谷川清隆 訳

Journal of Differential Equations **96** (1992), 170-184

制限三体問題における メルニコフの方法と横断的ホモクリニック点

Melnikov method and transversal homoclinic points in the restricted three-body problem

Zhihong Xia

Department of Mathematics, Harvard University
Cambridge, Massachusetts 02138

Abstract

この論文ではメルニコフの方法により、円制限三体問題において、2 つの主星のいくつかの有限個の質量比を除いてすべての質量比に対して、横断的ホモクリニック軌道の存在を示す．これは振動および捕獲運動の族の存在を意味する．これはまた、2 つの主星のいくつかの有限個の質量比を除いてすべての質量比に対して、よく知られたヤコビ積分以外に、円制限三体問題に実解析的積分が存在しないことも示している．これは古典的なポアンカレの定理 [10] の拡張になっている．われわれの方程式中に現われる特異性は縮退しているから、McGehee[7] の安定多様体定理を利用する．

1. 序

Sitnikov[13] は特別な制限三体問題の場合に振動および捕獲軌道の族が存在することを証明した．Alekseev[1] は Sitnikov の発想を拡張し横断的ホモクリニック軌道との関係を強調した．彼はゼロでないすべての質量に対して同じ結果を証明した．この例に関する詳細な議論については Moser[9] を参照されたい．捕獲および振動軌道に関する他の例については [3,8,12] を参照されたい．

この論文では、制限三体問題において無限遠の周期軌道への横断的ホモクリニック軌道の存在を、2 つの主星のいくつかの有限個の質量比を除いてすべての質量比に対して示す．記号力学により、このような横断的ホモクリニック軌道は、制限三体問題に Smale の馬蹄を作りだし、カオスをもたらす．そのうえ、この軌道から、Sitnikov 問題と同様非可算個の振動および捕獲軌道が得られる．横断的ホモクリニック軌道の存在からのもう一つの帰結は、制限三体問題の非可積分性である．これは古典的なポアンカレの定理 [10] の拡張になっている．ポアンカレの定理によれば、知られているヤコビ積分以外に実解析積分で、2 つの主星の質量に関しても解析的なものは存在しない．

この問題では無限遠の周期軌道は縮退しているので、標準的安定多様体定理は適用できない．その代わり、McGehee[7] による定理で Easton[2] および Robinson[11] によって拡張され

たものを使う．メルニコフの摂動技術を使って横断的ホモクリニック軌道の存在を示す．われわれの使う微小摂動パラメータは 2 つの主星の質量比である．主星の 1 つが質量ゼロなら系は二体問題に帰着し、積分可能となる．主星の 1 つの質量がもう 1 つに比べて小さければメルニコフの方法で、無限遠の周期軌道への横断的ホモクリニック軌道の存在が示せる．このとき安定多様体の解析性から、結果が、いくつかの有限個の質量比を除いてすべての質量比に拡張できる．

著者は、同様の結果が Llibre and Simó[5,6] でなされていることを指摘してくれたレフェリーおよび J.Llibre に感謝する．[5] で Llibre and Simó は、ヤコビ定数 C が十分大きく、主星の質量比が十分小さければ、無限遠の周期軌道への横断的ホモクリニック軌道が存在することを示した．われわれの論文では、質量比が十分小さくて、ヤコビ定数が $\pm\sqrt{2}$ に近い場合にもこれが成り立つこと示すことができる．[5,6] での彼らの方法に比べて、われわれの方法は明快で単純である．さらに、多様体の解析性および問題のシンプレクティック性を利用して、この結果を十分大きなヤコビ定数の場合に、ほとんどすべての質量比に対して拡張することができる．

著者はもとの原稿の決定的な間違いを指摘してくれた K.Meyer 教授にも感謝する．

2. 制限三体問題

ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ 内をニュートンの重力のもとで動いている 3 質点 P_1, P_2, P_3 を考える．重心は原点に固定されているとし、P_1 と P_2 の質量を μ および $1-\mu$ とする．ただし $0 \le \mu \le 1$ である．さらに P_3 の質量はゼロであるとするので、得られる系はいわゆる制限三体問題である．P_3 は P_1 と P_2 の運動に何の影響も与えないから、後者の二体は二体問題を定義し、P_1 と P_2 の軌道は完全に理解できる．これらは円、楕円、放物線または双曲線軌道上を動く．P_1 と P_2 が円軌道をまわっていと仮定すれば、系は円制限三体問題、あるいは単に制限三体問題と呼ばれる．

$\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ を P_3 の位置とし、$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (q_1', q_2')$ を P_3 の速度とすれば、P_3 の運動は次の方程式で決定される．

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{p}' &= U_{\mathbf{q}}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで U はポテンシャル関数で、$U_{\mathbf{q}}$ は $\mathbf{q}$ に関する U の勾配である．

$$U = \frac{1-\mu}{\sqrt{(q_1-\mu x_{12})^2 + (q_2-\mu y_{12})^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(q_1+(1-\mu)x_{12})^2 + (q_2+(1-\mu)y_{12})^2}}.$$

ここで x_{12}, y_{12} は P_1 から P_2 への距離ベクトルの x 軸および y 軸上の成分である．円制限三体問題の場合、次を得る．

$$x_{12} = \cos t, \quad y_{12} = \sin t.$$

$\mu = 0$ なら、問題は二体問題に帰着して、質量 1 の粒子が原点にあってもう一つの質量ゼロの粒子がそのまわりをまわっている．この問題は完全可積分である．制限三体問題を μ が小さいとして二体問題からの摂動問題として扱う．μ の一次までの近似で U は次のように表わさ

れる．

$$U = \frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + \mu\left(-\frac{1}{(q_1^2+q_2^2)^{1/2}} + \frac{q_1\cos t + q_2 \sin t}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} + \frac{1}{((q_1+\cos t)^2+(q_2+\sin t)^2)^{1/2}}\right) + O(\mu^2). \tag{2}$$

われわれが特に興味を持つこの $\mu = 0$ の二体問題の特解は放物解である．これは質量ゼロの粒子が極限速度ゼロで無限遠に近づく解である．うまい座標変換を用いて、無限遠に周期解があることを示す．この周期解は縮退したサドルであり、放物軌道はまさに $t \to \infty$ および $t \to -\infty$ のときにこの周期軌道に近づく軌道であることがわかる．μ が小さいとき、上の周期軌道は生き残り、放物軌道のいくつかはこの周期軌道への横断的ホモクリニック軌道になることを示す．

方程式を望ましい形にし、無限遠の特異性を有限の場所に持って来るためには、いくつかの座標変換が必要である．最もよい尺度変換は $|\mathbf{q}| = x^{-2}$ であるようだ．S^1 の角変数 $\mathbf{s}$ を $\mathbf{q} = x^{-2}\mathbf{s}$ で定義する．運動量を動径成分と角度方向成分に次のように分ける．

$$\mathbf{p} = y\mathbf{s} + x^2\rho i\mathbf{s}.$$

ここで $i\mathbf{s}$ は、単位ベクトル $\mathbf{s}$ に直角な単位ベクトルを表わす複素表示であり、ρ は P_3 の角運動量である．これらの新しい変数を使えば

$$U = x^2 + \mu x^2\left(-1 + x^2\cos(t-\theta) + \frac{1}{(1+2x^2\cos(t-\theta)+x^4)^{3/2}}\right) + O(\mu^2), \tag{3}$$

となり、方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{2}x^3 y, \\ y' &= -x^4 + x^6\rho^2 + \mu g_1(x, t-\theta) + O(\mu^2), \\ \theta' &= x^4\rho, \\ \rho' &= \mu g_2(x, t-\theta) + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで $\theta \in S^1$ は角変数であって、$\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta)$ であり、$g_1(x, t-\theta), g_2(x, t-\theta)$ は一次の摂動項であって次式で与えられる．

$$\begin{aligned} g_1(x, t-\theta) &= x^4\left(1 - 2x^2\cos(t-\theta) - \frac{1+x^2\cos(t-\theta)}{(1+2x^2\cos(t-\theta)+x^4)^{3/2}}\right), \\ g_2(x, t-\theta) &= x^4\sin(t-\theta)\left(1 - \frac{1}{(1+2x^2\cos(t-\theta)+x^4)^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

上の系は 5 次元空間内にある．しかし系は ヤコビ積分 と呼ばれる第一積分

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4\rho^2 - U - \rho = C,$$

を持つ．ここで C は ヤコビ定数 と呼ばれる．上の積分は ρ について解けるから、ρ に関する式は落すことができる．

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 - \frac{\mu x^2}{(1-x^4\rho_0)}\left(-1 + x^2\cos(t-\theta) + \frac{1}{(1+2x^2\cos(t-\theta)+x^4)^{3/2}}\right) + O(\mu^2),\\ \rho_0 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^4(y^2 - 2x^2 - 2C)}}{x^4}.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\pm$ 符号は P_3 の相対的角速度に依存する．

上の方程式において時間変数 t はつねに $t-\theta$ の形で現われることに注意しよう．この事実を使えば系の次元をさらに下げることができる．新しい角変数 s を次式で定義する．

$$s = t - \theta, \quad s \in S^1.$$

方程式系はいまや次のようになる．

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{1}{2}x^3 y,\\ y' &= -x^4 + x^6\rho^2 + \mu g_1(x,s) + O(\mu^2),\\ s' &= 1 - x^4\rho.\end{aligned} \tag{7}$$

ここで ρ は x, y, s および C の関数であり、上の (6) 式で与えられる．

はじめに $\mu = 0$ の場合、すなわち摂動無しの二体問題を考えよう．運動方程式は次式に帰着する．

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{1}{2}x^3 y,\\ y' &= -x^4 + x^6\rho^2,\\ s' &= 1 - x^4\rho.\end{aligned} \tag{8}$$

ここで ρ はこんどは一定である (ρ は P_3 の角運動量であったことを思いだそう)．x, y に関する方程式は s に無関係であり、明示的に解ける．H は x と y の関数であって、次式で定義されるとする．

$$H(x,y,\rho) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4\rho^2 - x^2. \tag{9}$$

Figure

$H(x,y,\rho)$ が運動の定数であることは簡単にわかる (実は、H は P_3 のエネルギーである)．Figure

1 には x, y 座標の流れが示されている ($x > 0$ が物理空間に対応することに注意しよう)．流線は H のレベル曲線に対応する．原点 $(0, 0)$ は流れの特異点である．この特異点は縮退しており、時間を x^{-3} 倍だけ尺度変換した後では、これは双曲サドルであって、このサドルへのホモクリニックループがあることがわかる．後の解析はこのホモクリニックループを基礎にしている．ホモクリニックループの軌道は、次のようにあからさまに書ける．

$$\begin{aligned} x(t) = \xi(t, C) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(3t + \sqrt{9t^2 + C^6})^{2/3} + (3t - \sqrt{9t^2 + C^6})^{2/3} - C^2}}, \\ y(t) = \eta(t, C) &= \begin{cases} \pm\sqrt{2\xi^2(t) - \xi^4(t)C^2} & \text{for} \quad x \geq 0, \\ \mp\sqrt{2\xi^2(t) - \xi^4(t)C^2} & \text{for} \quad x \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで $\pm$ は C の符号に依存する．$\xi(t, C)$ は t の偶関数、$\eta(t, C)$ は t の奇関数であることに注意しよう．

方程式が時間に依存しないから任意の $t_0 \in \mathbf{R}$ に対して、$(\xi(t - t_0, C), \eta(t - t_0, C))$ も原点の縮退サドルへのホモクリニックループである．$\xi(t, C)$ と $\eta(t, C)$ が s の関数としてあからさまに書ければ具合いがいい．最後には s を独立変数として使うつもりだからである．方程式は非常に複雑に見え、解を閉じた形で求められそうもない．$x_0(s)$ および $y_0(s)$ を s で表わしたホモクリニックループの式とする．すなわち、$x_0(s) = \xi[t(s), C]$ および $y_0(s) = \eta[t(s), C]$ とする．θ の初期値を 0 に選ぶ．そうするに当たって (?)、$x_0(s)$ は s の奇関数で $y_0(s)$ は偶関数である．

こんどは $0 < \mu \ll 1$ の場合を考えよう．はじめに x と y に関する方程式を尺度変換して s に関する式を消去しよう．そうして得られる方程式は周期的に時間に依存する．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{-\frac{1}{2}x^3 y}{1 - x^4\rho}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{-x^4 + x^6\rho^2}{1 - x^4\rho} + \frac{\mu g_1(x, s)}{1 - x^4\rho} + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、ふたたび ρ は x, y, s の関数であり、ヤコビ定数 C はヤコビ積分 (6) で決まる．

s を独立変数として使うためには $1 - x^4\rho \neq 0$ であることが要求される．x が小さいか $\rho < 0$ ならこれはいつも成り立つ．

$\mu \neq 0$ なら、原点のもともとの不動点は s に関して周期 2π の周期点になる．$t \to \infty$ でこの周期点に漸近的に近づく軌道は ω放物的 と呼ばれ、同様に、$t \to -\infty$ でこの周期点に漸近的に近づく軌道は α放物的 と呼ばれる．この周期軌道も縮退している．方程式が時間依存であるから、因子 x^{-3} によって時間変数を尺度変換して特異性を取り除くことはできない．ゆえに、標準的な安定多様体定理をこの周期軌道に適用することができず、これら ω 放物軌道と α 放物軌道が滑らかな多様体を形成するかどうかは明らかでない．しかし、縮退不動点に関する McGehee[7] の安定多様体定理によって、これら ω 放物軌道と α 放物軌道の滑らかな多様体構造は保証されている．

定理 1. 方程式 (11) の $\{x \geq 0\}$ における周期軌道 $\gamma : x = 0, y = 0, s \in S^1$ の安定および不安定多様体は $x > 0$ のとき実解析多様体である．すなわち、$W^s(\gamma) \cap \{x > 0\}$ および $W^u(\gamma) \cap \{x > 0\}$ は実解析的である．換言すれば、ヤコビ定数 C を固定したとき、ω 放物軌道と α 放物軌道は相空間において実解析的部分多様体をなす．

McGehee[7] は縮退した不動点のある類に関して安定多様体定理を証明した．この定理は彼の安定多様体定理の応用として証明された．最近、Robinson[11] は McGehee の定理を拡張し、さらに一般の縮退不変集合に適用できる安定多様体定理を証明した．もっと詳しい議論については Robinson[11] を参照されたい．

第三体が 2 つの主星と二体衝突をすることによる特異性が方程式 (11) にいくつかあることを指摘しておく．しかし、よく知られているように、これらの二体衝突は正則化できる．すなわち、これらの特異性は適当な座標および時間変換で取り除ける．定理 1 の安定および不安定多様体の解析性は、二体衝突の特異性を正則化していることを前提にしている．

定理 1 の証明から、安定多様体と不安定多様体はヤコビ定数 C および質量比 $\mu, \mu \neq 0$ に関しても実解析的であることを指摘しておく ($\mu = 0$ なら二体衝突の正則化は特異である)．

3. メルニコフ関数

こんどはメルニコフの摂動技術を使って横断的ホモクリニック軌道の存在を示そう．$\mu = 0$ なら $W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$ は全く同一の多様体であることに注意しよう．$\mu \neq 0$ なら、これらの多様体は分離する．直観的には、これらの多様体は以下の議論からわかるように、いつも交わっている．

P_3 を時刻 $t = 0$ に x 軸におく．この粒子の速度と原点からの距離を調節して、望むヤコビ定数の値を持つようにし、極限速度ゼロで無限遠に逃げるようにできる．だから ω 放物的である．対称性により、これは α 放物的でもあるから、これが γ のホモクリニック軌道であると言える．

このようにして本当に相空間の中にホモクリニック軌道が与えられること、その上これがあるヤコビ定数に対しては横断的であることを示そう．

Σ^{s_0} を相空間内の横断面 $s = s_0$ とし、$(x^u_\mu(s, s_0), y^u_\mu(s, s_0))$ は $W^u(\gamma)$ 内の軌道であって、$(x^u_\mu(0, s_0), y^u_\mu(0, s_0)) \in \Sigma^{s_0}$ であるとする．同様に、$(x^s_\mu(s, s_0), y^s_\mu(s, s_0))$ は $W^s(\gamma)$ 内の軌道であって、$(x^s_\mu(0, s_0), y^s_\mu(0, s_0)) \in \Sigma^{s_0}$ であるとする．このとき次の補題を得る．

補題 **1.** $|C| > \sqrt{2}$ なる任意の固定した C に対して、指定した時間区間のあいだ以下の近似が一様に成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x^s_\mu(s, s_0) &= x_0(s - s_0) + \mu x^s_1(s, s_0) + O(\mu^2), \quad s \in [s_0, \infty), \\
y^s_\mu(s, s_0) &= y_0(s - s_0) + \mu y^s_1(s, s_0) + O(\mu^2), \quad s \in [s_0, \infty), \\
x^u_\mu(s, s_0) &= x_0(s - s_0) + \mu x^u_1(s, s_0) + O(\mu^2), \quad s \in (-\infty, s_0], \\
y^u_\mu(s, s_0) &= y_0(s - s_0) + \mu y^u_1(s, s_0) + O(\mu^2), \quad s \in (-\infty, s_0].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで関数 $x^s_1(s, s_0), y^s_1(s, s_0)$ および $x^u_1(s, s_0), y^u_1(s, s_0)$ は、非摂動軌道 (x_0, y_0) に沿っての方程式 (11) の第一変分方程式によって決定される．

この補題の証明は次の 2 つの観察から容易に出る．(1) 標準的な Gronwall 評価によれば、$(x_0(0), y_0(0))$ の $O(\mu)$ から出発した摂動軌道は、任意のしかし有限の時間のあいだは $(x_0(s), y_0(s))$ の $O(\mu)$ 内にとどまる．(2) 定理 1 より、$W^u(\gamma), W^s(\gamma)$ は C^∞ 多様体であり、摂動を受けた多様体は非摂動多様体に C^∞ 近接である．

$\mu > 0$ のときの摂動が二体衝突において特異性を持つこと、および $|C| \leq \sqrt{2}$ のとき安定多様体および不安定多様体内の軌道が二体衝突をする可能性があることから、$|C| > \sqrt{2}$ という

条件は必要であることを注意しておく．

$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^4\rho^2-x^2$ は (9) 式で定義されたエネルギー関数であるとする．ここで ρ は (6) 式で与えられる．$\mu\neq 0$ なら H はもはや運動の定数ではなく、次が成り立つ．

$$\frac{dH}{ds}=\frac{\mu(yg_1(x,s)+x^4\rho g_2(x,s))}{1-x^4\rho}+O(\mu^2). \tag{13}$$

$\mathbf{d}(s_0)$ を以下のベクトルとする．

$$\mathbf{d}(s_0)=(x^s_\mu(s_0,s_0),y^s_\mu(s_0,s_0))-(x^u_\mu(s_0,s_0),y^u_\mu(s_0,s_0)).$$

このベクトルは、$W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$ が Σ^{s_0} 上の $s=s_0$ においてどのくらい離れるかを測る．第一変分方程式を積分して $\mathbf{d}(s_0)$ を見つけるのは難しい．ここではメルニコフの技術を使って $W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$ が互いにどのように交わるかを調べる．$H^N(x_0(0),y_0(0))$ を点 $(x_0(0),y_0(0))$ における $H(x,y)$ への法線とする．すなわち、

$$H^N(x_0(0),y_0(0))=(H_x(x_0(0),y_0(0)),H_y(x_0(0),y_0(0))).$$

さらに $d(s_0)$ は点 $(x_0(0),y_0(0))$ において関数 $H(x,y)$ の法線方向へのベクトル $\mathbf{d}(s_0)$ の射影とする．このとき一次近似までで次を得る．

$$\begin{aligned} d(s_0) &= \frac{H^N(x_0(0),y_0(0))}{|H^N(x_0(0),y_0(0))|}\cdot(x^s_\mu(s_0,s_0)-x^u_\mu(s_0,s_0),y^s_\mu(s_0,s_0)-y^u_\mu(s_0,s_0)) \\ &= \mu\frac{H^N(x_0(0),y_0(0))}{|H^N(x_0(0),y_0(0))|}\cdot(x^s_1(s_0,s_0)-x^u_1(s_0,s_0),y^s_1(s_0,s_0)-y^u_1(s_0,s_0))+O(\mu^2). \end{aligned}$$

ここで $x^s_1(s,s_0),y^s_1(s,s_0),x^u_1(s,s_0),y^u_1(s,s_0)$ は補題 1 で与えられるものである．

$d(s_0)$ は横断面 Σ^{s_0} 上の点 $(x_0(0),y_0(0))$ における多様体 $W^u(\gamma),W^s(\gamma)$ の距離を近似している．この値を見つけるために、補題 1 より、次を観察しよう．

$$\begin{aligned} H(x^s_\mu(s_0,s_0), &\ y^s_\mu(s_0,s_0)) \\ &= H(x_0(0),y_0(0))+\mu H^N(x_0(0),y_0(0))\cdot(x^s_1(s_0,s_0),y^s_1(s_0,s_0))+O(\mu^2), \\ H(x^u_\mu(s_0,s_0), &\ y^u_\mu(s_0,s_0)) \\ &= H(x_0(0),y_0(0))+\mu H^N(x_0(0),y_0(0))\cdot(x^u_1(s_0,s_0),y^u_1(s_0,s_0))+O(\mu^2). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} d(s_0) &\ |H^N(x_0(0),y_0(0))| \\ &= H(x^s_\mu(s_0,s_0),y^s_\mu(s_0,s_0))-H(x^u_\mu(s_0,s_0),y^u_\mu(s_0,s_0))+O(\mu^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dH(x,y)}{ds}ds+O(\mu^2) \\ &= \mu M(s_0)+O(\mu^2), \end{aligned} \tag{14}$$

である．ここで $M(s_0)$ は<u>メルニコフ関数</u>であり、次式で与えられる．

$$\begin{aligned} M(s_0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mu^{-1}\frac{dH}{ds}(x_0(s-s_0),y_0(s-s_0))ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{yg_1(x_0(s-s_0),s)+x_0^4(s-s_0)\rho g_2(x_0(s-s_0),s)}{1-x_0^4(s-s_0)\rho}ds. \end{aligned} \tag{15}$$

非摂動ホモクリニック軌道に沿っては $\rho = -C$ であることに注意しよう．メルニコフ関数を使えば次を得る．

$$\begin{aligned} d(s_0) = &\ \mu \frac{M(s_0)}{|H^N(x_0(0), y_0(0))|} + O(\mu^2) \\ = &\ \mu \frac{M(s_0)}{|2x_0^3(0)C^2 - 2x_0(0)|} + O(\mu^2) \\ = &\ \mu \frac{C}{2\sqrt{2}} M(s_0) + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{16}$$

メルニコフ関数を決める式はとても複雑なので、その値を決めるのは困難である．ある種の簡単化が必要である．次の式は簡単に確かめられる．

$$\begin{aligned} \frac{g_1(x,s) + x^4 \rho g_2(x,s)}{1 - x^4\rho} = &\ \frac{g_2(x,s)}{1-x^4\rho} + \frac{d}{ds}\left(x^2 \left(-1 + x^2 \cos(t-\theta) \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{(1 + 2x^2\cos(t-\theta) + x^4)^{3/2}} \right)\right) + O(\mu^2). \end{aligned}$$

ここで ρ と ρ_0 は $x(s), y(s)$ および s によって表わされている．上の式を使えば、メルニコフ積分は次の簡単な形になる．

$$\begin{aligned} M(s_0) = &\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2(x(s-s_0), s)}{1 - x_0^4(s-s_0)\rho_0} ds \\ = &\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2(x(s), s+s_0)}{1 - x_0^4(s)\rho_0} ds \\ = &\ \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x_0(s), s+s_0) dt \\ = &\ \int_{-\infty}^{\infty} x_0^4(s) \sin(s+s_0) \left(1 - \frac{1}{(1 + 2x_0^2(s)\cos(s+s_0) + x_0^4)^{3/2}} \right) dt. \end{aligned} \tag{17}$$

簡単にわかるように、対称性により、$s_0 = \pi$ なら $M(s_0) = 0$ である．$s_0 = \pi$ がメルニコフ関数 $M(s_0)$ の単純ゼロ点であることを示すには、$M'(s_0)|_{s_0=\pi} \neq 0$ を示す必要がある．直接計算から次を得る．

$$\begin{aligned} M'(\pi) = &\ \int_{-\infty}^{\infty} x_0^4(s)\cos(s+\pi) dt \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0^4(s)\cos(s+\pi)}{(1 + 2x_0^2(s)\cos(s+\pi) + x_0^4(s))^{3/2}} dt \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x_0^6 \sin^2(s+\pi)}{(1 + 2x_0^2(s)\cos(s+\pi) + x_0^4(s))^{5/2}} dt. \end{aligned} \tag{18}$$

上の積分で、$x_0(s) = \xi(t, C)$ は (10) 式で与えられる．また s は次の積分から得られる．

$$s = t - \theta = t - \int_0^t x^4 \rho dt = t + \int_0^t \xi^4(t, C) C dt.$$

$C = \pm\sqrt{2}$ ならメルニコフ積分 $M(s_0)$ および $M'(\pi)$ は $t = 0$ に特異性を持つことを確認してほしい．これは $t = 0$ および $C = \pm\sqrt{2}$ のとき $1 + 2\xi^2\cos(s+\pi) + \xi^4 = 0$ だからである．また $1 + 2\xi^2\cos(s+\pi) + \xi^4$ が $t = 0$ において実解析的だから、$|C| > \sqrt{2}$ で $C \to \pm\sqrt{2}$ のと

き $M'(0) \to -\infty$ であることがわかる．したがって、$|C| > \sqrt{2}$ で $|C| - \sqrt{2}$ が十分小さい限り $M'(\pi) \neq 0$ が言える．C がこれらの値であって μ が十分小さければ γ の安定多様体と不安定多様体、$W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$、は横断的に交わることをこれは意味する．これで μ が小さいときに制限三体問題で横断的ホモクリニック軌道があることが言えた．

次に $W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$ の解析性を使って上の結果を拡張し、有限個の値を除いてすべての μ に対して横断的ホモクリニック軌道があることを示そう．

$s_0 = \pi$ として横断面 Σ^{s_0} を固定しよう．対称性より、$W^s(\gamma)$ は x 軸に沿って正確に $W^u(\gamma)$ の鏡像である．簡単にわかるように、$|C|$ 十分が大きいとき、任意に固定した μ に対して $W^u(\gamma)$ と $W^s(\gamma)$ は交わる ($|C|$ が大きいとき、系は二体問題に近いことに注意する)．制限三体問題は保存系であるから、ポアンカレ写像は面積保存である．ラグランジュ交差理論 ([14] 参照) により、$W^u(\gamma)$ と $W^s(\gamma)$ は、すべての μ と C の値に対して x 軸で互いに交わるはずである．$p(\mu, C)$ を交点とし、$k(\mu, C)$ を $p(\mu, C)$ における $W^s(\gamma)$ の接線の傾きとする．このとき対称性により、$p(\mu, C)$ における $W^u(\gamma)$ の接線の傾きは $-k(\mu, C)$ である．$k(\mu, C)$ が ∞ または 0 でなければ $p(\mu, C)$ における $W^u(\gamma)$ と $W^s(\gamma)$ の交差は横断的である．

定理 1 より、$W^u(\gamma)$ と $W^s(\gamma)$ は実解析的部分多様体であるから、パラメータ C と μ に関しても実解析的である．したがって、$k(\mu, C)$ は $k(\mu, C) \neq 0$ である限り (すなわち $W^u(\gamma)$ が x 軸を横断的に横切る限り) 実解析関数である．$|C|$ が十分大きいか μ が十分に小さければ、明らかに $k(\mu, C) \neq 0$ であり、したがって、$|C|$ が十分大きいか μ が十分に小さければ、$k(\mu, C)$ は C と μ の実解析関数である．

メルニコフ関数によって μ が十分小さくて $|C| > \sqrt{2}$ が小さいなら、$W^u(\gamma)$ と $W^s(\gamma)$ が横断的に交わること、すなわち $k(\mu, C) \neq 0$ かつ $k(\mu, C) \neq \infty$ であることを上で示した．したがって、$|C|$ が十分に大きいか μ が十分に小さい領域において、ほとんどすべての μ と C に対して $k(\mu, C) \neq 0$ かつ $k(\mu, C) \neq \infty$ である．したがってこの領域において、ほとんどすべての C と μ に対して $W^u(\gamma)$ と $W^s(\gamma)$ は横断的に交わる．

こんどは $C = C^*$ を大きくとって固定しよう．上のことから、ある十分大きな C^* があって、ある μ に対して $k(\mu, C^*) \neq \infty$ かつ $k(\mu, C^*) \neq 0$ である．$k(\mu, C)$ の解析性により、高々ある有限個の値を除いてすべての $\mu \in [0, 1]$ に対して $k(\mu, C^*) \neq \infty$ かつ $k(\mu, C^*) \neq 0$ であることがわかる．

次の定理を述べてこの節を終わろう．

定理 2. ある有限個の値を除いてすべての質量比 μ の値に対して、あるヤコビ定数の値があって周期軌道 γ の安定および不安定多様体、$W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$、は横断的に交わる．

以下では、制限三体問題に横断的ホモクリニック軌道が存在することの帰結のいくつかを記述しよう．

4. 捕獲軌道と振動軌道

Smale-Birkhoff のホモクリニック定理により、周期軌道の横断的ホモクリニック軌道が存在すれば馬蹄写像があってカオスになる．なかんずく、これから非常に長い周期の周期軌道が無限にあることが出る (われわれがここで見つけた周期軌道はもともとの制限三体問題の周期解には対応しないかもしれないことを指摘しておく．なぜならわれわれは角変数 s を新しい時間変数として使って系の次元を下げたからである．このようにして見つけた周期点は通常もと

の制限三体問題の準周期解に対応する)．ここでの横断的ホモクリニック軌道が無限に多くの捕獲軌道と振動軌道の存在を意味することを示そう．制限三体問題において、軌道が 振動的 といわれるのは、$t \to \pm\infty$ のとき $\limsup r = \infty$ かつ $\liminf r < \infty$ のときである．ここで r は原点からの P_3 の距離 $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = x^{-2}$ である．また軌道が 捕獲 軌道と呼ばれるのは、$t \to \pm\infty$ のとき $r \to \infty$ であって $t \to \mp\infty$ のとき $\limsup r < \infty$ の場合である．

Moser[9] にしたがって、ホモクリニック点の近くで必要な記号力学を確立して振動解の存在を示そう．

s_0 を固定して横断面 $\Gamma = \Sigma^{s_0}$ をとる．C の値が大きいとき、Γ 上の第一回帰写像はきちんと定義されている．p を上の定理の横断的ホモクリニック点とし、R は 2 つの辺が $W^s(p)$ と $W^u(p)$ の一部である小さな長方形とする (Fig.2 参照)．ϕ を定義される限りにおいて第一回帰写像とする．

点 $q \in R$ に対して、$k = k(q)$ は $\phi^k(q) \in R$ となる (もしあれば) 最小の正整数とする．このような $k > 0$ を持つすべての $q \in R$ の集合を D で表わす．次のように置く．

$$\tilde{\phi}(q) = \phi^k(q) \quad \text{for all} \quad q \in D.$$

Moser はこの写像 $\tilde{\phi}$ を R に対する ϕ の 横断 写像と呼んだ．簡単にわかるように、D は空集合ではなく、その上、無限に多くの記号からなる推移 (shift) 同相写像を D に埋め込むことができる．

Fig.2

定理 3. 横断写像 $\tilde{\phi}$ に関する不変部分集合 $I \subset D$ で、集合 $S = N^Z$(無限個の記号上の両無限列の空間) に同相なものがあり、I 上の横断写像 $\tilde{\phi}$ は S 上の推移写像に位相共役である．換言すれば、τ を同相写像 $\tau : S \to I$ とし、σ を S の推移写像とすれば、次を得る．

$$\tilde{\phi}\tau = \tau\sigma.$$

この定理の証明は [9] を参照されたい．

この定理は、標準的 Smale-Birkhoff ホモクリニック定理と違って、推移空間が無限個の記号を持っている．ここで無限個の記号が必要なのは振動解の存在を示すためである．任意の

$q \in I$ に対して、$k(q)$ が大きければ軌道は原点の非常に近くを通過するはずである．次の定理はただちに出る．

定理 **4.** I は定理 3 で与えられる集合とし、$q \in I$ は対応する S の記号列が非有界であるような点とすると、対応する軌道は振動的である．ゆえに振動解に対応する I の点が非可算個存在する．

列 $s = \{\ldots, s_3, s_2, s_1, s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ は $\sup\{s_i, i \in Z\} = \infty$ のとき非有界であるといわれることに注意しよう．

捕獲軌道を構成するのは簡単である．Fig.2 に示されるように、小さな長方形 R' と R'' を考えるだけでよい．

5. 制限三体問題の非可積分性

積分可能性の概念は歴史的に非常に面白い．他の人が制限三体問題の他の積分を捜しているときに、ポアンカレ $(1989)[10]$ は、驚くべきことに、よく知られたヤコビ積分以外に実解析積分で 2 つの主星の質量に関しても解析的な積分がないという意味で問題が「非可積分」であることを示した．しかし μ の任意の特別の値に関しては積分可能であるかどうかは知られていなかった．横断的ホモクリニック点が存在すれば実解析積分は存在しないから、われわれは次の定理を得る．

定理 **5.** いくつかの有限個の値を除いて主星の質量比 $\mu \in [0, 1]$ の任意の値に対して、よく知られたヤコビ積分以外に実解析積分な積分は円制限三体問題にはない．

この定理はポアンカレの古典的定理を拡張して、P_1 と P_2 の質量比の有限個の値以外のすべての値に対して制限三体問題が「非可積分」であることを主張する．著者は、この定理がすべての μ に関して正しいことを信じている．事実、任意に μ を固定すると、ほとんどすべてのヤコビ定数に対して横断的ホモクリニック点があると著者は考えている．

References

1. V.M. Alekseev, Quasirandom dynamical systems, I, II, III, *Math. USSR-Sb.* **5** (1968), 73-128; **6** (1968), 505-560; **7** (1969), 1-43.
2. R. Easton, Parabolic orbits for the planar three-body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 116-134.
3. R. Easton and R. McGehee, Homoclinic phenomena for orbits doubly asymptotic to an invariant three-sphere, *Indiana Univ. Math. J.* **28** (1979), 211-240.
4. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
5. J. Llibre and C. Simó, Some homoclinic phenomena in the three-body problem, *J. Differential Equations* **37** (1980), 444-465.
6. J. Llibre and C. Simó, Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem, *Math. Ann.* **248** (1980), 153-184.

7. R. McGehee, A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics, *J. Differential Equations* **14** (1973), 70-88.

8. R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 857-876.

9. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Annals of mathematics Studies, No.77, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1973.

10. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* III, Gauthier-Villars, Paris, 1899.

11. C. Robinson, Homoclinic orbits and oscillation for the planar three-body problem, *J. Differential Equations* **52** (1984), 356-377.

12. D. Saari and Z. Xia, The existence of oscillatory and superhyperbolic motion in Newtonian systems, *J. Differential Equations* **82** (1989), 342-355.

13. K. Sitnikov, The existence of oscillatory motion in the three-body problem, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **133** (1960), 303-306.

14. A. Weinstein, Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems, *Ann. of Math.* **98** (1973), 377-410.