谷川清隆 訳

Annals of Mathematics **135** (1992), 411-468

ニュートン系における非衝突特異性の存在

The existence of noncollision singularities in newtonian systems

Zhihong Xia

Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia

序

この論文ではパンルベ(Painlevé)とポアンカレ(Poincaré)が前世紀に提出し、長い間未解決であった天体力学の問題を解く．問題は n 体問題の特異性の本質に関するものである．ニュートンの n 体問題に非衝突特異性はあるか？ここで肯定的な答えを出す．5体問題で非衝突特異性があることを証明するのである．

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内で運動する n 質点を考える．i 番目の粒子の質量を $m_i > 0$ とし、その位置を $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^3$ とし、$\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbf{R}^3$ を速度とする．ニュートンの法則によれば、

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^3}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i}. \tag{0.1}$$

ここで二重点 ¨ は時間に関する2階微分を表わし、U は負のニュートンポテンシャルあるいは自己ポテンシャルを表わす:

$$U = \sum_{j<i} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}.$$

天体力学の基本問題は系(0.1)の解を記述することである．

微分方程式系の解が時刻 $\sigma < \infty$ において特異性を経験するとは、解が σ を越えて解析接続できないときである．運動方程式(0.1)は2つ以上の粒子が物理空間の同一場所を占める場合を除いていたるところ実解析的である．もっと詳しく言うなら、

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_n) \in (\mathbf{R}^3)^n) | \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\},$$
$$\Delta = \cup_{i<j} \Delta_{ij},$$

とおく．自己ポテンシャル U は $(\mathbf{R}^3)^n \backslash \Delta$ 上の実解析関数である．常微分方程式の標準的存在および一意性理論から次の結果が得られる．

定理 0.1. $\mathbf{q}(0) \in (\mathbf{R}^3)^n \backslash \Delta$ および $\dot{\mathbf{q}}(0) \in (\mathbf{R}^3)^n$ が与えられたとき、すべての $0 \leq t < \sigma$ に対して定義された一意の解 $\mathbf{q}(t)$ が存在する．ここで σ は極大のものを取る．

定義 0.1. $\sigma < \infty$ なら、解 $\mathbf{q}(t)$ は σ において特異性を経験すると言われる．

換言すれば、解が σ において特異性を経験するのは、常微分方程式の標準的存在および一意性理論によって解をこれ以上接続できなくなったときである．解の特異性はポテンシャル関数 U の特異性に関係するはずであることがわかる．事実、古典的定理によれば、粒子の相互距離の最小値は特異点においてゼロに近づくはずである．

定理 0.2(パンルベ、1895). $\mathbf{q}(t)$ が σ において特異性を経験するなら、次が成り立つ．

$$\mathbf{q}(t) \to \Delta \quad \text{as} \quad t \to \sigma.$$

この定理の証明は Siegel & Moser の本 [20] にある．

$t \to \sigma$ のとき $\mathbf{q}(t)$ は Δ 上の決まった点に近づかねばならないのだろうか．$\mathbf{q}(t)$ は Δ に近づくにつれて激しく振動するかもしれないし、Δ に近づくにつれて非有界になるかもしれない．$t \to \sigma$ のとき $\mathbf{q}(t)$ が $\mathbf{q}^*$ に近づくなら、各粒子は時刻 σ にある極限位置に落ちつく．$\mathbf{q}^* \in \Delta$ であるから、極限位置のうち少なくとも 2 つは一致するはずである．つまり、$t \to \sigma$ のとき、これらの粒子は衝突する．したがって次の定義を得る．

定義 0.2. $\mathbf{q}(t)$ が σ において特異性を経験するとする．この特異性が衝突特異性と言われるのは、$\mathbf{q}^*$ があって $t \to \sigma$ で $\mathbf{q}(t) \to \mathbf{q}^*$ のときである．それ以外のとき、特異性は非衝突特異性といわれる．

今日まで古典天体力学の n 体問題の特異性の本質の完全な解明にはいたっていない．衝突特異性の存在は多少とも自明であるが、非衝突特異性が存在するかどうかは 1 世紀前のパンルベの時代から未解決である． 3 体問題に関する次の定理はパンルベによる．

定理 0.3. $n = 3$ ならすべての特異性は衝突特異性である．

したがって、$n \geq 4$ のときに非衝突特異性があるかどうかが問題である．

この論文では非衝突特異性があることを示してパンルベの問題を解く．5 体問題で存在を証明する．ここでのやり方を修正すれば $n > 5$ の n 体問題でも同様のことが言える．

しかし、まずこの問題の歴史を簡単に振り返ろう．

パンルベの問題の解への重要な一歩を von Zeipel[25] が 1908 年に記した．$t \to \sigma$ のときすべての粒子の位置が有界にとどまるなら、特異性は衝突によることを彼は示した．言い換えると、非衝突特異性が起こり得るのは、有限時間に粒子系が非有界になるときだけである．

正確を期すために

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i |\mathbf{q}_i|^2,$$

とおく．ここで I は系の慣性モーメントであり、系の大きさを測る．I の 2 階微分をとればラグランジュ-ヤコビの方程式

$$\ddot{I} = U + 2h,$$

を得る．$\mathbf{q} \to \Delta$ のとき $U \to \infty$、したがって $\ddot{I} \to \infty$ となることを確認して欲しい．次の命題はこの事実とパンルベの定理 0.2 から容易に証明できる．

命題 0.1. σ を (衝突あるいは非衝突) 特異点とする．このとき $t \to \sigma$ のとき $\lim I \leq \infty$ が存在する．

すると von Zeipel[25] の定理を次のように述べることができる．

定理 0.4(von Zeipel). σ が特異点であって、$t \to \sigma$ のとき $\lim I < \infty$ なら σ は衝突特異点である．一方、σ が非衝突特異点なら $t \to \sigma$ のとき $\lim I = \infty$ である．

この定理の最初の証明は [25] にある．この定理に関する歴史概観および現代的証明に関しては McGehee[9] を参照されたい．実のところ、この定理は他の数人によっても証明されている．たとえば、1920 年の Chazy[2]、1970 年の Sperling[24]、1973 年の Saari[16] がそれである．Saari は von Zeipel の結果を本質的に拡張し、慣性モーメントが「ゆっくり変わる」なら非衝突特異性は起こり得ないことを示した．天体力学における特異性への最近の興味は 1970 年代初頭の Saari および Pollard の仕事に依るところが多い ([13]-[17] 参照).

von Zeipel の定理は注目すべき結果である．非衝突特異性の起こる唯一の道は、有限時間に系が無限遠にまで爆発することであると言っている．このため非衝突特異性は一見不可能に思える．というのは、有限時間で粒子が無限遠に行くためには無限大の運動エネルギーを獲得する必要があるからである．しかし、ポテンシャルエネルギー U には底がないので、粒子の運動エネルギーに上限はないのである．実際、McGehee & Mather([6]-[8]) の最近の結果によれば、当初考えられていたよりは、パンルベの問題への肯定的な解は疑わしさが減じている．事実、衝突特異性を膨らませる McGehee のテクニックこそ非衝突特異性を構成するための最大の武器なのである．

定理 0.2 より、σ において $\mathbf{q}(t)$ が非衝突特異性を経験するなら、$t \to \sigma$ のとき $\mathbf{q}(t) \to \Delta$ である．このことから、物理空間の非衝突特異点の任意の近傍に衝突特異点があるはずであることが示唆される．二体衝突は本質的に代数的分岐点であって解析的にあるいは幾何学的に正則化できて、弾性反発として取り扱える．非衝突特異性の任意の近傍に 3 体以上の粒子による衝突特異性があるはずであることをわれわれは直観的には知っている．したがって、3 体以上の粒子の衝突による衝突特異性を完全に理解することが非衝突特異性を調べるのに本質的である．

衝突特異性は Wintner[26]、Siegel & Moser[20]、Saari & Pollard[13]-[17]、およびその他の人によって調べられてきた．彼らは衝突粒子の極限的ふるまいに関していくつか重要な結果を得ている．1974 年、McGehee[7] は三体衝突を調べるのに都合のよい注目すべき座標の組を導入した．すでに指摘したように、U はすべての場所で定義されてはおらず、相空間にはベクトル場の定義されない「穴」があるのである．有限時間にこの特異点に達する軌道があり、またこの特異点から出発する軌道もある．その上、これらの「穴」の近くでの系の局所的ふるまいは非常に複雑であり得る．しかしながら、McGehee の座標によってこれらの解のふるまいを比較的容易に読みとることができる．

McGehee は「極座標」を用いて特異点集合を膨らませ、それを衝突多様体と呼ばれる不変境界で置き換える．力学系はこの境界に（時間の尺度変換の後で）滑らかに拡張される．こうして拡張された相空間上での新しい流れが得られる．この新しい流れを境界に制限すると、きわめて容易に理解できる．それは「勾配的」Morse-Smale 流である．こうして複雑な力学系の境界に簡単な系を見つけたのである．そしてこの事実から、特異点近くの解のふるまいを容易に理解できるのである．

McGehee の座標を使って直線 3 体問題 ([7]、[6]、[19] 参照)、二等辺三体問題 ([3]、[4]；[10]、

[11] 参照) の三体衝突、および非等方ケプラー問題 ([4] 参照) が広く調べられてきた．非常に多くの新しい結果がこれらの仕事から得られ、またいくつかの古典的結果も比較的容易に再証明された．McGehee の座標のもっとも重要な特徴は、衝突特異点が衝突多様体上のある双曲不動点に対応すること、および有限時間で衝突に達する軌道が尺度変換された時間では無限時間かかってこの点に達することである．したがって一般力学系の標準的方法が使え、これらの不動点の安定および不安定多様体を調べることにより豊富な力学構造を見つけることができるのである．カオス解が自然に生じる．

これらの新しい発見の中でも Mather & McGehee[6] の例は注目すべきである．これは非衝突特異性の存在に関するパンルベの問題への答えを見つけるのに光明を与えた．Mather & McGehee は直線 4 体問題において初期値のカントール集合に対して有限時間で非有界な解を構成した．すなわち、ある σ に対して $t \to \sigma < \infty$ のとき $I \to \infty$ なる解を構成したのである．しかし直線 4 体問題では二体衝突が不可避であるから、彼らの得た解は弾性衝突として延長された二体衝突を無限個含む．かれらの発想に基づいて Anosov[1] は Mather & McGehee が構成した例の近傍の平面 4 体問題に非衝突特異性があることを示唆した．しかしこのやり方はまだ成功していない．

この論文のもともとの版 (学位論文の形で) が出回ったあとで別なやり方で Gerver[5] は平面 3N 体問題で N が非常に大きいとき非衝突特異性の存在を主張している．

次の節では主結果を述べ、5 体問題における非衝突特異解を記述する．そしてなぜこのような運動が存在するかに関して直観的な考えを与える．論文の残りはその証明に充てられる．

1. 主定理およびその証明の概略

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内を運動する 5 個の質点 $m_1, m_2, \cdots, m_5$ を考える．$m_1 = m_2$ および $m_4 = m_5$ とする．m_3 はつねに z 軸にあり、m_1 と m_2 はつねに z 軸に関して対称な位置にあり、m_4 と m_5 も z 軸に関して対称な位置にあるような初期条件と選ぶ．重心を原点にとると、自由度 6 の力学系が定義される．

この系はエネルギー積分および角運動量積分を持つ．われわれの目的のため、角運動量ゼロの超曲面、11 次元の代数的 variety に話を制限する．Ω をこの多様体の任意のエネルギー超曲面とする．Ω は 10 次元である．

よく知られているように二体衝突は解析的方法または Easton のブロック正則化によって正則化できる．この論文を通して、軌道は二体衝突を越えて延長されているとして流れを考える．有限時間で非有界になる解として構成する最初のものは二体衝突を含む可能性がある．後に、これらの有限時間に非有界な解の中に、二体衝突を一度も経験しない軌道があることを証明する．このようにして非衝突特異性の存在を確立する．

m_1, m_2, m_3 および m_3, m_4, m_5 の間の三体衝突は特に重要である．m_1, m_2, m_3 が三体衝突するに至るにはいくつかの道がある．古典的な結果によれば、粒子が衝突に近づくにつれて、中心図形と呼ばれる配位に近づく．この特別な 5 体問題を設定するにあたって m_1, m_2, m_3 に対して 3 つの中心配位を見つけた．ひとつは m_3 をまんなかとする直線配位であり、残りの 2 つは m_1, m_2, m_3 が正三角形をなす配位である．そのうちひとつは m_3 が下になるもの、これを E_+ と表わす．もうひとつは m_3 が上になるもの、これを E_- と表わす．Σ_1 は Ω の部分集合であって、m_1, m_2, m_3 が極限配位 E_+ なる三体衝突で終わるようなすべての初期条件から成ると

する．Σ_1 は余次元 2 のはめ込み多様体であることを示す．同様に Σ_4 は Ω の部分集合であって、m_3, m_4, m_5 が極限配位 E_- に類似な三体衝突で終わるようなすべての初期条件から成るとする．Σ_4 も余次元 2 のはめ込み部分多様体である．

この論文の目標は次の 2 つの定理を証明することである．二体衝突は正則化されていることを思いだしてほしい．

定理 1.1. 正の質量 $m_1 = m_2, m_3, m_4 = m_5$ が存在して次が成り立つ．$x^* \in \Sigma_1$ に対して t^* は x^* を出発する軌跡が終わる時刻とする．x^* を選んで $\mathbf{q}_4(x^*, t^*) = \mathbf{q}_5(x^*, t^*)$ にできる．すなわち、x^* から出発する軌跡は m_1, m_2, m_3 が t^* で衝突するとき、同じく t^* に m_4 と m_5 が二体衝突している．x^* において Σ_1 を横切る Ω 内のある 3 次元超曲面 Π に対して、以下の性質を持つ点の非可算集合 Λ が Π 上に存在する．$x \in \Lambda$ とする．$t_\infty > 0, t_\infty < \infty$ があって、初期値 x から出発する軌跡はすべての時間 $0 \le t < t_\infty < \infty$ にわたって定義され (二体衝突は経験しうる)、次を満たす.

$$z_1(t) = z_2(t) \to \infty, \quad z_4(t) = z_5(t) \to -\infty \quad \text{as} \quad t \to t_\infty.$$

上の定理は有限時間に非有界になる解の存在を言っているが、次の定理は非衝突特異性の存在を主張する．

定理 1.2. x^*, Π, Λ を定理 1.1 のものとする．$x^* \in \Sigma_1, \Pi \subset \Omega$ が存在して次が成り立つ．Λ の非可算部分集合 Λ_0 があって、すべての $x \in \Lambda_0$ に対して $\mathbf{q}_1(t) \neq \mathbf{q}_2(t), \mathbf{q}_4(t) \neq \mathbf{q}_5(t)$ がすべての $0 \le t < t_\infty$ で成り立つ．すなわち、Λ_0 から出発する解は非衝突特異性を経験する．

上の定理の証明は長くまた複雑である．それゆえ 2 つの定理の形式的な証明をする前に、基本的発想のいくつかを非公式な形で概観しよう．

すでに述べたように、この論文の目的は 5 体問題において物理空間で有限時間に非有界となるようなニュートン運動の存在を証明することである．そのうえ無限に多くの二体衝突の助けを借りずにこの運動の存在を示さねばならない．この力学的ふるまいの背後にある発想は単純である．5 体問題において 4 体が 2 つの組になっているとする．それぞれの組の粒子は同じ質量を持つとする．4 つの粒子は 2 つの連星を形成する．各連星は大きな離心率を持ち、$x - y$ 面に平行な面内で運動する．2 つの連星の違いは片方がもう一方のはるか上にあり、公転方向が逆であることである．公転方向の違いのおかげで系の全角運動量をゼロにすることができ、また 2 つの連星の角運動量を任意に小さくすることができる．

一方 5 番目の粒子は z 軸に制限されている．この 5 番目の粒子の振動が系を駆動し、非有界な運動を生成する．この系のふるまいを見るために次のシナリオを思い浮かべよう．振動する粒子が連星の軌道面を通過するとする．その際連星はちょうど最接近に近づきつつあるとする．連星を構成する粒子はほとんど最接近点にあるから、これらは 5 番目の粒子にも近い．Simó[21] はこのような近衝突軌道を McGehee の衝突多様体を使って解析した ([3] および [10] も参照)．面白いのは、ある種の質量比 (たとえば 5 番目の粒子の質量が他に比べてかなり大きい) では、上のような接近によって 5 番目の粒子を連星の軌道面に引き戻そうとする強い力が働くことである．このために 5 番目の粒子は逆戻りして連星がちょうど離れようとするときに連星の軌道面を通過する．このタイミングが 5 番目の粒子を引き留める力を弱める．逆に、

これによって５番目の粒子が高速でもうひとつの連星に向かって動く．やがてこの３体系の作用-反作用の効果により、もとの連星は $x-y$ 面からどんどん遠ざかる．

運動はあとはこのシナリオを逐次繰り返して得られる．５番目の粒子が連星のひとつに近づくたびにタイミングがうまく合って、三体の接近により、５番目の粒子が引き戻され加速されてもうひとつの連星に向かう．難しいのはこのシナリオが実際に起こることを示すことである．面白いことに、このふるまいは５番目の粒子の質量が結構大きいときに起こる．

このタイミング列は記号力学の議論を使って達成される．しかしこの議論を使う前に、相互作用の力学についていくつか別の要素を確立する必要がある．とくに、運動が有限時間に非有界になるなら、振動する粒子への加速効果も無限に大きくなる必要がある．したがって各連星の接近距離も無限小にならねばならない．ところがこれは三体相互作用の副産物としてのみ起こるのである．だからこの論文の大部分はこの種の三体相互作用の力学を説明する理論を展開するために費やされる．材料は２節および３節に与える．実際の三体衝突と三体衝突多様体は２節で考え、３節では近接衝突軌道に重点をおく．

連星の無限小の接近から別の心配が生じる．これらの連星は衝突するか?連星の角運動量がすべての時間にわたってゼロでなければ衝突はしない．これを取り扱うために、衝突を避ける問題の部分を記号力学の議論の中に取り込む．だから記号力学に含めるべきものは、連星から単独星を飛び出させる速度に関する情報と連星の (回転および楕円) 状態の情報である．さらに、２つの三体問題をつなげて、単独星が２つの連星の間を振動し得ることを示す必要がある．我々が発見したところによると、記号は相空間の領域によって特徴づけられる.「くさび」と呼ばれるこれらの領域は (三体衝突に対応する) ある特定の安定多様体への異なる軌道の近さによって、また不安定多様体とそれらとの関係によって決められる．連星の各接近に対して「くさび」を思い浮かべることができる．というのは、くさびは特定の連星と振動粒子の間の適当な接近がいつ起こるのかということに対応する必要があるからである．これらのくさびは４節で導入する．５節では記号力学の議論を行い、有限時間に非有界になる運動を確立する．最後に６節で非衝突特異性の存在を確立する．

以下の節では二等辺三角形三体問題とくに三体衝突の近くを通過する解を調べる．

2. 二等辺三角形三体問題—三体衝突多様体

この節ではいわゆる二等辺三角形三体問題と呼ばれる特殊なタイプの三体問題に話を限ろう．この問題は $\mathbf{R}^3$ 内の３粒子のある種の対称性を持つ運動を扱う．$m_1 = m_2 = m$ および $m_3 = m_3$ とおく．m_3 がつねに z 軸上にあり、m_1, m_2 の組が z 軸に関して互いにいつも対称になるような初期値を選ぶ．重心を原点に固定するとこれは自由度３の力学の系である．

$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ および $\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2, \dot{\mathbf{q}}_3$ をそれぞれ m_1, m_2, m_3 の位置および速度ベクトルとする．$\mathbf{q}_1 = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \dot{\mathbf{q}}_1 = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in \mathbf{R}^3$ とすると、対称性より、$\mathbf{q}_2 = (-x, -y, z) \in \mathbf{R}^3, \dot{\mathbf{q}}_2 = (-\dot{x}, -\dot{y}, \dot{z}) \in \mathbf{R}^3$ である．重心が原点にあるから、$2mz + m_3 z_3 = 0$ および $2m\dot{z} + m_3\dot{z}_3 = 0$ である．ここで $\mathbf{q}_3 = (0, 0, z_3)$ および $\dot{\mathbf{q}}_3 = (0, 0, \dot{z}_3)$ である．T と U を系の運動エネルギーおよび自己ポテンシャルとすると次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
T &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m(1+2\alpha)\dot{z}^2, \\
U &= \frac{1}{2} m m_3 \left[\alpha(x^2+y^2)^{-1/2} + 4(x^2+y^2+(1+2\alpha)^2 z^2)^{-1/2}\right].
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここで $\alpha = m/m_3$ は m_1(または m_2) と m_3 の質量比である．

M を 3×3 対角行列 $\mathrm{diag}[2m, 2m, 2m(1+2\alpha)]$ とし、次を定義する．

$$\xi = M^{1/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \eta = M^{1/2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

この新しい変数はハミルトン関数を

$$H = \frac{1}{2}|\eta|^2 - U(\xi),$$

とするハミルトン方程式を満たす．ただし

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{3/2} m_3 \left[\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2} + 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 + (1+2\alpha)^2 \xi_3^2)^{-1/2} \right],$$

である．運動方程式は次のように書ける．

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}.$$

この節の目的は三体衝突近くの運動を理解するために必要な道具を発展させることである．このためには McGehee の変数 [8] を導入するのがよろしい．$r = |\xi|, \mathbf{s} = r^{-1}\xi, \mathbf{z} = r^{1/2}\eta$ とおき、時間変数 t を $dt = r^{3/2} d\tau$ によって τ に変える．すると運動方程式は次のようになる．

(2.2)
$$\begin{aligned} r' &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}) r, \\ \mathbf{s}' &= \mathbf{z} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z})\mathbf{s}, \\ \mathbf{z}' &= \nabla U(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{z})\mathbf{z}. \end{aligned}$$

ここで $'$ は新しい時間変数 τ による微分を表わす．定義より $|\mathbf{s}| = 1$ である．これから球座標を使うことが示唆される．次のようにおく．

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi).$$

するとベクトル

(2.3)
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{s}, \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0), \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \phi} = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\phi), \end{aligned}$$

は、$\phi \neq \pm\pi/2$ のとき $\mathbf{R}^3$ の直交基 (正規直交基ではない) をなす．したがって $\mathbf{z}$ をこの基をもとに分解できる．$\mathbf{z} = v\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ とし (ここで $v = \mathbf{z}\cdot\mathbf{u}_1 = \mathbf{z}\cdot\mathbf{s}, w_2 = (\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}_2)/(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2), w_3 =$

$\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_3$ である)、また (2.2) 式を使うと、変数 $(r, \theta, \phi, v, w_2, w_3)$ に関する方程式が得られる．このようにして次が得られる．

$$
\begin{aligned}
r' &= vr, \\
\theta' &= w_2, \\
\phi' &= w_3, \\
v' &= \frac{1}{2}v^2 + w_2^2 \cos^2\phi + w_3^2 - U(\phi), \\
w_2' &= -\frac{1}{2}vw_2 + 2w_2w_3 \tan\phi, \\
w_3' &= U'(\phi) - \frac{1}{2}vw_3 - w_2^2\cos^2\phi\tan\phi.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ここで $U(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{3/2} m_3[\alpha \sec\phi + 4(1 + 2\alpha\sin^2\phi)^{-1/2}]$ である．

ポテンシャルエネルギー $U(\phi)$ は θ に依らないことおよび (2.4) 式の右辺は θ を含まないことに注意しよう．これは配置の回転に関する U の不変性およびその結果としての角運動量の保存を反映している．w_2 に関する式は U を含まない．だから $c = r^{1/2} w_2 \cos^2\phi$ が運動の定数であることが簡単にわかる．c は実は系の全角運動量である．それゆえ、この角運動量積分を使って方程式から w_2 を消去できる．またベクトル場が θ を含まないから θ の式を無視できる．(これは相空間を r, u, v, w_2, w_3 空間に射影することと等価である.) 最後に、各角運動量空間上の自由度 2 の系にたどりつく．しかし、これをするに当たって、c にはやっかいな因子 $r^{1/2}$ が付いているから、角運動量ゼロの曲面は $r = 0$ と $w_2 = 0$ という 2 つの成分から成る variety であることがわかる ($c \neq 0$ のときこの曲面は多様体である)．この variety は c が小さいときの運動の解析を面倒にする．そこで w_2 の式を消さずにおき、θ を無視する．残ったのは、(r, ϕ, v, w_2, w_3) に関する 5 階の微分方程式系である．ここでもエネルギー積分

$$
\frac{1}{2}(v^2 + w_3^2 + w_2^2\cos^2\phi) - U(\phi) = rh,
$$

がある．

新しい系では、m_1 と m_2 の二体衝突による特異点が $\phi = \pm\pi/2$ にある．この特異性は変数変換で取り除ける．$w = w_3\cos\phi, u = w_2\cos^2\phi$ とおき、得られるベクトル場に $\cos\phi$ をかける．新しい独立変数に関する微分をやはり $'$ で表わせば、次式を得る．

$$
\begin{aligned}
r' &= vr\cos\phi, \\
\phi' &= w, \\
v' &= U(\phi)\cos\phi - \frac{1}{2}v^2\cos\phi + 2rh\cos\phi, \\
w' &= U'(\phi)\cos^2\phi - \frac{1}{2}vw\cos\phi - (2U(\phi) + 2rh - v^2)\sin\phi\cos\phi, \\
u' &= -\frac{1}{2}vu\cos\phi.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

ここでエネルギー関係式は

$$
\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi + w^2 + u^2) - U(\phi)\cos^2\phi = rh\cos^2\phi.
$$

さてベクトル場 (2.5) はいたるところ解析的である．関数 $U(\phi)\cos\phi$ と $U'(\phi)\cos^2\phi$ がすべての $\phi\in[-\pi/2,\pi/2]$ に対して解析的だからである．

r に関する方程式 $r'=rv\cos\phi$ より、$r=0$ が流れの不変多様体であることがわかる．流れが $r=0$ にまで解析的に拡張され、三体衝突特異点が解析的多様体で置き換えられたことに注意しよう．三体衝突に終わる軌道は $\tau\to\infty$ のときこの多様体に向かう．三体衝突から飛び出す軌道は $\tau\to-\infty$ のときこの多様体に向かう．この多様体上の運動はもちろん仮想的なものであるが、この多様体の近くを通過する軌道はこの多様体上の仮想的軌道をなぞるはずである．ゆえに、この多様体上の運動を理解すれば、近衝突軌道に関してかなりの情報が得られる．いま考えている問題の場合、有限時間で非有界な軌道は繰り返し三体衝突の近くを通過するはずであるから、非衝突特異性を構成するためには三体衝突上の流れを調べることが非常に重要である．

M を $r=0$ のこの多様体とする．これを「非平面二等辺三角形三体問題の三体衝突多様体」と呼ぼう．この節の残りでは M 上の流れ、とくに不動点およびその安定・不安定多様体に注意を集中しよう．

$r=0$ とすると (2.5) 式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\phi' &= w,\\
v' &= U(\phi)\cos\phi-\frac{1}{2}v^2\cos\phi,\\
w' &= U'(\phi)\cos^2\phi-\frac{1}{2}vw\cos\phi-(2U(\phi)-v^2)\sin\phi\cos\phi,\\
u' &= -\frac{1}{2}vu\cos\phi.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

またエネルギー関係式も次のようになる．

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi+w^2+u^2)-U(\phi)\cos^2\phi=0.$$

よって任意のエネルギー h に対して M は同じ方程式で決まり、その上の流れは (2.6) 式で決まる．

位相的に M は 3 次元球から 4 点を除いたものである．

(2.6) 式より、$u=0$ のとき $u'=0$ を得る．だから $u=0$ は M の不変部分多様体である．この多様体を M_0 と表わす．(u は $x-y$ 面での回転を測る変数であったことを思い起こそう.) すると M_0 は次式で与えられる．

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi+w^2)-U(\phi)\cos^2\phi=0.$$

で与えられる．M_0 上の流れは次式で定義される．

$$
\begin{aligned}
\phi' &= w,\\
v' &= U(\phi)\cos\phi-\frac{1}{2}v^2\cos\phi,\\
w' &= U'(\phi)\cos^2\phi-\frac{1}{2}vw\cos\phi-(2U(\phi)-v^2)\sin\phi\cos\phi.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

実のところ、M_0 は z 軸を含む平面二等辺三角形三体問題の三体衝突多様体である．ふつうは、はじめに角運動量をゼロにして次に三体衝突を膨らませてこの多様体を得るのである．この多様体上の流れはDevaney[3]、[4]、Moeckel[10]、[11] やその他の人々が広範囲にわたって調べてきた.

図 1

位相的に M_0 は 2 次元球から 4 点を取り除いたものである．図１はそのグラフを示す．M_0 上の流れには 6 個の不動点がある．流れは v に関し勾配的 (gradient-like) である．すなわちこの 6 個の不動点を除いて、M_0 の軌道に沿って v は厳密に増加する．(式 (2.7) およびエネルギーの式より $v' \geq 0$ であることを思い起こそう.)

３つの中心図形が二等辺三角形三体問題に対応する．２つの正三角形中心図形 (１つは z_3 が正でもう１つは負) と m_3 を m_1, m_2 の間におくの直線中心図形が 1 つである．ここで E_+^*, E_+, E_-^*, E_- は 2 つの正三角形中心図形に対応し C, C^* は直線中心図形に対応する．E_+, E_- および C の安定多様体は３体衝突に終わる軌道であり、E_+^*, E_-^* および C^* の不安定多様体は３体衝突に始まる軌道である.

M_0 上で E_+, E_-, E_+^*, E_-^* はサドル (鞍点) である．C は源点であり、C^* は沈点である．われわれの問題では、後での役割の重要性から E_+ と E_- の安定および不安定多様体に格別興味がある.

E_+ と E_- の不安定多様体には３つの大きな可能性があることに注意する．v はこれらの軌道に沿って増加するはずだから、不安定多様体の典型的な分枝は三体衝突多様体 M_0 の左または右の「腕」を登って行くか、または沈点に落ち込む．不安定多様体がどちらかのサドルの安定多様体とぴったりつながってしまうような縮退した状況も有り得る.

γ^+ は M_0 内の E_+ の不安定多様体の分枝であって E_+ の近くで w 座標が正のものとし、γ^- は E_+ の不安定多様体のもうひとつの分枝とする．図 2 には γ^+ と γ^- の典型的なふるまいを示しておいた．γ^+ と γ^- がそれぞれ衝突多様体の $\theta = \pi/2$ および $\theta = -\pi/2$ の腕を登るような質量の組は許容 (allowable) であると言うことにする．許容質量の組の大きな開集合がある (Devaney[3]、Simó[21] 参照).

M_0 に関する最後の観察は、対称性により、E_- の不安定多様体と E_+^*, E_-^* の安定多様体は γ^+ と γ^- によって完全に決定できることである.

これ以後は、考える質量比はすべて許容であると仮定する.

次に M に注意を向けよう．これは4次元空間 $\mathbf{R}^4$ に埋め込まれた3次元多様体であって、M_0 はその不変部分多様体である．M を $\mathbf{R}^3$ 内に、分かりやすく描くのは難しい．しかしながら、われわれが興味をもっているのは M_0 に近い M の部分だけであるから、M を2つの対称な部分 $u \geq 0$ の部分と $u \leq 0$ の部分に分けることができる．両方とも流れのもとで不変であり、M_0 が共通の境界である．各部分を $\mathbf{R}^3$ において M_0 に囲まれる立体と見なす．この立体上で u はエネルギー関係式

$$u = \pm\sqrt{2U(\phi)\cos^2\phi - (v^2\cos^2\phi + w^2)},$$

から決まる．

図 2

次に M 上の流れを考える．簡単にわかるように、不動点で u はゼロのはずである．よって M_0 内のもともとの6個の不動点は M の不動点全部でもある．こんども M 上の流れは v に関して勾配的である．これら不動点の M 内の局所構造を理解するために、これらの点においてベクトル場を線形化する．$(\phi, v, u, w) = (\phi^*, v^*, 0, 0)$ は各不動点における値であるとする．このとき (2.6) 式より、

$$\begin{pmatrix} \delta\phi' \\ \delta v' \\ \delta u' \\ \delta w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}v^*\cos\phi^* & 0 \\ U''(\phi)\cos^2\phi^* & 0 & 0 & -\frac{1}{2}v^*\cos\phi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta v \\ \delta u \\ \delta w \end{pmatrix},$$

を得る．ここで $(\delta\phi, \delta v, \delta u, \delta w) \in TM|_{(\phi^*,v^*,0,0)}$ であり、不動点における接空間は $\delta\phi, \delta u$ および δw によって張られる．$TM|_{(\phi^*,v^*,0,0)}$ 上で $\delta v = 0$ であることに注意しよう．

各不動点におけるこの線形化方程式の固有値は簡単に見つけられる．C および C^* においては $U''(\phi) < 0$ であり、ふたたび C が源点で C^* が沈点であることがわかる．E_+, E_-, E_+^* および E_-^* に関していえば、これらはやはりサドルである．E_+ の場合、M_0 内に安定方向と不安定方向がある他に、M 内にもうひとつの反発方向がある．この新たな不安定方向は δu の方向を向いている．行列から判るとおり、この新たな固有値は M_0 内のもともとのものより弱い．安定多様体定理によれば、E_+ は M 内に 1 次元安定多様体と 2 次元不安定多様体を持つ．

対称性により、E_-, E_+^*, E_-^* の局所構造は E_+ の構造から出る．たとえば、E_- と E_+^* の局所構造はそれぞれ v 軸および $v = 0$ 平面を通して E_+ の局所構造を正確に反映している．

$\mathrm{Un}(E_+)$ を E_+ の 2 次元不安定多様体とする．このとき γ^+ および γ^- はこの多様体上にある．γ^+ と γ^- はそれぞれ M_0 の $\theta = -\pi/2$ および $\theta = \pi/2$ のところの腕を登って終わるから、γ^+ と γ^- のある小さな近傍もこの 2 本の腕を登って終わる．

$\tau \to \infty$ のときに 2 本の腕のひとつで死ぬ任意の軌道に対して、$v \to \infty, u \to 0, w \to 0, \phi \to \pi/2$ を得る．物理的にはこれは m_3 が連星 m_1, m_2 から離れていくことに対応する．これから 2 つの仮想的二体問題が導かれる．ひとつは m_1 と m_2 の連星であり、もうひとつは m_3 と m_1, m_2 の重心との連星である．変数 v, u, w および ϕ は極限位置における第二の二体問題を定義するのみである．だから新しい変数を導入して第一の連星 m_1, m_2 の極限位置を定義する必要がある．明らかな選び方がある．極限位置は楕円軌道であるから、楕円の長軸と離心率が使える．無視した変数 θ は系の z 軸まわりの回転対称性を反映している．だから楕円軌道の離心率を与えるような変数を定義するだけでよい．このために、$w_{12} = |h_{12}c_{12}|c_{12}$ とおく．ここで h_{12} と c_{12} はそれぞれ連星 m_1, m_2 のエネルギーと角運動量である．これは M 上ではうまく定義できない量に見えるかもしれない．M 上では $r = 0$ であって h_{12} は $r = 0$ ではうまく定義できないからである．しかし w_{12} は $r = 0$ まで拡張できる．すなわち、w_{12} は M 上でうまく定義できる関数なのである．なぜなら、h_{12} と c_{12} はともに r を含むけれども w_{12} は r を含まないからである．事実、

$$w_{12} = \left| \frac{1}{2}(v\cos\phi + w\tan\phi)^2 + \frac{1}{2}u\sec^2\phi - m^{3/2}\sec\phi \right| |u|u.$$

まだ二体衝突による特異性が $\phi = \pm\pi/2$ に残っている．しかし、この特異性は標準的なやり方でエネルギー積分を使って取り除ける．

$u = 0$ は M 内の不変部分多様体であるから、u が正ならずっと正にとどまることがわかる．ただし $\tau \to \infty$ のとき u はゼロに近づく．w_{12} の場合はこれが起こらないことを次の補題は示している．

補題 2.1. M 内の任意の軌道 γ で M の 2 本の腕のどちらかをかけ登るものを考える．ある τ_0 に対して $w_{12}(\gamma(\tau_0)) \neq 0$ なら、すべての τ に対して $w_{12}(\gamma(\tau)) \neq 0$ である．さらに、$\tau \to \infty$ のときの極限 $\lim w_{12}(\gamma(\tau))$ が存在して次が成り立つ．

$$w_{12}^\infty(\gamma) = \lim_{r\to\infty} w_{12}(\gamma(\tau)) \neq 0.$$

証明. この補題を直接証明する方法は、方程式から始めて、τ の大きな値に対して軌道に沿って $w_{12}(\tau)$ の変化を評価することである．しかし、われわれは McGehee の変換の特徴のひとつ

に基づいて、すなわち r 変数が他の座標から分離できるという特徴を使って別の仕方で進む．(次節でこの関係をさらに探求する.)

M 上のベクトル場は (2.5) 式で $r=0$ と置き最初の方程式を無視すれば得られる．ところが $h=0$ として r の方程式を無視すると、まったく同じ方程式系が得られることに気づく．正確に言うために、$u_0 \neq 0$ として ϕ_0, w_0, v_0 および u_0 は

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi + w^2 + u^2) - U(\phi)\cos^2\phi = 0,$$

を満たす初期値であるとする．ベクトル場 (2.6) は M 上の軌道を一意に決める．ところで任意の初期値 $r=r_0$ を加えて方程式 (2.5) を解くことにより、ϕ, w, v および u に対してまったく同じ解を得る．だから (2.6) で与えられる解は二等辺三角形問題の $h=0$ および $c \neq 0(u \neq 0$ および $c = r^{1/2}u = r_0^{1/2}u_0)$ の軌道である．つまり、$r_0 \neq 0$ を固定すると $h=0$ の軌道と M 上の軌道に一対一の対応がある．$h=0$ の任意の軌道で M の腕の一つを登って終わるものは、双曲・楕円型の軌道を表わす．ここで連星 m_1 と m_2 の極限楕円軌道の離心率は厳密に 1 より小さく (つまり $w_{12}^{\infty} \neq 0$) て $c \neq 0$ のはずである．なぜなら、$c_{12} = c \neq 0$ は動かず、[2] で知られているように、h_{12} は負の定数に近づくからである．ゆえに $w_{12} = |h_{12}c_{12}|c_{12}$ はゼロでない極限値を持つ．したがって M 内の対応する軌道は同じ性質を持つ．これで補題が証明された．□

上の h_{12} の極限値は初期値に連続的に依ることを指摘しておく．だから $w_{12}^{\infty}(x)$ は連続関数である．

また、M 上の流れは物理的解釈を許さないが、M 上の流れと $h=0$ のエネルギー超曲面の間の一対一の対応により M 上の流れを視覚化できることを強調したい．逆に衝突多様体から得られる情報はゼロエネルギーの超曲面上の運動の理解度を高める．

次に E_+ の不安定多様体 $\mathrm{Un}(E_+)$ に注意を向けよう．まず、γ^+(または γ^-) の近くの $\mathrm{Un}(E_+)$ に局所座標を導入する必要がある．$\mathrm{Un}(E_+)$ と $v=0$ 面の交わりは滑らかな閉曲線であり、各軌道は $v=0$ 面と正確に一度だけ交わる．($v'>0$ だからである.) $\psi \in [0, 2\pi)$ をこの閉曲線上のパラメーターとし、$\psi(\gamma^-)=0$ および $\psi(\gamma^+)=\pi$ であるとする．ψ を使って $\mathrm{Un}(E_+)$ 上の各軌道を見分ける．

$\tau \to \infty$ のとき γ^+(または γ^-) の近くの軌道はいずれは腕のひとつを登っていくことを見て欲しい．補題 2.1 により、γ^+(または γ^-) の近くの $\mathrm{Un}(E_+)$ 上の点の w_{12} の極限はゼロでない値を持ち、さらに補題 2.1 の証明の後の注意より、w_{12}^{∞} は連続関数である．0 または π 以外の ψ に対して関数 w_{12}^{∞} の値は明らかでない．しかし対応する軌道が沈点 C^* で死ぬような ψ の開集合があって、それに対しては w_{12}^{∞} はゼロに等しい．

次のことを指摘してこの節を終わろう．任意の許容な質量の組に対して $w_{12}^* > 0$ および ψ の 2 つの区間 $[-\psi_1^*, \psi_1^*]$ および $[\pi-\psi_2^*, \pi+\psi_2^*](\psi_1^*>0, \psi_2^*>0)$ が存在して $|w_{12}^{\infty}|$ は 2 つの区間の両端点において値 w_{12}^* をとり、すべての $\psi \in [-\psi_1^*, \psi_1^*] \cap [\pi-\psi_2^*, \pi+\psi_2^*]$ に対して $|w_{12}^{\infty}(\psi)| \leq w_{12}^*$ となる．

3. 二等辺三角形３体問題—近接衝突軌道

三体衝突多様体を調べる目的は三体衝突の近くを通る解の力学的ふるまいを理解することにある．これをするのに、前節では M 上の運動と $h=0$ の多様体上の運動の一対一対応を利用した．ここではこの対応を使ってもっと鋭い結果を求め、またいくつか一般的な解を調べよう．

McGehee の変換のすばらしさのひとつは系の大きさを表わす変数 r を残りの変数から分離できることである．このことを利用するとエネルギー積分を通して系の次元をひとつ減らせる．エネルギー関係式を使って r, h を消去すれば、(2.5) の最後の 4 つの式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\phi' = w,\\
&v' = U(\phi)\cos\phi - \frac{1}{2}v^2\cos\phi + \frac{1}{\cos\phi}(v^2\cos^2\phi + w^2 + u^2 - 2U(\phi)\cos^2\phi),\\
&w' = U'(\phi)\cos^2\phi - \frac{1}{2}vw\cos\phi - (2U(\phi) - v^2)\sin\phi\cos\phi,\\
&u' = -\frac{1}{2}vu\cos\phi.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

この方程式系は $\mathbf{R}^3 \times (-\pi/2, \pi/2)$ 上で定義されており、r も h も含まない．このベクトル場の軌道はもとの系の軌道の射影であり、その逆も成り立つ．言い換えると、もとの系の任意の軌道は、$h \neq 0$ なら単にエネルギー積分を使って求まるし、$h = 0$ なら (2.5) の最初の式

$$r' = vr\cos\phi,$$

を積分して求まる．

こんどもベクトル場 (3.1) には、m_1, m_2 の二体衝突による特異性が $\phi = \pm\pi/2$ にあることがわかる．これは (2.5) の特異点ではない．というのは、これはエネルギーの式を使って正則化されていたからである．射影すると再び現われるのである．しかし、これは真性特異点ではないから、Easton のブロック正則化法で取り除ける．我々はこれを行なう．だから特異点集合の近くで、新しいベクトル場の軌道はやはり (2.5) で定義されるベクトル場の軌道の射影になっている．一度これを行って、この新しい正則化系を N で表わす．ここで簡単のために下に横たわる多様体も N で表わす．$\phi = \pm\pi/2$ においてベクトル場は正則化系の意味で使われるという仮定のもとで、方程式 (3.1) は上のベクトル場を定義する．正則化の手順全体は方程式 (3.1) のみに依存することを指摘しておく．h や r の特定の値には依らないのである．

図 3

もともとのエネルギー関係式から次を得る．

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi + w^2 + u^2) - U(\phi)\cos^2\phi = 0 \tag{3.2}$$

これは N 内の不変部分多様体である．これは三体衝突多様体の方程式であるから、この多様体も M と記す．しかし強調しておきたいのは、いまの問題設定では M は三体衝突多様体であるばかりでなく $h=0$ の不変多様体でもあることである．またこの多様体上の流れはもとの系の射影に対応している．だからこの双対的な同一視によって、この新しい M の前像は $r=0$ の三体衝突多様体ばかりでなく、$h=0$ かつ $r>0$ の軌道も含むのである．$r=0$ の不変多様体を $h=0$ の不変多様体と同一視するのは、エネルギー関係式に r と h が積の形でしか入っていないことによる．

M 上の流れについては前節で議論した．N 上の流れを見るために、N 上で u をゼロとおいて部分多様体 N_0 を定義しよう．この不変部分多様体は z 軸の周りに回転しない解 $(u=0)$ と同一視できる．ここで N_0 は 3 次元多様体であり、N_0 は $\mathbf{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2)$ に 2 本の直線を加えたものと見ることができる．ここで 2 本の直線は二体衝突に対応する．N_0 上の流れを図 3 に示す．

$M_0 = N_0 \cap M$ とおく．このとき M_0 は N_0 の不変部分多様体であって、その上の流れは、とうぜん前節の三体衝突多様体 M_0 上の流れとは別に解釈される．ここで M_0 は空間を隣合う 2 つの線分に分ける．M_0 の「内部」すなわち

$$\frac{1}{2}(c^2\cos^2\phi + w^2) - U(\phi)\cos^2\phi < 0, \tag{3.3}$$

で与えられる集合はもとの系の $h<0$ の射影に対応する．同様に M_0 の「外側」はもとの系の $h>0$ の射影軌道の集合と同一視される．M_0 上および外側の流れは v に関し勾配的である．しかし M_0 の内部の流れはこのうまい (nice) 性質を持たない．これは三体問題が $h<0$ のとき複雑であるというよく知られた事実に対応している．

N_0 にはいくつか直線軌道がある．これらは $E_+^*E_+, E_-^*E_-$ および C^*C を結ぶ直線であり、平行相似図形 (homothetic) 解に対応する．[26] の用語によれば、平行相似図形解は完全衝突に始まりかつ終わる解であって、その配位は中心図形を保つ．

N の解析に戻ろう．するとエネルギー積分と角運動量積分がうまく定義されないという問題に出会う．というのは、積分がともに r を含むからである．この困難を解消するために、これら 2 つの運動定数を結合して N に対する積分を得よう．$e=|hc|c$ とおく．すなわち、

$$e = u\left|u\frac{\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi + w^2 + u^2) - U(\phi)\cos^2\phi}{\cos^2\phi}\right|. \tag{3.4}$$

e の値は r に依らない．N_0 上でうまく定義されており、2 つの積分の積であるから、これは方程式 (3.1) の運動の恒量である．

面白いことに、M_0 の 6 個の不動点に加えてひと組の新しい不動点が N にある．これら 2 つの新しい不動点は、m_3 が原点にあって m_1 と m_2 が異なる方向に円運動をしていることに対応する．

こんどは N 内の不動点 E_+(同様に E_-, E_+^*, E_-^*) を考えよう．E_+ が 2 次元安定多様体と 2 次元不安定多様体を持つサドルであることは簡単にわかる．前節で示した通り不安定多様体の 2 つの方向は M 内にある．2 次元の安定方向は N_0 内にあり、図 3 に示してある．E_+ の安定および不安定多様体は $e=0$ で定義される不変 variety 内にある．

さて近接衝突軌道を議論する準備ができた．$x^* \in \mathrm{St}(E_+)$ とする．すなわち、これは三体衝突に終わる軌道である．また E_+ の安定多様体 $\mathrm{St}(E_+)$ は余次元 2 の多様体である．x^* において $\mathrm{St}(E_+)$ に横断的な 2 次元横断面 Γ を考えよう．

超平面 $u = 0$ は x^* に近い直線で Γ と交わることに注意する．この直線は平面問題に対応するから x^* はこの直線上にあるはずである．

Γ を初期条件の集合と考え、Γ から出発する軌道を考える．これらの軌道を調べるにあたって、不動点の安定多様体の十分近くから出発する軌道は任意に遠くまでその不動点の不安定多様体に沿って動く、という事実を利用する．したがって Γ 上で x^* の近くから出発する軌道は E_+ の不安定多様体 $\mathrm{Un}(E_+)$ 上の軌道のひとつに沿う．もちろん不安定多様体上のどの軌道が shadow されるかは x に相対的な出発点の位置に依存する．とくに x^* の片側の直線 $u = 0$ から出発する軌道は γ^+ の近くを沿って動く．x^* のもう一方の側から出発すれば、γ^- の近くを沿って動く．

E の局所的構造を x^* 軌道に沿って遡って Γ までたどろう．$\mathrm{Un}(E_+)$ 内の各軌道に対応して x^* で終わる Γ 内の曲線があって、この曲線上 x に近い初期条件に対しては軌道は $\mathrm{Un}(E_+)$ 内の対応する軌道に近づく．

図 4

これらの軌道を理解するには三体衝突多様体 M 上で定義された変数 w_{12}(2 節参照) を必要とする．w_{12} の定義は N に拡張され、w_{12} と w_{12}^{∞} の連続性は簡単に示せる．

とくに興味を引かれるのは、Γ 上の曲線のうち $\psi = \pm\psi_1^*$ なる $\mathrm{Un}(E_+)$ の軌道に対応するものである．ψ_1^* は前節の最後に定義されている．これらの曲線に沿って x が x^* に近づくと、x 軌道 (すなわち x から出発する軌道) は $\mathrm{Un}(E_+)$ の $\psi = \pm\psi_1^*$ なる対応する軌道に近づく．したがってこれらの曲線に沿って x が x^* に近づくにつれて $w_{12}^{\infty}(x)$ は $\pm w_{12}^*$ に近づく．

部分多様体 $u = 0$ 上の軌道の場合 $w_{12}^{\infty}(x) = 0$ であったことを思いだそう．これは $u = 0$ のときは系は平面問題であって $w_{12} \equiv 0$ だからである．

w_{12}^+ を $w_{12}^+ < w_{12}^*$ なる正数とする．上の議論を使えば以下の条件を満たす Γ 内の 2 本の曲線 c^+, c^- があることがわかる．

(1) 各曲線は x^* から始まり、c^+ 上で $u > 0$、c^- 上で $u < 0$ であり、また

(2) すべての $x \in c^+$ に対して $w_{12}^{\infty}(x) = w_{12}^+$ であり、すべての $x \in c^-$ に対して $w_{12}^{\infty}(x) = -w_{12}^+$ である．(上の図 4 参照.)

曲線の上述の構成法より、c^+, c^- および c によって形成される領域の x に対して、x の軌道は M の腕のうち $\phi = \pi/2$ の方に近づく．ただし c は x^* に近い曲線であって、c^+ と c^- を結ぶ．

上で構成したくさびはたいへん小さいこともあり得る．くさびから出発する軌道をもっと詳しく調べるために、多様体 N への横断面を導入しよう．

v^+ を大きな正数 $v^+ \gg 0$ とする．N 上に $v = v^+$ なる断面を考えよう．この断面は 3 次元である．$v^+ \gg v(C^*)$ であることを要請する．ここで C^* は N の直線中心図形の不動点であり、$v(C^*) > 0$ である．N_0 上の流れは勾配的であり N_0 のどの軌道も、C^* や他の不動点で終わる軌道を除いてこの断面 $v = v^+$ を一度だけ横切ることを思いだそう．したがって γ^+ はこの断面 $v = v^+$ と一度だけ交わり、交わりは横断的である．γ^+ は E_+ の不安定多様体の軌道であり、これは N_0 内にあって N_0 の $\phi = \pi/2$ なる腕を登って終わることを思いだそう．$\mathrm{Un}(E_+)$ は N 内の 2 次元多様体であるから、γ^+ の近くの $\mathrm{Un}(E_+)$ の軌道も断面 $v = v^+$ と交わるはずである．だから $v = v^+$ と $\mathrm{Un}(E_+)$ の交わりは γ^+ の近くで局所的に滑らかな曲線であり、交わりは横断的である．

エネルギー積分より次を得る．

$$rh = \frac{1}{2}\left(v^2 + \frac{w^2}{\cos^2\phi} + u^2\right) - U(\phi).$$

上式の左辺は r を因子としているから、これはもはや N 内の正しい (valid) 積分ではない．しかし右辺は N 内でうまく定義された関数である (正則化すれば N は多様体である)．この関数を g で表わす．すなわち、

$$g = \frac{1}{2}\left(v^2 + \frac{w^2}{\cos^2\phi} + u^2\right) - U(\phi),$$

とおく．強調したいのは、g が N 上で定義された連続関数であって方程式 $g = 0$ は不変集合を定義し、それが正確に N_0 であることである．ここで N_0 は多様体 N を 2 つの部分に分ける．$g > 0$ なる部分はエネルギー正の系に対応し、$g < 0$ の部分はエネルギー負の系に対応する．系のエネルギー h が与えられていてゼロでなければ g の値は r を求めるのに使える．この事実はあとで r の値を評価するのに使う．

$T_0 \subset \{v = v^+\}$ は γ^+ と断面 $v = v^+$ との交わりの小さなコンパクトな近傍とする．$\mathrm{Un}(E_+)$ と T_0 の交点は T_0 が小さければ小さな滑らかな曲線である．前節の最後に出てきた数 $w^+ > 0$ を小さく選んで T_0 を円筒と仮定できる．ただし T_0 の上面 S^+ において $w_{12}^\infty = w^+$ であり、T_0 の下面 S^- において $w_{12}^\infty = -w^+$ であり、T_0 のすべての点において $|w_{12}^\infty| \le w^+$ であるようにする．また固定した小さな $g_0 > 0$ に対して T_0 のすべての点において $|g| < g_0$ と仮定できる．次の補題は容易に証明できるので証明は省略する．

補題 3.1. T_0 を上で定義した円筒体とする．$M > 0$ が存在して次を満たす．$v(\tau) \ge M$ のときはつねに、すべての $x \in T_0$ に対して $|w_{12}(x,\tau)| \le \frac{4}{3}w^+$ であり、すべての $x \in S^+ \cup S^-$ に対して $\frac{2}{3}w^+ \le |w_{12}(x,\tau)| \le \frac{4}{3}w^+$ である．

以下では、T_0 の定義の中で $v^+ > M$ と選んだと仮定する．ゆえに次のことがつねに成り立つ．

$$|w_{12}(x,\tau)| \le \frac{4}{3}w^+, \quad \text{for all } x \in T_0 \text{ and } \tau \ge 0;$$
$$\frac{2}{3}w^+ \le |w_{12}(x,\tau)| \le \frac{4}{3}w^+, \quad \text{for all } x \in S^+ \cup S^- \text{ and } \tau \ge 0.$$

$g(x)$ の定義より、固定した任意の $\epsilon > 0$ および固定した g_0 に対して v^+ を十分大きくでき、すべての $x \in T_0$ および $\tau \geq 0$ に対して $\tau \to \infty$ のとき $0 \leq \pi/2 - \phi(\tau) \leq \epsilon$ かつ $\phi(\tau) \to \pi/2$ とできることを確認してほしい．これは可能である．なぜなら T_0 から出発する軌跡に対して対応する解は楕円-双曲型だからである．だから T_0 から出発する軌道に対して $\tau \geq 0$ なるすべての時間に対して m_3 は m_1 および m_2 から遠く離れていることがわかる．したがってすべての $x \in T_0$ に対して三体系はふた組の二体問題としてよく近似できる．そのふた組とは m_1, m_2 の組と m_3 と m_1, m_2 の重心の組である．

面 Σ に戻ろう．円筒体 T_0 を用いれば、図 4 のくさびをもっとよく理解できる．$x^* \in \mathrm{St}(E^+) \cap \Gamma$ とおく．このとき x^* の近くから出発する軌道は E_+ の不安定多様体上の軌道に沿う．とくにいくつかの軌道は γ^+ およびその近くの E_+ の不安定多様体に沿う．したがって Γ の像 $\{\Gamma(\tau) | \tau > 0\}$ は流れのもとで T_0 と交わる．そして $S^+ \cap \mathrm{Un}(E_+)$ も $S^- \cap \mathrm{Un}(E_+)$ も空集合でないから、交わり $\Gamma(\tau) \cap S^+$ も $\Gamma(\tau) \cap S^-$ も空でない．図 4 の曲線 c^+ および c^- はこれらの交わりの Γ 上の前像である．

次節では 5 体問題を考え、有限時間に非有界な解で円筒体 T_0 を無限回通過するものを構成する．

4．5 体問題

この節では特別な 5 体問題を考える．この問題に対して非衝突特異性あるいは第一段階として有限時間での非有界解を構成する．この節の主結果は定理 4.4 である．

$m_1, m_2, \cdots, m_5$ はユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内を運動する 5 質点とし、$\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbf{R}^3$ は $m_i, i = 1, 2, \cdots, 5$ の位置および速度ベクトルとする．さらに $m_1 = m_2$ および $m_4 = m_5$ とする．このとき時間がたっても以下のような対称性が保たれる初期条件を選ぶ．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= (x_1, y_1, z_1), \\
\mathbf{q}_2 &= (-x_1, -y_1, z_1), \\
\mathbf{q}_3 &= (0, 0, z_3), \\
\mathbf{q}_4 &= (x_4, y_4, z_4), \\
\mathbf{q}_2 &= (-x_4, -y_4, z_4).
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

言い換えると、m_5 はつねに z 軸上にある．m_1 および m_4 はどちらも z 軸に関してそれぞれ m_2 および m_5 と対称である (図 5 参照)．重心を原点に固定すれば次の式が成り立つ．

$$
2m_1 z_1 + 2m_4 z_4 + m_3 z_3 = 0. \tag{4.2}
$$

得られる系は自由度 6 であり、$\mathbf{q}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{q}_4 = (x_4, y_4, z_4)$ およびその微分によって一意に定まる．

T と U を運動エネルギーとポテンシャルエネルギーとする．上の変数を使うとこれらは次のように表わされる．

$$
(4.3)\qquad
\begin{aligned}
T = \ & m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+m_4(\dot{x}_4^2+\dot{y}_4^2+\dot{z}_4^2)+\frac{1}{2}m_3\left(\frac{2m_1\dot{z}_1}{m_3}+\frac{2m_4\dot{z}_4}{m_3}\right)^2,\\
U = \ & \frac{m_1^2}{2(x_1^2+y_1^2)^{1/2}}+\frac{m_4^2}{2(x_4^2+y_4^2)^{1/2}}+\frac{2m_1m_4}{[(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2]^{1/2}}\\
&+\frac{2m_1m_4}{[(x_1+x_4)^2+(y_1+y_4)^2+(z_1-z_4)^2]^{1/2}}+\frac{2m_1m_3}{[x_1^2+y_1^2+(z_1-z_3)^2]^{1/2}}\\
&+\frac{2m_4m_3}{[x_4^2+y_4^2+(z_4-z_3)^2]^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

図 5

z_3 が U の式に現われることに注意しよう．しかし、z_3 は (4.2) 式より z_1 と z_4 の関数である．この系のハミルトン関数は次の変数を使う．

$$
\begin{aligned}
&p_{x_1}=2m_1\dot{x}_1,\ p_{x_4}=2m_4\dot{x}_4,\ p_{y_1}=2m_1\dot{y}_1,\ p_{y_4}=2m_4\dot{y}_4,\\
&p_{z_1}=2m_1\dot{z}_1+2m_1\left(\frac{2m_1\dot{z}_1}{m_3}+\frac{2m_4\dot{z}_4}{m_3}\right),\\
&p_{z_4}=2m_4\dot{z}_4+2m_4\left(\frac{2m_1\dot{z}_1}{m_3}+\frac{2m_4\dot{z}_4}{m_3}\right).
\end{aligned}
$$

運動エネルギー T を $p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i} (i=1,3)$ の関数として表わしておけば、$x_i, y_i, z_i, p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}$ $(i=1,3)$ はハミルトン方程式を満たす．ここでハミルトン関数は次式で与えられる．

$$
H(\mathbf{p},\mathbf{q})=T(\mathbf{p})-U(\mathbf{q}).
$$

エネルギー積分 $H(\mathbf{p},\mathbf{q})=h$ 以外にこの系は角運動量積分 $c_{12}+c_{45}=c$ を許す．ここで c_{12} および c_{45} はそれぞれ m_1, m_2 および m_4, m_5 が持つ角運動量である．すなわち

$$
(4.4)\qquad
\begin{aligned}
c_{12}&=2m_1(x_1\dot{y}_1-y_1\dot{x}_1)=x_1p_{y_1}-y_1p_{x_1},\\
c_{45}&=2m_4(x_4\dot{y}_4-y_4\dot{x}_4)=x_4p_{y_4}-y_4p_{x_4}.
\end{aligned}
$$

c_{12} も c_{45} も運動の定数でないことに注意しよう．けれども、これらの和は全角運動量であって、運動の恒量である．われわれは角運動量ゼロの部分系にのみ興味がある．以下では $c=0$、すなわち、

$$
c_{12}+c_{45}=0,
$$

と仮定する．

以下の解析では、粒子 m_1, m_2 および m_3 が互いに近く、m_4 と m_5 から相対的に離れている時はいつも系が 3 成分からなると考える：

(A) 二等辺三体系 m_1, m_2, m_3、

(B) 二体系 m_4, m_5、および

(C) m_1, m_2, m_3 の重心と m_4, m_5 の重心からなる二体系.

m_3, m_4, m_5 が互いに近いときも同じような分解ができる．

最初の目標は、m_4, m_5 が存在しても 2 節の三体衝突多様体が生き残っているのを示すことである．これをするために、いくつかの変数を変える必要がある．$\bar{z} = (2m_1 z_1 + m_3 z_3)/(2m_1 + m_3)$ とする．このとき $(0, 0, \bar{z})$ は m_1, m_2 および m_3 の重心である．$x_1 = x, y_1 = y, z = z_1 - \bar{z}$ および $\bar{z}_3 = z_3 - \bar{z}$ とおく．2 節の変換にしたがって方程式 (2.2) に似た方程式系を得る．とくに次を得る．

$$
\begin{aligned}
r' &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}) r, \\
\mathbf{s}' &= \mathbf{z} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{s}, \\
\mathbf{z}' &= \nabla U_1(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{z} + r^2 \frac{\partial U_2(r\mathbf{s}, \mathbf{q}_4)}{\partial (r\mathbf{s})}, \\
\mathbf{q}_4' &= r^{3/2} H_{\mathbf{p}_4}(r, \mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4), \\
\mathbf{p}_4' &= -r^{3/2} H_{\mathbf{q}_4}(r, \mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

ここで U_1 は U の項のうち $\mathbf{q}_1$ と $\mathbf{q}_3$ のみを含むものであり、$U_2 = U - U_1$ である．すなわち、

$$
U_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_1^{3/2} m_3 \left(m_1 (s_1^2 + s_2^2)^{1/2} / m_3 + 4 (s_1^2 + s_2^2 + (1 + 2m_1/m_3) s_3^2)^{-1/2} \right).
$$

ここでも $'$ は τ に関する微分をあらわす．また $d\tau/dt = r^{-3/2}$ である．

$z_4 \neq 0$ なら、$H_{\mathbf{p}_4}$ したがって $H_{\mathbf{q}_4}$ も U_2 も $r = 0$ においても滑らかな関数である．ただし、m_4 と m_5 が二体衝突をする場合を除く．三体衝突と二体衝突が同時に起これば状況はもっと複雑である (この場合はあとで議論する)．しかし二体衝突軌道はすべて衝突を通って連続に延長できることおよび $\{r = 0\}$ 上で $r, \mathbf{s}, \mathbf{z}$ に関する方程式は連星 m_4, m_5 に付随する変数とは無関係であることを注意しておく．

当面 m_4 と m_5 は $r = 0$ のときに二体衝突をしていないと仮定する．すると流れは $\{r = 0\}$ に拡張され、そこでは多様体上の流れを得る．記法の便宜のため、これを

$$
M \times S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \{\mathbf{R} \backslash \{0\}\}
$$

と書く．これは次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}' &= \mathbf{z} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{s}, \\
\mathbf{z}' &= \nabla U_1(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{z}, \\
\mathbf{q}_4' &= 0, \\
\mathbf{p}_4' &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

上の流れは $\mathbf{R}^5 \times \{\mathbf{R} \backslash \{0\}\}$ 上の恒等流れと $M \times S^1$ 上の流れの直積である．ここで S^1 は θ 座標を与える．これは 2 節で三体衝突多様体を導くときに消去された．M 上の流れはその節で

調べた流れそのものである．つまり、m_4 と m_5 の効果は m_1, m_2, m_3 の三体衝突に近づいた極限で消えてしまう．

ベクトル場 (4.6) は m_1, m_2 および m_4, m_5 の二体衝突による特異性をまだ持っている．何らかの変換あるいはこれらの特異点の近傍におけるベクトル場の修正によって軌道がこれらの二体衝突を通って延長されることはよく知られた事実である．これは Easton の正則化と呼ばれている．この正則化手順を踏まないけれども、軌道が二体衝突を通って延長されたものとして流れを考える．この問題にはもうひとつの特異性がある．すなわち m_1, m_2 および m_4, m_5 の同時二体衝突である．これらの衝突に関しては Saari[18] が示すところによると、これらの特異性は代数的分岐点であって真性特異点でない．最近 Simó & Lacomba[22] はこれらが Easton の意味で C^0 ブロック正則化可能であることを示した．実のところあとで見るように、ここで構成する解は同時二体衝突から遠く隔たるようにできる．したがって同時二体衝突の滑らかさや「正則化可能性」の問題には触れなくてよい．

Σ_1 を正三角形中心図形 E_+ の三体衝突で終わる軌道すべての集まりとする．Σ_1 の多様体構造は 2 節の計算から出る．事実、Σ_1 は不変集合

$$\{E_+\} \times S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \{\mathbf{R}\backslash\{0\}\},$$

の安定多様体そのものである．

2 節および 3 節では、E_+ が 2 つの吸引方向と 2 つの反発方向を持つことを示した．したがって Σ_1 は余次元 2(9 次元) である．

この 5 体問題には $c_{12} \equiv 0 \equiv c_{45}$ なるいくつかの部分多様体があることは注意するに値する．すなわち、2 つの連星 m_1, m_2 および m_4, m_5 は z 軸を含む固定面内で動くように制限されている．m_1, m_2 および m_4, m_5 が動くこれら 2 つの面は互いに平行か垂直のはずである．なぜなら、計算により

$$\dot{c}_{12} \equiv -\dot{c}_{45} \equiv 2m_1m_4(x_1y_4 - x_4y_1)(r_{14}^{-3} - r_{15}^{-3}),$$

を得るからである．$c_{12} \equiv 0$(または $c_{45} \equiv 0$) のとき、$x_1y_4 - y_4x_1 \equiv 0$ または $r_{14} \equiv r_{15}$ である．

これ以後質量 $m_1 = m_2, m_3$ は 2 節の意味で許容であることを要請する．また質量 $m_4 = m_5, m_3$ の選び方も許容であると要請する．これらは質量に関する唯一の要請である．

次のステップでは、前 2 節で記述した三体問題の性質のいくつかが 5 体問題でも成り立つことを示す．いま直面しているのは摂動問題である．示したいのは、ある種の条件のもとで T_0 に初期条件を持つ解がやはり前節に記述したのと同様な性質を持つことである．まず不変集合 $\{E_+\} \times S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \{\mathbf{R}\backslash\{0\}\}$ の局所構造を解析したい．

$p \in S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^-$ とし、不動点 $\{E_+\} \times \{p\}$ を考える．点 p は m_4 と m_5 の極限位置 $(\mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^-)$ および三体衝突している粒子 m_1, m_2 および m_3 の極限向き (S^1) を記述する．ここで $\mathbf{R}^-$ は $z_4 < 0$ を意味する．$z_4 > 0$ の場合は同じように議論できる．$\{E_+\} \times \{p\}$ の近くの流れの局所的性質は (4.5) 式から得られる．直接計算により吸引方向が 2 つと反発方向が 2 つ得られる．残りの方向はすべて不変集合 $\{E_+\} \times S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \{\mathbf{R}\backslash\{0\}\}$ 上にあり、そこではどの点も不動点であるから中性な方向である．したがって、任意の $p \in S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^-$ に対して $\{E_+\} \times \{p\}$ において 2 次元の安定多様体と各点 $\{E_+\} \times \{p\}$ において 2 次元の不安定多様体を得る．これは三体問題のときとまったく同じである．

次に、これらの安定および不安定多様体とその近くの軌道を調べよう．

$\{E_+\}\times\{p\}$ の不安定多様体は $r=0$ で定義される不変多様体内にある．この不変多様体上の流れは方程式 (4.6) で与えられる．すでに指摘した通り、$r=0$ 上の流れは恒等流れと $M\times S^1$ 上の流れの積である．ここで M は前 2 節の三体衝突多様体そのものである．したがって $\{E_+\}\times\{p\}$ の不安定多様体は M 内の $\{E_+\}$ の不安定多様体そのものであると言える．ゆえに補題 2.1 が成立ち、2 節の終わりの解析がここで適用できる．

前節の最後に定義した円筒 T_0 に戻ろう．まず相空間内の任意の点を ϕ,u,v,w 座標で張られる部分空間に射影する関数 π を定義する．集合 T を次式で定義する．

$$T=\{x\in\pi^{-1}(T_0)\mid|\overline{z}_3|\le A;\ z_4\le -B;\ \dot{z}_4\le -B\}. \tag{4.7}$$

ここで $A>0$ は正数であり、以後ずっと固定する．また $B>0$ は十分大きく選んで $|\bar{z}_3|\le A$ のときはいつも $z_3>0$ となるようにする．これはつねに可能である．というのは重心が原点に固定されているからである．$\bar{z}_3=z_3-\bar{z}$ であることを思いだそう．

同様に、T_0 の境界 S^+ と S^- に対応して T の境界を定義する．紛れがないからこれらの新しい集合を同じ記号で表わす．

T から出発する解を考えよう．このためには (4.5) の最初の 3 つの式しか必要ない．

$$\begin{aligned}
&r'=(\mathbf{s}\cdot\mathbf{z})r,\\
&\mathbf{s}'=\mathbf{z}-(\mathbf{s}\cdot\mathbf{z})\mathbf{s},\\
&\mathbf{z}'=\nabla U_1(\mathbf{s})+\frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{z})\mathbf{z}+r^2\frac{\partial U_2}{\partial(r\mathbf{s})}.
\end{aligned}$$

項 $r^2\partial U_2/\partial(r\mathbf{s})$ がなければ、この系はすでに議論した三体問題そのものである．三体系 m_1,m_2 および m_3 への m_4 と m_5 の摂動項は三体 m_1,m_2 および m_3 と m_4 の距離に依存する．簡単に計算できるように、$|z_4|>B$ および B に依存する定数 c_1 に対して

$$\left|\frac{\partial U_2}{\partial(r\mathbf{s})}\right|\le\frac{c_1}{|z_4|^2},$$

である．

先に進む前に、前節で N の部分集合上で定義された $w_{12}^{\infty}(x)$ に関するある種の注意をしておこう．$w_{12}^{\infty}(x)$ は 5 体問題では連続関数ではない．この状況は m_4 と m_5 の摂動による．r が大きくなると m_3 が m_1 と m_2 に戻ってくるか、連星 m_1 と m_2 が m_4 と m_5 の近くにくるかいずれかである．両方の場合とも関数 w_{12} は乱雑に (erratic) 変化し、これが無限に繰り返され得る．しかし r が小さくて m_4 と m_5 が遠い限り、m_4 と m_5 による摂動は非常に小さい．この困難は $t=\infty$ の代わりにある t に関して $w_{12}(x(t))$ を使えば克服できる．このために t_1 を $\bar{z}_3$ がはじめて $-A$ に近づく時刻とする．すなわち、

$$t_1(x)=\inf\{t>0\mid\overline{z}_3=-A,x\in T\},$$

とおく．$\bar{z}_3$ が $-A$ に到着する前にはじめて A に到着するとき $t_1(x)=\infty$ であると約束する．

補題 4.1. T は上で定義した集合とする．このとき $B_1>0$ が存在して次が成り立つ．すべての $0\le t\le t_1(x)$ に対して $|z_4|\ge B_1$ であって、しかも $t_1(x)\le 1$ なら、すべての $x\in S^+\cup S^-$ に対して次を得る．

$$\frac{1}{2}w^+\le|w_{12}(x,t_1)|\le\frac{3}{2}w^+.$$

証明. S^+ と S^- の定義より、任意の $x \in S^+ \cup S^-$ に対して

$$\frac{2}{3}w^+ \leq |w_{12}(x)| \leq \frac{4}{3}w_{12},$$

を得る．さらに $B_1 = \infty$ なら

$$\tfrac{2}{3}w^+ \leq |w_{12}(x,t)| \leq \tfrac{4}{3}w^+ \quad \text{for all} \quad t > 0,$$

である．すでに指摘したように、S^+ と S^- の点に対して、m_3 は m_1 および m_2 から m_1 と m_2 の距離に比べて遠く隔たっている．三体系 m_1, m_2 および m_3 はふた組の二体系のようである．そのひとつは m_1 と m_2 であり、もうひとつは m_3 と m_1, m_2 の重心である．粒子 m_3 は $v^+r^{-1/2}$ に比例する速度で m_1 および m_2 から遠ざかる．一方 $w_{12}(x,t)$ の変化は m_3 からの摂動にも m_4 および m_5 からの摂動にもよる．m_3 からの摂動は制限された量 $(w^+/3)$ であり、m_4 および m_5 からの影響は $\Delta t/(B_1)^2 \leq 1/(B_1)^2$ 程度の大きさである．したがって B_1 を十分大きく選ぶことによって、$\frac{1}{2}w^+ \leq |w_{12}(x)| \leq \frac{3}{2}w^+$ を得る．これで補題が証明された． □

補題 4.1 において r に関する唯一の制限は $|z_3 - \bar{z}| \leq A$ であることを確認して欲しい．実のところ、r は任意に小さくてよい．

これ以後は、T の定義において $B \geq B_1$ であると仮定する．次のように置く．

$$\tilde{t}(x) = \sup\{t < 0 \mid z_1(x,t) = z_3(x,t), x \in T\}.$$

$\tilde{t}(x)$ は $\gamma^+ \cap T$ の軌道に関して定義されていること、また w^+ を小さく選ぶことにより、すべての $x \in \mathrm{Un}(E_+) \cap T$ に対しても定義されていることを見て欲しい．だから $\tilde{t}(x)$ は T が十分小さいとして、すべての $x \in T$ に対して定義されている．こうなっていると仮定しよう．

補題 4.2. T から出発する軌道を考える．r_0 を r の初期値とする．$B_2 > 0$ が存在して次が成り立つ．すべての $\tilde{t} \leq t \leq t_1$ に対して $|z_4| \geq B_2$ であれば、ある定数 $d_1 > 0$ および $d_2 > 0$ に対して $|\tilde{t}| \leq d_1 r_0^{3/2}$ かつ $|t_1| \leq d_2 r_0^{1/2}$ である．とくに、$r \to 0$ のとき、$\tilde{t} \to 0$ かつ $t_1 \to 0$ である．

証明. まず任意の $x \in T$ に対して $|\bar{z}_3| \leq A$ であることを確認して欲しい．だから A と質量のみに依存する定数 c_1 があって、$r_0 \leq c_1$ である．$\tilde{\tau} < 0$ を $\tilde{t}$ に対応する時刻 τ とする．$dt = r^{3/2}d\tau$ および $r' = rv$ より、$\tilde{\tau} = \int_0^{\tilde{\tau}} r^{3/2}d\tau$ および

$$r(\tau) = r_0 \exp\left(\int_0^{\tilde{\tau}} v(\tau)d\tau\right), \tag{4.8}$$

を得、したがって

$$\tilde{t} = r_0^{3/2}\int_0^{\tilde{\tau}} \exp\frac{3}{2}\left(\int_0^{\tilde{\tau}} v(\tau)d\tau\right)d\tau.$$

任意の $x \in T$ および $r_0 \leq c_1$ に対して $B(x,r_0) > 0$ があって次が成り立つ．すなわち、すべての $\tilde{t} \leq t \leq 0$ に対して $B \geq B(x,r_0)$ なら、ある $d_1(x,r_0)$ に対して

$$\int_0^{\tilde{\tau}} \exp\frac{3}{2}\left(\int_0^{\tilde{\tau}} v(\tau)d\tau\right)d\tau \leq d_1(x,r_0), \tag{4.9}$$

である．T_0 のコンパクト性および $0 \le r_0 \le c_1$ より、ある $B_2 > 0$ および $d_1 > 0$ を見つけることができて、$B_2 \ge B(x, r_0)$ および $d_1 \ge d_1(x, r_0)$ がすべての $x \in R$ および $0 \le r_0 \le c_1$ に対して成り立つようにできる．だから $|\tilde{t}| \le d_1 r_0^{3/2}$ であり、$r_0 \to 0$ のとき $\tilde{t} \to 0$ である．

補題の第二の部分に関しては、T においてある $c_4 > 0$ に対して $v = v^+$ かつ $\dot{\bar{z}}_3 > c_4 r_0^{-1/2} v^+$ であることに注意する．m_3 の運動は m_3 と m_1, m_2 の重心の二体問題の運動に近い．m_3 と m_1, m_2 の重心の距離は r_0 程度である．だから m_3 の脱出速度は $r_0^{-1/2}$ 程度である．したがって B_2 を十分大きく選べば t_1 はすべての $x \in T$ に対して存在し、ある $c_5 > 0, d_2 > 0$ に対して

$$t_1 \le \frac{A}{c_5 r_0^{-1/2}} = r_0^{1/2} A / c_5 = d_2 r_0^{1/2},$$

である．とくに $r_0 \to 0$ のとき $t \to 0$ である．これで補題が証明された． □

上の議論を使って次の補題が簡単に証明できる．

補題 4.3. $B_3 \ge B_2 > 0$ があって、T から出発するすべての軌道に対して次が成り立つ．すべての $t \le t_1$ に対して $z_4 \ge B$ であれば、$0 < d_3 < d_4$ なる d_3 と d_4 があって

$$d_3 r_0^{-1/2} \le |\dot{\bar{z}}_3(x, t_1)| \le r_0^{-1/2} d_4 \quad \text{for all} \quad x \in T.$$

これ以後 $B > B_3$ と仮定する．

いまや最初の主定理を証明する準備ができた．この定理は非衝突特異性を構成するための決定的な道具となるはずである．

点 $x^* \in \Sigma_1$ を固定する．点 $p \in S^1 \times \mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^-$ が存在して $x^* \in \mathrm{St}(\{p\} \times \{E_+\})$ である．ここで $\mathrm{St}(\{p\} \times \{E_+\})$ は不動点 $\{p\} \times \{E_+\}$ の安定多様体である．Γ は x^* において Σ_1 と横断的に交わる滑らかな 2 次元曲面であるとする．$t^* > 0$ は x^* から出発する軌道が m_1, m_2, m_3 の三体衝突で終わる時刻とする．一般性を失うことなしに $|z_4(x^*, t^*)| \ge 2B$ と仮定できる．すべての $x \in \Gamma$ に対して次を定義する．

$$\begin{aligned}
&\tilde{t}_1(x) = \inf\{t > 0 \mid z_3(x,t) = z_1(x,t)\}, \\
&t_1(x) = \inf\{t > \tilde{t}_1(x) \mid \bar{z}_3(x,t) = -A\}, \\
&\bar{t}_1(x) = \inf\{t > t_1(x) \mid z_3(x,t) = 0\}, \\
&\tilde{t}_2(x) = \inf\{t > \bar{t}_1(x) \mid z_3(x,t) = z_4(x,t)\}, \\
&\qquad\qquad \cdots
\end{aligned} \tag{4.10}$$

一方衝突軌道 x^* に対しては、次のように置く．

$$\tilde{t}_1(x^*) = t_1(x^*) = \bar{t}_1(x^*) = \tilde{t}_2(x^*) = \cdots = t^*.$$

このとき次の定理を得る．

定理 4.4. Γ を上で述べた 2 次元曲面とする．Γ から出発する解を考える．x^* を頂点とし、c^+, c^- および c を境界とする くさびΔ があって次が成り立つ．

(1) くさび内のすべての x に対して、$\tilde{t}_1(x), t_1(x), \bar{t}_1(x)$ および $\tilde{t}_2(x)$ はうまく定義された (well-defined) 連続関数である．とくに、$\tilde{t}_1(x), t_1(x), \bar{t}_1(x)$ および $\tilde{t}_2(x)$ は、くさび内の x が x^* に近づくとき t^* に近づく．その結果、$x \to x^*$ のとき、$\dot{z}_3(t_1) \to \infty$ および $\dot{z}_3(\bar{t}_1) \to \infty$ である．

(2) すべての $x \in c^+$ に対して $\frac{1}{4}w^+ \le w_{12}(x,\tilde{t}_2) \le 2w^+$ であり、すべての $x \in c^-$ に対して $\frac{1}{4}w^+ \le -w_{12}(x,\tilde{t}_2) \le 2w^+$ である．

(3) 質量のみに依存する $K > 1$ があって、任意の $\delta > 0$ およびすべての $x \in \Delta$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} z_1(x,\tilde{t}_2) &\ge K z_1(x,\tilde{t}_1) > 0, \\ |z_4(x,\tilde{t}_2) - z_4(x,\tilde{t}_1)| &< \delta. \end{aligned}$$

証明．まず x^* の小さな近傍に対して $\tilde{t}_1(x)$ が存在して初期値に関して連続関数であることを確認して欲しい．一般性を失わずすべての $x \in \Gamma$ に対してこれが成り立つと仮定できる．

$$\Delta_0 = \{x \in \Gamma \mid \text{ある } t > 0 \text{ に対して } x(t) \in T, \ \}$$

とおき、任意の $x \in \Delta_0$ に対して $t_0(x)$ は $x(t_0) \in T$ なる時刻とする．すでに示したように、Δ_0 は非空集合である．$r(x,t_0)$ の値を考えよう．E_+ の不安定多様体は三体衝突多様体内にあって、そこでは $r = 0$ であり、x^* の近くから出発する軌道は E_+ の不安定多様体に沿って動くから、$x \in \Delta_0$ に対しては、$x \to x^*$ のとき $r(x,t_0) \to 0$ である．補題 4.2 にしたがえば、もっと小さなくさび $\Delta \subset \Delta_0(?)$ があって、すべての $x \in \Delta$ に対して t_1 が存在し、$x \to x^*, x \in \Delta$ のとき $t_1 \to x^*$ である．つぎに補題 4.3 より $x \to x^*$ のとき $\dot{z}_3(x,t_1) \to -\infty$ である．したがって x^* に十分近い x に対しては m_3 はいずれは $z = 0$ 平面に達し、m_4 および m_5 に追いつく．だから $\bar{t}_1$ および $\tilde{t}_2$ は x^* に十分近いすべての $x \in \Delta$ に対して定義され、$x \to x^*$ のとき $\bar{t}_1, \tilde{t}_2 \to t^*$ である．Δ を小さくすることにより、上のことがすべての $x \in \Delta$ に対して成り立つと仮定できる．

定理の第二の部分に関しては、補題 4.1 より、Δ の境界の一部である c^+ と c^- を

$$\begin{aligned} c^+ &= \{x \in \Delta \mid x(t_0) \in S^+\}, \\ c^- &= \{x \in \Delta \mid x(t_0) \in S^-\}, \end{aligned}$$

として、$x \in c^+$ および c^- なら、以下のことが成り立つ (必要なら Δ をもっと小さくして)．

$$\frac{1}{2}w^+ \le |w_{12}(x,t_1)| \le \frac{3}{2}w^+.$$

w_{12} の変化の割合は m_1 および m_2 の残りの粒子からの距離に依存し、またすべての $t_1 \le t \le \tilde{t}_2$ に対して、$c_3 > 0$ をある定数として $|d(w_{12}(x,t))/dt| \le c_3/A^2$ に依存する．$\tilde{t}_2 - t_1$ は任意に小さくできるから、くさび Δ は十分小さくできて、すべての $x \in \Delta$ および $t_1 \le t \le \tilde{t}_2$ に対して $|w_{12}(x,t) - w_{12}(x,t_1)| \le \frac{1}{4}w^+$ を得る．

定理の三番目の部分は運動量保存から出る．以下の事実に注意するだけでよい．

(1) P_{123} を部分系 m_1, m_2 および m_3 の運動量とする．すなわち

$$P_{123} = 2m_1 z_1 + m_3 z_3.$$

正数 M_1 および M_2 があって、すべての $t \in [\tilde{t}_1, \bar{t}_1]$ および $x \in \Delta$ に対して

$$|\dot{P}_{123}(x,\tilde{t}_1)| \le M_1, \ |\ddot{P}_{123}| \le M_2.$$

(2) 定理の第一の部分より、$x \to x^*, x \in \Delta$ のとき $\bar{t}_1 - \tilde{t}_1 \to 0$ である．したがって任意の $\epsilon > 0$ に対して、Δ を十分小さくとることにより、

$$|P_{123}(x,t) - P_{123}(x,t')| \le \epsilon,$$

がすべての $t, t' \in [\tilde{t}_1, \bar{t}_1]$ および $x \in \Delta$ に対して成り立つ．

上の事実より、すべての $x \in \Delta$ に対して

$$\begin{aligned} 2m_1 z_1(x,\tilde{t}_2) > 2m_1 z_1(x,\bar{t}_1) = &\ P_{123}(x,\bar{t}_1) - m_3 z_3(x,\bar{t}_1) \\ = &\ P_{123}(x,\bar{t}_1) > P_{123}(x,\bar{t}_1) - \epsilon \\ = &\ (2m_1 + m_3) z_1(x,\tilde{t}_1) - \epsilon. \end{aligned}$$

したがって

$$z_1(x,\tilde{t}_2) \ge \left(1 + \frac{m_3}{2m_1}\right) z_1(x,\tilde{t}_1) - \frac{\epsilon}{2m_1}.$$

K を $1 < K < 1 + m_3/(2m_1)$ なる任意の数とする．このとき ϵ を十分小さくとれば、すべての $x \in \Delta$ に対して

$$z_1(x,\tilde{t}_2) \ge K z_1(x,\tilde{t}_1) > 0$$

とできる．不等式 $|z_4(x,\tilde{t}_2) - z_4(x,\tilde{t}_1)| < \delta$ は定理の第一の部分からただちに言える．これで定理 4.4 が証明された． □

この定理に関していくつか所見を述べたい．

(1) 定数 A はあらかじめ固定しておき、その値は変えない．しかし A の選び方はまったく任意である．事実、A は任意に小さく選ぶことができ、したがって A に依存する B の値は任意に小さくできる．

(2) いままで考えてきた三体衝突は中心図形 E_+ に関するものであった．実のところ中心図形 E_- に対する三体衝突も同じように取り扱える．

(3) 上の議論はすべて m_3, m_4 および m_5 の運動にも適用できる．適当に定数を変えて補題や定理が三体系 $m_3, m_4,$ および m_5 にも適用できると仮定することができる．

次節では最後の定理を使って有限時間に非有界な解を構成するための記号力学を組み立てる．

5．有限時間に非有界な解

はじめに前節の定理 4.4 の 2 次元くさび Δ 上の初期値を考える．のちに 2 節で記述した 3 次元くさびを考える．

すべての $x \in \Delta$ に対して $N(x)$ および $n(x)$ を時間区間 $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ に r_{12} が達した極大および極小の数とする．ここで $N(x)$ と $n(x)$ は $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ に m_1 と m_2 が行なった公転数の概念を拡張したものである．w^+ の値は任意に小さくできるから $w^+ \le 1/10$ と仮定できる．

補題 5.1. $r_{12}(x,t)$ が $\tilde{t}_1(x)$ または $\tilde{t}_2(x)$ において極大または極小をとる点 x 以外では $N(x), n(x)$ はすべての $x \in \Delta$ おいて連続である．

証明. $r_{12}(x,t)$ が t' において極小または極大になるとする．このとき $\dot{r}_{12}(x,t')=0$ であるかまたは $\dot{r}_{12}(x,t')$ は定義できない．後者の場合、二体または三体衝突が起こるはずである．だから $r_{12}(x,t')=0$ である．われわれが示したいのは、すべての $x\in\Delta$ およびすべての $\tilde{t}_1\le t\le\tilde{t}_2$ に対して $\dot{r}_{12}(x,t)$ のゼロがすべて非縮退であること、つまりすべての $t'\in[\tilde{t}_1,\tilde{t}_2]$ に対して、$\dot{r}_{12}(x,t')=0$ のときには必ず $\ddot{r}_{12}(x,t')\neq 0$ であることである．二体または三体衝突 $r_{12}(x,t')=0$ の場合、t' は $r_{12}(x,t)$ の非縮退局所極小であることに注意しよう．つまり $\dot{r}_{12}(x,t)$ のゼロはすべて $r_{12}(x,t)$ の非縮退極大または非縮退極小である．このことから、$r_{12}(x,t)$ の連続性より、$\tilde{t}_1(x)$ および $\tilde{t}_2(x)$ において r_{12} が極大または極小をとる Δ の点 x を除いて、$N(x)$ と $n(x)$ はすべての $x\in\Delta$ に関して連続関数であることがいえる．

これを証明するのに、摂動二体問題というもっと一般的な問題設定にしよう．

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}+\mathbf{f}, \tag{5.1}$$

とする．ここで $\mathbf{f}$ は微小摂動項である．$\mathbf{f}$ 項のおかげで系のエネルギー h と角運動量 c は一定でない．だから

$$h=\frac{1}{2}\dot{r}+\frac{1}{2r^2}c^2-\frac{1}{r},$$

は時間の関数である．$h<0$ の場合だけを考えよう．この場合、

$$c^2|h|=c^2\left|\frac{1}{2}\dot{r}+\frac{1}{2r^2}c^2-\frac{1}{r}\right|,$$

である．ある t に対して $\dot{r}=0$ なら、

$$c^2|h|=c^2\left|\frac{1}{2r^2}c^2-\frac{1}{r}\right|,$$

である．$w_{12}=c^2|h|$ とおく．$\dot{r}=0$ なら、

$$w_{12}=c^2\left|\frac{1}{2r^2}c^2-\frac{1}{r}\right|,$$

である．この式を c について解けば

$$c^2=r+(r^2-2r^2w_{12})^{1/2},$$

あるいは

$$c^2=r-(r^2-2r^2w_{12})^{1/2},$$

を得る．

一方 $r^2=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ である．だから $r\dot{r}=\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ また $r\ddot{r}+\dot{r}^2=\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}}+\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ である．ここで

$$\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\dot{r}^2+\frac{c^2}{r},$$

である．これらの方程式と運動方程式から

$$\ddot{r}=\frac{c^2-r}{r^3}+\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{f}, \tag{5.2}$$

を得る．だから上で得た c に関する 2 つの解に対応して、

$$\ddot{r} = \frac{(1-2w_{12})^{1/2}}{r^2} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{f}$$

または

$$\ddot{r} = -\frac{(1-2w_{12})^{1/2}}{r^2} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{f}$$

を得る．だから

$$|\mathbf{f}r^2| < (1-2w_{12})^{1/2}, \tag{5.3}$$

とすれば $\ddot{r} \neq 0$ である．ここで元の系に戻ろう．まず摂動項 $\mathbf{f}$ を考える．5 体問題では連星 m_1 および m_2 への摂動は m_3, m_4 および m_5 による．簡単に示せるように、ある正の数 M_1 と M_2 があって次が満たされる．

$$|\mathbf{f}| \leq \frac{M_1}{r_{13}^2} + \frac{M_2}{r_{14}^2},$$
$$|\mathbf{f}r_{12}^2| \leq \frac{M_1 r_{12}^2}{r_{13}^2} + \frac{M_2 r_{12}^2}{r_{14}^2}.$$

そこで区間 $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ を 2 つの別々の部分区間 $[\tilde{t}_1, t_1^*)$ および $[t_1^*, \tilde{t}_2]$ に分け、これらを別々に考える．t_1^* は前節の円筒 T を軌道が通過する時刻であったことを思いだそう．

まず区間 $[t_1^*, \tilde{t}_2]$ を考える．円筒 T をうまく選んで (つまり必要なら v^+ を拡大して)、すべての $t \in [t_1^*, \tilde{t}_2]$ に対して r_{12}^2/r_{13}^2 および r_{12}^2/r_{14}^2 を任意に小さくできる．だから上のやり方によって

$$|\mathbf{f}r_{12}^2| \leq \frac{M_1 r_{12}^2}{r_{13}^2} + \frac{M_2 r_{12}^2}{r_{14}^2} \leq \frac{1}{10},$$

と仮定できる．一方、すべての $[t_1^*, \tilde{t}_2]$ に対して $|w_{12}| \leq 2w^+ \leq 2/10$ である．したがって

$$|\mathbf{f}r_{12}^2| \leq 1/10 \leq (6/10)^{1/2} \leq (1-2w_{12})^{1/2}.$$

だから不等式 (5.3) が成り立つ．したがってすべての $t \in [t_1^*, \tilde{t}_2]$ に対して $\dot{r}_{12}(x,t)$ のゼロはすべて $r_{12}(x,t)$ の非縮退臨界点である．

区間 $[\tilde{t}_1, t_1^*]$ に対しては、m_3 が連星 m_1 および m_2 と強く関係するから不等式 (5.3) を得るのはさらに難しい．これを得るために三体衝突多様体の性質を利用する．角運動量ゼロの軌道に対しては $r_{12}(x,t)$ の臨界点はすべて非縮退であること、したがって N_0 上でもこの性質が成り立つことに注意する．連続性より N_0 に十分近い N の軌道に対してもこの性質が成り立つ．T は N_0 の小さな近傍で定義され、T_0 はコンパクトであるから、T をいつも十分小さくとれて、$x(t_1^*) \in T$ なるすべての x に対して $\dot{r}_{12}(x,t)$ のゼロ点はすべての $t \in [\tilde{t}_1, t_1^*)$ に対して非縮退である．ここで正数 $M_3 > 0$ があって、すべての x に対して $|\tau_1^* - \tilde{\tau}_1| < M_3$ であること、したがって $x(t_1^*) \in T$ であることを使った．ここで $\tau_1^* = \tau(t_1^*)$ および $\tilde{\tau}_1 = \tau(\tilde{t}_1)$ である．

上で示したように、$r_{12}(x,t)$ のすべての臨界点は、すべての $x \in \Delta$ および $t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ に対して非縮退である．したがって $N(x)$ と $n(x)$ の唯一の不連続点は $\tilde{t}_1$ または $\tilde{t}_2$ が $r_{12}(x,t)$ の局所極小または局所極大のときのみである．これで補題 5.1 が証明された． □

二体問題ではよく知られているようにエネルギー$h<0$の楕円軌道では運動の周期は$\sqrt{2}/(2|h|^{3/2})$である．以後必要なので、相続く2つの極大と極小の間の時間の極大を同様に評価する．

ふたたび摂動を受けた二体問題を考える．

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}, \tag{5.4}$$

ここで$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$は微小摂動項である．

補題 5.2. $\epsilon > 0$が与えられると次を満たす$\delta > 0$がある．$h_0 < 0$および$|w_{12}(x)| \le 1/4$に対して$|h_0^{-2}\mathbf{f}| < \delta$なら

$$\left| \frac{\tau_{12}}{\sqrt{2}/(2|h_0|^{3/2})} - 1 \right| \le \epsilon, \tag{5.5}$$

である．ここでτ_{12}は$t>0$に対して最初の2つの相続く極大と極小の間の時間間隔である．

はじめに注意しておく．補題の重要な特徴は不等式(5.5)がすべての$h_0 \le 0$に対して成り立つような一様なδがあることである．

証明. $|w_{12}(x)| \le 1/4$で$h_0 = -1$なるエネルギー超曲面上の初期条件を考えよう．無摂動の二体問題の周期は$\sqrt{2}/2$である．この集合の各点xに対して、補題5.1の証明より、$|\mathbf{f}r^2| < (1 - 2w_{12})^{1/2}$を仮定して$r(x(t))$のゼロ点は$x$の連続関数であることが言える．$r \le 1/|h|, h_0(x) = -1$および$|w_{12}(x)| \le 1/4$であり、$h(x,t)$と$w_{12}(x,t)$は$\mathbf{f}$に連続的に依存することに注意する．したがって$x$に依存する$\delta(x)$が存在して、$|\mathbf{f}| \le \delta(x)$なら

$$|\tau_{12}(x)\sqrt{2} - 1| < \epsilon, \tag{5.6}$$

である．集合$\{x \mid h_0 = -1, |w_{12}(x)| \le 1/4\}$(正則化した二体問題での)コンパクト性より$x$に依存しない一様な$\delta$があって$|\mathbf{f}| \le \delta$なら不等式(5.6)が満たされる．

上で示したとおり、補題5.1はエネルギー超曲面$h_0 = -1$上で成り立つ．さて任意の$h<0$の値を代表するh_0を初期値として補題が成り立つことを示したい．三体問題ではMcGeheeの座標を用いて運動方程式からrを省略し系の次元を1つ落とすことができる．だからもとの方程式の完全な解は還元された系の解とrに関する線形方程式の積分から得られる．言い換えると、McGeheeの変数で2つの初期値間の違いがrだけなら、解はrが定数倍違うだけである．補題の証明の残りは、上の事実から発想した．McGeheeの変数変換を全部実行する代わりに、その簡単版を利用する．

微分方程式系

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \nabla U(\mathbf{x}) + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, \tag{5.7}$$

を考えよう．ここで$U(x)$は-1次の同次ポテンシャル関数であり、$\mathbf{f}$は摂動項である．

$$\underline{x} = |h_0|\mathbf{x}, \quad \underline{v} = |h_0|^{-1/2}\mathbf{v}, \quad \underline{t} = |h_0|^{3/2}t,$$

とおく．ここでh_0は任意の定数である．このとき

$$d\underline{x}/d\underline{t} = \underline{v}, \quad d\underline{v}/d\underline{t} = \nabla U(\underline{x}) + |h_0|^{-2}\mathbf{f}.$$

この系をもとの (5.7) と比較して欲しい．摂動項が $|h_0|^{-2}$ という因子を持つことを除いてまったく同じ方程式の組から成っている．これを二体問題に適用し、h_0 を系の初期エネルギーとする．すると新しい系の初期エネルギーはすべての $h_0 < 0$ に対してぴったり $h_0/|h_0| = -1$ である．時間は $|h_0|^{3/2}$ で尺度変換されていることに注意しよう．だから補題はエネルギー面 $h_0 = -1$ ですでに証明したことからしたがう． □

次の結果は x が x^* に近づいたときの $N(x)$ と $n(x)$ の極限的ふるまいを示す．

補題 5.3. $x \in \Delta$ として $x \to x^*$ のとき $N(x) \to \infty$ かつ $n(x) \to \infty$ である．

証明. $x \to x^*$ のとき、定理 4.4 より $\dot{z}_3(x, \bar{t}_1) \to -\infty$ である．だから正数 $c_1 > 0$ があって部分系 m_1, m_2 および m_3 の運動エネルギーは x が十分 x^* に近いとき $t \in [\bar{t}_1, \tilde{t}_2]$ に対して $c_1 \dot{z}_3^2(x, \bar{t}_1)$ より大きい．エネルギー保存則より $c_2 > 0$ があって、

$$|h_{12}| \geq c_2 \dot{z}_3^2(x, \bar{t}_1)$$

が x^* に十分近い x および $t \in [\bar{t}_1, \tilde{t}_2)$ に対して成り立つ．

補題 5.2 より、$c_3 > 0$ があって

$$\tau_{12}(x) \leq c_3 \sqrt{2} |h_0|^{-3/2}/2 \leq c_4 \dot{z}_3^{-3}(x, \bar{t}_1),$$

が、ある $c_4 > 0$、x^* に十分近い x および $t \in (\bar{t}_1, \tilde{t}_2)$ に対して成り立つ．

一方 $c_5 > 0$ があって

$$(\tilde{t}_2 - \bar{t}_1) \geq c_5 B / |\dot{z}_3(x, \bar{t}_1)|,$$

である．だから $N(x) > c_6 \dot{z}_3^{-2}(x, \bar{t}_1)$ および $n(x) > c_6 \dot{z}_3^{-2}(x, \bar{t}_1)$ である．したがって $x \in x^*$ のとき

$$N(x) \to \infty \quad \text{および} \quad n(x) \to \infty.$$

これで補題は証明された． □

補題 5.2 より $N(x)$ と $n(x)$ は $r_{12}(x, t)$ が $\tilde{t}_1$ または $\tilde{t}_2$ において局所的極小または極大に達したときのみ値を変えることを見て欲しい．$t = \tilde{t}_1$ において $r_{12}(x, t)$ には極小と極大は有限個しかないから、x^* に終わる Δ 内の任意の曲線に対して、その曲線上に無限個の点があって $r_{12}(x, \tilde{t}_1)$(?) が局所的極小になる．また同様に、その曲線上に無限個の点があって、$r_{12}(x, \tilde{t}_2)$ が局所的極大になる．

いままでのところ定理 4.4 で与えられた 2 次元くさびのまわりの議論を中心にしてきた．もっと柔軟にまた明瞭に大局的な描像を得るために 3 次元くさびを導入する．3 次元断面を考えてこの節での見通しを拡大する主な理由は、ここで構成する非衝突特異性が二体および三体同時衝突にいたる軌道の集合の近傍内にあり、それは余次元 3 の多様体だからである．

三体衝突の場合と同様、McGehee の変数を用いて二体および三体同時衝突を膨らますことができる．しかし今回、$R^2 = r_{123}^2 + \alpha^2/4r_{45}^2 = 0$ で与えられる集合を膨らます．ここで $\alpha = (4/m_4)^{1/3}$ である．座標 $r_{123} = R \sin \beta$ および $r_{45} = 2\alpha R \cos \beta$ を使う．このようにして、ふたたび衝突多様体が得られる．この衝突多様体上の流れは、多かれ少なかれ二体衝突多様体上の流れと三体衝突上の流れの積である (時間変数をうまく尺度変換して)．しかしつぎのス

テップは二体および三体同時衝突の部分的膨らましであって、三体衝突多様体のときに使った時間尺度をそのまま使う．このように、二体衝突と三体衝突を別に扱うことができる．

連星 m_4, m_5 に関して以下の McGehee 型の変数変換を導入しよう．

$$
\begin{aligned}
(\alpha x_4, \alpha y_4) =&\ (\underline{r}\cos\underline{\theta}, \underline{r}\sin\underline{\theta}),\\
\beta =&\ \tan^{-1}\left(\frac{r}{\underline{r}}\right)\\
\underline{y} =&\ \begin{pmatrix}\cos\underline{\theta}\\ \sin\underline{\theta}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\dot{x}_4\\ \alpha\dot{y}_4\end{pmatrix},\\
\underline{x} =&\ \begin{pmatrix}\alpha\dot{x}_4\\ \alpha\dot{y}_4\end{pmatrix} - \underline{y}\begin{pmatrix}\cos\underline{\theta}\\ \sin\underline{\theta}\end{pmatrix},\\
\underline{u} =&\ \underline{r}^{1/2}\underline{x}\begin{pmatrix}-\sin\underline{\theta}\\ \cos\underline{\theta}\end{pmatrix},\\
\underline{v} =&\ \underline{r}^{1/2}\underline{y}.
\end{aligned}
$$

上の座標系で運動方程式 (4.5) は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
r' =&\ (\mathbf{s}\cdot\mathbf{z})r,\\
\mathbf{s}' =&\ \mathbf{z} - (\mathbf{s}\cdot\mathbf{z})\mathbf{s},\\
\mathbf{z}' =&\ \nabla U_1(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{z})\mathbf{z} + r^2\frac{\partial U_2(r\mathbf{s}, \mathbf{q}_4)}{\partial(r\mathbf{s})},\\
z_4' =&\ r^{3/2}H_{p_{z_4}}(r, \mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4),\\
p_{z_4}' =&\ -r^{3/2}H_{z_4}(r, \mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4),\\
\beta' =&\ v\sin\beta\cos\beta - \underline{v}\sin^{5/2}\beta/\cos^{1/2}\beta,\\
\underline{v}' =&\ \tan^{3/2}\beta\left(\frac{1}{2}\underline{v}^2 + \underline{u}^2 - 1\right) + O(r^{3/2}),\\
\underline{\theta}' =&\ \tan^{3/2}\beta\underline{u} + O(r^{3/2}),\\
\underline{u}' =&\ \tan^{3/2}\beta\left(-\frac{1}{2}\underline{uv}\right) + O(r^{3/2}),
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

ここで U_1 は前に定義されたとおり、$\mathbf{q}_1$ と $\mathbf{q}_2$ のみを含む U の項を含む．すなわち、

$$
U_1(\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{2}}m_1^{3/2}m_3\left(m_1(s_1^2+s_2^2)^{1/2}/m_3 + 4(s_1^2+s_2^2+(1+2m_1/m_3)s_3^2)^{-1/2}\right).
$$

ここでも $'$ は τ に関する微分を表わし、$d\tau/dt = r^{-3/2}$ である．m_1, m_2 および m_3 に関する方程式は、以前の (4.5) 式におけるとまったく同じである．

方程式 (5.8) において、$r = 0$ は不変多様体である．これは m_1, m_2 および m_3 の三体衝突と m_4, m_5 の二体衝突が同時に起こる衝突多様体である．これを同時衝突多様体と呼ぶ．単独の三体衝突と二体衝突はそれぞれ $\beta = 0$ と $\beta = \pi/2$ に対応することに注意する．(5.8) 式には m_4, m_5 の単独の二体衝突に対応する特異性が $\beta = \pi/2$ のところにまだある．この特異性を除くのに標準的手法が使える．おそらく m_4, m_5 に Levi-Civita 座標を使い、時間を尺度変換して特異性を取り除ける．しかし、通常の時間尺度因子 r_{45} は使えない．というのはここでは時間変数 τ はすでに $r^{3/2}$ によって尺度変換されているからである．因子 $\cos\beta$ を使うべきであろう．$\cos\beta$ 以上の尺度変換は二体衝突を新しい変数での不動点にしてしまう．

ここではEastonのブロック正則化を選んで単一の二体衝突を正則化する．この方法では衝突軌道を放出軌道とつなぐのである．2本の軌道をつないだ後では、結果として得られる流れは衝突を通っても大域的に滑らかであることがわかる．すべての小さな$r>0$に対して特異点$\beta=\pi/2$はブロックとして正則化できるというよく知られた事実に注意しよう．$r=0$の場合m_4とm_5の運動は他の粒子からどんな摂動も受けない二体問題である．したがって特異点$\beta=\pi/2$も同時衝突多様体から取り除ける．

ここおよび以後では流れは正則化されたものとする．

意図的にわが同時衝突多様体をエネルギー積分あるいはエネルギー関係によって与えられる不変集合へ制限しないことを述べておく．しかしこれらの不変集合内にはいろいろ興味深い不動点がある．

さて衝突多様体上の流れに注目しよう．$r=0$のとき三体m_1, m_2およびm_3に関する方程式はすでに議論したものとまったく同じである．簡単にわかるように同時衝突多様体の不動点は

$$\tilde{P}=\{P\}\times\left\{\underline{u}=0, \underline{v}=\pm\sqrt{2}, \beta=\tan^{-1}((v_P/\sqrt{2})^2), \underline{\theta}\in(0,\pi/2)\right\}$$

なる型か、または

$$\{P\}\times\{\beta=0\},$$

なる型である．ここでPは三体衝突多様体内の不動点のひとつであり、v_PはPにおけるvの値、$\pm$符号はv_Pの符号と同じである．

特に興味深いのは$P=E_+$なる不動点である．ここでE_+は三体衝突多様体上の不動点である．簡単に計算できるように、不動点$\tilde{E}_+$の場合、三体衝突多様体からの2つの正の固有値に加えて、もう2つ正の固有値がある．しかし$c_{12}+c_{45}=0$なる不変部分空間に制限しているから、この関係を使って変数$\underline{u}$を消去できる．したがって$\tilde{E}_+$の安定多様体は余次元3である．$\tilde{E}_-$についても同様の議論が成り立つ．結論として、三体および二体同時衝突に至る軌道の点集合が余次元3の滑らかな多様体をなすことが言える．

三体衝突多様体上の$\tilde{E}_+$の2次元不安定多様体はいままでの節で調べた．こんどは同時衝突から生じる不安定多様体のあらたな分枝について議論しよう．新しい不安定固有ベクトルは$\delta\beta$方向にある．不安定多様体がこの方向にどのように向かっているかを見るために、$\underline{u}=0, v=v_{E_+}$および$\underline{v}=-\sqrt{2}$を固定する．すると$\beta$に関する式は$\beta$自身のみに依存する．すなわち、これから流れの不変集合が得られる．βの初期値が$\beta^*=\tan^{-1}(v_{E_+}^2/2)$より小さければ、すべての$\tau>0$にわたって$d\beta/d\tau<0$であり、したがって$\tau\to\infty$のとき$\beta\to0$であることが判る．しかし$\beta$の初期値が$\beta^*$より大きければ、簡単にわかるとおり、$d\beta/d\tau>0$であり、$\tau$がある有限の値に近づくとき$\beta\to\pi/2$である．つまり軌道は$m_4, m_5$の二体衝突を経験する．正則化の手法により、この二体衝突軌道を二体放出軌道につなげる．後者は$\underline{v}=\sqrt{2}$で$\underline{\theta}$はちょうどπだけ増やした軌道である．二体衝突から放出されてからは$d\beta/d\tau<0$である．ふたたび$\tau\to\infty$のとき$\beta\to0$である．つまり、$\tilde{E}_+$の不安定多様体のこの分枝もm_1, m_2およびm_3の三体衝突に終わる．

衝突軌道を放出軌道につなげる手順は人工的であって滑らかでなく見えるかもしれない．しかし近くの解を考えれば、これが本当に流れを正則化することがわかる．[4]を参照せよ．

同時衝突多様体上の不動点で$\beta=0$かつ$v<0$のものは$\delta\beta$方向に吸引的である．図6には各種の安定および不安定多様体またそれらの相対的位置が図示されている．

図 6

x^* を $\tilde{E}_+$ の安定多様体の点とする．すなわち x^* から出発する軌道は m_1, m_2 および m_3 の三体衝突と m_4, m_5 の二体衝突の同時衝突に終わる．t^* を解が x^* で終わる時刻とする．だから $\mathbf{q}_4(x^*, t^*) = \mathbf{q}_5(x^*, t^*)$ である．上で述べた膨らましの手法によれば、$\tilde{E}_+$ の不安定多様体 $\mathrm{Un}(\tilde{E}_+)$ は余次元 3 の滑らかな部分多様体をなす．Π を x^* で $\mathrm{Un}(\tilde{E}_+)$ と横断的に交わる 3 次元断面とする．簡単にわかるとおり、Π は集合 Σ_1 と x^* の近くの小さな曲線で交わる (図 6 参照). ι をこの曲線とする．だから $\iota \in \Sigma_1$ である．x^* は同時衝突なので ι は x^* で滑らかでないかもしれない．

加えて Π が集合 $\{x_4(x, \tilde{t}_1) = 0, y_4(x, \tilde{t}_1) = 0\}$ と x^* で横断的に交わるとし、またこの集合と Π の交点曲線が x^* において曲線 ι と交わるとする．

これ以後は Π から出発する解に焦点をあてる．Π に課される唯一の条件は横断性条件であることを注意しておく．このような超曲面 Π が存在することは明らかである．

同時衝突多様体上で三体衝突に関係する変数は残りの変数と独立であることをもう一度指摘しておく．したがって定理 4.4 の解析は $\tilde{E}_+$ の安定多様体上の点 x^* へも拡張できる．

定理 4.4 および Π に関する横断性条件より、ι を頂点とする 3 次元くさび W があって以下の条件を満たすことがわかっている．

(1) すべての $x \in W$ に対して、$\tilde{t}_1(x), t_1(x), \bar{t}_1(x)$ および $\tilde{t}_2(x)$ はうまく定義された (well-defined)x の連続関数であり、$x \to \iota$ のとき $\dot{z}_3(t_1) \to \infty, \dot{z}_3(\tilde{t}_1) \to \infty$ である．

(2) c^+ および c^- は W の境界の 2 つの断片であって ι がそれらの共通の境界になっているとする．このときすべての $x \in c^+$ に対して

$$\frac{1}{4}w^+ \leq w_{12}(x, \tilde{t}_2) \leq 2w^+,$$

またすべての $x \in c^-$ に対して

$$\frac{1}{4}w^+ \leq -w_{12}(x, \tilde{t}_2) \leq 2w^+. \tag{5.9}$$

(3) m_1, m_2 および m_3 の質量のみに依存する $K > 1$ があって、任意の $\epsilon > 0$ に対して、W を十分小さく取れば、すべての $x \in \Delta$ に対して次が成り立つ．

$$z_1(x, \tilde{t}_2) \geq K z_1(x, \tilde{t}_1) > 0,$$
$$|z_4(x, \tilde{t}_2) - z_4(x, \tilde{t}_1)| < \epsilon.$$

(4) 集合 ι, c_1 および c_2 は集合 $\{x_4(x, \tilde{t}_1) = 0, y_4(x, \tilde{t}_1) = 0\}$ と交わらない．

次の2つの補題はわれわれの逐次過程と記号力学の使用を正当化するのに本質的である．

補題 5.4. 上で定義したくさび W に対して $W \subset \Pi$ である．x^* を含む空でない閉集合 $\iota_1 \in W$ があって、すべての $x \in \iota_1$ に対して $r_{45}(x, \tilde{t}_2) = 0$ である．すなわち、ι_1 から出発する軌道は時刻 $\tilde{t}_2$ に m_3, m_4 および m_5 の三体衝突に終わる．さらに集合 ι_1 は連結であり2点以上を含む．

証明. c を x^* のまわりの W の境界内の小さな閉曲線とする．断面 Π に課した横断性条件より c は集合 $\{x_4(x, \tilde{t}_1) = 0, y_4(x, \tilde{t}_1) = 0\}$ と交わらない．その上、c から S^1 への以下の写像はよく定義されて (well-defined) おり、位相的に非自明である．

$$h_1(x) = \left(\frac{x_4(x, \tilde{t}_1)}{(x_4^2(x, \tilde{t}_1) + y_4^2(x, \tilde{t}_1))^{1/2}}, \frac{y_4(x, \tilde{t}_1)}{(x_4^2(x, \tilde{t}_1) + y_4^2(x, \tilde{t}_1))^{1/2}} \right) \quad \text{for all} \quad x \in c.$$

写像 h_1 は写像度1の写像である．そこでやはり c から S^1 への写像である h_2 を次のように定義する．

$$h_2(x) = \left(\frac{x_4(x, \tilde{t}_2)}{(x_4^2(x, \tilde{t}_2) + y_4^2(x, \tilde{t}_2))^{1/2}}, \frac{y_4(x, \tilde{t}_2)}{(x_4^2(x, \tilde{t}_2) + y_4^2(x, \tilde{t}_2))^{1/2}} \right) \quad \text{for all} \quad x \in c.$$

くさび W の性質より、h_2 もよく定義されて (well-defined) いて位相的に非自明な写像度1の写像であることが判る．

いまや補題は単純な位相的な議論からしたがう．S を W 内の曲面で c を境界に持つものとする．すると S は $x_4(x, \tilde{t}_2) = 0$ かつ $y_4(x, \tilde{t}_2) = 0$ なる点を少なくとも1つ含む．そうでなければ写像 h_2 は集合 S に連続に拡張できるが、これは不可能である．ι_1' を W 内の $x_4(x, \tilde{t}_2) = 0$ かつ $y_4(x, \tilde{t}_2) = 0$ なる点すべての集合とする．このとき ι_1' は空でない閉集合であり、$x^* \in \iota_1'$ である．ι_1 を ι_1' の連結成分で x^* を含むものとする．明らかに ι_1 は x^* 以外の点を含むから補題が証明された． □

次の結果は ι_1 から出発する解に関係する．

補題 5.5. $\iota_1 \in \Sigma_4$ を補題5.4の曲線とする．このとき無数の点 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \in \iota_1, i \in \mathbf{N}$ で $i \to \infty$ のとき $x_i \to x^*$ なるものがあって $r_{12}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ である．すなわち、x_i から出発する軌道の場合、解は二体及び三体同時衝突で終わる．

証明. 補題5.3より $x \to x^*, x \in \iota_1$ のとき $n(x) \to \infty$ である．$n(x)$ は階段関数であって $r_{12}(x, t)$ が $\tilde{t}_1$ または $\tilde{t}_2$ で局所極小に達したときのみ値を変えることを思いだそう．W を十分小さく選んでおけば、$x \in \iota_1$ および $t = \tilde{t}_1$ において $r_{12}(x, t)$ の局所極小はないから、関数 $n(x)$ の不連続性は $r_{12}(x, t)$ が $t = \tilde{t}_2(x)$ において局所極小に達したときのみ生じる．ι_1 は連結であるから、任意の正整数 i を十分大きくとれば、点 $x_i \in \iota_1$ があって $n(x)$ は x_i で不連続で $n(x_i) = i$ である．(そうでなければ集合 ι_1 は非連結になってしまい、それぞれ $n(x) \geq i$ および $n(x) < i$ なる共通部分のない2つの空でない連結成分の和になってしまう．) これらの点の番号を付け直して x_i とし、$x_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ を $r_{12}(x_i, t)$ が局所極小になる点とする．すると $\dot{r}_{12}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ または $r_{12}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ である．角運動量の保存則 $c_{12} + c_{45} = 0$ より $c_{12}(x_i, \tilde{t}_2) = -c_{45}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ である．$c_{45}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ だからである．したがって $\ddot{r}_{12}(x_i, \tilde{t}_2) < 0$ であり、$\dot{r}_{12}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ から局所極大のみが得られる．このことから $r_{12}(x_i, \tilde{t}_2) = 0$ が言え、補題が証明された． □

今までに得られた結果をまとめよう．$x^* \in \Sigma_1$ は x^* から出発する軌道が m_1, m_2 および m_3 の三体衝突と m_4, m_5 の二体衝突の同時衝突に終わる点とする．Π を相空間の小さな、生成的な 3 次元超曲面とする．断面 Π は x^* を内部に含む曲線 ι 内で Σ_1 と交わる．すると ι を頂点とするくさび W があって、くさび W から出発するすべての軌道に対して m_3 は m_1 と m_2 から投げ出されて m_4 および m_5 に非常な短時間で追いつく．W をもっと小さくすれば m_3 が m_4 および m_5 に追いつく時間はいくらでも小さくできる．さらにくさび W の内部には無数の点 $x_1, x_2, \ldots, x_i \to x^*$ があって、任意の $i \in \mathbf{N}$ に対して x_i から出発する軌道は m_3, m_4, m_5 の三体衝突と m_1, m_2 の二体衝突の同時衝突に終わる．

いまやわれわれの主結果のひとつである定理 1.1 を証明する準備ができた．

定理 1.1 の証明．くさび W を構成する上述の過程を繰り返し、点 $x_1, x_2, \ldots$ を見つけることから始めよう．今回は x^* の代わりに $x_i, i \in \mathbf{Z}$ と ι_1 を使う．また m_1, m_2, m_3 の三体衝突の代わりに m_3, m_4, m_5 の三体衝突を使う．各 x_i に対して x_i の小さな近傍 $\Pi_i \subset W \subset \Pi$ をとり、超曲面 Π_i から出発する解を考える．Π_i が Π に課されたのと似た横断性条件を満たすと仮定できる．これは横断性条件が生成的な条件だからである．だから Π に任意に小さな変化を与えてすべての横断性条件が満たされるようにできる．定理 4.4、補題 5.4 および 5.5 より、ふたたびくさび W_i を見つけることができ、W_i は x_i を内部に持つ ι_1 の部分孤に頂点を持つ．W_i は W に似た性質を持つことに注意する．つまり、W_i から出発する軌道に対して、m_3 は m_4 および m_5 から高速で逃げ去り、ごく短時間で m_1 および m_2 に追いつく．$\tilde{t}_3(x), x \in W_i$ は m_3 が m_1 と m_2 の中点に到達する時刻とする．x を W_i 内のもっと小さなくさびに制限することで差 $\tilde{t}_3 - \tilde{t}_2$ を任意に小さくできる．

ふたたび、各 i に対して、くさび W_i 内に無数の点 $x_{ij}, j = 1, 2, 3, \ldots, x_{ij} \to x_i$ を見つけることができ、x_{ij} の軌道は m_1, m_2, m_3 の三体衝突と m_4, m_5 の二体衝突の同時衝突に終わる．すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対して x_{ij} は x_i と似た性質を持つ．これを続けて、正整数の任意の無限列 $i_1 i_2 i_3 \cdots$ が与えられれば、くさびの列

$$\ldots \subset W_{i_1 i_2 i_3} \subset W_{i_1 i_2} \subset W_{i_1} \subset W$$

を見つけて、時刻の列

$$\tilde{t}_1(x) < \tilde{t}_2(x) < \tilde{t}_3(x) < \ldots$$

を、

$$W \cap W_{i_1} \cap W_{i_1 i_2} \cap W_{i_1 i_2 i_3} \cap \ldots$$

のすべての点に対して定義することができる．加えて $\tilde{t}_{i+1}(x) - \tilde{t}_i(x)$ は任意の $i \in \mathbf{Z}$ に対して任意に小さくできる．だから、$\tilde{t}_{i+1}(x)$ が定義される限り

$$\tilde{t}_{i+1}(x) - \tilde{t}_i(x) \leq 2^{-i},$$

と仮定できる．

記号力学を使って定理 1.1 の証明を締めくくろう．正整数の無限列 $i_1 i_2 i_3 \ldots$ に対して、上の構成法により、対応するくさびの無限列

$$\ldots \subset W_{i_1 i_2 i_3} \subset \overline{W}_{i_1 i_2 i_3} \subset W_{i_1 i_2} \subset \overline{W}_{i_1 i_2} \subset W_{i_1} \subset \overline{W}_{i_1} \subset W,$$

を得る．ここで $\overline{V}$ は集合 V の閉包である．入れ子になったこの列は空でない共通部分を持つ．$\mathbf{q}^*$ をこの共通部分の点とする．このとき

$$\mathbf{q}^* \in W_{i_1 i_2 i_3 \cdots}$$

であり、$\tilde{t}_i(\mathbf{q}^*)$ がすべての $i = 1, 2, 3, \ldots$ に対して定義されて

$$\tilde{t}_1(\mathbf{q}^*) < \tilde{t}_2(\mathbf{q}^*) < \tilde{t}_3(\mathbf{q}^*) < \ldots.$$

$\tilde{t}_{i+1}(\mathbf{q}^*) - \tilde{t}_i(\mathbf{q}^*) \leq 2^{-i}$ であるから、列は極限 t_∞ を持つ．すなわち

$$t_\infty = \lim_{i \to \infty} \tilde{t}_i(\mathbf{q}^*) \leq \tilde{t}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} < \infty.$$

したがって $\mathbf{q}^*$ から出発する軌道の場合、解はすべての $t, 0 \leq t < t_\infty < \infty$ に対して定義されている．$\mathbf{q}^*$ から出発する解に関して $t \to t_\infty$ のとき

$$z_1(t) = z_2(t) \to \infty \quad \text{および} \quad z_4(t) = z_5(t) \to -\infty \tag{5.10}$$

であることを証明するのに序節で述べた von Zeipel の定理を使うこともできる．さて $t_\infty < \infty$ は特異点であり、構成法により、t_∞ は衝突特異点ではない．したがって $t \to \infty$ のとき $\lim I \to \infty$ である．ここで I は系全体の慣性モーメントである．(しかしわれわれの場合、二体衝突は正則化されているから von Zeipel の定理を直接適用できないことに注意しよう．けれども von Zeipel の定理を拡張して二体衝突の正則化を許し、二体衝突を経験する解を正則な解として扱うようにすることはむずかしくない.) ここで前に方程式 (5.10) を証明する際に導いたいくつかの評価を使うことにしよう．定理 4.4 の第三の性質より、正数の任意の列 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ に対して $W, W_i, W_{i_1 i_2}, \ldots$ を十分小さくとって以下の不等式を満たすようにできる．

$$\begin{array}{rcl}
z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_2) & \geq & K z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_1), \\
z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_3) & \geq & z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_2) - \epsilon_1, \\
z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_4) & \geq & K z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_3), \\
z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_5) & \geq & z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_4) - \epsilon_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

ここで $K > 1$ は定数である．任意の $1 < K_0 < K$ に対して、簡単にわかるように、$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ が十分小さければ、すべての $n > 0$ に対して

$$z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_{2n+2}) \geq K_0 z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_{2n}) \geq K_0^n z_1(\mathbf{q}^*, \tilde{t}_2)$$

である．したがって

$$z_1(\mathbf{q}^*, t) = z_2(\mathbf{q}^*, t) \to \infty \quad \text{as} \quad t \to t_\infty.$$

同様に

$$z_4(\mathbf{q}^*, t) = z_5(\mathbf{q}^*, t) \to -\infty \quad \text{as} \quad t \to t_\infty.$$

Λをこのような点すべての集まりとする．すなわち、任意の$\mathbf{q}^* \in \Lambda$に対して対応する正整数の無限列$i_1, i_2, \ldots$があって

$$\mathbf{q}^* \in \cap_{n=1}^{\infty} W_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

である．Λから出発する軌道は有限時間内に非有界な解である．

Λが非可算であることは明らかである．これで定理1.1の証明が完結した． □

後に使うので、ここで構成した有限時間内の非有界解の性質をいくつか述べる．Λの構成中にあったくさびを必要ならもっと小さく選べるから、すべての$x \in \Lambda$に対して以下の性質が成り立つと仮定できる．

(1) すべての$n > 0$に対して$|\bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n| \le 2^{-2n}$;

(2) すべての$n > 0$に対して$|\dot{z}(\bar{t}_n)/\dot{z}_3(\bar{t}_{n+1})| \le 2^{-n}$;

(3) $z_3 > 0$なら必ず$h_{123}(t) \gg 0$また$z_3 < 0$なら必ず$h_{345}(t) \gg 0$.

したがって三体衝突に近い部分系を考えるときは勾配的な性質が成り立つ．

次節で定理1.2の証明を完結する．

6. 非衝突特異性

前節では、３次元超曲面Π上に有限時間で非有界な解を非可算個構成した．すでに指摘したように、m_1とm_2およびm_4とm_5の間の二体衝突はすべて正則化されている．したがってわれわれの解は二体衝突を含み得る．この節の主目的は前節で構成した解のあるものは実は二体衝突を含まないことを示すことにある．

第二の主結果定理1.2を一連の補題を証明することによって証明しよう．補題6.1の述べるところでは、前節で構成した非有界解の場合、両方の連星m_1, m_2およびm_4, m_5の離心率は1に近づく．言い換えれば、$\mathbf{q}^* \in \Lambda$としt_∞を解が終わる時刻とする．すると$t \to t_\infty$のとき$w_{12}(\mathbf{q}^*(t)) \to 0$である．つまり連星の解は直線問題に近い．補題6.2の主張によれば連星m_1, m_2とm_4, m_5の楕円の軸も$t \to t_\infty$のとき極限を持つ．最後に、補題6.3では、これらの2つの極限軸が$0, \pi/2, 3\pi/2$またはπ以外の角度をなせばt_∞に十分近いすべてのtに対して連星の一方、たとえばm_1とm_2、の角運動量は正であってもう一方の連星m_4とm_5の角運動量は負である．つまり、t_∞に十分近いtに対してどちらの連星に割り当てられた角運動量も符号を変えない．これによってt_∞に十分近いtに対して二体衝突が不可能であることが保証される．補題6.3はこの節の最も重要な補題である．その証明は直観的に次のように述べることができる．$t \to t_\infty$のとき、m_1, m_2およびm_4, m_5をそれぞれの極限軸にどんどん近づける．これはほとんどの時間に関して成り立つ．だから角運動量の変化は減少するか増大するかたいてい一方方向である．それゆえある意味では、どちらの連星の場合も角運動量はますます単調関数のようにふるまい、だからtがt_∞の十分近くではゼロから離れたままである．これらの補題から、注意深く初期値を選べば非衝突特異性が得られることがわかる．

補題 6.1． $\mathbf{q}^*(t)$を前節で構成した有限時間に非有界な解とする．すると$t \to t_\infty$のとき$w_{12}(\mathbf{q}^*(t)) \to 0$および$w_{45}(\mathbf{q}^*(t)) \to 0$である．ただし$t_\infty < \infty$は解$\mathbf{q}^*(t)$が終わる時刻である．

証明. はじめに $n\to\infty$ のとき $w_{12}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_n))\to 0$ を示そう．ただし、$\bar{t}_n$ は前節で定義されたものである．後の便宜のため、

$$|w_{12}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_n))|\le 2^{-n}M_1,$$

が、ある定数 M_1 およびすべての $n=1,2,\dots$ に対して成り立つことも示そう．

$\mathbf{q}^*(t)$ の構成法より、

$$|w_{45}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_{2n}))|\le 2w^+ \tag{6.1}$$

であり、また

$$|w_{45}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_{2n}))|=|c_{45}^2(\bar{t}_{2n})h_{45}(\bar{t}_{45})|\ge c_1c_{45}^2|\dot{z}_3(\bar{t}_{2n})|$$

が、ある $c_1>0$ に対して成り立つ．ゆえに

$$c_{45}^2(\bar{t}_{2n})\le\frac{2w^+}{|c_1\dot{z}^2(\bar{t}_{2n})|} \tag{6.2}$$

である．一方、$c_2>0$ があって

$$\begin{aligned}|w_{12}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_{2n}))| &= |c_{12}(\bar{t}_{2n})h_{12}(\bar{t}_{2n})|\\ &\le c_2c_{12}^2(\bar{t}_{2n})|\dot{z}_3^2(\bar{t}_{2n-1})|\le 2w^+\frac{c_2}{c_1}\frac{|\dot{z}_3^2(\bar{t}_{2n-1})|}{|\dot{z}_3^2(\bar{t}_{2n})|}\le 2^{-2n}M_1\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $c_{12}=-c_{45}$ を利用する．だから、ある $M_2>0$ に対して

$$|w_{12}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_{2n}))|\le 2^{-2n}M_2$$

である．

ある $M_3>0$ に対して

$$|w_{12}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_{2n-1}))|\le 2^{-2n+1}M_3$$

であることを示すために、ある $c_3>0$ およびすべての $t\in[\bar{t}_{2n-1},\bar{t}_{2n}]$ に対して $\dot{w}_{12}\le c_3$ であることに注意する．ある $c_4>0$ に対して $|\bar{t}_{2n}-\bar{t}_{2n-1}|<2^{-2n}c_4$ と仮定できる．したがって、ある $M_1>0$ およびすべての $n>0$ に対して

$$|w_{12}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_n))|<2^{-n}M_1. \tag{6.3}$$

同様の結果が m_4 と m_5 の組にも成り立つ．すなわち、ある $M_4>0$ およびすべての $n>0$ に対して

$$|w_{45}(\mathbf{q}^*(\bar{t}_n))|\le 2^{-n}M_4. \tag{6.4}$$

補題 6.1 の証明を続けるかわりにこれらの不等式を使って次の補題を証明し、その後で補題 6.1 に戻ろう．補題 6.1 の完全な証明は後で与える．

二体問題を考える．ニュートンの法則のもとに m_1 と m_2 が $\mathbf{R}^2$ 内で運動する．$\mathbf{r}_{12}$ を相互距離とする．運動方程式は

$$\frac{d^2\mathbf{r}_{12}}{dt^2}=-\frac{m_1+m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12},\quad \mathbf{r}_{12}\in\mathbf{R}^2.$$

通常のエネルギーおよび角運動量積分のほかに、この方程式は別の積分も許す．簡単に検証できるように、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{12} = & \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{1}{m_1+m_2}(\mathbf{c}_{12} \times \mathbf{r}_{12}) \\
= & \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{1}{m_1+m_2}\left(\mathbf{r}_{12} \times \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt}\right) \times \mathbf{r}_{12}
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

は運動の定数である．$\mathbf{p}$ の値はある重要な物理的意味を持つ．すなわち、m_1 と m_2 がある楕円軌道を描けば、ベクトル $\mathbf{p}$ は楕円の近点方向を向き、$\mathbf{p}$ の大きさは楕円の離心率にちょうど等しい．詳しい議論に関して Pollard[13] を参照されたい．

前節で構成された解に対し、ほとんどの時間の間 m_1, m_2 は残りの粒子 m_3, m_4 および m_5 から遠く離れていることに気づく．このことから m_1 と m_2 の運動を摂動問題として扱うことが示唆される．二体問題で $\mathbf{p}$ が積分であることを考えて、上の $\mathbf{p}$ に似たベクトル $\mathbf{p}_{12}$ を定義する．

$$
\mathbf{p}_{12} = \frac{(x_1, y_1, 0)}{(x_1^2+y_1^2)^{1/2}} + \frac{4}{m_1}(\mathbf{c}_{12} \times (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0)) \tag{6.6}
$$

とおく．ここで

$$
\mathbf{c}_{12} = (0, 0, x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1)
$$

である．

ちょっと見たところ $\mathbf{p}_{12}$ の定義は r に依存する．しかし、$\mathbf{p}_{12}$ を McGehee の変数で書けば、r 因子は消えてしまう $(r_{12} \sim O(r), \dot{r}_{12} \sim O(r^{-1/2}))$．したがって $\mathbf{p}_{12}$ は三体衝突多様体上でもうまく定義されて (well-defined) いる．

補題 6.2. $\mathbf{q}^*(t)$ は前節で構成された有限時間に非有界な解であって、t_∞ は解 $\mathbf{q}^*(t)$ が終わる時刻とする．このとき、$\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))$ および $\mathbf{p}_{45}(\mathbf{q}^*(t))$ の極限は存在し、その上

$$
\lim(\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))) = \mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*) \quad \text{および} \quad \lim(\mathbf{p}_{45}(\mathbf{q}^*(t))) = \mathbf{p}_{45}(\mathbf{q}^*) \quad \text{as } t \to \infty
$$

なら $|\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*)| = |\mathbf{p}_{45}(\mathbf{q}^*)| = 1$ である．

証明. 簡単な計算によれば、

$$
\dot{\mathbf{p}}_{12} = -\mathbf{c}_{12} \times \mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1 m_3}{4} r_{13}^{-3}\right) + O(|z_4|^{-2}). \tag{6.7}
$$

次にしたいのは前節で構成した非有界解に対して $\mathbf{p}_{12}$ の変化を評価することである．$\Delta\mathbf{p}_{12} = \mathbf{p}_{12}(t_\infty) - \mathbf{p}_{12}(0)$ とおく．このとき

$$
\Delta\mathbf{p}_{12} = -\int_0^{t_\infty} \mathbf{c}_{12} \times \mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1 m_3}{4} r_{13}^{-3}\right) dt + \int_0^{t_\infty} O(|z_4|^{-2}) dt.
$$

右辺の二番目の積分は収束し、また $t \to t_\infty$ のとき $\inf(r_{13}) \to 0$ であるから最初の積分は improper 積分である．次に証明するのは、この improper 積分も収束することである．すな

わち、

$$\begin{aligned}\int_0^{t_\infty} \mathbf{c}_{12}\times\mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1m_3}{4}r_{13}^{-3}\right)dt = & \int_0^{t_1}+\int_{t_1}^{\bar t_2}+\int_{\bar t_2}^{t_3} \\ & +\cdots\left(\mathbf{c}_{12}\times\mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1m_3}{4}r_{13}^{-3}\right)\right)dt \\ = & \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\bar t_{2n}}^{t_{2n+1}}\left(\mathbf{c}_{12}\times\mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1m_3}{4}r_{13}^{-3}\right)\right)dt \\ & +\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_{2n+1}}^{\bar t_{2n+2}}\left(\mathbf{c}_{12}\times\mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1m_3}{4}r_{13}^{-3}\right)\right)dt.\end{aligned}$$

第二の和は収束する．非積分関数が有界だからである ($r \geq A$ に注意する)．したがって $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束級数であることを示せばよい．ただし

$$a_n=\int_{\bar t_{2n}}^{t_{2n+1}}\left(\mathbf{c}_{12}\times\mathbf{r}_{12}\left(\frac{m_1m_3}{4}r_{13}^{-3}\right)\right)dt. \tag{6.8}$$

$dt = r^{3/2}d\tau$ で定義される変数 $\tau=\tau(t)$ への変換を行い、$\overline{\tau}_n=\tau(\bar t_n)$ および $\tau_n=\tau(t_n)$ と置けば、

$$a_n=\int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}}\left(\frac{m_1m_3}{4}\frac{(0,0,u)\times(\cos\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,0)}{(1+2\alpha\sin^2\phi)^{3/2}}\right)d\tau$$

である．したがって

$$|a_n|\leq\int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}}\frac{m_1m_3|u\cos\phi|}{4}d\tau. \tag{6.9}$$

$\tau_{2n+1}^0\in(\overline{\tau}_{2n},\tau_{2n+1})$ を $v(\tau_{2n+1}^0)=-v_0<0$ なる時刻とする．ここで v_0 は $-v_0>v(E_+)$ なる任意の正数である．E_+ は三体衝突多様体上の不動点であったことを思いだそう．N_+ の勾配的性質より τ_{2n+1} は一意に定義される．だから

$$|a_n|\leq\int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|u\cos\phi|}{4}d\tau+\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau_{2n+1}}\frac{m_1m_3|u\cos\phi|}{4}d\tau. \tag{6.10}$$

上の 2 つの積分を別々に考えよう．最初の積分の場合、

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|u\cos\phi|}{4}d\tau \leq & \int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|u|}{4}d\tau \\ = & \int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|c_{12}|}{4r^{1/2}}d\tau \\ = & \int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|c_{12}^0+c_{12}-c_{12}^0|}{4r^{1/2}}d\tau \\ \leq & \int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|c_{12}^0|}{4r^{1/2}}d\tau \\ & +\int_{\overline{\tau}_{2n}}^{\tau_{2n+1}^0}\frac{m_1m_3|c_{12}-c_{12}^0|}{4r^{1/2}}d\tau,\end{aligned} \tag{6.11}$$

である．ただし $c_{12}^0=c_{12}(t_{2n+1}^0)$.

すべての $t \in [\bar{t}_{2n}, t^0_{2n+1}]$ に対して $\dot{r} = r^{-1/2}v, v \le -v_0$ であることより、

$$\dot{r} \le -r^{-1/2}v_0.$$

したがってすべての $t \in [\bar{t}_{2n}, t^0_{2n+1}]$ に対して

$$r(t) \ge (r_0^{3/2} + v_0(t^0_{2n+1} - t))^{2/3}.$$

ある $c_1 > 0$ に対して $|\dot{c}_{12}| \le c_1 r_{12} r_{45} r_{14}^{-2}$ であるから、ある $M_1 \ge 0, t \in [\bar{t}_{2n}, t^0_{2n+1}]$ に対して

$$|c_{12} - c^0_{12}| < 2^{-2n} M_1 (t^0_{2n+1} - t)$$

であると仮定できる．したがって

$$\begin{aligned}\frac{|c_{12} - c^0_{12}|}{r^2} &\le \frac{2^{-2n} M_1 (t^0_{2n+1} - t)}{(r_0^{3/2} + v_0(t^0_{2n+1} - t))^{4/3}} \\ &\le 2^{-2n} M_1 (t^0_{2n+1} - t)^{-1/3}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\tau}_{2n}}^{\tau^0_{2n+1}} \frac{m_1 m_3 |c_{12} - c^0_{12}|}{4 r^{1/2}} d\tau &\le \int_{\bar{t}_{2n}}^{t^0_{2n+1}} \frac{m_1 m_3 2^{-2n} M_1 (t^0_{2n+1} - t)^{-1/3}}{4} dt \\ &\le M_2 2^{-2n}\end{aligned} \tag{6.12}$$

がある $M_2 > 0$ およびすべての n に対して成り立つ．

(6.11) の第一の積分の場合、すべての $\tau \in [\bar{\tau}_{2n}, \tau^0_{2n+1}]$ に対して $r' \le -r v_0$ であることに注意する．次が成り立つ．

$$r \ge r_0 \exp(v_0(\tau^0_{2n+1} - \tau)).$$

したがって、ある $M_3 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\tau}_{2n}}^{\tau^0_{2n+1}} \frac{m_1 m_3 |c^0_{12}|}{4 r^{1/2}} d\tau &\le \int_{\bar{\tau}_{2n}}^{\tau^0_{2n+1}} \frac{m_1 m_3 |u_0| r_0^{1/2}}{4 r^{1/2}} d\tau \\ &\le \int_{\bar{\tau}_{2n}}^{\tau^0_{2n+1}} \frac{m_1 m_3}{4} |u_0| \exp\left(-\frac{1}{2} v_0 (\tau^0_{2n+1} - \tau)\right) d\tau \\ &\le M_3 |u_0|.\end{aligned} \tag{6.13}$$

後に、ある $M_9 > 0$ に対して $|u_0| \le 2^{-n} M_9$ であることを示す．

さて (6.10) の第二の積分を考えよう．これに関しては u に関する評価

$$u' = \frac{1}{2} v u + r f(t),$$

が必要である．ここで $f(t)$ は t の関数で

$$|f(t)| = |\dot{c}_{12}| \le c_1 r_{12} r_{45} r_{15}^{-2}$$

を満たす．したがって

$$u(\tau) = \exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)\left(u_0 + \int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} f(t)r\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau}\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)d\tau\right).$$

ここで $u_0 = u(\tau_{2n+1}^0)$ である．上式で $f(t)$ を含む積分項の変数を τ から t に変えて

$$u(\tau) = \exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)\times\left(u_0 + \int_{t_{2n+1}^0}^{t} f(t)r^{-1/2}\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau}\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)dt\right),$$

を得る．

$r' = rv$ より

$$r = r_0\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} v(\tau)d\tau\right).$$

したがって

$$\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} \pm\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm\frac{1}{2}}.$$

上の式を使って

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_{2n+1}^0}^{t} f(t)r^{-1/2}\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau}\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)dt\right| &= \left|\int_{t_{2n+1}^0}^{t} f(t)r^{-1/2}\frac{r^{1/2}}{r_0^{1/2}}dt\right| \\ &\leq \max|f(t)|r_0^{-1/2}|t-t_0|\end{aligned} \tag{6.14}$$

を得る．補題 4.2 の証明より、定数 d_5 があって、すべての $n>0$ に対して

$$r_0^{-1/2}|t_{2n+1} - t_{2n+1}^0| \leq d_5$$

を満たす．一方、すべての $t \in [t_{2n+1}^0, t_{2n+1}]$ に対して、

$$\max|f(t)| \leq c_2 r_{12} r_{45} r_{15}^{-1} \leq 2^{-2n}M_4$$

が、ある $M_4 > 0$ およびすべての n に対して成り立つと仮定できる．したがって

$$\int_{t_{2n+1}^0}^{t_{2n+1}} \frac{|f(t)|}{r_0^{1/2}}dt \leq 2^{-2n}M_5$$

が、ある $M_5 > 0$ およびすべての n に対して成り立つ．だから (6.10) の第二の積分に関して次のような評価を得る．

$$\begin{aligned}\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau_{2n+1}} \frac{m_1m_3|u\cos\phi|}{4}d\tau \leq\ & \int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau_{2n+1}} \frac{m_1m_3|u|}{4}d\tau \\ \leq\ & \int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau_{2n+1}} (|u_0| + 2^{-2n}M_5)\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)d\tau \\ \leq\ & (|u_0| + 2^{-2n}M_5)\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau_{2n+1}^*}\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)d\tau \\ & +(|u_0| + 2^{-2n}M_5)\int_{\tau_{2n+1}^*}^{\tau_{2n+1}}\exp\left(\int_{\tau_{2n+1}^0}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)d\tau.\end{aligned} \tag{6.15}$$

ここで $\tau^*_{2n+1}(x)$ は x の軌道が円筒体 T に到達したときの τ の値である．

上の 2 つの積分がともに有界であることを示したい．補題 4.2 を証明するのに用いたのと似た議論により、

$$|\tau^*_{2n+1} - \tau^0_{2n+1}| \leq M_6, \tag{6.16}$$

$$\left|\exp\left(\int_{\tau^0_{2n+1}}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)\right| \leq M_7 \tag{6.17}$$

がすべての $\tau \in [\tau^0_{2n+1}, \tau^*_{2n+1}]$ に対して成り立つことがわかる．ここで M_6 および M_7 は正定数である．

(6.15) の第二の積分に関しては、不等式 (6.13) を得るのに用いたのと同じ議論を使う．

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_{\tau^0_{2n+1}}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right) = \ & \exp\left(\int_{\tau^0_{2n+1}}^{\tau^*_{2n+1}} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right) \\ & \cdot \exp\left(\int_{\tau^*_{2n+1}}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right) \end{aligned} \tag{6.18}$$

であることに注意する．第一項は有界である．第二項に関しては、$\tau \geq \tau^*_{2n+1}$ なら $v(\tau) \geq v^+$ であることより

$$\exp\left(\int_{\tau^*_{2n+1}}^{\tau} -\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}v^+(\tau - \tau^*_{2n+1})\right)$$

を得る．不等式 (6.15)、(6.16) および (6.17) を考慮すると、これから

$$\int_{\tau^0_{2n+1}}^{\tau_{2n+1}} \frac{m_1 m_3 |u\cos\phi|}{4} d\tau \leq (|u_0| + 2^{-2n}M_5)M_8 \tag{6.19}$$

が、ある $M_8 > 0$ およびすべての n に対して得られる．したがって、不等式 (6.10)、(6.11)、(6.12)、および (6.13) より

$$\begin{aligned} |a_n| \ & \leq (|u_0| + 2^{-2n}M_5)M_8 + 2^{-2n}M_2 + M_3|u_0| \\ & = (M_3 + M_8)|u_0| + 2^{-2n}(M_2 + M_5 M_8) \end{aligned} \tag{6.20}$$

が成り立つ．$\sum |a_n|$ が収束列であることを示すのに、

$$|u_0| \leq 2^{-2n}M_9 \tag{6.21}$$

がある $M_9 > 0$ に対して成り立つことを示せばよい．そのために不等式 (6.3): $|w_{12}(\bar{t}_n)| \leq 2^{-n}M_1$ を使う．定義より $|w_{12}| = |h_{12}c^2_{12}|$ であったことを思いだそう．したがって

$$|c^2_{12}(\bar{t}_n)h_{12}(\bar{t}_n)| \leq 2^{-2n}M_1 \tag{6.22}$$

である．次に $c_{12}(\bar{t}_n)$ の評価を u_0 を使って行なう．ふたたび $t^*_{2n+1}, t^*_{2n+1} \in [\bar{t}_{2n}, t_{2n+1}]$ を軌道が T に到着する時刻であるとし、$r(t^*_{2n+1}) = r_*$ とおく．(6.14) より

$$\begin{aligned} |c_{12}(\bar{t}_{2n})| \ & = |r^{1/2}(\bar{t}_{2n})u(\bar{t}_{2n})| \\ & = r^{1/2}(\tau^0_{2n+1})|u_0 + s(\bar{t}_{2n})| \\ & \geq M_{10} r_*^{1/2}|u_0 + s(\bar{t}_{2n})|, \end{aligned} \tag{6.23}$$

である．ここで

$$s(t)=\int_{t^0_{2n+1}}^{t}\exp\left(\int_{\tau^0_{2n+1}}^{\tau}\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\right)f(t)r^{-1/2}dt.$$

(6.23) 内の不等式は、$x(t^*_{2n+1})\in T$ なるすべての x およびある $M_{10}>0$ に対して

$$\frac{r_*}{r(\tau^0_{2n+1})}=\exp\int_{\tau^0_{2n+1}}^{\tau^*_{2n+1}}\frac{1}{2}v(\tau)d\tau\le M_{10}^{-2}$$

であることよりしたがう．ここで不等式 (6.16) を使った．(6.14) より

$$|s(t)|\le 2^{-2n}M_5\ \text{ for all }\ t\in[t^0_{2n+1},t^*_{2n+1}]$$

であることに注意しよう．

一方、補題 4.2 および 4.3 の証明にもあった通り、簡単にわかるように、$d_7>0$ および $d_8>0$ があって、十分小さな r_* に対しては

$$d_7\le\frac{|h_{12}(\bar{t}_{2n})|}{|h_{12}(t^*_{2n+1})|}\le d_8 \tag{6.24}$$

が $x(t^*_{2n+1})\in T$ なるすべての x に対して成り立つ．公式 (6.22)、(6.23) および (6.24) を併せて

$$2^{-(2n+1)}M_1\ge|w_{12}(\bar{t}_{2n})|\ge d_7|h_{12}(t^*_{2n+1})|M_{10}^2r_*|u_0+s(\bar{t}_{2n})|$$

を得る．したがって

$$|u_0+s(\bar{t}_{2n})|^2\le\frac{2^{-(2n+1)}M_1d_7^{-1}M_0^{-2}}{|r_*h_{12}(t^*_{2n+1})|}.$$

不等式 (6.21) を証明するのに、$|s(\bar{t}_{2n})|\le 2^{-2n}M_5$ より、

$$|r_*h_{12}(t^*_{2n+1})|>M_{11}$$

が、ある $M_{11}>0$ および $x(t^*_{2n+1})\in T$ なるすべての x に対して成り立つことを示せばよい．T_0 はコンパクト集合であるから、任意の $x\in T$ に対して

$$|rh_{12}(x)|\ne 0 \tag{6.25}$$

であることを示せば十分である．$rh_{12}(x)$ は r の値に依らないこと、および McGehee の座標で

$$|rh_{12}(x)|=\left|g-\frac{1}{2}v^2\sin^2\phi-w^2+2vw\sin\phi-m_1^{3/2}m_3(1+2\alpha\sin\phi)^{-1/2}\right|$$

と書けることに注意する．

M を三体衝突多様体として、$x\in M$ に対して $g(x)=0$ である．補題 2.1 を証明するのに使ったのと同じ議論により、すべての $x\in M$ に対して $rh_{12}(x)\ne 0$ がわかる．$rh_{12}(x)$ の連続性と $T_0\cap M$ のコンパクト性より、主張 (6.25) は g が十分に小さければ正しい．したがって T_0 を十分小さくとれば $|rh_{12}(x)|\ne 0$ である．T_0 は好きなだけ小さくとれるから、これが成り立つと仮定できる．したがって不等式 (6.21) が成り立つ．すなわち、ある $M_9>0$ に対して

$|u_0| \le 2^{-2n}M_9$ である．だから $\sum a_n$ は収束列であり、したがって $t \to t_\infty$ のとき $\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))$ の極限は存在する．

$1/2w_{12} = (1-|\mathbf{p}_{12}|^2)^{1/2}$ および $n \to \infty$ のとき $w_{12}(t_n) \to 0$ であることより、$n \to \infty$ のとき $|\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t_n))| \to 1$ である．$t \to t_\infty$ のとき $\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))$ の極限が存在するから、$t \to t_\infty$ のとき $|\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))| \to 1$ である．これで補題 6.2 が証明された． □

次が成り立つことを確認して欲しい．

$$w_{12} = 2(1-|\mathbf{p}_{12}|^2)^{1/2} \to 0.$$

だから $t \to t_\infty$ のとき $w_{12}(\mathbf{q}^*(t)) \to 0$ であり、約束どおり、補題 6.1 は証明された． □

いまや重要な補題を述べることができる．これにより非衝突特異性の存在の証明が完結する．

補題 6.3. $\mathbf{q}^*(t)$ を前節で構成した有限時間に非有界な解であるとする．また $\mathbf{p}^*_{12}, \mathbf{p}^*_{45}$ は補題 6.2 のものとする．$\mathbf{p}^*_{12} \cdot \mathbf{p}^*_{45} \ne 0$ かつ $\mathbf{p}^*_{12} \ne \pm\mathbf{p}^*_{45} \ne 0$ なら、すなわち、$\mathbf{p}^*_{12}$ と $\mathbf{p}^*_{45}$ は互いに平行でも垂直でもないなら、$t^a < t_\infty$ があって、すべての $t \in (t^a, t_\infty)$ に対して $c_{12} \ne 0$ である．言い換えると、時間区間 (t^a, t_∞) 内に m_1, m_2 および m_4, m_5 の二体衝突はない．

証明. この補題の証明は見た目よりやさしい．まず

$$\dot{c}_{12} = 2m_1m_4(x_1y_4 - x_4y_1)(r_{14}^{-3} - r_{15}^{-3})$$

を計算する．θ は 2 つのベクトル $\mathbf{r}_{12}$ と $\mathbf{r}_{45}$ のあいだの角度とする．すなわち、

$$\cos\theta = \frac{x_1x_4 + y_1y_4}{(x_1+y_1)^{1/2}(x_4+y_4)^{1/2}}$$

このとき

$$\begin{aligned} \dot{c}_{12} &= \frac{1}{2}m_1m_4r_{12}r_{45}\sin\theta\frac{3}{2}r_{12}r_{45}\cos\theta\left((z_1-z_4)^{-6} + O((z_1-z_4)^{-9})\right) \\ &= \frac{3}{8}m_1m_4r_{12}^2r_{45}^2\sin 2\theta\left((z_1-z_4)^{-6} + O((z_1-z_4)^{-9})\right). \end{aligned} \tag{6.26}$$

$\mathbf{q}^*(t)$ を前節で構成した非有界解とする．補題 6.2 より、$\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))$ および $\mathbf{p}_{45}(\mathbf{q}^*(t))$ は $t \to t_\infty$ のとき $\mathbf{p}^*_{12}$ および $\mathbf{p}^*_{45}$ を極限とする．ここで t_∞ は解 $\mathbf{q}^*(t)$ が終わる時刻である．θ^* を $\mathbf{p}^*_{12}$ および $\mathbf{p}^*_{45}$ の間の角度とする．補題の仮定により、

$$\sin 2\theta \ne 0$$

である．$\sin 2\theta > 0$ と仮定する．$\sin 2\theta < 0$ の場合も同様に取り扱えることが判る．ω を $\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}^*(t))$ と $\mathbf{p}_{45}(\mathbf{q}^*(t))$ の間の角度とする．このとき

$$\omega(t) \to \theta^* \quad \text{as} \quad t \to t_\infty$$

である．

$t^b < t^\infty$ は、すべての $t \in (t^b, t_\infty)$ に対して

$$\sin 2\omega(t) > 0$$

および

$$(z_1 - z_4)^{-6} + O((z_1 - z_4)^{-9}) > 0$$

を満たす時刻であるとする．ここで高次の項 $O((z_1 - z_4)^{-9})$ は方程式 (6.26) から来ている．$t \to t_\infty$ のとき $(z_1 - z_4) \to \infty$ だからこれは可能である．

2 つの場合がある．

(a) すべての $t \in (t^b, t_\infty)$ に対して $c_{12} \neq 0$ なら、$t^b = t^a$ と取る．すると補題は証明されたことになる．

(b) ある $t = t^a, t^a \in (t^b, t_\infty)$ があって $c_{12}(t^a) = 0$ なら、すべての $t \in (t^a, t_\infty)$ に対して $c_{12}(t) \neq 0$ であることを示そう．すると、これでも補題が証明されたことになる．

しかし、注意すべきは、定義より、

$$\mathbf{p}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}(t^a)}{r_{12}(t^a)} + \frac{4(\mathbf{c}_{12} \times (\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0))}{m_1},$$

なることである．$\mathbf{c}_{12}(t^a) = 0$ であるから $\mathbf{p}_{12}(t^a) = \mathbf{r}_{12}(t^a) r_{12}^{-1}(t^a)$ であり、したがって

$$\theta(t^a) = \omega(t^a)$$

である．ゆえに、$r_{12}(t^a) \neq 0$ および $r_{45}(t^a) \neq 0$ として

$$\dot{c}_{12}(t^a) = \frac{3}{8} m_1 m_4 r_{12}^2 r_{45}^2 \sin(2\omega(t^a))((z_1 - z_4)^{-6} + h.o.t) > 0,$$

である．したがって、$r_{12}(t^a) \neq 0$ および $r_{45}(t^a) \neq 0$ のとき以下を得る．

(1) $t < t^a$ で $(t^a - t)$ が十分小さければ $c_{12}(t) < 0$; また

(2) $t > t^a$ で $(t - t^a)$ が十分小さければ $c_{12}(t) > 0$.

上の関係式は $r_{12}(t^a) = 0$ と $r_{45}(t^a) = 0$ の片方または両方が成り立つときも正しい．こんどはすべての $t \in (t^a, t_\infty)$ に対して $c_{12}(t) > 0$ を証明しよう．

背理法で行なう．これが正しくないと仮定する．すると $t^c \in (t^a, t_\infty)$ があって、すべての $t \in (t^a, t^c)$ に対して $c_{12}(t) > 0$ であり、$c_{12}(t^c) = 0$ である．$c_{12}(t^c) = 0$ だから、上の議論より (t^a を t^c で置き換えて)、$t < t^c$ で $t^c - t$ が十分小さければ $c_{12}(t) < 0$ となり、仮定に矛盾する．

これで補題 6.3 が証明された． □

最後に主結果である非衝突特異性の存在を証明するところにきた．

<u>定理 1.2 の証明</u>． 定理 1.1 および補題 6.3 より、Λ の非可算部分集合 Λ_0 があって、すべての $x \in \Lambda_0$ に対して $\mathbf{p}_{12}^*(x)$ および $\mathbf{p}_{45}^*(x)$ が互いに平行でもないし、直交もしないことを示すだけでよいことが判っている．

x^* を定理 1.1 の点で

$$\sin(2\theta(x^*, t^*)) \neq 0$$

を満たすものとする．ここで θ は $\mathbf{p}_{12}(x^*, t^*)$ と $\mathbf{p}_{45}(x^*, t^*)$ の間の角度である．このような点が存在することは明らかである．補題 6.2 の証明から次の発想を得る．任意の $\epsilon > 0$ に対して十分小さなくさび $W, W_i, W_{ij}, W_{ijk}, \ldots$ を選び、すべての $x \in \Lambda_0 = W \cap W_i \cap W_{ij} \cap W_{ijk} \cap \ldots$ に対して

$$|\mathbf{p}_{12}(x^*, t^*) - \mathbf{p}_{12}(x, t)| < \epsilon$$

および

$$|\mathbf{p}_{45}(x^*, t^*) - \mathbf{p}_{45}(x, t)| < \epsilon$$

が $\tilde{t}_2 \le t \le t_\infty$ なるすべての t に対して成り立つようにできる．したがって $\epsilon > 0$ を十分小さく選んで

$$\sin 2\theta(x, t_\infty) \neq 0$$

がすべての $x \in \Lambda_0$ に対して成り立つようにできる．

定理 1.2 はいまや補題 6.3 から出る． □

参考文献

[1] D. Anosov, Smooth Dynamical Systems. Introductory Article, *A.M.S. Transl.* **125** (1985), 1-20.

[2] J. Chazy, Sur les singularité impossible du problème des n corps, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Swances de l'Acad. des Sciences* **170** (1920), 575-577.

[3] R. Devaney, Triple collision in the planar isosceles three-body problem, *Inv. Math.* **60** (1980), 249-267.

[4] R. Devaney, Singularities in classical mechanical systems, in *Ergodic Theory and Dymanical Systems*, A. Katok, ed., Birkhäuser, Boston, 1981.

[5] J. Gerver, The existence of pseudocollisions in the plane, *J. Diff. Equations* **89** (1991), 1-68.

[6] J. Mather and R. McGehee, Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time, in *Lecture Notes in Physics* **38**, J. Moser, ed., Springer-Verlag, 1975, pp.573-597.

[7] R. McGehee, Singularities in classical celestial mechanics, in *Proc. of Int'l Congress of Mathematicians*, Helsinki, 1978, pp.827-834.

[8] R. McGehee, Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27** (1974), 191-227.

[9] R. McGehee, Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics, *Expo. Math.* **4** (1986), 335-345.

[10] R. Moeckel, Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple-collision, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 1323-1341.

[11] R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 857-876.

[12] P. Painlevé, *Lecons sur la Théorie Analytique des Equations Différentielles*, A. Hermann, Paris, 1897.

[13] H. Pollard, *Celestial Mechanics*, Carus Math. Monographs **18**, Math. Assoc. of America, 1976.

[14] H. Pollard and D. Saari, Singularities of the n-body problem, I., *Arch. Rational Mech. and Anal.* **30** (1968), 263-269.

[15] H. Pollard and D. Saari, Singularities of the n-body problem, II., in *Inequalities-II*, Academic Press, New York, 1970, 255-259.

[16] D. Saari, Singularities and collisions of newtonian gravitational systems, *Arch. Rational Mech. and Anal.* **49** (1973), 311-320.

[17] D. Saari, Singularities of newtonian gravitational systems, in *Dynamical Systems*, M. Peixoto, ed., Academic Press, New York, 1973, pp.479-487.

[18] D. Saari, The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n-body problem, *J. Diff. Equations* **55** (1984), 300-329.

[19] D. Saari and Z. Xia, Super-hyperbolic and oscillatory solutions in newtonian systems, *J. Diff. Equations* **82** (1989), 342-355.

[20] C. L. Siegel and J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[21] C. Simó, Analysis of triple-collision in the isosceles problem, in *Classical Mechanics and dynamical Systems*, Marcel Dekkar, New York, 1980.

[22] C. Simó and E. Lacomba, Regularization of simultaneous binary collisions in the n-body problem, to appear in *J. Diff. Equations.*

[23] K. Sitnikov, The existence of oscillatory motions in the three-body problem, *Soviet Physics Doklady* **5** (1961), 647-650.

[24] H. Sperling, On the real singularities of the N-body problem, *J. die Reine und Angewandte Math.* **245** (1970), 15-40.

[25] H. von Zeipel, Sur les singularités du problème des n corps, *Arkiv für Mat., Astr. och Fysik* **32** (1908), 1-4.

[26] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1947.