谷川清隆 訳

Journal of Differential Equations (1994), **110**, 289-321

平面三体問題におけるアーノルド拡散と振動解

Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem

Zhihong Xia

Center for Dynamical Systems and Nonlinear Studies
Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332

Abstract

この論文ではニュートン三体問題に関する以下の結果を得る．(1) 平面三体問題にはアーノルド拡散が存在する．これはアーノルド (V.I.Arnold, 1964, *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **156**, 9) によって予想されていた．(2) 三体問題には振動解や捕獲および脱出 (escape) 解がその他のカオス的な解とともに存在する．(3) 擬アーノルド拡散 (pseudo Arnold difusion) と呼ばれる特殊な面白い現象が三体問題の無限遠の近くで生じる．(4) アーノルド拡散が存在するために平面三体問題は非可積分であり、知られているもの以外に実解析的積分はない．

1. 序

アーノルド拡散は高次元ハミルトン系に伴うカオス現象である．最初にアーノルド拡散を見つけたとき、アーノルド [2] はこのカオス現象がニュートン n 体問題に存在するだろうと予想した．この論文では主結果のひとつとして、アーノルド拡散が平面三体問題に存在することを示すことにより、この予想の正しさを示す．

ラグランジュ多様体交差理論 (Weinstein[20], Arnold[4]) により、アーノルド拡散は自由度が 2 より大きい生成的近可積分ハミルトン系で生じる．しかしながら、n 体問題のような特定のハミルトン系が与えられたときにその存在を示すのにいくつか大きな困難がある．事実、現実の物理系でアーノルド拡散の存在が示された例は非常に少ない．アーノルド [2] や Holmes and Marsden[9] による例は振子をつなげた非常に特殊なハミルトン関数の場合であり、技術的な詳細なしにこの現象を説明するためにつくられたものである．最近 Lim[10] が渦力学においてアーノルド拡散のいくつかの例を出した．

アーノルド拡散の存在を検出するための基本的技術のひとつはメルニコフの方法 [12] である (アーノルド [2], Holmes and Marsden[9], Robinson[17] 参照)．しかし三体問題は複雑であるので、なによりもまず、メルニコフ積分を定式化すること自体がほとんど不可能であり、どこから始めてよいのかわからない．第二に、メルニコフ積分を評価することは、当然期待されるように、たとえ可能であるにせよおそろしく大変なことである．この論文では別のやり方をする．制限三体問題のある横断的ホモクリニック軌道をもとに構成を行なう．このようなホモクリニック軌道の存在は Xia[21] により示されている．この論文では制限三体問題から完全な平

面三体問題へ移行するときに横断的ホモクリニック軌道における馬蹄写像への摂動からアーノルド拡散が生じることを示す．この結果は6節で述べる．

われわれの第二の主結果は三体問題の振動解に関係する．カオス力学の初期の例の1つがいわゆるSitnikov問題である．Sitnikov[19]は$m_3 = 0$なるこの特殊な制限三体問題において強くカオス的振動を示す軌道の存在を示した．Alekseev[1]はこの問題を系統的に調べ、結果を$m_3 > 0$へ拡張した．McGehee[11]の安定多様体の結果を用いてMoser[13]はSitnikov問題をもっと完全に注意深く調べた．

負エネルギーの平面三体問題の解が同じようなカオス的振動を示すかどうかは自然な疑問である．Easton and McGehee[8]は簡単化したモデル問題を調べ、このモデル問題に振動解が存在することを証明した．振動解は三体問題の放物-楕円解に密接に関係している．放物-楕円解において第三体は極限速度ゼロで無限遠に逃げ、残りの二体は楕円軌道に近づくことを思いだそう．Easton[6]は放物-楕円解全体の集合がリプシッツ多様体をなすことを示した．Robinson[16]はこの問題の研究を続け、なかんずく、この多様体が実は実解析的であることを示した．さらに進んだ研究がEaston[7]によって数値的に行なわれた．

この論文では、この問題を解く．平面三体問題の解が同じカオス的振動を本当に示すことを証明する．さらに、アーノルド拡散の存在と結びつけて、拡散的振動解の存在を示す．すなわち軌道はカオス的に振動するだけでなく同時にカオス的に拡散する．これを証明するために無限遠における面白い写像を定義し、KAM理論を使って無限遠におけるこの写像の不変円の存在を示す．振動解はこれらの不変円の近くの解を解析することによって得られる．この結果は7節で述べる．

適当な座標系変換によって物理空間の無限遠(無限遠において第三体の速度ゼロ、S^3に同相)を有限点に持ってくることができ、S^3と同一視される無限遠の解について語ることができる．三体問題の性質からしてS^3上の解はすべて周期解であってS^3上には無理数流れの不変トーラスはない．S^3の安定多様体と不安定多様体は複雑に交わるけれども、アーノルド拡散はない．しかしながら、S^3上のヘテロクリニック接続を用いて上で述べたおもしろい写像を定義できる．この写像は完全(exact)シンプレクティック写像でありKAM理論が適用できてこの写像に対してS^3上の不変トーラスの存在が言える．不変トーラスの大部分の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わることがわかる．この横断的交差からS^3の近くで開折する複雑な力学が得られ、アーノルド拡散に似た非常におもしろい現象が生じる．この現象を擬アーノルド拡散(pseudo Arnold difusion)と呼ぶ．これはアーノルド拡散が縮退したものであり、周期解の集合のみが得られ、準周期解はない．いくつかの弱い条件のもとで、豊富な軌道構造も得られ、非常にカオス的な仕方で軌道が遷移トーラスの間をうろつき回る．この場合、遷移トーラスはアーノルド拡散における準周期解ではなく、周期解のある種の集合のヘテロクリニック接続の集合である．この結果は7節で述べる．

三体問題にもっと積分が存在するかどうか、三体問題は積分可能か、という問題は天体力学の研究において非常に重要な役割を果してきた．アーノルド拡散が存在することの直接の帰結は三体問題が非可積分であって、知られているもの以外に関数的に独立な実解析的積分がないことである．

2．平面三体問題

m_1, m_2およびm_3はニュートンの重力法則のもとで固定平面内を動いている3質点の質量で

あるとする．重心は原点に固定されているとし、$\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}$ はそれぞれ m_1, m_2 および m_3 の位置を表わすとする．系の全エネルギー h は負であるとし、角運動量 C は固定する．

いくらか修正を加えるが、Robinson[16] および Easton[6] に従って変数を変え、方程式を望ましい形に持っていく．詳細は [6] に譲る．まずヤコビ変数を導入する．$\mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$ を m_1 から m_2 へのベクトルとし、$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^2$ を連星 m_1 と m_2 の重心から m_3 へのベクトルとする．このとき次を得る．

$$\begin{aligned}&\mathbf{q} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1},\\ &\mathbf{Q} = \left(\mathbf{r_3} - \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1 + m_2}\right) = M\mu^{-1}\mathbf{r_3}.\end{aligned}$$

ここで $M = m_1 + m_2 + m_3$ および $\mu = m_1 + m_2$ である．

$\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$ および $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^2$ を $\mathbf{q}$ および $\mathbf{Q}$ に対応する運動量とする．対応する運動方程式は

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{Q}} = k_1^{-1}\mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -Mk_1|\mathbf{Q}|^{-3}\mathbf{Q} + O(|\mathbf{Q}|^{-3}),\\ &\dot{\mathbf{q}} = k_2^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mu k_2|\mathbf{q}|^{-3}\mathbf{q} + O(|\mathbf{Q}|^{-3}),\end{aligned} \tag{1}$$

となる．ここで $k_1 = m_3\mu M^{-1}$ および $k_2 = m_1 m_2 \mu^{-1}$ である．

われわれがとくに興味を持っているのはいわゆる<u>放物</u>軌道である．ω(または α)<u>放物</u>軌道とは、t が無限に向かうとき (または負の無限遠に向かうとき)$\mathbf{q}$ が有界で、$\mathbf{Q}$ が非有界で、$\mathbf{P}$ がゼロに向かう軌道である．だから、第三体 m_3 が極限速度ゼロで離れていき、運動は無限に近づく．$|\mathbf{Q}| = \infty$ を有限値にするために、$\alpha = M\mu^{-1}$ として尺度変換 $|\mathbf{Q}| = \alpha x^{-2}$ を使う．また複素平面の角変数 s を $\mathbf{Q} = \alpha x^{-2} s$ で定義する．運動量は次のように動径および角度成分に分解される．

$$\mathbf{P} = k_1\alpha y s + k_1 \alpha x^2 \rho i s.$$

ここで is は単位ベクトル s に直交する単位ベクトルの複素数表示であり、ρ は m_3 の角運動量を m_3 で尺度変換したものである．方程式 (1) は重心のまわりの回転のもとで不変である．この対称性を交点の消去によって取り除き、方程式を s から独立にするために、

$$\mathbf{q} = zs \quad \text{および} \quad \mathbf{p} = k_2\mu^{-1}ws,$$

とおいて $\mathbf{q}$ および $\mathbf{p}$ を z および w(ともに複素数) で置き換える．ここで複素数表示および複素数の乗算を用いた．すると運動方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\dot{x} = \tfrac{1}{2}x^3 y,\\ &\dot{y} = -\mu x^4 + O(x^6),\\ &\dot{z} = \mu^{-1}w + O(x^4),\\ &\dot{w} = -\mu^2|z|^{-3}z + O(x^4),\\ &\dot{s} = x^4\rho i s,\\ &\dot{\rho} = O(x^6).\end{aligned} \tag{2}$$

角運動量積分とエネルギー積分は次の通りである．

$$\begin{aligned}&C = m_3\rho + \frac{k_2^2}{2\mu i}(z\overline{w} - w\overline{z}),\\ &h = \frac{1}{2}m_3 y^2 + \frac{1}{2}k_2^3\mu^{-2}w\overline{w} + m_1 m_2|z|^{-1} + O(x^2).\end{aligned}$$

方程式 (2) の s に関する式は落とせる．s は他の式には出てこないからである．$m_3 \neq 0$ なら ρ に関する式も落とせる．ρ は角運動量積分 C を使ってほかの変数から決定できるからである．しかし $m_3 = 0$ のとき、すなわち制限三体問題の場合にはこの簡単なやり方は使えず、ρ に関する式は落とせない．

運動方程式は連星 m_1 と m_2 が $z = 0$ で衝突を起こすところに特異性を持つ．Levi-Civita の正則化を用いてこの特異性を取り除ける．

$$
\begin{aligned}
&z = 2\mu\xi^2, \quad w = \mu h^{-1}\eta\overline{\xi}^{-1}, \\
&K = 4(\xi\overline{\xi} + \eta\overline{\eta})\mu\xi\overline{\xi},
\end{aligned}
$$

とおき、ベクトル場に K を掛けて時間の尺度を変える．すると運動方程式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\tfrac{1}{2}Kx^3y, \\
\dot{y} &= -K\mu x^4 + O(x^6), \\
\dot{\xi} &= \eta + O(x^4), \\
\dot{\eta} &= -\xi + O(x^4, y^2), \\
\dot{\rho} &= O(x^6).
\end{aligned} \tag{3}
$$

エネルギーおよび角運動量積分は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
h = H &= \frac{1}{2}m_3y^2 - k_2^3(\xi\overline{\xi} + \eta\overline{\eta}) + O(x^2), \\
C &= m_3\rho + \frac{k_2^2\mu}{hi}(\xi\overline{\eta} - \eta\overline{\xi}).
\end{aligned}
$$

これらの方程式は $x = 0$ に自然に拡張されている．この点で $H = h < 0$ であり、また角運動量積分により各 y に対して三次元球が定義される．拡張された方程式で $x = 0$ とし y を固定すると、流れは S^3 上の Hopf 流である．これらの方程式で ω 放物 (または α 放物) 軌道は、t が無限に (または負の無限に) 向かったときに $x(t)$ と $y(t)$ がともにゼロに行くような軌道である．だから ω 放物 (または α 放物) 軌道の集合は $x = 0$ および $y = 0$ で定義される不変 3 次元球 S^3 の安定（または不安定）多様体 $W^s(S^3)$(または $W^u(S^3)$) に正確に対応する．物理空間は $x > 0$ に対応することを指摘しておく．

S^3 は正規双曲的 (normally hyperbolic) でないことに注意しよう．縮退の原因は方程式 (3) の x と y の式の中の因子 x^3 である．だから標準的安定多様体定理はこの問題に適用できず、集合 $W^s(S^3)$ および $W^u(S^3)$ が滑らかな多様体の構造を持つかどうか明らかでない．しかし Robinson の得た定理から、これらが実際滑らかな多様体であることがいえる．詳しくは次の通りである．

定理 2.1(Robinson[16])．(a) 方程式 (3) の $\{x \geq 0\}$ における S^3 の安定および不安定多様体は ($x = 0$ に境界を持つ)C^∞ 多様体である．その上 $W^s(S^3) \cap \{x > 0\}$ と $W^u(S^3) \cap \{x > 0\}$ は実解析的である．

(b) $\pi : S^3 \to S^3/\sim \cong S^2$ は軌道を商空間 $S^3/\sim \cong S^2$ の点に射影する Hopf 写像であるとし、$\alpha^* : W^u(S^3) \to S^2$ は $W^u(S^3)$ の各点を S^3 内のその α 極限に写す関数と上で定義した π の合成とする．同様に写像 $\omega^* : W^s(S^3) \to S^2$ を定義する．このとき α^* と ω^* は C^∞ 関数 (かつ $\{x > 0\}$ で実解析的) である．

この定理は平均法およびグラフ変換 (graph transform) を使って証明される．詳細は Robinson[16] を参照されたい．

3. 遷移鎖とアーノルド拡散

アーノルド拡散は高次元のハミルトン系に伴う非常に複雑なカオス的力学現象である．この現象の背後にある幾何学と機構を見るために次の形の近可積分ハミルトン系を考えよう．

$$H_\varepsilon(q,p,x,y) = F(q,p) + G(x,y) + \varepsilon H^1(q,p,x,y,t). \tag{4}$$

ここで (q,p,x,y) は $2(n+1)$ 次元シンプレクティック多様体 M 上の正準座標である．q と p は実数で $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ および $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ である．ε は微小パラメータ、H^1 は t に関して 2π 周期である．さらに作用-角座標 $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, I_1, I_2, \ldots, I_n)$ を見つけることができて式 (4) が以下の形になると仮定する．

$$\begin{aligned} H_0 &= F(q,p) + G(x,y) = F(q,p) + \sum_{i=1}^{n} G_i(I_i), \\ H_\varepsilon &= H_0(q,p,I) + \varepsilon H^1(q,p,\theta,I,t). \end{aligned} \tag{5}$$

ここで H^1 は $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ および t に関して 2π 周期である．また非縮退条件

$$\Omega_i(I_i) = \frac{\partial G_i(I_i)}{\partial I_i} \neq 0,$$

が相空間のある領域で成り立つことも仮定する．

ハミルトン関数 (4) および (5) における摂動は周期的に時間に依存するから、系をシンプレクティック写像に帰着させるのが都合よい．このために $\{(q,p,\theta,I,t) | t = t_0 \in [0, 2\pi)\}$ で定義される大域的横断面 Σ^{t_0} を固定する．$\Pi : \Sigma^{t_0} \to \Sigma^{t_0}$ は Σ^{t_0} 上に定義されたポアンカレ写像とする．以下の議論は写像 Π および横断面 Σ^{t_0} に限られる．

$\varepsilon = 0$ ならハミルトン系 (5) は完全可積分である．ここでハミルトン関数 $F(q,p)$ が双曲サドル点 (q_0, p_0) を結ぶホモクリニック軌道 $\gamma = (\overline{q}(t), \overline{p}(t))$ を持つと仮定する．だから H_0 に対するハミルトン系は横断面 Σ^{t_0} 上に次式で与えられる不変 n 次元トーラス $T(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ の n パラメータ族を持つ．

$$\begin{array}{lll} I_i = h_i = \text{一定}, & & i = 1, 2, \ldots, n \\ t = t_0, & \theta_i \in [0, 2\pi), & i = 1, 2, \ldots, n \\ q = q_0, & p = p_0. & \end{array} \tag{6}$$

トーラス $T(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ はそれ自身が $(n+1)$ 次元ホモクリニック多様体

$$\begin{array}{lll} I_i = h_i & i = 1, 2, \ldots, n & \\ t = t_0, & \theta_i \in S^1 & \\ q = q(s), & p = \overline{p}(s), & s \in \mathbf{R}, \end{array}$$

によって結ばれている．このホモクリニック多様体は n 次元トーラス $T(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ の安定多様体であり不安定多様体でもある．

$\varepsilon \neq 0$ なら系ははるかに複雑になる．われわれが興味を持っているのは上の不変多様体と対応する安定および不安定多様体が小さな摂動のもとでどう変わるかである．まず断面 Σ^{t_0} 上で $p = p_0, q = q_0$ と置いて得られる $2n-2$ 次元不変多様体 N_0 が正規双曲的であることに注意する．不変多様体理論により、正規双曲不変多様体は小さな摂動のもとで生き残る．だから $\varepsilon \neq 0$ が小さいとき、N_0 は摂動を受けて Σ^{t_0} 内で近くの不変多様体たとえば N_ε になる．簡単にわかるように、N_ε 上に定義されるポアンカレ写像はシンプレクティックである．すなわち、N_0 上で定義された不変非縮退 2-形式がある．事実、この 2-形式は Σ^{t_0} 上の正準 2-形式から N_ε の包含写像によって誘導される．非縮退なのは非縮退 2-形式からの摂動だからである．ここで KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser) 理論が不変多様体 N_ε に適用できる．非縮退条件 $\Omega_i(I_i) = \partial G_i(I_i)/\partial I_i \neq 0$ を仮定すると、非共鳴不変トーラス $T(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ の大多数は小さな摂動のもとで生き残り、摂動を受けて近くのトーラス $T_\varepsilon(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ になる．

生き残っている不変トーラス $T_\varepsilon(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ を考えよう．$T_\varepsilon(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ の安定および不安定多様体が存在し、ε とともに滑らかに変わることは簡単に示せる．$\varepsilon = 0$ のときこれら 2 つの多様体は一致する．$\varepsilon \neq 0$ なら、安定および不安定多様体は典型的には非常に複雑な仕方で交わる．ラグランジュ交差理論 (Arnold[4], Weinstein[20]) の示すところによれば、これら 2 つの多様体は交わるはずであり、この交差が横断的であるかどうかを示すのに、ときにメルニコフの方法 [12,2,9] が使える．

ある不変トーラス $T_\varepsilon(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ の安定および不安定多様体が、ある点で横断的に交わっていると仮定する．このとき λ 補題より、異なる交点が無数にあり、複雑な力学が得られる．これは双曲不動点あるいは周期点の安定および不安定多様体の横断的交差から生じるホモクリニック絡み合い (tangle) に似ている．実際にはもっと複雑な、いわゆるアーノルド拡散と呼ばれる現象がこの場合生じる．

アーノルド拡散の基本的機構は遷移トーラスと遷移鎖である．不変トーラス $T_\varepsilon(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ が <u>遷移トーラス</u> と呼ばれるのは、その安定多様体と不安定多様体がある点で横断的に交わるときである．<u>遷移鎖</u> とは、遷移トーラスの列 $T_\varepsilon^1, T_\varepsilon^2, \ldots, T_\varepsilon^k$ であって、任意の $1 \leq i < k$ に対して、T_ε^i の安定多様体が T_ε^{i+1} の不安定多様体と横断的に交わり、T_ε^{i+1} の安定多様体が T_ε^i の不安定多様体と横断的に交わるものである．したがって λ 補題より、任意の $1 \leq i \leq j \leq k$ に対して、T_ε^i の安定多様体は T_ε^j の不安定多様体と横断的に交わり、T_ε^j の安定多様体は T_ε^i の不安定多様体と横断的に交わる．

遷移鎖の近くの軌道はまったくでたらめに (erratic) にふるまう．これらは遷移鎖内の不変トーラスの間を自由に動きまわる．これがアーノルド拡散の基本的現象である．この拡散のもうひとつの顕著な様相は、軌道の初期エネルギー H_0 が任意にしかも乱歩的に変化することである．だから摂動系はリャプーノフの意味で不安定である．これは自由度 1 の系と対照的である．自由度 1 の系では KAM 理論により、いくつかのゆるやかな非共鳴、非縮退条件のもとで、系は小さな周期的摂動を受けても安定である．

ε が十分小さければ、各遷移トーラスの近くで遷移鎖を構成できる．KAM 理論が示すところによれば、$\varepsilon \to 0$ のとき不変トーラスの集合は全測度を持つようになる．したがって各遷移トーラスの任意に小さな近傍に無限に多くの遷移トーラスが存在する．だから遷移トーラスの列を拾い上げて遷移鎖を構成するようにできる．しかし、この遷移鎖がどのくらい遠くまで行くかは明らかでない．これは摂動の規模に依存するように思える．摂動が大きくなるにつれて鎖はたくさんの断片に壊れるかもしれない．共鳴の近くで不変トーラスがどのように壊れる

かをもっと詳しく理解すれば、遷移鎖の破壊の背後に潜む複雑な力学が明らかになるかもしれない．

以下の数節ではこのアーノルド拡散の現象が平面三体問題に現われることを示す．これは上で記述したものとはやや異なるシナリオで生じる．また、なかんずく、アーノルド拡散が平面三体問題における振動、捕獲、脱出 (escape) 解の大きな類の存在を意味することを示す．

4. 運動方程式の階数降下 (reduction)

この論文では、m_1 が大きく、m_2 が小さく、m_3 がさらに小さい場合に制限し、また m_1 と m_2 の運動が円軌道に近い場合に制限する．このようにすれば、メルニコフ法のようないくつかの摂動技術が使える．この節では平面三体問題の運動方程式を階数降下して各種摂動が評価できるようにする．

もっと適当な運動方程式を得るために、はじめに新しい変数をいくつか導入する．

$$s = e^{i\theta}, \quad z = re^{i\phi},$$

とおく．ここで $\theta, r,$ および ϕ は実数である．一般性を失うことなく $\mu = m_1 + m_2 = 1$ と仮定する．式 (2) において x の高次の項を展開する．すると次を得る．

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\tfrac{1}{2}x^3 y, \\
\dot{y} &= -x^4 + x^6\rho^2 + m_2 g_1(x, r, \phi) + O(m_3, m_2^2), \\
\dot{\rho} &= m_2 g_2(x, r, \phi) + O(m_3, m_2^2), \\
\dot{\theta} &= x^4\rho, \\
\dot{z} &= w - x^4\rho z i, \\
\dot{w} &= -|z|^{-3}z - x^4\rho w i + O(m_3).
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで関数 $g_1(x, r, \phi)$ および $g_2(x, r, \phi)$ は以下のように定義される．

$$\begin{aligned}
g_1(x, r, \phi) &= x^4 + 2x^6 r\cos\phi + \frac{-x^4 + x^6 r\cos\phi}{(x^4 - 2x^2 r\cos\phi + 1)^{3/2}}, \\
g_2(x, r, \phi) &= -x^6 r\sin\phi + \frac{x^6 r\sin\phi}{(x^4 - 2x^2 r\cos\phi + 1)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

方程式は θ に依存しないことに注意する．だから θ に関する式は落とせるのである．

まず第三体の質量が無限小の場合を考えよう．$m_3 = 0$ と置けばいわゆる楕円制限三体問題が得られる．この場合 m_1 と m_2 の軌道はきちんと得られる．次の通りである．

$$\begin{aligned}
r &= \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\phi + \theta)}, \\
\phi + \theta &= \phi_0 + \theta_0 + a^{-3/2}(t + 2e\sin t) + O(e^2).
\end{aligned}$$

ここで

$$a = \left(\frac{-2h}{m_2(1-m_2)}\right)^{-1} \quad \text{および} \quad e = \left(1 + 2\frac{hC^2}{m_2^3(1-m_2)^3}\right)^{1/2}.$$

ここで h と C はそれぞれ系のエネルギーと角運動量である．一般性を失うことなく長さの単位を $a = 1$ となるようにつねに選べる．これは $h = -\frac{1}{2}m_2(1 - m_2)$ にしたのと同じことである．

$e=0$ のとき、つまり $2hC^2+m_2^3(1-m_2)^3=0$ のとき、得られる系はいわゆる円制限三体問題である．この問題の場合、系は Jacobi 積分 と呼ばれるもうひとつの積分を持つ．

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^4\rho^2-U-\rho=J. \tag{8}$$

ここで J は Jacobi 定数であり、U は m_1 と m_2 の重力場のポテンシャル関数である．

$$U=x^4+m_2x^2\left(-1-x^2r\cos\phi+\frac{1}{(1-2x^2r\cos\phi+x^4)^{3/2}}\right)+O(m_2^2).$$

上での議論を動機として、こんどは小さいけれども $e\neq 0$ および $m_3\neq 0$ なる完全な三体問題を考えよう．われわれの議論に合うような形に運動方程式を階数降下することに努める．まず、式 (8) を新しい変数 J の定義として使う．J は完全な三体問題ではもはや運動の定数ではない．

$$w=Re^{i\Phi},$$

とおけば、エネルギー積分と角運動量積分は次の形をとる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{r}&=m_2^{-1}(1-m_2)^{-1}h+O(m_3)=-\frac{1}{2}+O(m_3),\\ Rr\sin(\Phi-\phi)&=m_2^{-1}(1-m_2)^{-1}C+O(m_3)=\sqrt{1-e^2}+O(m_3).\end{aligned}$$

r と R に対する上の 2 つの式を ϕ と Φ によって解くことができて、

$$\begin{aligned}r&=r(\phi,\Phi,e)=1+O(m_3,e),\\ R&=R(\phi,\Phi,e)=1+O(m_3,e).\end{aligned}$$

こんどは独立時間変数を t から ϕ に置き換える．簡単な計算によれば

$$\frac{d\phi}{dt}=1-x^4\rho+O(m_3,e),$$

であり、また式 (7) を次の形に書き換えることができる．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\phi}&=-\frac{\frac{1}{2}x^3y}{1-x^4\rho}+O(m_3,e),\\ \frac{dy}{d\phi}&=\frac{-x^4+x^6\rho^2+m_2g_1(x,r,\phi)}{1-x^4\rho}+O(m_3,m_2^2,e),\\ \frac{dJ}{d\phi}&=m_2eF(x,y,J,\Phi,\phi)+O(m_3,m_2^2,e^2),\\ \frac{d\Phi}{d\phi}&=1+O(m_3,m_2,e).\end{aligned} \tag{9}$$

ここで F は x,y,J,Φ および ϕ の関数である．F の明示的な形は後で与える．

式 (9) で定義される流れは 4 次元空間のなかで時間に依存する．われわれは m_2,e および m_3 が小さい系の解に興味がある．この目的のために、さらに座標変換をするのが都合よい．次のようにおく．

$$ue^{(\phi-\psi)i}=e^{\phi i}+R^2r\sin(\Phi-\phi)ie^{\Phi i}. \tag{10}$$

u 関する上の式は解くことができて、$u = e + O(m_3)$ であることがわかる．u がゼロでなければ (これは $0 \leq m_3 \ll e$ ならつねに正しい)、ψ に関する式を解くことができる．ψ を独立変数として用い、Φ と置き換えよう．長ったらしい詳細を省いて、運動方程式を x, y, J および ψ と新しい時間変数 ϕ で書けば、

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\phi} &= -\frac{\frac{1}{2}x^3 y}{1 - x^4\rho} + O(m_3, e), \\
\frac{dy}{d\phi} &= \frac{-x^4 + x^6\rho^2 + m_2 g_1(x, r, \phi)}{1 - x^4\rho} + O(m_3, m_2^2, e), \\
\frac{dJ}{d\phi} &= \frac{-2m_2 e x^4 \sin\phi\cos\psi}{1 - x^4\rho}\left(-1 + \frac{3}{(1 - 2x^2\cos\phi + x^4)^{5/2}}\right) + O(m_3, m_2^2, e^2), \\
\frac{d\psi}{d\phi} &= \frac{1}{1 - x^4\rho} + O(e, m_3).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

上の式は ψ が (10) 式で解けるときだけ正しいことを注意しておく．これを成り立たせるために、$0 \leq m_3 \ll e$ を要請する．しかし、$m_3 = e = 0$ のとき運動方程式は ψ に依存しない．だからその値は任意に指定でき、しかも式 (11) はなお正しい．

5．制限三体問題

この節では $m_3 = e = 0$ の場合を議論する．この条件で得られる系は円制限三体問題または単に制限三体問題である．運動方程式は次のように簡単になる．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\phi} &= -\frac{\frac{1}{2}x^3 y}{1 - x^4\rho}, \\
\frac{dy}{d\phi} &= \frac{-x^4 + x^6\rho^2 + m_2 g_1(x, r, \phi)}{1 - x^4\rho} + O(m_2^2), \\
\frac{dJ}{d\phi} &= 0, \\
\frac{d\psi}{d\phi} &= \frac{1}{1 - x^4\rho}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

上の式でつねに $r = 1$ であり、

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 - \frac{m_2 x^2}{1 - x^4\rho_0}\left(-1 - x^2\cos\phi + \frac{1}{(1 - 2x^2\cos\phi + x^4)^{3/2}}\right) + O(m_2^2), \\
\rho_0 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^4(y^2 - 2x^2 - 2J)}}{x^4},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

である．ただし符号 $\pm$ は m_3 の相対的角速度に依存する．

さて J は運動の定数である．これは前に議論した制限三体問題のヤコビ積分である．上の x および y に対する方程式は ψ に依存せずしたがって独立に解ける．

$m_2 = 0$ なら上の問題はさらに二体問題に帰着する．すると $\rho = -J$ は運動の定数で、運動

方程式はさらに簡単な次の形になる．

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\phi} &= -\frac{\frac{1}{2}x^3y}{1+x^4J}, \\
\frac{dy}{d\phi} &= \frac{-x^4+x^6\rho^2}{1+x^4J}, \\
\frac{dJ}{d\phi} &= 0, \\
\frac{d\psi}{d\phi} &= \frac{1}{1+x^4J}.
\end{aligned} \tag{14}$$

上の方程式系は完全可積分である．次のようにおこう．

$$H(x,y,J) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4J^2 - x^2.$$

簡単に分かるように、$H(x,y,J)$ は運動の定数である．これは第三体のエネルギーをその質量 (無限小) で尺度変換したものである．Figure 1 は、ゼロでない J を固定して関数 $H(x,y,J)$ の $x-y$ 平面のレベル曲線を示している．

Figure 1

ベクトル場 (14) で与えられる流れを $x-y$ 面に射影すれば、原点 $(0,0)$ が流れの特異点であることがわかる．方程式の因子 x^3 のおかげで特異性は双曲的でない．しかし因子 x^{-3} で時間の尺度変換をすれば $(0,0)$ が双曲サドル点であることがわかる．サドル点をそれ自身に結ぶホモクリニックループがある．物理的にはこのホモクリニックループは二体問題の放物軌道に対応する．以後の解析は主としてこのホモクリニックループに基づいている．しかしこのホモクリニックループを時間変数 ϕ を用いて明示的に書き下すのは難しい．$x=\xi(\phi)$ および $y=\eta(\phi)$ はホモクリニックループ内の解であって $\eta(0)=0$ であるとする．このとき $\xi(\phi(t))$ および $\eta(\phi(t))$ は次のような明示的な形をとる．

$$\begin{aligned}
\xi(t,\rho) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(3t+\sqrt{9t^2+\rho^6}\right)^{2/3}+\left(3t-\sqrt{9t^2+\rho^6}\right)^{2/3}-\rho^2}}, \\
\eta(t,\rho) &= \begin{cases} \pm\sqrt{2\xi^2(t)-\xi^4(t)\rho^2} & \text{for} \quad x \geq 0, \\ \mp\sqrt{2\xi^2(t)-\xi^4(t)\rho^2} & \text{for} \quad x \leq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで $\pm$ は ρ の符号に依存する．後のために、ループは x 軸を $\sqrt{2}|J|^{-1}$ で横切ること、つまり $\xi(0)=\sqrt{2}|J|^{-1}$ であることを指摘しておく．とくに $J=\pm\sqrt{2}$ のとき、ループは x 軸を $x=1$ で横切る．

上の特異点、原点 O、は $x-y$ 面では実際にはベクトル場 (14) の周期軌道であることに注意する．

さて、(12) 式で与えられる流れで、m_2 が小さいけれどもゼロでない場合に戻ろう．はじめに J を固定し ψ の式を落とす．

任意の $\phi_0 \in [0,2\pi)$ に対して、Σ^{ϕ_0} は $\phi=\phi_0$ で定義される断面とする．Π は Σ^{ϕ_0} 上に定義された第一回帰写像 (ポアンカレ写像) であるとする．原点 O が Π の不動点であることは簡単にわかる．この不動点は縮退している．しかし、McGehee の定理 [11] または Robinson の定理 2.1[16] により、この場合も不動点への 1 次元安定多様体 $W^s(O)$ および 1 次元不安定多様体 $W^u(O)$ がある．さらに、これらの多様体は $x>0$ のとき実解析的である．Xia[21] によればいくつかの不連続なヤコビ定数 J の値を除いて、$W^s(O)$ と $W^u(O)$ は m_2 が小さいとき横断的に交わる．この横断的ホモクリニック軌道のそばにおいてこそ、e と m_3 の値がゼロではないけれども小さいとき、すなわち、完全な平面三体問題において、われわれはいわゆるアーノルド拡散の非常に複雑な力学と現象が現われることを示す．

制限三体問題の対称性より、異なるホモクリニック点が 2 つある．最初のものは断面 $\Sigma^{\phi_0=0}$ 上 x 軸上にあり、2 番目のものは $\Sigma^{\phi_0=\pi}$ 上 x 軸上にある．直観的には、無限小の質点 m_3 を m_1 と m_2 を結ぶ直線上に置いて、m_3 の速度を調節してその軌道が ω 放物的になるようにできる．対称性により、m_3 の軌道は α 放物的でもあるから、無限遠 (われわれの座標では原点) における周期軌道へのホモクリニック軌道である．直線上に 3 粒子を配置する 2 つの異なるやり方から 2 つの異なるホモクリニック点が得られる (Fig.2 参照)．p および $\overline{p}$ を第一および第二のホモクリニック点とし、γ および $\overline{\gamma}$ をそれらの軌道とする．後のために、p の軌道 γ が二体問題の放物軌道 $(\xi(\phi),\eta(\phi)), -\infty<\phi<\infty$ によってすべての時間にわたって一様に近似できることを指摘しておく．同様に、$\overline{p}$ の軌道 $\overline{\gamma}$ も $(\xi(\phi+\pi),\eta(\phi+\pi))$ によって $-\infty<\phi<\infty$ のすべてにわたって一様に近似できる．Xia[21] の結果により、いくつかの不連続なヤコビ定数 J の値を除いて、また小さな m_2 に対して、ホモクリニック軌道 γ は横断的である．安定および不安定多様体の解析性により、$\overline{\gamma}$ もすべての小さな m_2 の値に対してまた J のある不連続集合を除いて横断的である．

Figure 2

R は小さな長方形で、頂点はホモクリニック点 p 上にあり、2 つの辺は $W^s(O)$ と $W^u(O)$ の一部であるとする (Fig.3 参照)．Π は定義される限り第一回帰写像であるとする．

点 $q\in R$ に対して、$k=k(q)$ は $\Pi^k(q)\in R$ なる最小の正整数とする (ただし存在するとして)．このような $k>0$ が存在する点 $q\in R$ すべての集合を D とする．次のようにおく．

$$\tilde{\Pi}(q)=\Pi^k(q) \quad \text{for all} \quad q\in D.$$

この写像 $\tilde{\Pi}$ は、R に対する Π の横断写像と呼ばれる．D は空でない集合であり、さらに無限に多くの記号からなる推移 (shift) 同相写像を D に埋め込めることが示せる．もっと正確には、次の古典的ホモクリニック点定理が成り立つ (Moser[13] 参照)．

Figure 3

定理 5.1. 横断写像 $\tilde{\Pi}$ の不変部分集合 $I \subset D$ が存在して集合 $S = \mathbf{N}^Z$(無限個の記号上の両無限列の空間) に同相であり、また I 上の横断写像 $\tilde{\Pi}$ は S 上の推移写像に位相共役である．換言すれば、τ が同相写像 $\tau : S \to I$ であって、σ が S の推移写像であるとする．このとき次が成り立つ．

$$\tilde{\Pi}\tau = \tau\sigma.$$

$\phi_0 = 0$ なる横断面 Σ^{ϕ_0} を固定しよう．この横断面上で、対称性により、横断的ホモクリニック点 p は x 軸上にある．事実、安定または不安定多様体に属する点で x 軸上にある任意の点はホモクリニック軌道を生じる．後のために、任意の $\varepsilon > 0$ および正整数 k に対して、原点の近傍に無限に多くのホモクリニック点があって、その軌道は p の軌道の ε 近傍にあり、p の近くを $2k$ 回通過することを指摘しておく．

この論文全体を通して、t の代わりに ϕ を独立時間変数として使うことを強調しておく．

任意の正整数 n に対して p_n は I の点であって定理 5.1 の記号列 $(\cdots nnnn, nnn \cdots)$ に対応するとし、γ_n は流れの場合の対応する軌道であるとする．これらの軌道は無限個あって、$n \to \infty$ のとき $p_n \to p$ である．各 n に対して p_n は写像 Π に関して双曲的であり、この周期軌道 p_n の滑らかな 1 次元安定多様体 $W^s(p_n)$ および滑らかな 1 次元不安定多様体 $W^u(p_n)$ がある．流れの滑らかさおよび定理 5.1 の不変集合 I の構造より、n が十分大きければ p_n の安定および不安定多様体は局所的には、ホモクリニック軌道 p_0 の近くの O の安定多様体 $W^s(O)$ および不安定多様体 $W^u(O)$ に非常に近い (C^1 位相で)．その上、$W^s(p_n)$ は $W^u(O)$ と横断的に交わり、$W^u(O)$ は $W^s(O)$ と横断的に交わり、$W^s(O)$ は $W^u(p_n)$ と横断的に交わる．したがって λ 補題 (inclination lemma) より、すべての大きな n に対して $W^u(p_n)$ と $W^s(p_n)$ は横断的に交わる．

n を大きくとって周期解 p_n を固定する．簡単にわかるように、第一回帰写像 Π での p_n の周期は n であり、横断写像 $\tilde{\Pi}$ での周期は 1 である ($\Pi^n = \tilde{\Pi}$ であったことを思いだそう)．

こんどは式 (12) の完全な相空間を考え、方程式の角変数 ψ を考慮に入れよう．この状況設

定では、上の周期軌道の大多数はもはや周期的ではなく、むしろ準周期解に対応する．Ω_n は次式で与えられる集合とする．

$$\Omega_n = \{(x, y, J, \psi, \phi) | (x, y) = p_n(J); \phi = 0; \psi \in S^1; J \in T \subset \mathbf{R}\}.$$

ここで T は実数直線の区間 $T = (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ で、$\delta_2 > \delta_1 > 0$ は小さい．δ_1 と δ_2 の値は後で決める．このとき Ω_n は $\tilde{\Pi}$ の不変集合であり、正規双曲的である．$\tilde{\Pi}_n$ は $\tilde{\Pi}$ を集合 Ω_n に制限した写像とする．$\delta_2 > \delta_1 > 0$ が小さいときこの写像 $\tilde{\Pi}_n$ がねじれ写像であることを示そう．円環上のねじれ写像は各同心円を一様に回転する面積保存写像であって、回転量は同心円の半径とともに単調に変わるような写像であることを思いだそう．

$J \in T$ と $\psi \in S^1$ を集合 Ω_n の局所座標として使える．

補題 5.1. 大きな n を固定する．$\delta_2 > \delta_1 > 0$ および $\varepsilon > 0$ があって、すべての $C \in J = (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ および $0 < m_2 \le \varepsilon_0$ に対して、Ω_n 上に定義される写像 $\tilde{\Pi}$ は実解析的ねじれ写像である．もっと正確に言えば、$f_n(C)$ が

$$\tilde{\Pi}_n(J) = J, \quad \tilde{\Pi}_n(\psi) = \psi + f_n(J);$$

なる関数であれば、このときすべての $J \in T$ に対して $df_n(J)/dJ \neq 0$ である．

証明. (14) 式より、$\tilde{\Pi}_n(J) = J$ および

$$\tilde{\Pi}_n(\psi) = \int_0^{2n\pi} \frac{1}{1+x^4 J} d\phi + \psi,$$

がでる．ここで x は周期軌道 γ_n に沿って評価する．

上の積分を評価するのは、n が大きいときとくに難しい．しかし、m_2 が十分小さいとき γ_n がホモクリニックループに近いという事実が使える．この目的のために、次式で新しい変数を導入しよう．

$$\mathbf{v} = (1 - x^2\rho^2)\mathbf{s} - y\rho i\mathbf{s}. \tag{16}$$

$\mathbf{v}$ は $m_2 = 0$ なら運動の定数であり、次のように簡単に計算できる．

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\phi} = \frac{-2m_2 x^2 \rho g_2(x, r, \phi)\mathbf{s} + m_2(\rho g_1(x, r, \phi) + y g_2(x, r, \phi)) i\mathbf{s}}{1 - x^4\rho} + O(m_2^2). \tag{17}$$

$\alpha \in S^1$ をベクトル $\mathbf{v}$ と x 軸の間の角度とする．つまり $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|e^{\alpha i}$．単刀直入に計算すると次が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\phi} = & \frac{2m_2 x^2\rho^2 y g_2(x, r, \phi) + m_2(1 - x^2\rho^2)(\rho g_1(x, r, \phi) + y g_2(x, r, \phi))}{(y^2\rho^2 + (1 - x^2\rho^2)^2)(1 - x^4\rho)} + O(m_2^2) \\ = & \frac{-m_2(1 + x^2)x^4 y \sin\phi + m_2(1 - x^2\rho^2)\rho x^4(1 + 2x^2\cos\phi)}{(y^2\rho^2 + (1 - x^2\rho^2)^2)(1 - x^4\rho)} \\ & - \frac{m_2 x^4[(1 + x^2\rho^2) y \sin\phi + (1 - x^2\rho^2)p(1 - x^2\cos\phi)]}{(1 - 2x^2\cos\phi + x^4)^{3/2}(y^2\rho^2 + (1 - x^2\rho^2)^2)(1 - x^4\rho)} + O(m_2^2). \end{aligned} \tag{18}$$

$m_2=0$ なら α は運動の定数である．m_2 が小さいとき、$\Delta\alpha(\gamma)$ はホモクリニック軌道 γ に沿っての α の変分、すなわち、$\Delta\alpha(\gamma)$ は γ に沿っての m_2 の一次までの α の変化、とする．$\Delta\alpha(\gamma)$ は上の式を積分して得られる．

$$\Delta\alpha(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\begin{pmatrix} 2m_2x^2\rho^2yg_2(x,r,\phi)+m_2(1-x^2\rho^2) \\ \qquad\times(\rho g_1(x,r,\phi)+yg_2(x,r,\phi)) \end{pmatrix}}{(y^2\rho^2+(1-x^2\rho^2)^2)(1-x^4\rho)}d\phi+O(m_2^2).$$

ここで $p=-J$ であり、x と y はホモクリニック軌道 γ に沿って評価する．m_2 の 1 次までなら、Fig.1 に示されるように x と y の値は二体問題の放物解によって近似できる．$x=\xi(t,\rho), y=\eta(t,\rho)$ は放物解の軌道であって、$\xi(t,\rho)=\xi(-t,\rho)$ かつ $\eta(t,\rho)=-\eta(-t,\rho)$ とする．このとき、次を得る．

$$\begin{aligned}\Delta\alpha(\gamma)= \quad & \int_{-\infty}^{\infty}-m_2(1+\xi^2\rho^2)\xi^4\eta\sin(t-\theta)\\ & +m_2(1-\xi^2\rho^2)\rho\xi^4(1+2\xi^2\cos(t-\theta))dt\\ & +\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_2\xi^4(1+\xi^2\rho^2)\eta\sin(t-\theta)}{(1-2\xi^2\cos(t-\theta)+\xi^4)^{3/2}}dt\\ & -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_2\xi^4(1-\xi^2\rho^2)\rho(1-\xi^2\cos(t-\theta))}{(1-2\xi^2\cos(t-\theta)+\xi^4)^{3/2}}dt+O(m_2^2).\end{aligned} \tag{19}$$

ここで θ は次の積分で与えられる．

$$\theta(t,\rho)=\int_0^t\xi^4(t,\rho)\rho dt. \tag{20}$$

$\xi=\sqrt{2}|J|^{-1}-2\sqrt{2}t^2/|J|^{-7}$ に注意すれば、(19) の積分は $J=\sqrt{2}$ のとき非有界であることがわかり、ただちに $\delta_2>\delta_1>0$ が十分小さいときすべての $J\in T=(\sqrt{2}+\delta_1,\sqrt{2}+\delta_2)$ に対して、$\Delta\alpha(\gamma)\neq 0$ が出る．また簡単にわかるように、$\delta_2>\delta_1>0$ を小さく選んで、$\Delta\alpha(\gamma)$ の J に関する微分がすべての $J\in T$ に対して非ゼロにできる．

後の参考のために、ある $c_1\neq 0$ に対して $\Delta\alpha(\gamma)\sim c_1\log(J-\sqrt{2})$ であることを指摘しておく．

補題の証明に戻ろう．$\Delta\psi(\gamma_n)$ は γ_n に沿っての ψ の変分であるとする．このとき $\tilde{\Pi}_n(\psi)=\psi+\Delta\psi(\gamma_n)$ および

$$\Delta\psi(\gamma_n)=\int_0^{2n\pi}\frac{1}{1-x^4\rho}d\phi=\int_0^{2n\pi}\frac{x^4\rho}{1-x^4\rho}d\phi \mod(2\pi),$$

である．ここで x は周期軌道 γ_n に沿って評価する．$\Delta\theta(\gamma_n)$ は周期軌道 γ_n に沿っての θ の変分であるとする．すると次が成り立つ．

$$\Delta\theta(\gamma)=\int_0^{2n\pi}\frac{x^4\rho}{1-x^4\rho}d\phi.$$

ここでも x は γ_n に沿って評価する．したがって $\Delta\psi(\gamma_n)=\Delta\theta(\gamma_n)$ である．γ_n はホモクリニック軌道 γ によって近似できるから、

$$\Delta\psi(\gamma_n)=\Delta\theta(\gamma_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4\rho}{1-x^4\rho}d\phi+\varepsilon_n,$$

である．ここで $n \to \infty$ のとき $\varepsilon_n \to 0$ であり、x はホモクリニック軌道 γ に沿って評価する．α の定義 (式 (16)) により、$x = y = 0$ なら $\alpha = \theta$ である．ゆえに次を得る．

$$\Delta\psi(\gamma_n) = \Delta\theta(\gamma_n) = \Delta\alpha(\gamma) + \varepsilon_n + O(m_2^2).$$

したがって $\delta_2 > \delta_1 > 0$ および $m_2 > 0$ が十分小さく n が十分大きいとき、$\Delta\psi(\gamma_n)(J)$ および J に関するその微分はすべての $J \in (\sqrt{2} + \delta_1, \sqrt{2} + \delta_2)$ に対してともに非ゼロである．

これで補題が証明された． □

次の節では完全な三体問題を考える．われわれの問題設定と座標の選び方により、完全な平面三体問題は制限三体問題を m_3 と e が小さい場合へ単純に摂動したものである．3 節で記述したシナリオにしたがい、アーノルド拡散が $x = y = 0$ における周期解に対して生じると期待できそうである．ところが都合の悪いことに、これらの軌道は、摂動を受けても生成的なハミルトン系の場合と違って準周期解にならないという意味でまったく縮退している (ここで ψ と ϕ は $1:1$ 共鳴にロックされている)．だから集合 $\{x = y = 0\}$ 上には遷移トーラスがない．これは三体問題における集合 $\{x = y = 0\}$ の近くでの摂動の性質のためである．しかし、これから示すように、アーノルド拡散は少し違ったシナリオのもとで生じる．

任意の実数 J^* に対して T_{J^*} はポアンカレ写像の不変曲線 $J = J^*$ を表わすとする．T_{J^*} の軌道は相空間の不変トーラスに対応する．

6．アーノルド拡散と平面三体問題の非可積分性

この節では m_3 と e が小さい場合の完全な平面三体問題を考える．ふたたび $0 < m_3 \ll e$ と仮定する．はじめに前節の不変集合 Ω_n が m_3 と e による摂動のもとで保存されること、さらにこの不変集合上の不変トーラスのほとんどが生き残ることを示そう．

補題 6.1. $e > 0$ が十分小さければ、Ω_n は摂動のもとで保存され、近くの不変多様体 Ω_n^e になる．その上、Ω_n^e に制限した横断写像 $\tilde{\Pi}_n$ は面積保存微分同相である．

証明. Ω_n が生き残ることを示すのは簡単である．すなわち、不変多様体 Ω_n は正規双曲であり、正規双曲不変多様体は小さな摂動のもとで生き残る．だから Ω_n は摂動を受けて近くの不変多様体 Ω_n^e に変わる．$\tilde{\Pi}_n$ が面積保存であることを示すために、平面三体問題はハミルトン系であること、したがって $\tilde{\Pi}_n$ はシンプレクティックであり、系に付随する閉不変微分 2-形式 ω があることに注意する．この形式を不変部分多様体 Ω_n^e に制限したものを ω_n とする．ω_n は Ω_n 上への制限写像 $\tilde{\Pi}_n$ のもとで不変である．簡単にわかるように、この 2-形式 ω_n は非縮退である．これは非縮退の形式からの摂動だからである．ゆえに $\tilde{\Pi}_n$ は Ω_n^e 上の面積保存写像である．事実、系のハミルトン性より、$\tilde{\Pi}_n$ は Ω_n^e 上で完全シンプレクティックである．これで補題が証明された．

ここで KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser) 理論を不変多様体 Ω_n^e に適用できる．Ω_n^e 上の局所座標として J と ψ を引続き使えば、写像 $\tilde{\Pi}_n$ は次の形をとる．

$$\tilde{\Pi}_n(J) = J + O(m_3, e), \quad \tilde{\Pi}_n(\psi) = \psi + f_n(J) + O(m_3, e).$$

任意の実数 $J \in T$ に対して、非縮退と非共鳴の条件が成り立てば、Ω_n 上の不変トーラス T_J は、$e > 0$ と $m_3 > 0$ が十分小さいとして近くの不変トーラス T_J^e に変わり、T_J^e は非摂動トー

ラス T_j と同じ振動数を持つ．その上、Ω_n 上の不変トーラスの大部分 (リュベーグ測度の意味で) は小さな摂動のもとで生き残る．しかし、周期解の連続族を含む共鳴トーラスは一般に交互に現われる楕円および双曲周期解の有限集合に壊れ、これらの周期軌道の安定多様体と不安定多様体は通常横断的に交わって複雑な力学をつくり、「ストカスティック層」(stochasitic layer) と呼ばれるカオス領域をつくる．これらのストカスティック層は逐次的な平均操作で取り除くことができるから、これらの層の厚さは摂動パラメータ e の任意のべきよりも小さい．事実、これらのストカスティック層は一般に指数関数的に小さい．

非摂動トーラス T_J に対して 2 次元安定多様体 $W^s(p_n) \times T_J$ および 2 次元不安定多様体 $W^u(p_n) \times T_J$ がある．不変多様体理論によれば、これらの多様体は小さな摂動のもとで生き残る．すなわち、e が十分小さければやはりもとの非摂動安定および不安定多様体の近くに、不変トーラス T_J^e の 2 次元安定多様体 $W^s(T_J^e)$ と 2 次元不安定多様体 $W^u(T_J^e)$ がある．

われわれの主たる関心はこれらの多様体が互いにどのように交わっているかにある．$W^s(p_n)$ と $W^u(p_n)$ が Σ^{s_0} 上で横断的に交わっていること、そのため非摂動多様体 $W^s(T_J)$ および $W^u(T_J)$ が円内で交わること、また $W^s(T_{J_1})$ および $W^u(T_{J_2})$ が $J_1 \neq J_2$ のとき交わらないことを知っている．しかし、これから示すように、$|J_1 - J_2|$ が十分小さければ、摂動多様体 $W^s(T_{J_1}^e)$ および $W^u(T_{J_2}^e)$ は横断的に交わる．この横断的交差はアーノルド拡散を引き起こす．

いまや次の定理を述べることができる．

定理 6.1. 十分大きな n と十分小さな m_2 を固定する．$\delta_2 > \delta_1 > 0$、$e_0 > 0$ および $\varepsilon_1 > 0$ が存在して次が成り立つ．$J^* \in T = (\sqrt{2} + \delta_1, \sqrt{2} + \delta_2)$ とし、不変トーラス T_{J^*} は生き残って $T_{J^*}^e$ になるとする．このとき、すべての $0 < e < e_0$ および $0 < m_3 < \varepsilon_1$ に対して、$T_{J^*}^e$ の安定多様体 $W^s(T_{J^*}^e)$ と不安定多様体 $W^u(T_{J^*}^e)$ はある点において交わり、その交差は横断的である．その上、$\varepsilon > 0$ が存在して $|J_1 - J_2| \leq \varepsilon$ および $J_1, J_2 \in T$ なら $W^u(T_{J_1})$ は $W^s(T_{J_2})$ と横断的に交わる．

これらの不変トーラスの安定および不安定多様体が横断的に交わることの証明は不変集合 $S = \{x = y = 0, J \in \mathbf{R}, \psi \in S^1\}$ の近くの流れの性質に基づいており、また p_n の軌道が p の軌道に近いという事実にも基づいている．この定理の証明は後の節で行なう．

知られているもの以外に n 体問題に積分があるかどうかという問題は天体力学の研究で重要な役割を果してきた．平面三体問題において、上で示したようにアーノルド拡散が存在することは、この問題の力学の複雑さを示している．これはまた平面三体問題にこれ以上実解析的積分がないことも示している．

定理 6.2. 平面三体問題は、直線運動量、角運動量およびエネルギー積分以外に実解析的な関数的に独立な積分がないという意味で非可積分である．

この定理は古典的なポアンカレ [15] の定理の拡張になっている．ポアンカレの定理によれば、平面三体問題には実解析的な積分で三体の質量に関しても実解析的な積分は知られているもの以外にない．

7. 無限遠における拡散と拡散的振動解

この節では次の集合を考える．

$$S = \{x = y = 0; J \in \mathbf{R}; \psi \in S^1; \phi = 0\}.$$

物理空間において集合 S は m_3 が速度ゼロで無限遠にあることに対応する．われわれは主としてこの集合の近くの解、とくにこの集合の $J \in T$ なる部分の近くの解に興味を持っている．

はじめに S の各点はポアンカレ写像 Π の不動点であることを指摘しておく．定理 2.1 により、各点は 1 次元安定多様体と 1 次元不安定多様体を持つ．両方の多様体とも $x>0$ では実解析的である．

q を S の点とする．q の不安定多様体 $W^u(q)$ は、$x>0$ なる断面 $\Sigma^{\phi_0}|_{\phi_0=0}$ 上の 1 次元実解析多様体である．集合 S の安定多様体 $W^s(S)$ は余次元 1 である．したがって $W^u(q)$ は $W^s(S)$ とある点で横断的に交わり得る．実際、以前に見たように、$m_3=e=0$ かつ $J \in T$ のときこれが成り立っている．$W^u(q)$ と $W^s(S)$ が横断的に交わるとし、q^* が $W^u(q)$ と $W^s(S)$ の横断的交点であるとする．q^{**} は S の点で $q^* \in W^s(q^{**})$ なるものとする．ここで開部分集合 $D \subset S$ から S への写像 d を $d(q)=q^{**}$ で定義する．$W^u(q)$ と $W^s(S)$ の横断的交点はたくさんあるから、写像 d は横断的交点 q^* の選び方に依存する．q^* において交差は横断的であるから、q^* が q に連続的に依存するように交点 q^* を選ぶ．これにより、写像 d は定義されているところではどこでも連続で可微分であることが保証される．

以下では $W^u(q)$ と $W^s(S)$ の横断的交点の選び方を (可能なら) ホモクリニック点 p から接続されたものに固定する．次の補題を証明しよう．

補題 7.1. $D_0 \subset S$ を次の集合とする．

$$D_0 = \{x=y=0; J \in T \subset (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2); \psi \in S^1; \phi = 0\}.$$

1. 正数 $\delta_2 > \delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2,$ および ε_3 があって、$J \in T, 0 < m_2 \leq \varepsilon_1, 0 \leq m_3 \leq \varepsilon_2$ および $0 \leq e \leq \varepsilon_3$ なら、写像 d は D_0 上でうまく定義されている．すなわち、$D_0 \subset D$ である．
2. $m_3=e=0$ なら、写像 d は D_0 上の滑らかなねじれ写像である．
3. 写像 d は D 上で面積保存である．

証明. Xia[21] より、$m_3=e=0$ のとき、点 $q \in S$ の安定多様体と不安定多様体は、J のほとんどすべての値および小さな m_2 の値に対して $x-y$ 面で横断的に交わる．とくに、$\delta_2>\delta_1>0$ および $\varepsilon_1>0$ が存在して、$J \in (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ および $0<m_2 \leq \varepsilon_1$ なら $W^s(q)$ と $W^u(q)$ は $x-y$ 面で横断的に交わる．これから $W^u(q)$ が $W^s(S)$ と横断的に交わることが出る．したがって m_3 と e が小さいとき、すべての $J \in T$ に対して $W^u(q)$ と $W^s(S)$ が横断的に交わることがわかる．これで補題の最初の部分が証明された．

$m_3=e=0$ のとき写像 d は次の形をとる．

$$d(J)=J \quad \text{および} \quad d(\psi)=\psi+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4J}d\phi.$$

ここで x は横断的ホモクリニック軌道 γ に沿って評価する．補題 5.1 の証明によれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4J}d\phi=\Delta\alpha(\gamma)+O(m_2^2),$$

であり、$\Delta\alpha(\gamma)$ も J に関するその微分も、δ_1 と δ_2 がうまく選ばれていればすべての $J \in T$ に対して非ゼロである．したがって、m_2 が小さいとき d は D_0 上の非縮退ねじれ写像である．これで補題の第二の部分が証明された．

d が面積保存であることを示すために、ふたたびこの問題のハミルトン性に訴えねばならない．ω を系の非縮退閉シンプレクティック形式とする．ω は Σ^0 上の写像 Π のもとで保存する．$\tilde{\omega}$ を S への ω の制限とする．$\tilde{\omega}$ は非縮退である．$d_*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ を示す必要がある．D^* は d の定義におけるすべての q^* の集合とする．簡単にわかるように、D^* は D に微分同相である．d_1 を D^* から D への微分同相とする．このとき d_1 は $n \to \infty$ のときの写像 Π^{-n} の極限で与えられる．同様に D^* は $d(D)$ に微分同相である．$d_2 : D^* \to d(D)$ は $n \to \infty$ のときの Π^n の極限で与えられる微分同相写像とする．Π がシンプレクティック形式を保存するから d_1 も d_2 もシンプレクティック形式 ω を保存する．したがって $d = (d_1)^{-1}d_2$ は ω を保存する．ゆえに $d_*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ である．事実、d は完全 (exact) シンプレクティックである．これで補題が証明された． □

さて KAM 理論が $D \subset S$ 上の写像 d に適用できる．$m_3 = e = 0$ なら D 上 $J = J^*$ なる各円は不変円である．これらの不変円のうちディオファントス条件を満たす回転数ものは小さな e と m_3 のもとで D_0 上に生き残る．定理 2.1 より各生き残り不変円 C_{J^*} は 2 次元安定多様体 $W^s(C_{J^*})$ と 2 次元不安定多様体 $W^u(C_{J^*})$ を Σ^0 上の写像 Π に対して持つ．写像 d の定義によりこれら 2 つの多様体 $W^s(C_{J^*})$ と $W^u(C_{J^*})$ は円 $d_1^{-1}(C_{J^*})$ 内で交わる．以下の交差定理はこれら 2 つの多様体が実際 Σ^0 内の他のある点で交わることおよび交差が D_0 内のすべての不変円 C_{J^*} に対して横断的であることを述べている．

定理 7.1. $\delta_2 > \delta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ および ε_3 は補題 7.1 の正数とし、C_{J^*} は D_0 内で生き残る不変円とする．ε_2 と ε_3 が十分小さく選ばれ、$0 \leq m_3 \leq \varepsilon_2$ および $0 < e \leq \varepsilon_3$ なら、$W^s(C_{J^*})$ と $W^u(C_{J^*})$ はある点で横断的に交わる．その上、$\varepsilon > 0$ が存在して、$J_1, J_2 \in T$ かつ $|J_1 - J_2| \leq \varepsilon$ なら J_1 の安定多様体 $W^s(C_{J_1})$ は J_2 の不安定多様体 $W^u(C_{J_2})$ と横断的に交わる．

ここでも、この定理の証明を後の節に延期する．上の定理の帰結として、アーノルド拡散に似た、われわれが「擬アーノルド拡散」(pseudo Arnold diffusion) と呼ぶ、ある種の拡散が物理空間では無限遠に対応する集合 D_0 のまわりに現われる．アーノルド拡散においては、カオス力学を引き起こす基本的機構は遷移トーラスと遷移鎖であったことを思いだそう．上の定理の不変円はアーノルド拡散の遷移トーラスと同じ効果を持つ (以下の補題 8.1 参照)．この縮退した拡散からの面白い帰結として、平面三体問題の拡散振動解の類の存在が出る．n 体問題の<u>振動解</u>とは $t \to \infty$ のとき $\limsup \max r_{ij} = \infty$ かつ $\liminf \max r_{ij} < \infty$ なる解のことである．ただし r_{ij} は i 番目と j 番目の粒子間の距離である．<u>拡散振動解</u>とは遷移トーラスの間をカオス的に拡散する振動解のことである．

定理 7.2. 平面三体問題には振動解が存在する．われわれの記法で詳しく言えば、三体問題には、$t \to \infty$ のとき

$$\limsup |x| > 0 \quad \text{および} \quad \liminf |x| = 0,$$

なる解が存在する．その上、ω 極限集合が、定理 7.1 の遷移鎖内の不変曲線 $C_{J_1}, C_{J_2}, C_{J_3}, \ldots$ をすべて含む振動解がある．

同様に t が ∞ および $-\infty$ に近づくにつれて振動し、カオス的に拡散する解を構成できることを注意しておく．また捕獲および脱出解も同様なやり方で構成できる．

8. 定理群の証明

この節では定理 6.1、7.1 および 7.2 の証明を行なう．まず定理 7.1 を証明しよう．

定理 7.1 の証明.

C_{J^*} を D_0 内の不変曲線とする．$m_3 = e = 0$ なら J は運動の定数であり、この曲線は円 $J = J^*$ である．この円の安定および不安定多様体は円内で交わり、もちろんどの交差も横断的でない．しかし、交差は完全には縮退しておらず、関数 H の法線方向では交差は横断的である (Xia[21])．Lyapunov-Schmit の ruduction 法により、e と m_3 が小さいときに $W^s(C_{J^*})$ と $W^u(C_{J^*})$ の交差が縮退していないことを示すには、J の法線方向への交差の射影が、e と m_3 が小さいときにやはり非縮退であることを示せばよい．この目的のために J の変分 ΔJ を計算する必要がある．はじめに運動方程式から次を得る．

$$dJ/d\phi = \frac{-2m_2ex^4\sin\phi\cos\psi}{1-x^4\rho}\left(-1+\frac{3}{(1-2x^2\cos\phi+x^4)^{5/2}}\right)+O(m_2^2e, m_3, e^2).$$

m_2e の一次までの J の変分 ΔJ は、上の方程式を積分すれば得られる．まず γ に沿って D_0 の点からホモクリニック点 p までの J の変分を得たい．$\phi = 0$ のときの ψ の値を ψ_0 とする．このとき次を得る．

$$\begin{aligned}
\Delta J = {} & \int_{-\infty}^{0}\frac{-2m_2ex^4\sin\phi\cos\psi}{1-x^4\rho}\left(-1+\frac{3}{(1-2x^2\cos\phi+x^4)^{5/2}}\right)d\phi \\
= {} & \cos\psi_0\int_{-\infty}^{0}\frac{-2m_2ex^4\sin\phi\cos(\psi-\psi_0)}{1-x^4\rho} \\
& \times\left(-1+\frac{3}{(1-2x^2\cos\phi+x^4)^{5/2}}\right)d\phi \\
& +\sin\psi_0\int_{-\infty}^{0}\frac{2m_2ex^4\sin\phi\sin(\psi-\psi_0)}{1-x^4\rho} \\
& \times\left(-1+\frac{3}{(1-2x^2\cos\phi+x^4)^{5/2}}\right)d\phi \\
= {} & A\cos\psi_0+B\sin\psi_0.
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで積分はすべてホモクリニック軌道 γ に沿って行なう．上の式において最後の等式は A と B の定義になっている．γ の軌道を二体問題の放物軌道 (15) で近似すれば次を得る．

$$\begin{aligned}
A = {} & \int_{-\infty}^{0}\frac{-2m_2e\xi^4\sin\phi\cos(\psi-\psi_0)}{1+Jx^4}\left(-1+\frac{3}{(1-2\xi^2\cos\phi+\xi^4)^{5/2}}\right)d\phi \\
& +O(m_2^2e), \\
B = {} & \int_{-\infty}^{0}\frac{2m_2e\xi^4\sin\phi\sin(\psi-\psi_0)}{1+Jx^4}\left(-1+\frac{3}{(1-2\xi^2\cos\phi+\xi^4)^{5/2}}\right)d\phi \\
& +O(m_2^2e).
\end{aligned} \tag{22}$$

$J = \sqrt{2}$ であるから、上の積分は 2 つとも非有界である．したがって $\delta_2 > \delta_1 > 0$ は十分小さいとしてすべての $J \in T = (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ に対して、A と B はともに非ゼロである．後の参考のため、$J \to \sqrt{2}$ のとき、ある $c_2 \neq 0$ に対して $B \sim c_2(J-\sqrt{2})^{-2}$ であることを指摘しておく．

$D_0 \subset S$ を補題 7.1 のものとし、C_{J^*} を D_0 内の不変曲線とする．$J = h(\psi)$ を円 C_{J^*} の方程式とする．$h(\psi)$ は滑らかで、ψ に関し周期 2π である．$J = h_1(\psi)$ は写像 d_1^{-1} のもとでの $J = h(\psi)$ の像であるとする．この写像は前節の補題 7.1 の証明中で定義されている．写像 d_1 は S の点 q を、写像 d の定義内の $W^u(q)$ と $W^s(S)$ との横断的交点 q^* に写すことを思いだそう．上での計算から、$m_2 e$ の 1 次までの近似で、d_1^{-1} は次の形をとる．

$$d_1^{-1} : (J, \psi) \mapsto (J + A\cos(\psi + b) + B\sin(\psi + b), \psi + b).$$

ここで b はホモクリニック軌道 p に沿って $-\infty$ から 0 までの ψ の変分である．

$$b = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 - x^4\rho} d\phi = \frac{1}{2}\Delta\alpha(\gamma) + o(m_2^2 e) \neq 0.$$

$h(\psi)$ と $h_1(\psi)$ の間には次のような関係がある．

$$h_1(\psi) = h(\psi - b) + A\cos\psi + B\sin\psi + o(m_2 e).$$

同様に、$J = h_2(\psi)$ は写像 d_2^{-1} のもとでの $J = h(\psi)$ の像であるとする．この写像は前節の補題 7.1 の証明の中で定義されている．次の関係がある．

$$h_2(\psi) = h(\psi + b) + A\cos\psi - B\sin\psi + o(m_2 e).$$

写像 d の定義から $h_2(\psi) = h_1(\psi)$ である．したがって、次が成り立つ．

$$h(\psi - b) - h(\psi + b) + 2B\sin\psi = 0. \tag{23}$$

$h(\psi)$ は偶で ψ に関し周期 2π であるから、$h(\psi)$ を次のように cosine 級数にフーリエ展開できる．

$$h(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\psi).$$

この級数を式 (23) に代入して次を得る．

$$\begin{aligned} 2a_n \sin(nb)\sin(n\psi) = 0, \quad \text{for} \quad n \neq 1 \\ 2a_1 \sin b \sin\psi + 2b\sin\psi = 0. \end{aligned}$$

不変トーラスが m_2 に関して滑らかであることから $n \neq 1$ に対して $a_n = 0$ であり、また $a_1 = B/\sin b$ であるといえる．したがって次を得る．

$$h(\psi) = a_0 + \frac{B\cos\psi}{\sin b} + h.o.t.$$

次に、γ とは異なるホモクリニック軌道に沿っての J の変分を計算しよう．5 節で指摘したように、円制限三体問題には原点 O に対して別の対称的横断的ホモクリニック軌道がある．このホモクリニック軌道 $\overline{\gamma}$ はすべての $-\infty < \phi < \infty$ にわたって $x = \xi(\phi + \pi)$ および $y = \eta(\phi + \pi)$

によって一様に近似できる．$\Delta J(\overline{\gamma})$ をこのホモクリニック軌道 $\overline{\gamma}$ に沿っての J の変分とすれば、次を得る．

$$\begin{aligned}\Delta J(\overline{\gamma}) &= \int_{-\infty}^{\pi} \frac{-2m_2 e x^4 \sin\phi\cos\psi}{1-x^4\rho}\left(-1+\frac{3}{(1-2x^2\cos\phi+x^4)^{5/2}}\right)d\phi \\ &= \overline{A}\cos\psi_0+\overline{B}\sin\psi_0.\end{aligned} \tag{24}$$

ここで x と ψ の値はホモクリニック軌道 $\overline{\gamma}$ に沿ってとり、ψ_0 は $\phi=0$ のときの ψ の値である．ふたたび $\overline{\gamma}$ の軌道を近似して次を得る．

$$\begin{aligned}\overline{A} = &\int_{-\infty}^{0} \frac{2m_2 e\xi^4 \sin\phi\cos(\psi-\psi_0)}{1+Jx^4}\left(-1+\frac{3}{(1+2\xi^2\cos\phi+\xi^4)^{5/2}}\right)d\phi \\ &+o(m_2 e), \\ \overline{B} = &\int_{-\infty}^{0} \frac{-2m_2 e\xi^4 \sin\phi\sin(\psi-\psi_0)}{1+Jx^4}\left(-1+\frac{3}{(1+2\xi^2\cos\phi+\xi^4)^{5/2}}\right)d\phi \\ &+o(m_2 e).\end{aligned} \tag{25}$$

上の積分はともに $J=\sqrt{2}$ の近くで実解析的であることを指摘しておく．さらに式 (15) より、$A(J)=\overline{A}(\sqrt{-1}J)$ および $B(J)=\overline{B}(\sqrt{-1}J)$ である．$A(J)$ と $B(J)$ は定数ゼロでないから $\overline{A}(J)$ と $\overline{B}(J)$ は定数ゼロでない．

いまや C_{J^*} の安定および不安定多様体が横断的に交わることは簡単にわかる．前節の d, d_1 および d_2 の定義において、$W^s(q)$ と $W^u(S)$ の横断的交差の選択を固定してホモクリニック点 p からの接続点とした．この交差を p の代わりに $\overline{p}$ から接続した点と選べば、たとえば $\overline{d}, \overline{d}_1$ や $\overline{d}_2$ のように同様な写像を得るはずである．$J=\overline{h}_1(\psi)$ を写像 $\overline{d}_1^{-1}$ のもとでの不変曲線 C_{J^*} の像とする．このとき $\overline{h}_1(\psi)$ は次のように近似できる．

$$\begin{aligned}\overline{h}_1(\psi) &= h(\psi-\overline{b})+\overline{A}\cos\psi+\overline{B}\sin\psi+O(m_2^2 e) \\ &= a_0+\frac{B}{\sin b}\cos(\psi-\overline{b})+\overline{A}\cos\psi+\overline{B}\sin\psi+O(m_2^2 e).\end{aligned}$$

ここで $\overline{b}$ はホモクリニック軌道 $\overline{\gamma}$ に沿っての ψ の変分であり、

$$\overline{b}=\int_{-\infty}^{\pi}\frac{1}{1-x^4\rho}d\phi=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+J\xi^4(\phi)}d\phi+O(m_2^2,e,m_3),$$

である．同様に、$J=\overline{h}_2(\psi)$ を写像 $\overline{d}_2^{-1}$ のもとでの曲線 C_{J^*} の像であるとする．すると次が成り立つ．

$$\overline{h}_2(\psi)=a_0+\frac{B}{\sin b}\cos(\psi+\overline{b})+\overline{A}\cos\psi-\overline{B}\sin\psi+O(m_2^2 e).$$

簡単にわかるように、2 本の曲線 $J=\overline{h}_1(\psi)$ と $J=\overline{h}_2(\psi)$ が横断的に交われば、不変曲線 C_{J^*} の安定および不安定多様体は横断的に交わる．一方、$B\neq\overline{B}\sin b/\sin\overline{b}$ なら、2 つの曲線 $\overline{h}_1(\psi)$ と $\overline{h}_2(\psi)$ は e と m_3 が小さいとき横断的に交わる．しかし、すでに観察したように、J が $\sqrt{2}$ に近いと $\overline{B}$ と $\overline{b}$ は実解析的であり、$B\sim c_2(J-\sqrt{2})^{-2}$ かつ $b\sim c_1\log(C-\sqrt{2})$ である．したがって $\delta_2>\delta_1>0$ を選んで、すべての $J\in T=(\sqrt{2}+\delta_1,\sqrt{2}+\delta_2)$ に対して $B\neq\overline{B}\sin b/\sin\overline{b}$ にできる．したがって 1 次近似までで、$W^s(C_{J^*})$ と $W^u(C_{J^*})$ は横断的に交わる．

これで定理 7.1 は証明された．

定理 7.2 の証明.

定理 7.2 は定理 7.1 の系である．擬アーノルド拡散における振動解を見つけるために記号力学に訴える．はじめに Arnold[2] と同じように妨害集合(obstructing set) を定義する．

M を空間 X の滑らかな部分多様体とする．集合 Ω が点 $x \in M$ において多様体 M を妨害するとは、x において M と交わるどの多様体 N も Ω によって交差されるときである．例として、閉曲線 M に巻き付く渦巻 Ω は曲線を妨害する．

補題 8.1. (1) C_{J^*} を S 上の写像 d の不変曲線とする．U は Σ^{ϕ_0} 上の 3 次元断面であって、ある点 q において C_{J^*} の安定多様体 $W^s(C_{J^*})$ に横断的であるとする．$\Omega = \cup_{\phi \geq 0} U(\phi)$ は U から出発するすべての軌道の集合であるとする．このとき C_{J^*} の不安定多様体 $W^u(C_{J^*})$ の任意の点 q^* に対して、Ω は q^* において $W^u(C_{J^*})$ を妨害する．

(2) $C_{J_1}, C_{J_2}, C_{J_3}, \ldots$ は定理 7.1 の不変トーラスであって、$i = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、C_{J_i} の安定多様体は $C_{J_{i+1}}$ の不安定多様体と横断的に交わり、C_{J_i} の不安定多様体は $C_{J_{i+1}}$ の安定多様体とポアンカレ断面 Σ^{ϕ_0} のある点で交わるとする．U は Σ^{ϕ_0} 内の 3 次元断面であってある i に対して C_{J_i} の安定多様体に横断的であるとし、$\Omega = \cup_{\phi \geq 0} U(\phi)$ は U から出発するすべての軌道の集合であるとする．このとき Ω は、任意の j に対して $W^u(C_{J_j})$ どの点においても $W^u(C_{J_i})$ を妨害する．

証明. 任意の点 $q \in W^s(C_{J^*})$ に対して $q_1 \in C_{J^*} \subset S$ は、$\phi \to \infty$ のとき $q(\phi) \to q_1$ なる点であるとする．まず $q^* \in W^u(q_1)$ なら Ω は q^* において $W^u(C_{J^*})$ を妨害することを示そう．

証明は S の近くの流れの局所構造から出る．定理 2.1 の証明 (Robinson[16]) において、いわゆるグラフ変換 (graph transform) の技術が使われた．それによると、基本的にはグラフ変換のもとで集合 U が C^∞ 位相で集合 S_1 の不安定多様体に収束する．ただし $S_1 \subset S$ は S の点 q_1 の小さな近傍である．したがって、任意の $\varepsilon > 0$ および $W^u(S_1)$ 内の q^* の小さな近傍 U_1 に対して、整数 n が存在して $\Pi^n(U)$ の断片が C^∞ 位相で U_1 に ε 近接である．したがって q^* において $W^u(S_1)$ に横断的な任意の多様体は、ある整数 n に対して $\Pi^n(U) \subset \Omega$ と横断的に交わるはずである．だから Ω は $q^* \in W^u(q_1)$ において $W^u(C_{J^*})$ を妨害する．

さて Ω が任意の $q^* \in W^u(C_{J^*})$ に対して $W^u(C_{J^*})$ を妨害することを示そう．はじめに点列 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ があって、$q \in W^s(q_1), d(q_1) = q_2, d(q_2) = q_3, \ldots, d(q_{k-1}) = d(q_k)$ および $q^* \in W^u(q_k)$ であるとする．$q_1^* = d_1^{-1}(q_1)$ とおく．すると $q_1^* \in W^u(q_1)$ であり、上の結果より、Ω は q_1^* において $W^u(C_{J^*})$ を妨害する．その上、写像 d の定義より、整数 n があって $\Pi^n(U)$ は $W^s(q_2)$ に横断的であるから U は $W^s(q_2)$ に横断的である．同じ議論に従えば、U がすべての $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $W^s(q_i)$ に横断的であることがわかる．$q^* \in W^u(q_k)$ なら Ω は q^* において $W^u(C_{J^*})$ を妨害する．こんどは任意の U および $q^* \in W^u(C_{J^*})$ に対して、不変曲線 C_{J^*} に制限した写像 d の無理数性より、点 $q' \in U$ で $q' \in W^s(C_{J^*})$ なるものがあって、C_{J^*} 内の点列 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ で $q' \in W^s(q_1), d(q_1) = q_2, \ldots, d(q_{k-1}) = q_k$ および $q^* \in W^u(q_k)$ を満たすものを見つけることができる．したがって U は $W^s(C_{J^*})$ のどの点においても $W^s(C_{J^*})$ を妨害する．これで補題の最初の部分が証明された．補題の第二の部分も定理 7.1 を用いて同様に証明できる．
□

こんどは定理 7.2 の証明をしよう．まず写像 d の不変曲線 C_{J^*} を固定し、U は $W^s(C_{J^*})$ に横断的な 3 次元断面とする．遷移鎖 $C_{J_1}, C_{J_2}, C_{J_3}, \ldots$ 内に任意に無限点列 $q_1, q_2, q_3, \ldots$ を選ぶ．上の補題より、U はある点、たとえば $q_1^* \in W^u(q_1)$ において q_1 の不安定多様体と横断的に交わる．U_1 は U の内部の q_1^* の小さな近傍とする．ふたたび U_1 はある点、たとえば q_2^* において q_2 の安定多様体と横断的に交わる．U_{12} は U_1 の内部の q_2^* の小さな近傍とする．こんどは断面 U_{12} と遷移鎖内の点 q_3 を考えると U_{12} と $W^s(q_3)$ の横断的交点 q_3^* を見つけることができる．このように続けていけば、U 内に、入れ子になった開集合の列

$$U \supset U_1 \supset U_{12} \supset U_{123} \supset \cdots,$$

を得る．入れ子になったこの開集合の列は空でない交わりを持つ．$\tilde{q}$ を共通点とする．簡単にわかるように、十分に小さな集合列を選べば、$\tilde{q}$ の軌道は振動的である．すなわち $\tilde{q}$ から出発する軌道に関して、$\phi \to \infty$ のとき次を得る．

$$\limsup |x| > 0 \quad \text{および} \quad \liminf |x| = 0.$$

その上、点列 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ をうまく選ぶことにより、$\tilde{q}$ の軌道の ω 極限集合が遷移鎖内のすべての不変円を含むようにできる．したがって $\tilde{q}$ の軌道はカオス的な振動も拡散も示す．

これで定理 7.2 の証明が完了した． □

定理 6.1 の証明.

T_J^e は Ω_n 上の不変円であって $J \in T = (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ であるとする．$e = m_3 = 0$ なら T_J^e の不安定多様体は円内の集合 S の安定多様体と交わり、この交わりは横断的である．したがって $e > 0$ が十分小さいなら、不変円 T_J^e の不安定多様体と集合 S の安定多様体はやはり円内で、たとえば s_1 内でで交わる．s_1 から流れに従って前に進んで集合 S まで行けば、極限として S 上の円 s_1^* を得る．同様に s_2 を T_J^e の安定多様体と集合 S の不安定多様体との交点とし、s_2^* をその α 極限集合とする．曲線 s_1^* と s_2^* の安定多様体と不安定多様体に関し次の補題を得る．

補題 8.2. $\delta_2 > \delta_1 > 0, \varepsilon > 0, e_0 > 0$ が存在し、すべての $0 < e < e_0$ および $0 \le m_3 < \varepsilon$ に対し、$J \in T = (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ なら s_1^* の不安定多様体と s_2^* の安定多様体はポアンカレ断面 Σ^{ϕ_0} のある点で横断的に交わる．

証明. 変数 J と ψ を S の局所座標として使う．$J = h(\psi)$ を曲線 s_1^* の表式とする．すると $h(\psi)$ は滑らかな周期関数である．対称性により、曲線 s_2^* は $J = h(-\psi)$ と書ける．$e = m_3 = 0$ のとき、$W^u(s_1^*)$ は $\Sigma^{\phi=0}$ 上の円 $\{(x,y) = p; \phi = 0\}$ および $\Sigma^{\phi=\pi}$ 上の円 $\{(x,y) = \overline{p}; \phi = \pi\}$ において $W^s(s_2^*)$ と交わる．この交差はもちろん縮退している．しかし縮退は J に関してのみであって ψ 方向である．e が小さいとき交差が非縮退であることを示すためには、e が小さいとき J に関して ψ 方向で非縮退であることを示せばよい．したがって曲線 γ および $\overline{\gamma}$ に沿っての曲線 s_1^* および s_2^* の J に関する変分を考えるだけでよい．$C = h_1(\psi)$ を写像 d_1^{-1} のもとでの曲線 $J = h(\psi)$ の像とする．このとき次が成り立つ．

$$h_1(\psi) = h(\psi - b) + A\cos\psi + B\sin\psi + h.o.t.$$

ここで A, B および b はこの節のはじめに定義したものと同じである．対称性により、写像 d_2^{-1} のもとでの曲線 s_2^* の像は次の式で記述される．

$$J = h_1(-\psi) = h(-\psi - b) + A\cos(-\psi) + B\sin(-\psi) + h.o.t.$$

これらの 2 本の曲線は $h'(-b)+B \neq 0$ なら横断的に交わる．これが成り立たないとし、すべての $C \in J$ に対して $h'(-b)+B \equiv 0$ と仮定する．$W^u(s_1^*)$ と $W^s(s_2^*)$ の他の交点を考え、交差のいくつかは横断的であることを示す.

$p_1^* \in \Sigma^0$ は横断的ホモクリニック軌道であって、p_1^* の軌道が p の近くを 2 度通過するとする (Fig.3 参照)．前に指摘したように、このようなホモクリニック軌道は無限にある．さらに、任意の $\varepsilon > 0$ に対して p_1^* を選んで p_1^* の軌道が p の軌道の ε 近傍内にあるようにできる．ここで d_1 および d_2 に似た写像 d_{1,p_1^*} および d_{2,p_1^*} を考える．その際、$W^u(q)$ と $W^s(S)$ の横断的交点として p の代わりに p_1^* を使う．$J=h_2(\psi)$ を写像 $d_{1,p_1^*}^{-1}$ のもとでの曲線 s_1^* の像とする．上の計算と同様にして次を得る.

$$J = h_2(\psi) = h(\psi - 2b) + 2B\sin(\psi - b) + O(\varepsilon) + h.o.t.$$

また写像 $d_{2,p_1^*}^{-1}$ のもとでの s_2^* の像は次式で表わされる.

$$J = h_2(-\psi) = h(-\psi - 2b) + 2B\sin(-\psi - b) + O(\varepsilon) + h.o.t.$$

上の 2 本の曲線は $h_2'(0) \neq 0$ なら、また同じことだが

$$h'(-2b) + 2B\cos(-b) + O(\varepsilon) \neq 0,$$

なら横断的に交わる．ε は任意に小さくできるから、$h'(-2b)+2B\cos(-b) \neq 0$ なら補題は証明されたことになる.

上のことが成り立たない、つまりすべての $J \in T = (\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2)$ に対して $h'(-2b)+2B\cos(-b) \equiv 0$ と仮定する．ここで原点の近くの別の対称ホモクリニック点 p_2^* で、p_2^* の軌道が p の近くを 4 度 通過し、p_2^* の軌道は p の軌道の ε 近傍にあるようなものを考える．上の議論と同様にして、次が成り立てば補題は証明されたことになる.

$$h'(-4b) + 2B\cos(-3b) + 2B\cos(-b) \neq 0.$$

ふたたび、上が正しくないと仮定する．すなわち次のように仮定する.

$$h'(-4b) + 2B\cos(-3b) + 2B\cos(-b) \equiv 0.$$

このようなやり方を $k = 1, 2, 3, \ldots$ すべてに続ければ次を得る.

$$h'(-2kb) - h'((2k-2)b) + 2B\cos((2k-1)b) \equiv 0.$$

$b/2\pi$ が無理数なら、$h'(\psi)$ の連続性より次を得る.

$$h'(\psi + b) - h'(\psi - b) + 2B\cos\psi = 0, \quad \text{for all} \quad \psi \in S^1. \tag{26}$$

曲線 s_1^* と s_2^* が滑らかであることから、上のことがすべての b に対しても成り立つことがわかる．こんどは $h(\psi)$ をフーリエ級数に展開しよう.

$$h(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi.$$

この式を (26) に代入し、a_n と b_n に関して解けば、すべての $n \neq 0, 1$ に対して $a_n = b_n = 0$ であり、$b_1 = 0, a_1 = B/\sin b$ であることがわかる．(ここでふたたび曲線 s_1^* が m_3 に関して滑らかであることを使った.) したがって曲線 s_1^* は次の形をとる．

$$J = h(\psi) = a_0 + \frac{B}{\sin b}\cos\psi.$$

定理 7.1 の証明から、一次近似では $s_1^* = s_2^*$ が S 上の写像 d の不変曲線であることが出る．同じ議論にしたがえば、s_1^* の不安定多様体と s_2^* の安定多様体が、ポアンカレ断面 Σ^{ϕ_0} のある点において横断的に交わることが示せる．これで補題が証明された． □

こんどは補題を使って定理 6.1 の証明を完結させよう．

前に見たように、不変円 T_J^e の不安定多様体は集合 S の安定多様体と曲線 s_1 において横断的に交わる．ふたたび定理 2.1 の証明に使ったグラフ変換の技術にしたがえば、ポアンカレ写像の繰り返しのもとでの $W^u(T_J^e)$ の像は C^∞ 位相で曲線 s_1^* の不安定多様体に収束する．同様に、ポアンカレ写像の逆の繰り返しのもとでの $W^s(T_J^e)$ の像は C^∞ 位相で曲線 s_2^* の安定多様体に収束する．上の補題により、s_1^* の不安定多様体と s_2^* の安定多様体はポアンカレ断面内のある点で横断的に交わるから、不変円 T_J^e の安定多様体と不安定多様体はポアンカレ断面 Σ^{ϕ_0} 内のある点で横断的に交わると言える．これで定理は証明された． □

References

1. V.M. Alekseev, Quasirandom dynamical systems, I, II, III, *Math. USSR-Sb.* **5** (1968), 73-128; **6** (1968), 505-560; **7** (1969), 1-43.
2. V.I. Arnold, Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156** (1964), 9.
3. V.I. Arnold(Ed), *Dynamical Systems III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol.3, Springer-Verlag, New York, 1988.
4. V.I. Arnold, Sur une propriété topologique des applications globalement canonique de la mécanique classique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **26** (1965), 3719.
5. B.V. Chirikov, A universal instability of many dimensional oscillator systems, *Phys. Rep.* **52** (1979), 265.
6. R. Easton, Parabolic orbits for the planar three-body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 116-134.
7. R. Easton, Capture orbits and Melnikov integrals in the planar 3-body problem, *Celestial Mech.*, to appear.
8. R. Easton and R. McGehee, Homoclinic phenomena for orbits doubly asymptotic to an invariant three-sphere, *Indiana Univ. Math. J.* **28** (1979), 211-240.
9. P. Holmes and J. Marsden, Melnikov method and Arnold diffusion for the perturbation of integrable Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.* **23** (1982), 669-675.
10. C. Lim, A combinatorial perturbation method and Arnold's whiskered tori in vortex dynamics, preprint.

11. R. McGehee, A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics, *J. Differential Equations* **14** (1973), 70-88.

12. V.K. Melnikov, On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** (1963), 1.

13. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Annals of Mathematics Studies, Vol.77, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1973.

14. N.N. Nekhoroshev, An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, *Russian Math. Surveys* **32** (1977), 1-65.

15. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste III*, Gauthier-Villars, Paris, 1899.

16. C. Robinson, Homoclinic orbits and oscillation for the planar three-body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 356-377.

17. C. Robinson, Horseshoes for autonomous Hamiltonian systems using Melnikov integrals, *Ergodic Theory & Dynamical Systems* **8** (1988), 395-409.

18. D. Saari and Z. Xia, The existence of oscillatory and super-hyperbolic motions in Newtonian systems, *J. Differential Equations* **82** (1989), 342-355.

19. K. Sitnikov, The existence of oscillatory motion in the three-body problem, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **133** (1960), 303-306.

20. A. Weinstein, Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems, *Ann. of Math.* **98** (1973), 377.

21. Z. Xia, Melnikov method and transversal homoclinic orbits in the restricted three-body problem, *J. Differential Equations* **96** (1992), 170-184.

22. Z. Xia, Arnold duffusion in the elliptic restricted three-body problem, *J. Dynamics and Diff. Equations* **5** (1993), 219-240.