等辺三体問題の対称性を使って R.Moeckel[6] は別の問題設定で、この運動の存在を確立した．これ以外の問題設定では振動運動が存在することは確立されていない．しかし、Easton[2] と Robinson[9] は平面問題においてこの問題の理解に貢献した．我々は、ここで直線三体および四体問題で振動解の存在を示し、それを拡張して $n\geq 3$ なるすべての n 体問題にも存在することを示す．

我々の結果はすべて直線問題に関してであるから、$\mathbf{r}_i=(x_i,0,0)$ および $\mathbf{v}_i=(v_i,0,0)$ とする．しかも $x_1\leq x_2\leq x_3\ldots$ とする．簡単に判るように、粒子は過去または未来に必ず衝突する．実際、我々の証明は衝突および近接衝突の力学的ふるまいに依存する．よく知られているとおり、二体衝突は弾性衝突のように振舞い、粒子は本質的には互いに反跳し合う．適当な座標変換により、この特異性はつねに運動方程式から取り除くことができるので、二体衝突は正則点として取り扱える．この変数変換は「正則化」と呼ばれる．この論文では <u>二体衝突は正則化されているものとする</u>．三体衝突の近くのふるまいはもっと複雑である．McGehee[5] は直線三体問題の場合に、三体近接衝突の後で 2 つの粒子が連星を形成し、第三体が任意の高速度で放出されることを示した．三体は直線上に制限されているので、m_1 または m_3 だけが逃げ

得る．適当な変数変換を行なって、McGehee は三体衝突に至る軌道が余次元 1 の部分多様体上にあることを示した．次に彼は質量の組合せの開集合に対して、三体近接衝突軌道がこの多様体のある側にあれば m_1 が高速で逃げ、軌道がもう一方の側にあれば m_3 が逃げることを証明した．その上、軌跡が衝突多様体に十分近ければ放出速度は任意に大きくできる．

力学的には、三体衝突多様体の両側は次のように解釈できる．三体衝突、またはこの多様内体の軌跡は、粒子 m_2 が m_1 と衝突する瞬間に m_3 と m_2 が衝突することと見なせる．衝突多様体の片側は m_3 と m_2 の衝突が m_2 と m_1 の衝突の直 前 に起こるところであり、もう一方の側は m_3 と m_2 の衝突が m_2 と m_1 の衝突の直 後 に起こるところである．三体衝突近くの実際の力学的ふるまいは N 個の二体衝突の繰り返しであり、m_2 が m_3 および m_1 とかわるがわる衝突する．(N の値は質量に依存する.) たとえば、m_1, m_2 の衝突の後で、粒子は互いに別々の方向に反跳するが、m_2 は高速で m_3 に近づき第二の衝突が起こる．この m_3 との新たな衝突によって m_2 は余分の速度を得て、m_1 に追いつき衝突する．このふるまいの N 回の繰り返しの後で、粒子のひとつが放出される．どの粒子が放出されるかは N の値に依存する．

脱出粒子が任意の高速度を達成することを使って、Mather and McGehee[4] は直線四体問題で有限時間に $R(t) \to \infty$ となる運動の存在を証明した．かれらの構成法では、粒子のひとつ m_3 が、連星 m_1, m_2 と脱出粒子 m_4 の間を行き来する．粒子 m_3 は衝突多様体の正しい側で三体衝突に近づくので、非常な高速度で放出される．粒子は x 軸に拘束されているので、m_3 の放出速度が十分大きければ、m_3 は m_4 を捕らえ衝突する．この二体衝突の後で m_3 は後戻りする．連星 (m_3, m_4) の重心を含む簡単な計算によれば、m_3 が m_4 に比べて十分小さくて、m_3 が二体衝突に入るときの速度が十分大きければ、m_4 との二体衝突による反跳で十分大きな速度を得て、ふたたび連星 (m_1, m_2) との衝突に向かう．m_3 が次に m_2 と衝突する時刻に、ちょうど系がやはり衝突多様体の正しい側で三体近接衝突を起こすようにできる．だから繰り返しの議論によって運動を確立できる．これを構成する際に、軌道が三体衝突多様体の正しい側で三体衝突に近づくようにする必要がある．このようにして彼らは望む軌道にいたる初期値のカントール集合を構成した．

我々の例も同様の構成法を用いる．しかし m_3 の放出速度に関してもっと厳しい制御が必要である．我々の示すところによれば、m_3 が三体近接衝突に戻るとき、軌跡が三体衝突多様体の正しい側にあるばかりでなく、多様体からのその距離が小さすぎず、しかも十分近いような厳しい幅に納まるところに軌道が存在する．放出速度を制御するために多様体からの距離を制御する必要がある．たとえば、$n = 3$ の場合に振動運動が存在することを示すのに、m_3 が十分高速で放出される結果 $r_{13}(t)$ がいずれは任意の定数を越えるように保証する必要がある．一方、振動運動のためには m_3 が三体近接衝突をするように戻る必要がある．つまり、m_3 が脱出しないように放出速度を制御する必要がある．(求めるふるまいはこの構成法を繰り返して得られる.) $R(t)$ が任意に指定した関数 $g(t)$ を越える超双曲運動の存在を証明するためには、m_3 の放出速度を小さくしてすべての作用が有限時間に終わらないようにする必要がある．つまり、運動が無限に長く続くようにする必要がある．一方、この放出速度は $R(t)$ が指定した $g(t)$ より早く成長するほど十分大きい必要がある．

放出速度をこのようにうまく制御するために、三体衝突多様体の 両側 を使う．どのようにこれを行なうのかを示唆的に述べよう．$n = 3$ とし x_3 を m_3 の位置とする．$x_3' = 0$ のときはいつも粒子 3 は連星に戻る．m_3 が戻っている間に連星 (m_1, m_2) は衝突と反跳を繰り返している．m_3 が m_2 に衝突するまでに行なう衝突の数は x_3 の値に依存する．x_3 の値が大きいほど m_1

と m_2 に与えられた時間は長い．逆に (m_1, m_2) 間の衝突の数を x_3 の初期値の粗っぽい尺度として使える．このようにして、x_3 の値を区間 $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ に分割できる．$x_3 \in [\alpha_n, \alpha_{n+1})$ なら、(m_1, m_2) は m_3 が m_2 にぶつかるまでにちょうど n 回衝突する．$[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ の端点は三体衝突が起こるような x_3 の初期条件である．一方の端点は (m_1, m_2) がちょうど n 回目の二体衝突を起こすときに三体衝突が起こり、もう一方の端点では連星が $(n+1)$ 回目の二体衝突に入るときに三体衝突が起こる．つまり、x_3 が $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ の左の端点に十分近ければ、粒子 3 は二体衝突の直 後 に到着し、x_3 が右の端点に十分近ければ、粒子 3 は二体衝突の直 前 に到着する．したがって区間 (α_n, α_{n+1}) の 2 つの端点は三体衝突多様体の異なる側の軌道を持ち、$x_3 \in (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ なら軌道は三体衝突をしない (少なくともこの時点で)．つまり初期条件 (α_n, α_{n+1}) の集合の進化は m_1 が任意の高速で放出されるところから m_3 が放出されるところまですべての可能なスペクトルにわたる領域を覆う集合内で三体近接衝突から始まる．連続性の考察を使えば、もともとの初期条件曲線は初期条件の新しい曲線を定義する．この曲線の一部は $x_3' = 0$ のところで連続体を持つ．この新しい曲線に対して、$[\alpha_k', \alpha_{k+1}']$ を、$x_3' = 0$ の時点から m_2 と m_3 が次の衝突を行なうまでに (m_1, m_2) が k 回の衝突を行うような x_3 の距離として定義できる．新しい曲線は $k \geq 1$ に対してすべての区間 $[\alpha_k', \alpha_{k+1}']$ を含む．だから任意の n と k の値に対して x_3 がまず $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ に含まれ、次に $[\alpha_k', \alpha_{k+1}']$ に含まれるような軌道が存在する．k を十分大きく選べば $R(t)$ は大きくなる．k を小さく選べば運動はゆっくりになる．このようにして、繰り返しの記号力学を確立して、ほぼ任意のふるまいをつくりだし、我々の主張を証明することができる．

上の記述は三体衝突後の x_3 の値について強調したが、m_1 が連星 (m_2, m_3) に近づく x のもう一方の側を強調することもできる．このようにして、あらゆる種類の運動が確立できる．たとえば、m_3 が連星と衝突して m_1 が放出されるような運動も確立できる．このとき m_1 は連星 (m_2, m_3) との衝突に戻り、m_3 が放出される．これは周期運動にもできるし、振動運動その他にもできる．全時間軸を使うことにより、$t \to -\infty$ のときの運動の存在も言えるし、$t \to \infty$ のときの運動の存在も言える．実際、対象となる運動の種類はほぼ任意である．たとえば、運動は $t \to \infty$ のとき放物的 (または超双曲的) でもいいし、$t \to \infty$ のとき周期軌道に近づいてもいい．このようにして、記号力学は直線三体問題の運動すべてを特徴づける．

2. 基本構成法の振動運動への適用

この節では、さまざまな結論を導く駆動機構の性質を導き出し、それを使って振動運動の存在を確立する．とくに次の定理を証明する．

定理 1． 直線三体問題には、$t \to \infty$ のとき $\limsup R(t) = \infty$ かつ $\liminf R(t) < \infty$ なる正の質量と初期条件が存在する．

Chazy[1] 以来、定理 1 の運動が起こるのは $h < 0$ のときのみであることは知られている．これはエネルギー水準に関する我々の仮定である．$h < 0$ を固定して、Ω を相空間のエネルギー多様体とする．$T \geq 0$ であるから、式 (1.2) より、Ω 上で次が成り立つ．

$$r(t) \leq \left(\sum m_i m_j\right) / |h| = c_1 |h|^{-1}. \tag{2.1}$$

すでに指摘したように、我々の基本的手法は主張を確立するためにふさわしい記号力学を開発することである．これは指定した粒子がいつ極大距離に達するかに基づく．これをするた

めに、Ω 内に任意の連続曲線 Γ_0 を取って $\alpha \in (-\infty, \infty)$ でパラメータづけ、次の性質を持たせる．$D \leq c_1/|h|$ のある値に対して、$\alpha \geq D$ なら $x_3 = \alpha, x_3 - x_2 \geq x_2 - x_1$ および $x_3' = 0$ とし、$\alpha \leq -D$ なら $x_1 = \alpha, x_2 - x_1 \geq x_3 - x_2$ および $x_1' = 0$ とし、$|\alpha| < D$ なら曲線は連続性の制限を満たすように選ばれる．(だから位置が α で与えられる粒子は臨界点にあり、残りの 2 つの粒子の距離は粒子間の極小距離を定義する.) このような曲線の存在はエネルギー積分と Ω の初等的性質から出る．たとえば、$\alpha > D$ なら、Γ_0 の選び方から連続関数 $f_j, g_j, j = 1, 2$ が次の条件を満たすように決まる．$x_3 = \alpha, x_3' = 0, x_j = f_j(\alpha), x_j' = g_j(\alpha), j = 1, 2, \alpha > f_2(\alpha) > f_1(\alpha)$, $m_1 f_1(\alpha) + m_2 f_2(\alpha) + m_3\alpha = 0$, $m_1 g_1(\alpha) + m_2 g_2(\alpha) = 0$ および

$$\frac{1}{2}(m_1 g_1^2 + m_2 g_2^2) = U(f_1(\alpha), f_2(\alpha), \alpha) + h.$$

Γ_0 上の点はパラメータ値 α で表わす.

初期条件 $\alpha > D$ は $x_3'' < 0$ を満たす．だから以後の運動で m_3 は有限時間に m_2 と衝突する．同様に、$\alpha < -D$ なら m_1 と m_2 の衝突が起こる．粒子 α を <u>連絡粒子</u>(commuting particle) と呼び、残りの 2 粒子を <u>連星</u> と呼ぼう．$N_0(\alpha)$ は連絡粒子が m_2 と衝突するまでに連星が行なう二体衝突の数とする．すなわち、$\alpha > D$ なら、$N_0(\alpha)$ は、m_2 が初めて m_3 と衝突するまでに、また衝突している時も含めて m_1 と m_2 が衝突する回数とする．$\alpha < -D$ なら、$-N_0(\alpha)$ は、m_2 が初めて m_1 と衝突するまでに、また衝突している時も含めて m_2 と m_3 が衝突する回数とする．だから $N_0(\alpha)$ の符号はどの粒子が連星を構成するかを示す．N_0 の定義において、連星の最後の衝突は連絡粒子を含む三体衝突のことも有り得る．これらの初期条件は $\mathcal{C}_0 = \{\alpha \in \Gamma_0 | N_0(\alpha)$ の定義で衝突が三体衝突$\}$ と表わせる.

補題 1. (i) $|\alpha| \to \infty$ のとき $|N_0(\alpha)| \to \infty$.
(ii) $N_0(\alpha)$ は $\alpha \in \mathcal{C}_0$ のときのみ値を変える.
(iii) $\mathcal{C}_0$ は上からも下からも抑えられない.

<u>証明.</u> 主張 (ii) は解の初期条件に関する連続性から出る．(系は正則化されているので解は二体衝突において正則である.) 主張 (iii) は (i) と (ii) から出る．だから (i) を証明するだけでよく、しかも対称性から $\alpha \geq D$ の場合を考えるだけでよい.

証明は簡単である．α が十分大きければ、m_3 が m_2 に十分近くなるまで粒子間の最小距離 $r(t)$ は連星 (m_1, m_2) で決まる．だから m_3 に関する運動方程式は摂動中心力問題の方程式である．(摂動項は $r(t)/x_3^3$ 程度の大きさである.) $x_3'(0) = 0$ であるから $x_3 = \alpha/2$ になるまでの時間は本質的に中心力問題で与えられる．とくに、任意の T の値に対して、$x_3 = \alpha/2$ になるまでの時間が単位時間の T 倍より長くなるように α は十分大きく取れる．一方、連星が m_3 から十分遠い限り、連星の運動方程式もまた中心力問題の摂動の形をしている．$0 \leq x_2(t) - x_1(t) < c_1/|h|$ であるから、これらの粒子は衝突するばかりでなく、$x_3 > 2c_1|h|$ である限り、衝突間の極大時間 σ がある．α を十分大きく取れば $N_0(\alpha) \geq T/\sigma$ である．T は任意だから (i) がただちに言える.

曲線 Γ_0 についてはほんの少ししか指定できない．だから $N_0(\alpha) = 0$ なる α はないかも知れない．たとえば、このような状況が起こるのは、$|\alpha|$ の小さな値に対して曲線が m_2 を残りの 2 粒子の中点に持ち、m_1, m_2 の速度が非常に大きくて互いの方向を向いているときである．一方、コンパクト性の議論から、ただちに整数 q があってすべての曲線 Γ_0 に対して $|N_0(\alpha)| \leq q$ なる α の正負の値がある．実のところ q が 1 と選べることを示すのは難しくない．しかし完全

な証明は込み入っており、このような強い主張は以下では必要ない．だから $\alpha \geq D$ に対して基本的発想の概略を述べるだけにする．m_2 が m_1 と m_3 の中点に来るような α を選ぶ．曲線はエネルギー曲面上にあるはずだから、$a = c_2$ の極大値は $x_1' = x_2' = 0$ のときに生じる．$x_2' > 0$ なら粒子は c_2 より近い距離から出発し、m_2 は m_1 との衝突に戻る前にまず m_3 に近づく．実はこの曲線とこの α に対して $N_0(\alpha) = 0$ のことも有り得る．$x_2' < 0$ なら粒子は c_2 より近くから出発し、m_1 と m_2 が互いに近づく (?)．m_1 と m_2 の衝突は弾性衝突であって、粒子は高速で反跳し、m_2 は m_3 に向かう．$N_0(\alpha) = 2$ にするために、m_3 に向かう反跳速度を抑える必要があり、またそれらの間の出発距離を大きくする必要がある．これから $x_2'(0) = x_1'(0) = 0$ が要請される．この状況では、$m_1 = m_3$ なら標準的な議論から最初の衝突が三体衝突であることが出る．(解は $x_2(t) = 0$ および $x_1(t) = -x_3(t)$ である.) $m_3 > m_1$ なら $N_0(\alpha) = 0$ である．だから最悪なのは $m_3 \ll m_1$ かつ $x_2' = x_1' = 0$ の場合である．この場合、証明は制限問題への極限に行って完結できる．(以下では $q = 1$ と仮定するが、これは必要ではない.)

$N_0(\alpha)$ は非有界の階段関数であるが、単調である必要はない．(部分的には、これは Γ_0 に条件を少ししか課していないからである.) にもかかわらず、N_0 が単調性を持つ区間もある．

補題 2. (a) 1 と -1 が N_0 の値域に含まれるように D の値を選べる．

(b) 任意の整数 $n,\ |n| \geq 2$ に対して、$\alpha_n', \alpha_n'' \in \mathcal{C}_0,\ \alpha_n' < \alpha_n''$ があって、$N_0(\alpha_n') = n, N_0(\alpha_n'') = n+1$ を満たし、$\alpha \in (\alpha_n', \alpha_n'')$ なら $\alpha \notin \mathcal{C}_0$ かつ $N_0(\alpha) = n$ である．さらに $E > 0$ に対して $\alpha_n' > E$ かつ $\alpha_{-n}' < -E$ なる n がある．

この補題の (a) で指定される D の値が曲線 Γ_0 のために選ばれる値である．

<u>証明.</u> (a) これについては上で議論した．実のところ、使うのは有限値 q があって q と $-q$ がこの値域に入ることだけである．

(b) 補題のこの部分を $n > 0$ に対して証明する．n が負の場合も証明は同様である．$\alpha'' = \inf\{\alpha \in \mathcal{C}_0 | N_0(\alpha) = n+1\}$ および $\alpha_n'' = \sup\{\alpha \in \mathcal{C}_0 | \alpha < \alpha_n', N_0(\alpha) = n\}$ と置く．まず $N_0(\alpha)$ が値を変えるときは必ず $\alpha \in \mathcal{C}_0$ において ± 1 だけ変わることに注意する．第二に、(a) により、α が十分小さければ $N_0(\alpha) \leq 1$ である．α_n' と α_n'' が存在することおよびこれらが補題 2 の主張を満たすことは、この 2 つの陳述と $N_0(\alpha) \to \infty$ から出る．

独立変数を制御するため、$T_0(\alpha)$ は連絡粒子が m_2 と衝突する時刻とする．次の補題はただちに出る．実のところ、すべての α に対して、たとえそれが三体衝突にいたる値であっても、$T_0(\alpha)$ が連続であることが示せる．しかし我々の目的には補題 3 で十分である．

補題 3. $T_0(\alpha)$ は $\alpha \notin \mathcal{C}_0$ なら連続であり、$|\alpha| \to \infty$ のとき $T_0(\alpha) \to \infty$ である．K が実軸上の有界集合なら、$\{T_0(\alpha) | \alpha \in K\}$ は有界である．

次に初期条件の集合 (α_n', α_n'') の進化を追おう．この区間の各 α に対して、時刻 $T_0(\alpha)$ の後の軌跡の特定の点を選ぶ．この点は Γ_0 と似た性質を持つ新しい曲線 Γ_1 を定義するための候補である．つまり、三体近接衝突の後のある時刻に、放出された粒子の速度 $x_j'(t) = 0$ であるような点を選びたい．しかしこの性質だけで点を定義するのは不十分である．なぜなら三体近接衝突の力学は N 回反復する二体衝突を含むからである．その困難さを見るために、m_3 が最終的に放出されたとしてみよう．最初の衝突の後で $x_3' > 0$ である．しかし m_2 が m_1 の衝突から抜けでて来て m_3 とふたたび衝突するとき m_3 に加わる加速度は無限に大きくなり、$x_3' \to -\infty$

である．だから $T_0(\alpha)$ の後のある時刻でしかも m_3 が放逐される前に、$x_3'(t) = 0$ である．端点の十分近くの初期条件 α に対して、ある粒子が放逐されるまでにちょうど N 回の二体衝突があることを知っている (ここでも N は粒子の質量で決まる)．一方、三体衝突多様体にそれほど近くない軌道の α の値に対しては、これは必ずしも成り立たない．以下のいくつかの量 (terms) はこの 2 つの可能性を取り扱うために導入する．

$E(\alpha) = \inf\{t \geq T_0(\alpha) | t \geq T_0(\alpha)$ において系がちょうど N 回の二体衝突を持つ $\}$ と定義する．$D(\alpha) = \{t > T_0(\alpha) | 2$ つの粒子が衝突し、次の二体衝突はこの同じ粒子で行なわれる $\}$ と置く．$\alpha \in (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ に対して、$C_1(\alpha) = \inf\{t > \min(D(\alpha), E(\alpha)) | x_1'(t) = 0\}$ および $C_3(\alpha) = \inf\{t > \min(D(\alpha), E(\alpha)) | x_3'(t) = 0\}$ と置く．$\tau(\alpha) = \min(C_1(\alpha), C_3(\alpha))$ と置く．量 $C_j(\alpha), j = 1, 3$ は粒子 m_j に関係する．これは $T_0(\alpha)$ 後の最初の時刻であって、$x_j' = 0$ のときの任意の三体近接衝突力学の後でもある (だから m_j は m_2 への回帰をはじめている)．だから $\tau(\alpha)$ は曲線 Γ_0 上の点によって記述される状況と似た新しい状況を定義する．

序で記述した三体衝突近くの力学によれば、$\tau(\alpha) = \infty$ も可能である．この状況は、軌跡が三体衝突多様体に任意に近くて、一つの粒子が任意の高速で放出されたときに起こる．この放出粒子は脱出するから、$C_1(\alpha) = C_3(\alpha) = \infty$ である．実は、$\tau(\alpha) = \infty$ になるためには $t > T_0$ のときに $R(t) \to \infty$ であることが必要十分であることが簡単に示せる．この節では $\tau(\alpha) < \infty$ なる点だけを考える．そこで、$j = 1, 3$ に対して $G_j = \{$ 初期条件αで定義される軌跡上の $t = \tau(\alpha)$ のときの点 $| |n| \geq 1, \alpha \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}), \tau(\alpha) = C_j(\alpha) < \infty\}$ と置く．

補題 4. 質量 m_1, m_2, m_3 の値、正定数 D_1 と D_3、および連続曲線 Γ_1 があって、Γ_1 は区間 (α_n, α_{n+1}) の軌道内にある．Γ_1 は以下のように $\beta \in (-\infty, \infty)$ でパラメータづけできる．$\beta \leq -D_1$ なら $x_1 = \beta$ であり、点は G_1 内にある．$\beta \geq D_3$ なら $x_3 = \beta$ であり、点は G_3 内にある．

証明. 二体衝突は正則化されているから、$\alpha \in (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ に対して、少なくとも $T_0(\alpha)$ のある時刻後に軌跡が三体衝突を起こすまで滑らかな解が存在する．だから任意のコンパクトな時間区間上で解は α に関して連続である．

McGehee の結果 (序で記述した) を使えば、以下のことが起こるような質量の選び方がある．区間 (α_n, α_{n+1}) の片方の端点の任意の近くの初期条件に対して、m_1 が任意の高速で放逐され、一方もうひとつの端点の任意の近くの初期条件に対しては、m_3 が任意の高速で放逐される．以下の量は、解の α に関する連続性に訴えるためにコンパクトな時間区間上の脱出粒子を考えるのに導入する．任意の整数 $M > c_1/|h|$ に対して $T_M(\alpha) = \min(\tau(\alpha), \inf\{t > T_0(\alpha) | x_2(t) - x_1(t) = M$ または $x_3(t) - x_2(t) = M\}$ と置く．各 $\alpha \in (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ に対して $T_M(\alpha) < \infty$ である．$x_2 - x_1 = M$ なる軌道があり、$x_3 - x_2 = M$ なる軌道がある．初期条件に関する解の連続性と中間値の定理より、(α_n, α_{n+1}) の軌道内に滑らかな曲線があって Γ_1 として要請される性質を持つ．ただし要請されたパラメータ値は $-M \leq \beta \leq M$ 上しか動かない．結論は M の値を無限大に近づければ得られる．

次に定理 1 の証明を完結させよう．曲線 Γ_0 上の各区間 (α_n, α_{n+1}) は新しい曲線 Γ_1 を与える．同じ構成法を繰り返す．区間 $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ の添え字に i を加えて、これが曲線 Γ_i 上にあることを指定する．ただし元の区間は $(\alpha_{k(0)}, \alpha_{k(0)+1}) = (\alpha_{k(0),0}, \alpha_{k(0)+1,0})$ である．だから任意の整数列 $\{k(0), k(1), \ldots\}$ が与えられたとき、各 $i \geq 0$ に対して、Γ_0 と同じ性質を持つ曲線 Γ_{i+1} があって $(\alpha_{k(i),i}, \alpha_{k(i)+1,i})$ の像に含まれる．逆に、$(\alpha_{k(i-1),i-1}, \alpha_{k(i-1)+1,i-1})$ 内の点集合で $[\alpha_{k(i),i}, \alpha_{k(i)+1,i}]$ に写されるものは閉有界部分集合である．逆像を取ることを続ければ、これによ

って $(\alpha_{k(0)}, \alpha_{k(0)+1})$ の閉有界部分集合が定義される．ただし j 番目の段階でその像は $j = 1, \ldots, i$ に対して $[\alpha_{k(j),j}, \alpha_{k(j)+1,j}]$ に含まれる．だから列 $\{k(0), k(1), \ldots\}, i = 1, \ldots$ のはじめの i 個の項を使って、$(\alpha_{k(0)}, \alpha_{k(0)+1})$ の入れ子になった閉有界部分集合列を得る．入れ子になったコンパクト集合の減少列に関する標準的定理から、初期条件 α があって、列で記述されるふるまいが実現される．$i \to \infty$ のとき $\limsup |k(i)| = \infty$ となる任意の列 $\{k(0), k(1), \ldots\}$ を選べば、定理 1 は補題 1 からしたがう．

そのほかのいくつかの結果が記号力学からただちに言える．脱出する粒子を含めるために、記号 $-\infty$ と ∞ を導入して、それぞれ m_1 および m_3 が無限遠に脱出することを表わす．だからたとえば、列 $\{-5, 6, -7, 8, -2, \infty\}$ は、m_3 が無限遠に放逐されるまで、m_1 と m_3 が連絡粒子の役割を代わるがわる行なう初期条件に対応する．整数は連絡粒子が臨界距離にいるときから m_2 と衝突するまでの間に連星が行なった二体衝突の数に対応する．

n 体問題は可逆であるから、$t \to -\infty$ の場合も同様な構成法が成り立つ．だから列 $\{\ldots, k(-2), k(-1), k(0), k(1), \ldots\}$ はすべての時間にわたっての軌跡の進化を記述する．たとえば、列 $\{-\infty, -3, 5, 1, 8, \ldots\}$ は m_1 が捕獲されて (同じことだが m_1 は $t \to -\infty$ のとき脱出する)、以後は列の数字に対応するふるまいをする．次の結果は上の構成法からただちに得られる．

定理 2. 直線三体問題では、うまく質量を選ぶと非ゼロの整数と $\pm\infty$ から成る任意の列を実現する初期条件がある．

他の結果、たとえば三体衝突にいたる初期条件の集合の構造とか定理 2($\pm\infty$ が許されないとき) の初期条件がカントール集合であることなどは記号力学の標準的技術を適用すればただちに得られる．

3. 時間より高速の運動-超双曲軌道

2 節で記述した力学的ふるまいは、最大距離に達してから m_2 との衝突に戻る連絡粒子によって行なわれる振動的なふるまいによって可能であった．$n = 3$ の場合、これは粒子が戻って来るための唯一の道である．一方、粒子が脱出してしまえば、引力の法則によって放出された粒子の速度は減るばかりである．だから脱出速度は $\mathbf{v}$ の上限であって、最終的に $R(t) < Ct$ となってしまう．

四体問題にはもっと可能性がある．可能な運動の記号力学的記述を確立するために必要な回帰は別の機構-衝突-によってつくることができる．たとえば、連絡粒子 m_3 が m_4 と衝突し、その反跳によって m_3 はふたたび m_2 と衝突すべく帰ってくる．この種の振動運動によって、三体近接衝突の結果として出る高速度をてなずけて、四体問題の新しい種類の運動を決めることができる．それをするにあたって 2 節の記号 ∞ を異なる放出速度を記述する記号の組に細分化する．こうすることによって、残りの主張を確立できる．

定理 3. 直線四体問題では、$t \to \infty$ のときに $R(t)/t \to \infty$ となるような質量と初期条件の選び方がある．

質量に関する制限を説明するのに、m_3 と m_4 の間の二体衝突があり、また x_2 が十分遠くにあれば (だから連星 (m_3, m_4) の重心 $C_{3,4}$ は $(x_3 - x_2)^{-2}$ 程度の加速度 $C''_{3,4}$ を持つ)、二体衝突の直前と直後の $C'_{3,4}$ は本質的に同じであることに注意しよう．衝突は本質的に弾性衝突である．

つまり、$C'_{3,4}$ に相対的に、各粒子の速度は本質的に、衝突に入る $C'_{3,4}$ に相対的な速度と同じである．簡単な計算によれば、このような運動が起こるためには、m_3 は m_4 より軽くなければならない．同様な議論から、m_1 と m_2 の質量に相対的に m_3 に制限がつくことがわかる．同じ要請が Mather-McGehee の論文にもある．だから、かれらの重心に関する考察に基づく計算から、質量に関する十分条件は次の通りである．

$$(m_4 - m_3)/(m_4 + m_3) > m_3/(m_1 + m_2). \tag{3.1}$$

質量が (3.1) 式を満たせば、定理 3 が成り立つことは簡単に示せる．簡単な方法は、m_3 を任意の高速で脱出させ、m_4 に衝突させることである．これは 2 節のものに似た議論によって周期的に行える．すべての運動が有限時間で終わらないことを保証するため、これらの高速脱出を 2 節で記述した m_3 の振動運動の間にばらまいて、望むだけ時間をムダ使いすればよい．しかし別の手法を取って、もっと一般の定理 4 を証明する．

定理 4. $g(t)$ を $(0,\infty)$ 上の単調増加関数とする．質量が (3.1) を満たせば、次を満たす初期条件の集合がある．

$$\lim(R(t)/g(t)) \to \infty \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

この定理を証明するために、2 節の曲線 Γ_0 を 2 本の曲線 $\Gamma_{0,1}$ と $\Gamma_{0,2}$ に置き換える．第一の曲線は、α の値に上限が課されることを除いて、2 節の Γ_0 に似ている．形式的には $\Gamma_{0,1}$ は 4 体のエネルギー曲面内の曲線であって、α でパラメータづけされ、はじめの 3 粒子の性質が Γ_0 と同じであるが、次の修正を受けている．曲線上のすべての点で $x'_4 > 0$ である．α が m_1 または m_3 の位置を指定するとき、それは最初の 3 粒子の重心に相対的である．α の上限は $x''_3 = 0$ の場所である．$\Gamma_{0,2}$ はエネルギー曲面内の曲線であって $\beta \in [1,\infty)$ で次のようにパラメータづけされる．$C'_{1,2} < 0, C'_{3,4} > 0, x_2 - x_1 \ll x_4 - x_3 = 1 \ll x_3 - x_2, x'_3 = -\beta$．換言すれば、$\Gamma_{0,2}$ は次の状況を捕らえている．すなわち、2 つの連星がはるか離れ、それらの重心が離れつつあり、$x_2 - x_1$ が粒子の間の最小間隔であり、m_3 が m_4 から指定された距離はなれていて左に向かっている．α の上限は m_3 が $x'_3 = 0$ にあって左に動き始める場所で決まる．

$\Gamma_{0,j}$ 上に、N_0 を定義したのと同じやり方で $N_j, j = 1,2$ を定義する．たとえば、$N_2(\beta)$ は初期条件 β に対応する．これは m_3 が m_2 に衝突するまでの m_1 と m_2 の衝突回数である．同様に、$\Gamma_{0,j}$ 上に、各整数 n に対して区間 $(\alpha'_n, \alpha''_{n+1})$ と (β'_{n+1}, β'_n) を補題 2 のように定義する．曲線 $\Gamma_{0,1}$ の選び方は α の上限を決めるから、$(\alpha'_n, \alpha''_{n+1})$ が存在するような $n > 0$ の上限を決める．x_2 と x_4 の距離が大きいほど許される α の値は大きくなり、定義される n の値も大きくなる．β の値は m_3 の回帰速度を表わすから、$\beta'_n > \beta''_{n+1}$ である．またこの回帰速度は任意に大きくなれるから ($\beta \in (0,\infty)$)、(3.1) 式の制限内で、β をうまく選んで m_3 が好きなだけ短い時間間隔の間に衝突するようにできる．つまり、区間 $(\beta'_{n+1}, \beta''_n)$ は $n \geq 1$ のすべての選び方に対して存在する．(実はすべての $n \geq 0$ に対して存在する.)

2 節で使ったのと同様の議論によって、各区間 $(\alpha'_n, \alpha''_{n+1})$ および (β'_{n+1}, β'_n) を最初の三体近接衝突を越えて進化させよう．各区間の像は曲線 $\Gamma_{0,j}, j = 1,2$ の性質を持つ曲線の組 $\Gamma_{1,1}$ と $\Gamma_{1,2}$ を含む．($\Gamma_{1,2}$ が存在することは (3.1) 式の質量不等式を使った標準的な重心の議論からただちに証明できる．この議論は本質的には Mather-McGehee が m_3 が任意の高速で反跳することを示したのと同じ議論なので、ここでは繰り返さない.) だから記号力学を確立できる．$\Gamma_{i,1}$ または $\Gamma_{i,2}$ の区間に対応する n を区別するために添え字を使う．たとえば、列 $(5^1, 65^2, \ldots)$ は

m_3 が静止から出発し、5 回の衝突の後で m_2 と衝突し、放逐されて、m_4 との衝突で反跳することに対応する．その後 m_4 から単位距離にあって、連星 (m_1, m_2) は m_3 が m_2 と衝突する前に 65 回衝突する、等々.

記号力学の列が存在して、解が主張どおりであることを示すことが残っている．第一段階では、任意の列 $(n_1^2, n_2^2, \ldots)$ に対して、m_3 への力によって速度 x_3'' が $(x_4 - x_3)^{-2}$ 程度の大きさになることに注意する．つまり、任意の小時間区間において速度の変化は極小で、x_3' は β 程度の大きさである．すなわち、x_3' は相続く三体衝突の間に β の定数倍で下から抑えられる．第二に、距離 $x_4 - x_2$ を使い、β の値を変化させて、相続く三体衝突の間の時間間隔を制御する.

残っているのは、β と三体衝突間の時間の長さをうまく選んで $R(t)/g(t) \to \infty$ にすることである．これを行なうのに、(3.2) 式で定義される極慣性モーメントの定数倍を使う．重心は $\mathbf{0}$ に固定されているから、$M = \sum_j m_j$ とすれば次が成り立つ.

$$I = \frac{1}{2}\sum_j m_j r_j^2 = \frac{1}{2}M\sum_{k<j} m_k m_j (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)^2. \tag{3.2}$$

よく知られているように (たとえば Pollard[8] 参照)、質量に依存する正定数 A と B が存在して $AR^2 \leq I \leq BR^2$ である．したがって定理 4 の主張は次を示すことと等価である.

$$I/g^2 \to \infty \quad \text{as} \quad t \to \infty. \tag{3.3}$$

I の成長 (たとえば [8,10] 参照) は次式で与えられる.

$$I'' = T + h. \tag{3.4}$$

だから T の定義より $2I'' \geq m_3\{x_3'(t)\}^2 + 2h$ である.

$h(t)$ は $(0, \infty)$ 上で定義された関数であって、$h(t) > t\{g(t)\}^2$ および $h'' > 0$ とする．β_j の値を選んで相続く三体近接衝突の間の時間を制御すれば、階段関数が存在して j 番目の時間区間において $m_3\{\beta_j\}^2 > h''(t)$ である．証明を完結するため、適当な時間区間上で x_3' が β_j によって下から抑えられるような軌道が存在することを証明する．これをするのに、列 $\{\beta_j\}$ が列 $\{n_1^2, n_2^2, \ldots\}$ を定義することに注意する．ここで β_j が区間 $(\beta_{n+1}'', \beta_n')$ 内にあるならこれは n_j^2 の値である．β_j がそのような区間になければ、$\beta_{n+1}'' > \beta_j$ なる最初のものを選ぶ．上の記号力学の議論にしたがえば、望みの性質を持つ初期条件がある.

参考文献

1. J. Chazy, Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps coroit indefinement, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **39** (1922), 29-130.

2. R. Easton, Parabolic orbits for the planar three body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 116-134.

3. C. Marchal and D. G. Saari, On the final evolution of the n-body problem, *J. Differential Equations* **20** (1976), 150-186.

4. J. Mather and R. McGehee, Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time, in "Dynamical Systems Theory and Applications", p.573-587 (J. Moser, Ed.), Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, New York, 1974.

5. R. McGehee, Triple collisions in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27** (1974), 191-227.

6. R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three body problem, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 857-876.

7. P. Painlevé, Lecon sur la théorie analytique des équations différentielles, Herman, Paris, 1987.

8. H. Pollard, Gravitational systems, *J. Math. Mech.* **17** (1967), 601-617.

9. C. Robinson, Homoclinic orbits and oscillation for the planar three body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 356-377.

10. D. G. Saari, Expanding gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **156** (1971), 219-242.

11. D. G. Saari, The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n-body problem, *J. Differential Equations* **55** (1984), 300-329.

12. K. Sitnikov, The existence of oscillatory motion in the three-body problem, *Soviet Phys. Dokl.* **5** (1964), 647-656.