谷川清隆 訳

Chaos **8**, 475-494(1998)

平面二等辺三体問題における秩序とカオス

Order and chaos in the planar isosceles three-body problem

K. Zare and S. Chesley

要約.

平面二等辺三体問題を 2 次元面積保存ポアンカレ写像 f に帰着させた．もとの微分方程式の対称性を使い, また数値計算を行なって, 質量が等しい場合の f の大域的な様子を記述する．この記述は面の写像に基づいており, ただちに捕獲-エスケープ, 永続的捕獲, 放出-衝突, その他の軌道を含むさまざまなタイプの運動の存在, およびそれらの測度を導く．その上, この技術により, 「早い」散乱と「カオス的な」散乱の間の違いを区別することができる．捕獲-エスケープは最大測度の集合であるが, f のもとで捕獲されたのでもなくエスケープもしない 2 つの異なる集合が存在する．最初の集合はカントール集合であり, 測度ゼロであり, これは f が領域の一部でスメール馬蹄写像に似ていることからの帰結である．第二の集合は楕円不動点を囲む正測度の不変領域である．この領域で, f は本質的に摂動ねじれ写像としてふるまう．すなわち, f の繰り返しのもとで, 多くの点は規則正しく不変曲線上を動く．補遺では, よく調べられている二等辺三体衝突多様体の枠組に今回の結果を投げ込んだ．

太字アブストラクト

ポアンカレ断面図を使うことは自由度 2 の力学系の研究では広く行われている．ところが, このような解析は「カオスの海」の構造に関してはほとんど洞察を与えない．今回の研究では, ポアンカレ写像を使い, 1 回の写像の作用だけで相空間の面積の進化を決定する．通常は数少ない初期値に多数回写像を作用させてしらべる．われわれは運動可能な領域を記号力学 (無限個のアルファベットの) に応じて細分する．この新たな文脈の中で, 写像前の像と写像後の像がどのように交わるかを見る．こうすると, カオス領域をスマートに幾何学的に記述することができ, また系をほぼ完全に大局的に記述することが可能になる．加えて, この技術は力学的ふるまいのある種の類の確率に関する情報を与え, またある種の記号列が力学系によって許されないことが示される．

1 序

Whittaker[1] によると, 三体問題は「力学の問題の内, もっとも褒め讃えらるべき問題」である. 19 世紀末のブルンス [2] とポアンカレ [3] の非可積分性定理後, 定性的方法を用いることが本質的になった. ポアンカレ [4] とバーコフ [5] の仕事は定性論の幕開け. 1912 年に Sundman[6] はポアンカレのアイデアにしたがって, すべての時間に対して正しい無限級数を求めた (三体衝突は除く). 無限級数は解の定性的ふるまいを教えてくれないから, 定性法の重要性は Sundman の仕事にかかわりなく強力な武器として残っている.

定性的結果を得るためのひとつの手法は系の積分多様体 (たとえば古典積分) のトポロジーを調べることである. とくに, 相空間の積分多様体のトポロジー的分類の分岐集合 [7,8] や, 配位空間へのその射影 [9,10] は最近調べられてきた. これから, 天体間に交換がないための十分条件が導かれた. この十分条件は Sundman の不等式 [11-13] を使っても得ることができる. しかし, この手法からは部分的な情報しか得られない. 古典積分からだけでは系の大局的な記述は取り出せない.

ポアンカレもバーコフも, 簡単であるという理由から, 円制限三体問題 [14] として知られる場合を考えた. この問題では, 第三体は質量ゼロで, 第一, 第二体は円運動する. その上, 数個の場合を除いて, これらの結果は近可積分の場合にも得られる. すなわち, 第二体の質量を小さくして, 摂動論の枠内で扱う.

ポアンカレが考え出した技術のひとつに, 問題の階数を降下させるために断面, ポアンカレ断面, を使う手法がある. これはポアンカレ写像と呼ばれている. ポアンカレとバーコフは 2 次元多様体の上の写像に関する不動点定理を定式化して証明し, 制限問題に無数の周期軌道があることを示した. 横断的ホモクリニック点 (双曲不動点の安定および不安定多様体の横断的交点) の近くに複雑な軌道構造のあることを指摘したのもポアンカレである. 横断的ホモクリニック点のどの近傍にも周期点があることをその後示したのはバーコフである. スメール [15] が示したように, これは馬蹄写像で起こっていることと同じ現象であって, ただ見方が違うだけである. 実は, 横断的ホモクリニック軌道の構造を理解する最善の方法は, それを馬蹄写像かあるいはそれと同じ構造を持つ写像に埋め込むことである.

制限三体問題の特別の場合としてシトニコフ問題が過去 2,30 年調べられてきた [16-18]. ここでは, 等質量の 2 質点がケプラー軌道を動き, 質量ゼロの第三体が二体の重心を通って軌道面に垂直に動く. 第三体の運動を記述せよ. これが問題である. 第三体は残りの二体から周期的に励起させられる. よく知られているように, 主星が円運動をしているとき問題は可積分であり [19], すべての振動解は有界である. 主星が楕円軌道の場合に可積分でないことは Sitnikov[18,20] による. 彼は無限に振動してかつ有界でない解の存在を確立した. Sitnikov 問題への記号力学の応用を Alekseev[16] が行い, このモデルに関し Sinikov の仕事を完成させた. 彼は結果を, 第三体が小さな質量を持つ場合へと拡張した. 写像へ還元することにより, またスメールの馬蹄構造の存在を示すことにより, 問題を幾何学的な形に持っていき, Moser[17] は Alekseev の結果を美しくまとめ直した. Moser の証明は McGehee の導入した変換に基づいており, 無限遠における双曲周期軌道を明らかにした. この軌道は 2 つの不変多様体を持ち, これらはホモクリニック交差を行うので, その近傍に馬蹄構造が存在する. 技術的な詳細に関しては

Moser[17] の III 章および VI 章を見よ.

最近注目されている三体問題のほかの特別形として, 直線問題 [21-23] や平面二等辺問題 [24-30] がある. どちらの場合も角運動量ゼロである. ゼロ角運動量多様体は三体衝突解をすべて含むから [6], これらの場合に三体衝突が特別興味を引くのは驚くべきことではない. 三体衝突多様体の概念は直線問題の場合に McGehee が導入した [22]. 基本的発想は, 三体衝突多様体上の流れを三体衝突近傍の軌道のふるまいのガイドに使おうというものである. 二等辺問題においては, McGehee の発想 [21,22] は三体衝突多様体を求めることに利用され [25-28], 無限遠の周期軌道およびそれにともなうヘテロクリニック現象を明らかにするために使われた.

Henon & Heiles の先駆的な仕事 [31] 以来, ポアンカレ写像の数値的研究は非可積分系の定性解析の実質的道具立てとなってきた. たとえば, ポアンカレ写像は, 少し例を挙げるだけても, 制限問題 [32,33], Sitnikov 問題 [34], 直線問題 [23] で数値的に研究された. これらの写像は一般に, 与えられた初期条件を使って, 横断面上軌道のたくさんの後継点で表された. 得られた横断面図は, 後継点が曲線上にある正則領域と後継点が面積をでたらめに埋めるように分布するカオス領域を区別するために使われた. この方法には 2 つの気がかりな点がある. まず, 数値的な信頼性である. というのは, 写像を多数回繰り返すことが必要とされる. 次に, カオス領域の構造に何らかの光を当てることができないことである. その上, 今回の研究では, 初期条件の大きな部分集合はすぐに双曲エスケープに至るので, 写像は数回の繰り返しにも定義されない.

この論文では, スメールにしたがって, 問題を点の写像と考えずに, 面積の写像と考える. この観点により, 幾何学的に大局的に写像を表現でき, カオス領域の馬蹄構造を明らかにできる. さらに, この表現は写像の 1 回の繰り返しだけから得られるので, 数値的な信頼性は大丈夫である.

II 節では平面二等辺三体問題の定義と 2 次元写像への還元の詳しい説明から始める. III 節では, この問題に適用する計算法を簡単に議論する. IV 節ではさまざまな重要結果を記述する. カオス領域, 正則領域の解析, この問題に適用した記号力学の記述などである. 補遺には今回の定式化と三体衝突多様体に関する文献の実質的内容との詳しい関係を述べる.

2 平面二等辺三体問題

一般平面三体問題は以下の微分方程式によって記述される.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= u_i \\
\frac{dy_i}{dt} &= v_i \\
m_i\frac{du_i}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_i} \\
m_i\frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad i=1,2,3
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで $m_i, (x_i, y_i), (u_i, v_i)$ はそれぞれ i 番目の粒子の質量, 位置, および速度であり,

$$U = \sum_{1 \le i < j \le 3} G m_i m_j \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{-1/2}$$

は力関数または負ポテンシャルである. (1) への初期パラメータは $t = 0$ における

$$T = \{m_i, (x_i, y_i), (u_i, v_i), i = 1, 2, 3\}$$

で与えられる. 一般問題に対称性条件を付けることにより,
以下のように特別の場合を得ることができる. $I \subset T$ を

$$I = \{T | m_1 = m_2, g_i = 0, i = 1, 2, \ldots, 6\},$$

で定義する. ただし,

$$g_1 = x_1 + x_2,$$

$$g_2 = y_1 - y_2,$$

$$g_3 = x_3,$$

$$g_4 = u_1 + u_2,$$

$$g_5 = v_1 - v_2,$$

$$g_6 = u_3$$

図 1 を貼る

すると, 制限 I は $t = 0$ において三体に二等辺三角形配置を課す. (1) 式の下で, I が不変部分集合であることは簡単に示せる, すなわち, I 上で $dg_i/dt = 0$ である. つまり, すべての時間にわたって二等辺配置が保たれる. 初期条件をこのように I に制限した問題は平面二等辺問題と文献で引用されている. この論文では, m_1 と m_2 を連星とよび, m_3 を第三体とよぶ.

I によって課された制限は, y 方向への 2 つの角運動量積分と合わせて不変部分集合

$$\tilde{I} = \left\{ I \left| \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 0, \sum_{i=1}^{3} m_i v_i = 0 \right. \right\},$$

を形づくる. (x 方向の線形運動量積分は対称性条件 g_i の中に含まれている.) $\tilde{I}$ 上で, (1) は

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= u \\
\frac{dy}{dt} &= v \\
\frac{du}{dt} &= -\frac{Gm_1}{4x^2} + Gm_3 \frac{\partial F}{\partial x}, \\
\frac{dv}{dt} &= G(2m_1 + m_3) \frac{\partial F}{\partial y}, \\
F &= (x^2 + y^2)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2}$$

に還元される．ここで x, y は m_1 と m_2 の重心に関する m_2 と m_3 の直交座標である (図 1 を見よ)．変数 u と v は対応する速度である．こうして (x, u) は連星の状態ベクトル, (y, v) は第三体の状態ベクトルを表すと考えられる．この系はエネルギー積分

$$h = \frac{1}{2}(u^2 + \alpha v^2) - \frac{Gm_1}{4x^2} - Gm_3 F$$

を許す．ただし, $\alpha = m_3/M, M = m_1 + m_2 + m_3, 0 \leq \alpha \leq 1$ である．

注意.

1. T, I および $\tilde{I}$ の次元は 15, 8 および 6 である．もとの方程式 (1) は T の次元に対応して 12 次元相空間ベクトル場プラス 3 つの質量パラメータの記述する．還元された方程式 (2) は 2 つの質量パラメータ付きの 4 次元相空間のベクトル場を記述する．これは $\tilde{I}$ に応ずる．

2. 負エネルギー $(h < 0)$ の場合, m_1 と m_2 の運動は

$$x < \frac{G(m_1 + 4m_3)}{4|h|}$$

によって限られている．二体衝突 $(x = 0)$ の繰り返しが起こる．これらはエネルギー積分, 曲線 $x(t)$ の凹性 $(d^2x/dt^2 = du/dt < 0)$, および二体衝突の特異性は除去可能であること, から出る．(正則化については以下参照.)

3. y 軸上の m_3 の運動は有限回または無限回の syzygy 交差 $(y = 0)$ を生じる．前者は有限回の振動の後のエスケープ (または三体衝突) を意味し, 後者は永遠の振動運動を意味する． これは曲線 $y(t)$ が $y > 0$ または $y < 0$ に応じて凹または凸であること $(d^2y/dt^2 = dv/dt < 0$ または $d^2y/dt^2 = dv/dt > 0)$ から出る．重要な帰結として, これは IIB 節で利用するが, (三体衝突解を除いて) すべての解が少なくとも 1 回 syzygy 交差を起こす.

A. ハミルトン定式化

方程式 (2) は, $q_1 = x, q_2 = y, p_1 = u, p_2 = \alpha v$ を導入するとハミルトン形式になる．次の正準方程式が得られる．

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

ここで

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\alpha}\right) - \frac{Gm_1}{4q_1} - \frac{GM_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

ハミルトン関数はエネルギー積分に等しい．すなわち, $H = h$.

運動方程式 (3) は二体衝突 $(q_1 = 0, q_2 \neq 0)$ において特異である．しかし, 二体衝突の特異性は真性でなく, さまざまな正則化技術により取り除き得る．ハミルトン形を保持するために, 拡張された相空間において以下のような正則化を採用する．まず正準変換

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2$$

を導入する．$W = p_1 Q_1^2 + p_2 Q_2$ は母関数である．これからハミルトン系

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

が得られる．ここで

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{4Q_1^2} + \frac{P_2^2}{\alpha}\right) - \frac{Gm_1}{4Q_1^2} - \frac{GM_3}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}. \tag{5}$$

この新変数のもとで，(Q_1, P_1) を連星の状態ベクトル，(Q_2, P_2) を第三体の状態ベクトルと解釈することができる．

新たな変数 $Q_0 = t, p_0 = -h$ および $d\tau = dt/Q_1^2$ を導入すると，

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_i}, \quad i = 0, 1, 2 \tag{6}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned}\Gamma = &\ Q_1^2(P_0 + H) \\ = &\ \frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{4} + \frac{P_2^2 Q_1^2}{\alpha}\right) - \frac{Gm_1}{4} - \frac{GM_3 Q_1^2}{\sqrt{Q_1^4 + Q_2^2}} + P_0 Q_1^2\end{aligned}$$

が拡張された相空間における新しいハミルトン関数である．軌跡に沿って $\Gamma \equiv 0$ であること，また $dQ_0/d\tau = Q_1^2, dP_0/d\tau = 0$ であること，したがって $Q_0 = t, P_0 = -h$ であることに注意する．方程式 (6) は二体衝突 $(Q_1 = 0, Q_2 \neq 0)$ において正則である．二体衝突のこの正則化は Levi-Civita[35] の正則化の 1 次元版である．

上で定式化された拡張された相空間において，時間 t とエネルギー h は相空間を拡張するために使われた．こんどは時間とエネルギーを使って相空間を還元することが可能であることを示そう．

ハミルトン関数 (5) はエネルギーに同値であるから，

$$H(Q_1, P_1, Q_2, P_2) = h \tag{7}$$

が成り立つ．陰関数定理より，$\partial H/\partial P_2 \neq 0$ なら (7) 式から

$$P_2 = -K(Q_1, P_1, Q_2, h) \tag{8}$$

の存在が言える．(7),(8) 式より，

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{\partial H}{\partial P_2}\frac{\partial K}{\partial \beta} = 0 \tag{9}$$

が軌道に沿って成り立つ．ただし，$\beta = P_1, Q_1$ または Q_2 である．(9) 式で $\beta = P_1$ および Q_1 として還元されたハミルトン系

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{\partial K}{\partial P_1}, \quad \frac{dP_1}{dQ_2} = -\frac{\partial K}{\partial Q_1} \tag{10}$$

に至る．ただし, H の偏微分は (4) 式から代入した．還元されたハミルトン関数は新しい独立変数 Q_2 に明示的に依存すること, またよく知られた式

$$\frac{dK}{dQ_2} = \frac{\partial K}{\partial Q_2},$$

が (9) 式で $\beta = Q_2$ として得られることを指摘しておく．この還元法を使って, 以下の節で導入する写像のいくつかの性質を確立する．

B. 2 次元写像への還元

式 (4) は 4 次元相空間内のベクトル場を記述する．初期条件がある固定したエネルギーに制限されるなら, (7) 式を解いて (8) を

$$P_2 = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{2Q_1} \left(8hQ_1^2 + 2Gm_1 + \frac{8Gm_3Q_1^2}{\sqrt{Q_1^4 + Q_2^2}} - P_1^2 \right)^{1/2} \tag{11}$$

とあからさまに書ける．エネルギーを固定した運動状態の部分多様体は 4 次元ユークリッド空間に埋め込まれた 3 次元実多様体である．この多様体は

$$8hQ_1^2 + 2Gm_1 + \frac{8Gm_3Q_1^2}{\sqrt{Q_1^4 + Q_2^2}} - P_1^2 \geq 0$$

で定義される 3 次元領域でのみ存在する (つまり P_2 は実数となる)．規格化の単位を

$$G = 1, \quad 2(m_1 + 4m_3) = 1, \quad -8h = 1,$$

と選ぶと, 可能な運動がポアンカレ断面 ($Q_2 = 0$ で定義される平面) と交わる条件として $Q_1^2 + P_1^2 \leq 1$ が得られる．$Q_1 \geq 0$ とすると, これは半径 1 の閉半円領域である．この領域のどの点 (Q_1, P_1) も, $Q_2 = 0$ および (11) 式から計算される $P_2 \geq 0$ を持つ一意の初期条件を表す．$Q_1 \geq 0$ および $P_2 \geq 0$ を仮定することは初期条件に何ら制限を課すものではない．なぜなら, 微分方程式 (4) は反転 $(Q_1, P_1, Q_2, P_2) \to (-Q_1, -P_1, Q_2, P_2)$ および $(Q_1, P_1, Q_2, P_2) \to (Q_1, P_1, -Q_2, -P_2)$ に関して不変だからである．

さて境界を消去して可能な運動領域の部分集合を定義しよう．境界

$$B_c = \{(Q_1, P_1) | Q_1 = 0, -1 \leq P_1 \leq 1\}$$

を取り除く．ここでは解が三体衝突から出発する．(この集合の詳しい議論は補遺を見よ.) われわれはまた境界

$$B_h = \{(Q_1, P_1) | Q_1 \geq 0, Q_1^2 + P_1^2 = 1\}$$

も取り除く．ここで $P_2 = 0$ は, m_3 が m_1 と m_2 の重心にずっと留まることを意味する．これは直線ホモセティック解である．すなわち, B_h 上の解は, $Q_2(t) = P_2(t) = 0$ を保って P_1 が減る方向に**流れる**.

残りの開集合

$$A = \{(Q_1, P_1) | Q_1 > 0, Q_1^2 + P_1^2 < 1\}$$

はほとんどすべての解を含む．なぜなら, 上の注意にしたがえば, ほとんどすべての軌跡は少なくとも 1 回 syzygy を横切る $(Q_2 = 0)$ からである．A から出発する解は, m_3 がエスケープしたり三体衝突を起こさない限り, 次の syzygy 交差のときに A の他の点に戻ってくる．このことは 2 次元写像 $f : \bar{A} \to A$ と見ることができる．ここで $\bar{A}$ はエスケープも三体衝突もしない点の集合である．$A_e \subset A$ を m_3 がエスケープする部分集合とし, $A^* \subset A$ を三体衝突にいたる部分集合とする．すると, $\bar{A} \subset A$ は $A_e \cup A^*$ の補集合と定義される．

与えられた点 $p_0 = (Q_1, P_1)_0 \in \bar{A}$ に対し, $f(p_0)$ を次の syzygy 交差における点 $p_1 = (Q_1, P_1)_1$ によって定義する．だから f はある特定の syzygy 交差における連星の状態を(もしあれば) 次の syzygy 交差における連星の状態へと写像する．三体衝突の真性特異性のため, 初期条件に関する微分方程式の解の連続性は $p \in A^*$ に対しては成り立たない．ゆえに写像は連続でなく, A^* の上では定義されていない．しかし, 極限的な意味でこのような点は境界 B_c に写される．つまり, $f : A^* \to B_c$ である．境界 B_c はわれらがポアンカレ断面と二等辺三体衝突多様体との交点である (補遺を見よ).

f の繰り返し (つまり, $f^n(p), n = 1, 2, 3, \ldots$) のもとで, 任意の点 $p \in A$ の前進像は A 内の有限または無限点列である．有限列の場合, 最後の点 p はエスケープ $(p \in A_e)$ へ導くのかまたは三体衝突 $(p \in A^*)$ へ導く．同様に, f^{-1} の繰り返しのもとで, 後退軌道が定義される．

還元された方程式のハミルトン形式 (10) より, 相平面 (Q_1, P_1) の任意の局所領域の面積は, Q_2 が変わっても不変である．とくに, 任意の $Q_2 = 0$ に対して不変である．写像のヤコビ行列を Df と表すと, 上のことは, f が局所的に面積保存であること $(\det Df = 1)$ を意味し, Df の固有値が逆数ペア $(\lambda_1 \lambda_2 = 1)$ であることがわかる．

不幸なことに, 一般に, この場合もそうだが, ポアンカレ写像は解析的に定義されず, 運動方程式 (6) を数値積分することで得なければならない．(計算の詳細については III 節と見よ.) f を多数回繰り返し, また初期値を多数取ることにより数値的に得られたポアンカレ写像は文献に多数見られる．後で見るように, 点列が規則的に並ぶような場合にはその手法は殊に有用である．ところが, ここでは, 点というよりは領域の写像として問題を捉える．これにより, 幾何学的な形で写像を大域的に表現できる．

注意.

1. 二等辺配置の中には syzygy 配置を取らない 2 つの型の解があり, これらは上の写像では表現することができない．まず, 第三体が無限遠から来て, 三体衝突に直接向かう場合である．これは**捕獲–三体衝突** (あるいは時間を逆転して, 三体放出–エスケープ) である．もうひとつは三体放出–衝突軌道である．これも syzygy 線を横切らない．例としては, 正三角形ホモセティック解がある．どちらの場合も, 二等辺相空間内で測度ゼロの集合からなるし, 軌道のタイプは簡単に特徴づけることができる．

2. スケール変換により, 任意の負エネルギー値は $h = -\dfrac{1}{8}$ に規格化できる．だから, h を固定して計算しても, h の如何によらず, 負エネルギーの場合を表現する．

3. 今回のハミルトン定式化からは制限問題 $(\alpha = 0)$ を扱えない．これはハミルトン定式化のせいであり, (5),(11) から明らかである．

4. 上記写像は以下のパラメータを持つ: 重力定数 (G), エネルギー (h), 2 つの質量パラメータ (m_1, m_3). 質量, 長さ, 時間の単位を選ぶと, G, h および質量パラメータ (m_1+4m_3) が決まる. 質量パラメータがひとつ残る. それを α と書いて自由パラメータとする. こうして, α をパラメータとする 1-パラメータ写像族が得られた. 本論文で記述するのは $m_1 = m_2 = m_3$, つまり $\alpha = \dfrac{1}{3}$ の場合である. 別の場所 [36] では, $0 < \alpha \leq 1$ をパラメータとして f の位相分類の**分岐集合**を得る問題を議論する.

3 計算法

大域的写像としての f の性質を調べるために, 面積がどのように変換されるかを考える必要がある. だが, 計算上は, 単一の点のふるまいを精密に決定できるだけである. 大域的な性質を記述するために, A 内の $(Q_1, P_1) = (m\delta, n\delta)$ の形の格子点を調べた. 今回は $\delta = 0.005$ と置いた. 格子点の数は 62,605 個であった. 各格子点に対して, 次の syzygy 交差まであるいは m_3 のエスケープの検出まで, あるいは予め決めた刻み数までの単一の数値積分を行なった. たいていの点の場合, syzygy 交差までの時間が一番短い (数回の二体衝突の間) か, あるいはエスケープの判定が早かった. このような場合, 積分は非常に短く, 数値精度の問題は起きなかった.

しかし, 原理的には, 数値計算上挑戦的な問題を引き起こすタイプの軌道もある. まず, 三体衝突の近くを通過する軌跡は高速度かつ高加速度を経験する. このため, 数値誤差 (丸め誤差) を小さくするために刻み幅を変える積分子が必要となる. 本研究を遂行するにあたって, 問題となる初期条件の数は少ないので, 結果全体の統一性を乱すほどではなかった. (以下の統計を見よ.) 殊に, 三体近接衝突に続くエスケープ現象はたいへん頑丈であって, 数値誤差は最終状態に影響を与えないであろう. 第二に, 第三体の軌跡が放物線に近い軌道は本質的に計算不能である. なぜなら, このような軌道を計算するには, エスケープを検出する以前あるいは m_3 が sizygy に戻ってくる前にたくさんの積分刻みが必要だからである. さらに, 第三体が遠くにあって非常に小さな外向き速度 (近放物線の) を持つとき, 軌道は非常に敏感である. 実際, 少しでも数値誤差があると, syzygy への回帰の前の二体衝突の数が変わってしまったり, 軌道が放物線からずれてしまって計算自体が無意味になってしまう. このことは次節でもっとはっきりする. 次節では放物エスケープの近くの点を記述する (図 2).

エスケープに関しては 2 つのテストを行なう. ひとつは Standish の判定条件 [37] であり, もうひとつはその修正版 [38] であり, 後者により, かなり早くエスケープが判定できる. この修正は Sundman 関数 [6] に基づくものであり, Birkhoff のエスケープ判定条件 [5] を使って Zare[11] が最初に示した.

計算プログラムが計算限界 (エスケープ, syzygy 交差, 刻み数限界) まで来たら, 積分子は時間を逆転させて, 出発地点に戻る. 初期値と帰って来た初期値との距離は積分の数値精度の目安と考えられる.

これらのテストに対して, Runge-Kutta-Fehlberg 7(8) 積分子を使った. 許容度は 10^{-14} とし, 10^4 刻みの後に積分をやめた. 62,605 個の格子点のうち, 3 個を除いて, 配位空間で 10^{-8} 以内に戻ってきた. 平均距離は 10^{-14} より小さかった. 266 個 (0.4%) が (放物

線軌道に近くて) 計算不能, このうち 3 分の 1 以上は非エスケープ軌道 (積分の終りに $P_2 < 0$) であった. 本研究の大域性からすると, 計算性能は目的にとって十分ふさわしい.

図 2

4　力学の大域的記述

$\bar{A}$ の各点に非負の整数を割り当てる. それは次の syzygy 交差までの二体衝突の数である. これにより, A は部分集合 A_k に分割される. 各部分集合に属する点は同じ k を持つ (図 2 を見よ). 加えて, A_e の点すべてに $k = \infty$ を割り当てる. この集合は m_3 がエスケープにいたる軌道の初期値集合である. 記法 A_k は $k < \infty$ のためだけに使うことにする. A_k と A_{k+1} を分けるのは, k 回の二体衝突の後に三体衝突にいたる点の集合 B_k である. 言い換えると, この境界の近くでは, 次の syzygy 交差までに $(k+1)$ 個の二体衝突を経験する点は A_{k+1} に属する. 次の syzygy 交差の直後に $(n+1)$ 個の二体衝突を

経験する点は A_k に属する．境界点 B_k は次の syzygy 交差のときが $(k+1)$ 回目の二体衝突である．つまり三体衝突である．

$k \geq 2$ の場合, これらの境界は A_∞ の境界に集積する．これは $k \to \infty$ のとき A_k の面積がゼロに向かうことを示す．A_∞ の境界を B_∞ と書くことにする．これは m_3 が放物的にエスケープする点の集合である．この記法のもとで, 以下が成り立つ

$$A_e = A_\infty \cup B_\infty,$$

$$A^* = \cup_{k=0}^{\infty} B_k,$$

$$\bar{A} = \cup_{k=0}^{\infty} A_k,$$

$$A = \bar{A} \cup A_e \cup A^*.$$

上式で, 無限和は非負の整数のわたる和を意味するので, 極限集合 A_∞, B_∞ を含まない．

A_k の定義より, 任意の $p^* \in A_k$ に対して, $f(p^*)$ は B_c 上にない．f は $\bar{A}$ 上で連続であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $p \in \mathbf{B}_\delta(p^*) = \{p \in \bar{A}, |p - p^*| < \delta\}$ なら $f(p) \in \mathbf{B}_\varepsilon(f(p^*))$ が成り立つ．ε を十分小さく選んで $\mathbf{B}_\varepsilon(f(p^*))$ が B_c と交わらないようにすれば, すべての $p \in \mathbf{B}_\delta(p^*)$ に対して, 二体衝突の数 k は変わらない, つまり, $\mathbf{B}_\delta(p^*) \in A_k$ である．これで, すべての A_k が正測度の開集合であることが証明された．

さて $f(A^*) \subset B_c$ であり, A^* はその補集合が開であるから閉集合である．A^* の像は B_c 上にあり, B_c は測度ゼロであるから, f が面積保存であることより, A^* も測度ゼロである．同様な議論を微分方程式 (10) に使えば, A_∞ が正測度を持つ開集合であること, B_∞ がゼロ測度の閉集合であることが言える．

A_k の面積は k 個の二体衝突の確率測度として使えそうである．任意の集合 $\tilde{A} \subset A$ の測度 μ を次のように定義する:

$$\mu(\tilde{A}) \doteq \frac{\text{area of } \tilde{A}}{\text{area of } A}$$

表 I は大きい方から 8 番目までの測度を表にしたものである．$1 \leq k \leq 50$ に対する測度の log–log 図によると, $\mu(A_k) \sim Ck^{-\beta}$ が崩壊測度をうまく表現する (図 3 を見よ)．定数は $C \simeq 0.1017, \beta \simeq 1.650$ である．この近似はすべての k へと外挿できると思われる．これによると, A_k の面積は k が増えると単調に減少する．

表 I. 大きい方から 7 番目までの
A_k の確率測度

k	$\mu(A_k)$
∞	0.199
0	0.l51
1	0.527
2	0.0368
3	0.0168
4	0.0102
5	0.00703
6	0.00516

図 3 を貼る

f の下での A_k の像を決定するために, 微分方程式 (10) が反転 $(Q_1, P_1, Q_2) \to (Q_1, -P_1, -Q_2)$ に関して不変であることに注意する. $p \in A$ を初期条件とする (10) の解を

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = g(p, Q_2)$$

と表すと, 上記不変性は

$$g(\rho(p), -Q_2) = \rho(g(p, Q_2)), \tag{12}$$

を意味する. ここで Q_1 軸に関する反転 ρ は

$$\rho(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} p$$

と定義される. したがって, p の反転の後退軌道は p の前進軌道の反転と同じであり, p の前進軌道として二体衝突の数は同じである. とくに, p の軌道が m_3 のエスケープ $(p \in A_e)$ に対応するなら, $\rho(p)$ の軌道は m_3 の捕獲に対応する. p の軌道が三体衝突で終る $(p \in A^*)$ なら, $\rho(p)$ の軌道は三体衝突からの放出軌道である.

任意の $p \in \bar{A}$ に対して, 最小の後時刻 t^+ が存在して $Q_2(t^+) = 0$ であり, f の下での p の前進像は $f(p) = g(p, Q_2(t^+))$ で定義される. 同様に, $\rho(p) \in \bar{A}$ なら最大の前時刻 t^- が存在して, $Q_2(t^-) = 0$ であり, f の下での p の後退像は $f^{-1}(p) = g(p, Q_2(t^-))$ で定義される. これらの定義からすると, (12) は

$$f^{-1}\rho = \rho f, \tag{13}$$

を意味し, これから帰納法により

$$f^{-n}\rho = \rho f^n, \tag{14}$$

を得る.

したがって, 任意の $p \in A_k$ に対して $\rho f(p) \in A_k$ または $f(p) \in \rho(A_k)$ が成り立つ. ただし, $\rho(A_k)$ は Q_1 軸に関する A_k の反転を意味する. つまり, **任意の面積 A_k の f の下での像は Q_1 軸に関するその反転である**:

$$f(A_k) = \rho(A_k). \tag{15}$$

A_k が Q_1 軸に関して対称なら $\rho(A_k) = A_k$ であり, $f(A_k) = A_k$ が成り立つ. つまり A_k は f のもとで不変である: すべての n に対して $f^n(p \in A_k) \in A_k$. 図 2 からわかるように, どの A_k も Q_1 軸に関して非対称であり, Q_1 軸を横切る. このことから, 以下の性質が出る.

—- 非対称性より, ある j に対して $f(A_k) \cap A_j \neq \emptyset$. だから, A_k は不変でない.
—- Q_1 軸と**交差**することから, $f(A_k) \cap A_k \neq \emptyset$. これは A_k に不変部分集合が存在するための必要条件である (A_k が開であることを思い出そう). 十分条件ではない.

A_k のこの幾何学的性質はカオス的ふるまい (IV.A 節を見よ) と安定なふるまい (IV.D 節を見よ) が共存するために必要な材料である.

図 4

(15) 式は写像を大域的に記述するために使える. 図 4 を見よ. この幾何学的表現は以下の性質を明らかにする.

- $f(A_k) \cap A_j \neq \emptyset$ が, $(k = 0, j = 0, 1)$, $(k = 1, j \geq 0)$, および $(k \geq 2, j \geq 1)$ に対して成り立つ. A_0 の点は A_0 と A_1 にのみ写るが, A_1 の点は任意の A_k に写る.
- $f(A_k) \cap A_\infty \neq \emptyset$ が, $k \geq 1$ に対して成り立つ. 次の syzygy 交差の後で m_3 がエスケープする集合が存在するのはこの性質による.
- $\rho(B_k) \cap B_j \neq \emptyset$ が, $(k = 0, j = 0)$ および $(k \geq 1, j \geq 1)$ に対して成り立つ. (12) 式より, B_k の反転内の任意の点の後退軌道は三体衝突にいたる. したがって, 1 回だけ syzygy を通過して, 三体衝突に始まりかつ終る軌道が無数にある.

$\mu(f(A_k) \cap A_j)$ を, k 個の二体衝突の次に j 個の二体衝突が続く軌道の確率測度として使うことができる. もっと一般に, 集合

$$A_s = \cap_{i=m}^{n} f^{-i}(A_{k_i}) \tag{16}$$

を考える. ただし, 添字 s は k の特定の列

$$s = k_m, k_{m+1}, \ldots, k_{-1}.k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n$$

である. すなわち, A_s は f のもとでの A_k の特定の列をたどる点集合である. ゆえに, $\mu(A_s)$ は列 s にともなう確率測度として使える.

この記法の下で, 少数点の直後の添字 (定義の中の k_0) は集合 $(p \in A_{k_0})$ 内の点の現在位置を示す. それより右の添字は, f の前進写像のもとで通過する A_k の列を記述し, 左

の添字は, f の後退写像のもとで通過する A_k の列を記述する. しかし, 注意する必要があるのが, 添字 m と n は $m < n$ なる要請を満たすべしという制限だけであることである. m と n は同じ符号であってもいい. この場合, 少数点は列に含まれない. 記法は, エスケープや三体衝突に始まったり終ったりする軌跡を含むように拡張することは可能である (IV.E 節を見よ).

この記法は, f や ρ を集合に作用させるときにことに便利である. 例として特別の集合

$$A_{5,4,3,2,1} = f^2(A_5) \cap f(A_4) \cap A_3 \cap f^{-1}(A_2) \cap f^{-2}(A_1)$$

を考えよう. 定義より $f(A_{5,4,3,2,1}) = A_{5,4,3,2,1}$ が成り立つ. つまり, f は少数点をひとつ右へずらす効果を持つ. 同様に, f^{-1} は少数点を左へ動かす. (14) と (15) を使うと, ρ は列を少数点のところで左右ひっくり返す効果を持つことを示すことができる. 実際,

$$\begin{aligned}\rho(A_{5,4,3,2,1}) &= \rho f^2(A_5) \cap \rho f(A_4) \cap \rho(A_3) \cap \rho f^{-1}(A_2) \cap \rho f^{-2}(A_1) \\ &= f^{-2}\rho(A_5) \cap f^{-1}\rho(A_4) \cap \rho(A_3) \cap f\rho(A_2) \cap f^2\rho(A_1) \\ &= f^3(A_1) \cap f^2(A_2) \cap f(A_3) \cap A_4 \cap f^{-1}(A_5) \\ &= A_{1,2,3,4,5}.\end{aligned}$$

これは重要である. というのは, ある特定の列を持つ集合の測度が逆の列を持つ集合と同じ測度だからである.

すべての列が現実の力学に反映されるわけではない. たとえば, あとで示すように $A_{0,1,1}$ は空である. これは, "0,1,1" を部分列として含む任意の列 s に対して, 集合 A_s が空であることを意味する. このような列は禁止 (forbidden) ブロックと呼ばれる. 反転すれば, "1,1,0" も禁止ブロックである.

注意. この設定では, 任意の点 $p \in A$ の軌道は写像を未来および過去へ繰り返し作用させることにより, 記号列として表現することもできる. この記号力学表現はIV.E 節で論じる.

(15) は大域的に意味を持つこと, そして A_k の部分集合に対しては一般に成り立たないことを強調しておく. しかし, f を完全に記述するには, A_k を分割し, f の下でのその像を得る必要がある. 以下に続く副節において異なる A_k に対してこれを議論する.

A. $k \geq 2$ の場合の大域的記述

$k \geq 2$ の場合, A_k は三日月形をしており, 両端は境界 B_c の 2 点に近づく (図 2 を見よ). A_k を部分集合 $A_{kj} = A_k \cap f^{-1}(A_j)$ に分割するのは自然である. これの像は $A_j, \forall j$ にある. この分割および f の下での対応する像は, f_2 に関して図 5 で示した. $k > 2$ の場合も像は同様である. この分割では, $f(A_k) \cap A_j,\ j \geq 1$ の前像は j の順に並んだ円周弧である. ただし, 境界 B_k に近い弧が $j = 1$ に対応し, 境界 B_{k-1} に近い弧は $j = \infty$ に対応する. このことから, エスケープは B_k の片側 (A_{k+1} 内) で起こり, もう一方 (A_k 内) では起こらない. 言い換えると, 三体衝突解の近くでエスケープが起こるのはsyzygy 交差が二体衝突後に起こった場合であり, 逆の場合ではない. これは Zare and Szebehely[30] が解析的に得た結果と一致する.

$A_k, j \geq 2$ への f の作用は幾何学的に 2 段階で記述できる. 最初の段階では, A_k とまったく同じ三日月が, 円周方向への非線形収縮とそれに続く半径方向への非線形拡大

によって得られる. 非公式に言えば, 元の三日月の頂点が新しい三日月の辺となり, 元の三日月の辺が縮んで新しい三日月の頂点となる. 第二段階では, この新しい三日月を Q_1 軸に関して A_k の反転となるように置く. これらの作用により, A_k の円周弧は A_k の反転の動径弧になり, 動径弧は円周弧になる. f は面積保存であるから, 円周弧はいつも対応する動径弧より長くかつ薄い.

図 5,6

$A_k, k \geq 2$ すべてへの f の作用を示すために, 集合 $S_M = \sum_{k=2}^{M+1} A_k$ を考える. ここで $M \geq 1$ は (任意に大きな) 整数である. この時点で記法 $S_\infty = \lim_{M\to\infty} S_M$ を導入しておく. これは後で使う. さて, $f(S_M) \not\subset S_M$ であるが ($f(S_M)$ は A_∞ とも a_1 とも交わるから), $f(S_M)$ は M 個の動径線において S_M と交わる:

$$R_i = f(S_M) \cap A_i, \quad i = 2, 3, \ldots, M+1.$$

これらはそれぞれ $A_j \subset S_M$ に含まれる. 各 R_i の像も同様に M 本の動径弧で S_M と交わる. だから, $f(f(S_M) \cap S_M) \cap S_M$ は M^2 個の動径線からなる. すなわち,

$$R_{ij} = f(R_i) \cap A_j, \quad i, j = 2, 3, \ldots, M+1.$$

もうひとつ段階を進めると, M^3 個の動径線

$$R_{ijk} = f(R_{ij}) \cap A_k, \quad i, j, k = 2, 3, \ldots, M+1,$$

となり, 以下同様である. 図 6 は模式図である. 極限では, このプロセスにより, カントール集合と動径方向の区間の積が得られる. その上, この集合は後退軌道が S_M 内にとどまる点集合

$$\Lambda_M^- = \{p | f^{-n}(p) \in S_M, \forall n \geq 0\},$$

と同一視できる. 同様の議論により, 前進軌道が S_M にとどまる点集合

$$\Lambda_M^+ = \{p | f^n(p) \in S_M, \forall n \geq 0\},$$

がカントール集合と円周方向の区間の積であることを示すことができる. 前進および後退軌道がともに S_M に含まれる点の集合は, 交わり $\Lambda_M = \Lambda_M^- \cap \Lambda_M^+$ である.

少数の違いを除いて, 部分集合 S_M 上の f の幾何学的記述は Smale[15] による古典的馬蹄に似ている. Smale の馬蹄写像の場合と同様, 集合 Λ_M は M 個の記号上の双無限列の集合に同相である. これを Σ_M と表す. ($h : \Lambda_M \to \Sigma_M$ が同相写像.) その上, Λ_M に制限した $f(f_{\Lambda_M} : \Lambda_M \to \Lambda_M)$ と Σ_M 上の推移写像 $(\sigma : \Sigma_M \to \Sigma_M)$ は

$$h(f(p)) = \sigma(h(p)), \ \forall p \in \Lambda_M,$$

によって共役である. 列空間および推移写像 σ の詳しい記述に関しては IV.E 節を参照して欲しい. そこでは記号力学を議論する. またカオス力学系の教科書 [40,41] も参照して欲しい.

簡単に示せるように, 推移写像は無数の周期点を持ち, それらは Σ_M 内で稠密集合であり, また推移写像は位相推移的 (つまり, Σ_M 内に σ の稠密軌道が存在する) である. h の下で位相共役であることは同値な力学を意味するから, f の周期点は Λ_M において稠密であることがわかる. また f は Λ_M 上で位相推移的であること, つまり, Λ_M は f の下で分解不可能であることが言える.

図 7,8

Λ_M 上ではこの面白いカオス力学が成り立つが, Λ_M がカントール集合であること, つまり, 完全不連結 (開集合を含まない) であって, 測度ゼロであることに注意しよう. 言い換えると, f の繰り返しの t 下で, S_M 内のほとんどどの点もいずれは S_M から出ていく. 事実, どの点 $p \in S_M \backslash \Lambda_M$ に対しても, p の前進軌道, 後退軌道, あるいは両方向軌道は次の領域のどれかひとつに入る: $D_1 = A_1, D_2 = A_\infty, D_3 = \cup_{k=M+2}^{\infty} A_k, D_4 = A^*$, および $D_5 = B_\infty$.

前進方向の各行き先 D_j に対応する部分集合 $E_f \subset S_M$ は

$$\begin{aligned}&\phi_j^{(0)} = D_j,\ j = 1, 2, 3, 4, 5,\\ &\phi_j^{(m)} = S_M \cap f^{-1}(\phi_j^{(m-1)}),\\ &E_j = \cup_{m=1}^{\infty} \phi_j^{(m)},\end{aligned}$$

によって定義される．容易に示せるように, 各 E_j は $j = 1, 2, 3$ に対する素な円周弧の和であるか, $j = 4, 5$ に対する曲線の和である．ゆえに, $E_j (j = 1, 2, 3)$ は正測度の開集合である．しかし, E_3 の測度は M をふやすことにより, いくらでも小さくできる．

同様に, 後退方向の各行き先に対応する部分集合 $C_j \subset S_M$ は

$$\begin{aligned}&\psi_j^{(0)} = \rho(D_j),\ j = 1, 2, 3, 4, 5,\\ &\psi_j^{(m)} = f(\psi_j^{(m-1)}) \cap S_M,\\ &C_j = \cup_{m=1}^{\infty} \psi_j^{(m)},\end{aligned}$$

で定義される．この場合, 各 C_j は動径弧 $(j = 1, 2, 3)$ または曲線 $(j = 4, 5)$ の和である．

$\cup_{j=1}^{5} E_j \cup \Lambda_M^+$ は円周弧と曲線による S_M の被覆であることに注意しよう．円周弧と動径弧は交わるから, S_M の点はこれらの前進方向および後退方向の行き先に基づいて 36 個の部分集合に分類される．

これらの部分集合の存在はさまざまな型の運動の存在を意味する．たとえば,

- $C_2 \cap E_2$ は m_3 の**捕獲–エスケープ**に対応する．これは開集合で正測度を持つ．
- $C_2 \cap \Lambda_M$ は m_3 の**永劫捕獲**を表す．これはカントール集合と円周方向の部分区間の積である．測度はゼロである．この型の運動が存在することまた測度がゼロであることは Alekseev[42] および Moser[17] が簡単な Sitnikov 問題においてすでに議論している．
- $C_4 \cap E_4$ は**放出–衝突**軌道に対応する．このゼロ測度集合は, 無数の孤立点からなる．これらは syzygy 交差を 2 度以上経験する放出–衝突軌道である．ただ一度 syzygy 交差する放出–衝突軌道は上で示した．この型の軌道は Broucke[24] が発見した．三体衝突多様体上の軌道を使って, 別の仕方でその存在を示したのが Devaney[25] である．

他の型の軌道, たとえば捕獲–三体衝突, 放物捕獲–放物エスケープなど, に対応する集合も簡単に見つけることができる．任意に大きな M を仮定すると, これらのうち 4 つだけ, $C_1 \cap E_1$, $C_1 \cap E_2$, $C_2 \cap E_1$, $C_2 \cap E_2$, が有意な測度を持つ．これらの内最後の集合では, 点が過去か未来に一度でも S_M の外に出るともう戻って来ない．実際, このような軌道は, $\rho(A_\infty)$ の最初の点と A_∞ の最後の点を除いて S_M 内で有限点列として表される．これらの部分集合の最初の 3 つでは, 軌道はいずれは時間の片方あるいは両方の方向で, S_M から A_1 に写される．したがって, A_1(および A_0) 上の f の幾何学的表現はひとつの軌道全体を記述するために必要である．

B. $k \geq 0, 1$ の場合の大域的記述

集合 A_0 と A_1 は $A_k, k > 1$ と違って三日月型をしていない(図 2 を見よ)．ゆえに, 違ったふるまいが期待される．前節と同様の大域的な記述をするために, A_0 と A_1 をその像の位置に応じて部分集合, すなわち, $A_{.0k}$ や $A_{.1k}$ の形のものへと分割する．これら集合

およびその像 $A_{0.k}$ および $A_{1.k}$ は図 7 に示した. 簡単のため, 本副節では, 図は S_∞ をひとつの分割として示した. 同様に, A_0 と A_1 をその前像の位置に応じて $A_{k.0}$ および $A_{k.1}$ の形の集合に分割することができる. これらの集合およびその像 $A_{k,0.}$ および $A_{k,1.}$ は図 8 に示した. 図 8 は, 図 7 を Q_1 軸に関して折り返し, 写像の方向を変える ((13) 式にしたがって) ことによって簡単に得ることができる.

図 9,10

この 2 つの異なる分割を重ねると, 前像および像の位置で特徴づけられる部分集合への細かい分割が得られる. この分割 ($A_{j.0,k}$ と $A_{j.1,k}$) と f の下でのその像 ($A_{j,0.k}$ と $A_{j,1.k}$) を図 9 に示した. これらの図からいくつかの性質が出る.

—- A_1 の分割には空の交わりがいくつかある. これらは禁止ブロックの存在を指し示す. $A_{i.1,j} = \emptyset (i = 0,\ j = 0, 1)$ が成り立つ. これは, ブロック"0,1,0" と"0,1,1" が禁止であることを意味する (折り返しにより, “1,1,0” も禁止). さらに注意深く解析すると, “0,1,i” と"i,1,0" が $i < 8$ のとき禁止であることがわかる.

—- 同様にして, A_0 の分割より, “0” を中央に含む許容 3 ブロックは “0,0,0”, “0,0,1”, “1,0,0” および"1,0,1" であることを決めることができる. 言い換えると, A_0 の点は A_0 または A_1 と行ったり来たりするだけである (確率ゼロで B_0 ともやりとりする).

—- 図 9 には相対的に小さな部分集合と大きな部分集合を認めることができる. 小さな部分集合がたくさん $(Q_1, P_1) = (0, -0.75)$ の近くに位置する. これは “i,1,j”($i \geq$

$2, j \geq 2)$ の形のブロックが小さな確率で存在することを示す. 集合 $A_{1,1,1}, A_{0,1,\infty}$ および $A_{\infty,1,0}$ の測度が大きいことから, これらのブロックが頻発することがわかる. 幾何学的な表現を使うと, 禁止ブロックがわかるばかりでなく, 許容ブロックの測度もわかる.

さらなる重なりを見ると, 3 桁より長いブロックの情報が得られる. たとえば, 図 7(a) と図 9(b) を重ねると, 4 桁のブロックの情報が出る. この分割からわかる重要な結果として, 2 つ以上のゼロの並びの後 (あるいは前) には"0" か"1" が続き, その後 "∞" が続くことが挙げられる. すると, 結論として, 2 つ以上のゼロを持つ任意の列は"$\infty, 1, 0, \ldots, 0, 1, \infty$" の形をしており, 捕獲–エスケープ軌道である. 相続くゼロの数が無限に近づくにつれて, 軌跡は極限において直線ホモセティック解となる. 上で述べた性質と併せると, A_0 のどの点も, いずれは $A_0 \cup A_1$ を出て行く.

C. 規則性およびカオスへの分割

A 内の領域のうち, f の前進および後退像において捕獲および/またはエスケープするものを見分けることは重要である. これは図 10 で説明した. 時間の進展とともに, 捕獲, エスケープ, 捕獲–エスケープ領域が広がって行くことを示す列がプロットされている. 捕獲領域 (青) は初期捕獲領域 ($f^n\rho(A_\infty)$, $n = 0, 1, \ldots, 5$) の相続く前進 iterate の計算で得た. エスケープ領域 (緑) は捕獲領域の折り返しである ($f^{-n}(A_\infty) = \rho f^n \rho(A_\infty)$, $n = 0, 1, \ldots, 5$). これは (14) から出る. 捕獲–エスケープ領域 (赤) は単純に, 捕獲領域とエスケープ領域の交わりである.

"S_∞" と行ったり来たりする領域, つまり, 未来あるいは過去に S_∞ に入る点の集合, を同定することも重要である. 図 10 で, 過去に S_∞ に入る (未来には S_∞ を出て行く) 点は青色であり, 未来に S_∞ に入る点は黄緑に塗ってある. 過去にも未来にも S_∞ に入る点は桃色である.

図 10 より明らかに, ほんの少しの写像回数で独特な相図が出現し, 写像の回数を増やしても大域的描像は変わらない. 図 11 は図 10 の列の次の iterate を拡大したものである. 図 11 には 3 つの異なる領域がある. 赤領域, まだら領域, 白領域である.

赤領域では, どの点も, 相続く syzygy 交差の間に 1 回以下の二体衝突を経験する捕獲–エスケープ軌道である. これらの軌道にともなう列の形は, "∞, ∞","$\infty, 1, \infty$","$\infty, 1, 1, \infty$", "$\infty, 1, 0, 1, \infty$","$\infty, 1, 0, 0, 1, \infty$", 他である. 間にどんどん 0 が入る. このような軌道は決して S_∞ に入らず, A_1 に入るのはエスケープするためにだけである. 実際, 未来または過去に逃げる直前に最初の二体衝突を行う. だから, これを「高速」あるいは「非共鳴」散乱領域と呼ぶことにする. Hietarinta and Mikkola[23] が使った横断面交差回数の計算法は誤解を招きやすいことを指摘しておく. なぜかというと, これらの解に対して, エスケープまでの時間は軌道の列の長さに応じないからである. エスケープの前に任意に大きな数だけの syzygy 交差が起こる場合もあり得るけれども, エスケープは最初の二体衝突の直後に起こる. さらに, まだら模様の領域にたくさんの軌跡がある. たとえ syzygy 交差の数が少ないとしても, これらはカオス散乱すると分類されるべきである.

IV.A 節で議論したカントール構造の最初のステージはまだら領域全体から容易に見てとれる. 準周期点が混じってはいるが, これをカオス領域とよぶ. カオス領域は大きく, A_1 と行ったり来たり (communicate) する軌道とそうでない軌道に分けることがで

きる．どちらの部分分割内にも, 測度の小さな (往復しない集合の場合には測度ゼロ) 軌道の集合があって, 過去または未来方向あるいは両方向にカオス的に有界にとどまる．またどちらにも, 測度の大きな (往復しない集合の場合は全測度) の捕獲–エスケープ軌道の部分集合がある．これらの軌道はカオス散乱すると同定される．往復集合だけが安定な周期軌道およびそれに付随する安定領域を持ち得る．何故かというと, ずっと S_∞ にとどまる軌道集合, すなわち, IV.A 節で議論したカントール集合は双曲線集合を形成するからである．非双曲性が S_∞ で生じるのは A_1 との往復を通してのみである．例を示すために, 列"$\ldots, 5, 1, 1, \ldots$" に対応する安定 3 周期軌道を見つけ, そのポアンカレ断面像を図 12 に示した．図 13 は図 12 の周期 3 島のひとつを拡大したものである．これはほんのひとつの例であって, 注意深く解析すれば他にもあるはずである．

図 11

白領域については次の節でやや詳しく論じる．この領域は有界な解からなる不変集合へと収束する．有界な解に対応する点はすべて "$\ldots, 1, 1, 1, \ldots$" の形の列に関係する．この領域では, 軌跡の大きな集合が楕円不動点を囲む不変KAM 曲線を形づくっている．これを**主不変領域**とよぶ．これは主として準周期運動からできているが, カオス的なふ

るまいをするものも少しある．図 11 に黄緑および淡青領域 (area) があるが，これらはカオス領域内にあるが，主不変領域との境界にある．これは主不変領域の境界付近におけるよどみ (stickiness) 性を示す [43]．淡青領域は不変領域の境界に粘りつくことによって規則性を見せるカオス軌道である．黄緑領域は，境界近くのある種の解はそこに長くとどまっているが，いずれはカオス的になることを示す．記号力学の表現では，これらは"$\ldots, 1, 1, 1, 1, 5, 6, 3, 4, \ldots$" のように，ひとつの時間方向に 1 をたくさん繰り返し，もう一方の時間方向は任意の整数である．

D. 主不変領域

上で議論した結果は A_1 内に単連結領域の存在を示唆する．ここではこの領域を正確に捉えよう．前節で捉えられた主不変領域を調べるために価値のある定理をいくつか述べることから始める．

定理 1. S を対称集合 (つまり $\rho(S) = S$) とし，f は S の上で $f^{-1}\rho = \rho f$ なる同相写像であるとする．このとき

(i) $f(S) \cap S$ が対称であるための必要十分条件はそれが不変であることである．

(ii) $f(S) \cup S$ が対称であるための必要十分条件はそれが不変であることである．

(iii) $f(S)$ が対称であるための必要十分条件は，$f(S) \cap S$ と $f(S) \cup S$ とが不変であることである．

証明. $f(S) \cap S$ が対称なら，

$$\begin{aligned} f(S) \cap S = & \ f(f^{-1}(S) \cap S) \\ = & \ f(f^{-1}\rho(S) \cap \rho(S)) \\ = & \ f(\rho f(S) \cap \rho(S)) \\ = & \ f(\rho(f(S) \cap S)) \\ = & \ f(f(S) \cap S) \end{aligned}$$

$f(S) \cap S$ が不変なら，

$$\begin{aligned} \rho(f(S) \cap S) = & \ \rho f(f^{-1}(S) \cap S) \\ = & \ f^{-1}(\rho(f^{-1}(S) \cap S) \\ = & \ f^{-1}(f\rho(S) \cap \rho(S)) \\ = & \ f(f(S) \cap S) \\ = & \ f(S) \cap S \end{aligned}$$

これで (i) が証明された．(ii) の証明も同様である．$f(S) \cap S$ と $f(S) \cup S$ が対称であるための必要十分条件は $f(S)$ が対称であることである．これから (iii) が出る． □

系. Q_1 軸上に，f の不動点が無数にある．それぞれはひとつずつ $A_k,\ k \geq 1$ 内にある．

証明. S を Q_1 軸とする．すると，定理 1 より，Q_1 軸と f の下でのその像の交わりは不変である．各 A_k $(k \geq 1)$ 内で境界同士を結ぶ動径線分は $f(A_k)$ 内の円周線分に写るから，A_k 内の Q_1 軸の部分区間とその像の交わりはひとつである．ゆえに各 A_k 内に不動点がひとつある． □

これら不動点の Q_1 軸上の場所を $p_k = (q_k, 0)$ と記す．これらの点を分類するために，$Df(p_k)$ を計算する必要がある．(13) を微分し，$\rho(p_k) = p_k$ であることに注意すると，

$$Df^{-1}(p_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Df(p_k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

を得る．この関係と，$Df = 1$ を利用すると，$Df(p_k)$ が

$$Df(p_k) = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ \dfrac{a_k^2 - 1}{b_k} & a_k \end{bmatrix}$$

なる形を取ることがわかる．$1 \leq k \leq 6$ の場合の q_k, a_k, b_k の値を表 II に記載した．

表 II. Q_1 軸上の f の不動点の場所と特徴

k	q_k	a_k	b_k
1	0.76297	-0.9882	-0.0095
2	0.53571	-8.65	6.28
3	0.47891	-21.6	15.7
4	0.45226	-37.2	26.5
5	0.43611	-55.0	38.4
6	0.42502	-74.9	51.4

明らかに，p_k にある不動点は $|a_k| < 1$ のとき楕円，$|a_k| > 1$ のとき双曲的である．表からわかるように，p_1 は唯一の楕円点である．p_1を中心とする 同心楕円

$$P_1^2 + \frac{(Q_1 - q_1)^2}{1 - e^2} = a^2$$

は線形写像 $Df(p_1)[p - p_1]$ の下で不変である．ここで，a は軌道半長径 (P_1 方向)，e は離心率

$$e = \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{1 - a_1^2}} = 0.998\ldots$$

である．p_1 は楕円点であるから，$Df(p_1)$ の固有値は $\lambda = e^{\pm i2\pi\alpha}$ である．ただし $\alpha = 0.477\ldots$ は p_1 における写像の回転数である．だから，p_1 の近傍で，f は摂動ねじれ写像である．α はゼロでなく，$\frac{1}{4}$ や $\frac{1}{3}$ の整数倍でもないから，Moser の定理 [17] が適用できる．その結果不変曲線が存在する．

p_1 の近傍は p_1 を含む開集合 R である．R の境界を ∂R と書く．R が Q_1 軸に関して対称なら，これを p_1 の対称近傍とよぼう (たとえば $R = f(A_1) \cap A_1$)．p_1 が不動点であるから，当然 $f(R) \cap R \neq \emptyset$ である．f が面積保存だから $f(\partial R) \cap \partial R \neq \emptyset$ である．定理 1 によれば，対称近傍 R に対して，$f(R) \cap R$ が対称なら，それは不変である．同様に，対称境界 ∂R に対して，$f(\partial R) \cap \partial R$ が対称なら，それは ∂R の不変部分集合である．また $f(R) \cap R$ が対称なら，$f(\partial R) \cap \partial R$ も対称である．逆は必ずしも成り立たない．

図 12,13

補題. $\tilde{R}$ が p_1 の対称近傍内の最大の不変近傍であるなら, $\tilde{R}$ は対称である.

証明. $\tilde{R}$ が対称でないとする. $\tilde{R}$ が不変であるから, (13) より, $f\rho(\tilde{R}) = \rho(\tilde{R})$ を得, ゆえに $\rho(\tilde{R})$ も不変である. $\tilde{R} \subset R$ であるから, $\rho(\tilde{R}) \subset \rho(R) = R$, つまり $\rho\tilde{R}$ も R に含まれている. したがって, $\tilde{R} \cup \rho(\tilde{R})$ は p_1 の不変近傍であり, $\tilde{R}$ より大きな R に含まれている. これは矛盾である. だから $\tilde{R}$ は対称のはずである. □

定理 2. R_1 を p_1 の対称近傍とし, $\tilde{R} \subset R_1$ を R_1 に含まれる最大の不変近傍とする. このとき, 列

$$R_{n+1} = (R_n \cap f(R_n)) \cap \rho(R_n \cap f(R_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

は $\tilde{R}$ に収束する. (列の収束は $n \to \infty$ のときあるいは有限の $N < \infty$ に対してかもしれない.)

証明. $\tilde{R} \subset R_1 \cap f(R_1)$ である. $R_1 \cap f(R_1)$ が対称なら, 定理 1 により, $R_2 = R_1 \cap f(R_1)$ は R_1 の不変部分集合である. この場合, R_2 は R_1 の最大の不変部分集合であり, $R_2 = \tilde{R}$ である. たとえ $R_1 \cap f(R_1)$ が対称でなくても, $R_2 = R_1 \cap f(R_1 \cap \rho(R_1 \cap f(R_1)))$ は対

称であり, 補題より $\tilde{R} \subset R_2 \subset R_1$ である. 同じ議論を繰り返して, 帰納法により, ある正の整数 N に対して $R_N = \tilde{R}$ が成り立つか, あるいは無限に入れ子になった対称近傍があって $\tilde{R}$ を含む. すなわち

$$\tilde{R} \subset \ldots \subset R_3 \subset R_2 \subset R_1.$$

この場合列 $R_1, R_2, \ldots$ は対称近傍 $R \supset \tilde{R}$ に収束する. さらに, R は p_1 の不変近傍である. $\tilde{R}$ は最大の不変近傍であるから, $R = \tilde{R}$ または $\lim_{n\to\infty} R_n = \tilde{R}$ を得る. □

図 14,15

定理 2 は R_1 に含まれる最大の不変近傍の存在を仮定しており, またそれを得るための系統的な手法を提案している. したがって, 手法が収束するなら, 不変領域の存在は確立される. $R_1 = A_1 \cap f(A_1)$ から出発して, 定理 2 で概説された手法に沿って進めば, 図 14 に示される不変領域 $\tilde{R}$ に到達する. $\tilde{R}$ に収束する入れ子になった近傍 R_n の測度は表 III に与えた. これにより図 11 から見て取れる不変領域の存在が確認できる.

さて極大不変集合の境界 $\partial\tilde{R}$ は実は p_1 を囲む最大の不変曲線である. だからといってフラクタル構造をともなう安定な島鎖が $\tilde{R}$ の外にあって, 主準周期領域からも, 互いからも分離されて, 近くにあるという可能性を否定するものではない. このような構造が生じるのは, 例のヘテロ/ホモクリニック交差からであり, 安定な周期軌道を持つ非可積分ハミルトン系に生成的な性質である. ここでもこれは当然期待される. 事実, ヘテロクリニック交差を持つ 2 つの不動点 p_u と p_l が, $\tilde{R}$ の上下の突端近くに存在する. ($f(p_u) = p_l$ かつ $f(p_l) = p_u$ である.) 数値計算によると, Q_1 の増大方向に伸びる p_u と p_l の安定および不安定多様体は横断的に交わる. ただ, 交差角はたったの 10^{-2} 程度である. 非常に狭いセパラトリックス領域は図 15 では実線として表現されている.

表 III. 主不変領域へ収束する
入れ子近傍の測度

n	$\mu(R_n)$
1	0.2293
2	0.1128
3	0.0825
4	0.0683
5	0.0613
6	0.0574
7	0.0549
8	0.0537
9	0.0531
10	0.0528
11	0.0527
12	0.0526
13	0.0526
14	0.0526

図 18

不変領域の内部の写像のふるまいを見るために, 数個の点を多数回 iterate し, すべての写像点を図示する. そのポアンカレ断面は図 15 にある. 楕円不動点 p_1 のまわりに不変曲線が存在することがはっきりわかる. これらが楕円から変形していることは f の非線形性の現われであり, 変形は不変曲線のサイズとともに増大する. 定理 2 を使ってこれらの非極大不変領域を得ることができる. 出発を任意の対称集合 $R_1 \subset \tilde{R}$ とするのだ. 不変曲線の間に, いわゆるカントーラスまたは島鎖とよばれる共鳴領域を見分けることができる. しかしこれらは非常に狭い. 例として, (回転数 11/21 の) 共鳴島の拡大図を示した. これは $(Q_1, P_1) = (0.71693\ldots, 0)$ にあるセパラトリックス領域の内部にある.

E. 記号力学による表現

二等辺三体問題の大域的ふるまいは記号力学を使うともっと浮き立たせることができる. ここで, 可算無限個のアルファベット上の推移空間を導入する. これによって, 定性的には, 可能な運動を完全に特徴づけることができる.

まず, アルファベット $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ および列の終りを示す特殊アルファベット列

$$N_T = \{\infty, *_\infty, *_0, *_1, *_2, \ldots\}$$

を定義する. 次に, 列空間 Σ を, 以下の形のどれかひとつを取る可能な列 s の集合として定義する:

$$\begin{array}{rcl} \ldots k_{-2}k_{-1} & . & k_0k_1k_2\ldots, \\ \ldots k_{-2}k_{-1} & . & k_0k_1k_2\ldots k_{n-2}k_{n-1}K_n, \\ K_mk_{m+1}k_{m+2}\ldots k_{-2}k_{-1} & . & k_0k_1k_2\ldots \\ K_mk_{m+1}k_{m+2}\ldots k_{-2}k_{-1} & . & k_0k_1k_2\ldots k_{n-2}k_{n-1}K_n, \end{array}$$

ただし, $n \geq 0, m < 0, k_i \in N$ および $K_i \in N_T$ を要請する. 簡単に言えば, Σ は非負の整数からなる可能なすべての有限, 無限, 両無限列であって, 有限で終るときには, N_T に属する特別の記号で終るという約束を守る.

次に, 写像 $\phi : A \to \Sigma$ を以下のように定義する. $p \in A$ とする. $f^n(p)$ がすべての n に対して定義されているなら, この軌跡上, エスケープ/捕獲も三体衝突/放出もない. こ

の場合, $\phi(p)$ は両無限列であって, k_i は

$$f^i(p) \in A_{k_i}$$

となるように決める．終了記号は別に扱わねばならない．というのは, ある種の集合, たとえば $f(A_\infty)$ や $f^{-1}\rho(A_\infty)$ は定義されないからである．$f^n(p) \in A_e \cup A^*$, $n \geq 0$ なら, $f^{n+1}(p)$ はエスケープあるいは三体衝突のため定義されず, $\phi(p)$ は右に有限で終る. $\phi(p)$ が左, 右, または両方で有限で終るにしても, 途中の k_i は両無限列の場合と同じように決定される．だが, 終了記号は終了の理由ごとに異なる．それは軌跡の終了 iterate のときに A のどこに居るかに基づく．右側終了 $(n \geq 0)$ のとき

$$f^n(p) \in A_\infty \Rightarrow K_n = \infty$$
$$f^n(p) \in B_i \Rightarrow K_n = *_i$$

であり, 左側終了 $(n < 0)$ のとき

$$f^{n+1}(p) \in \rho(A_\infty) \Rightarrow K_n = \infty$$
$$f^{n+1}(p) \in \rho(B_i) \Rightarrow K_n = *_i$$

である．

言い換えると, 双曲エスケープ (捕獲) で未来に終了する (過去に終了する) 軌跡は記号”∞” で右に (左に) 終了する列に翻訳される．同様に, 放物エスケープ (捕獲) 軌跡は, 記号”$*_\infty$” で右に (左に) 終了する列に翻訳される．三体衝突 (放出) 軌跡は, 記号”$*_i$” で右に (左に) 終了する列に翻訳される．ただし, i は最後の syzygy 交差から三体衝突までの二体衝突の数である．

相続く f の iterate の下で p の像が A のどこに位置するかを表現するのが $\phi(p)$ という列である．列の小数点は今の syzygy 交差時点のマークである．それから前に進むと, k_0 は次の syzygy 交差までの二体衝突の数である．過去に遡ると, k_{-1} はひとつ前の syzygy 交差との間の二体衝突の数である．

さて, 推移写像 $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma$ を定義しよう．ここで $\Sigma^+ \subset \Sigma$ は小数点の右側に 2 つ以上の記号を持つ部分集合である．推移写像は列内の小数点をひとつだけ右に移動する. Σ の要素すべてに対して定義されているわけではない．終了記号を越えて小数点を移動することは許さない．また $\sigma^{-1} : \Sigma^{-1} \to \Sigma$ は小数点を左にひとつ移動すると定義する．$\Sigma^- \subset \Sigma$ は小数点の左に 2 つ以上の記号を持つ列の集合である．

Σ 内の列を使って平面二等辺三体問題を調べる準備ができた．f の iterate の下で, 点 $p \in A$ はでたらめに, また予測不可能な仕方で A 内を動くであろう．しかし, 写像 ϕ は, $f^n(p)$ が定義されるすべての n に対して

$$\sigma^n \phi(p) = \phi f^n(p)$$

が恒等的に成り立つように構成した．これにより, 軌跡を新しい空間 Σ の中に投影し, 列の小数点の動きとして考え直すことができる. 実際, 小数点の位置そのものではなく, 列それ自身がわれわれに興味がある．与えられた軌道にともなう列は A 内のその軌跡全体を特徴づける．だから軌道のポートレートとして重要である．

注意.

—- ϕ は 1 対 1 でない. とくに, $\phi(p)$ が" ∞" で終ると, A 内に無限に多くの点があって, Σ 内で同一の表現を持つ. また IV.D 節で記述した主不変領域内の点 p はすべて記号列としては "$\ldots, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$" である.

—- ϕ は Σ の「上への」写像ではない. 禁止ブロックという部分列があることをすでに述べた. このブロックは $p \in A$ の像列 $\phi(p)$ には起こり得ない. しかし, すでに示したように, 禁止ブロックは必ず "0", "1", または" $*_0$" を含む.

—- 前に記述した不変集合 Λ_M は未来と過去に永遠に S_M にとどまる点の集合であった. 今度の新しい表現法では, 同相写像 $h : \Lambda \to \Lambda$ は Λ_M に制限された ϕ である. また $\Sigma_M \subset \Sigma$ はアルファベット $\{2, 3, \ldots, M+1\}$ の上の両無限列の集合である. h は同相写像であるから, どの $p \in \Lambda_M$ も Σ_M 内の列に一意に対応すること, またその逆が成り立つことを注意しておく.

—- 点 $p \in \rho(A_{|infty}) \cap A_\infty$ にともなう高速「フライバイ」軌跡の存在を指摘しておく. これらの点は f の下で, どの点の像でもないし, どの点の前像でもない. その表現は" $\infty.\infty$" であって, σ の像でも前像でもない.

—- IV.A 節で議論した放出–衝突軌道の存在も指摘しておく. このような軌道は 2 つの特異点の間に任意の数の syzygy 交差を持ち得る. 一番単純な軌道は交差をひとつだけ持つ. これらの軌道は点 $p \in \rho(B_i) \cap B_j$ に対応し, 列 $\phi(p) =$ " $*_i .*_j''$ を持つ.

5 結論

本論文に示された結果から以下の結論が出せる.

—- A_0 内の任意の点の軌道はいずれは過去にも未来にも A_0 を出て行く. 1 回より多くの iterate だけ留まっているのは捕獲–エスケープ型であり, 1 回の iterate だけ留まっているのは S_∞ と行ったり来たりする可能性がある.

—- A_1 内の点の軌道で A_1 に留まるもの (捕獲でも, エスケープでも S_∞ との連絡軌道でもない) は, 楕円不動点のまわりの主不変領域を形成する. この領域では, 準周期的にふるまう軌道が大きな測度を占める.

—- s_∞ 内の点の軌道のうち A_1 と連絡しないものは, 馬蹄写像とそれにともなう記号力学で容易に理解することができる. S_∞ を去らない軌道 (捕獲でも, エスケープでも連絡軌道でもない) はカントール集合を形成し, カオス力学を示す.

—- S_∞ 内の非エスケープ点の軌道で A_1 と連絡するものは, カオス的あるいは準周期的である. ふるまいが複雑なのは, 連絡が S_∞ の大域的な双曲性を破壊し, 楕円周期点を存在させることもあり得るからである.

—- 捕獲–エスケープに導く点の軌道は, S_∞ と連絡するしないに応じて, 「カオス的」あるいは「高速」散乱という 2 つの異なる領域に属す.

主不変領域内の主周期軌道と直線三体問題の Schubart 軌道 [44] の相似性を指摘しておく. われらの主周期軌道と同様, Schubart 軌道は周期 1 であり, 可能な最小の三体摂動に関係し, 等質量のときには安定である. 直線三体問題と平面二等辺問題の力学の豊

富さやどちらも周期 1 の安定領域を持つことから, ほかにもこの 2 つの問題にはトポロジー的な相似性があるのではないかと疑問が湧く.

たとえば, Henon は Schubart 軌道が質量の広いパラメータ範囲で安定であることを示した [45]. 三次元的な摂動に対しても安定である [46]. 彼の予想によると, 直線三体に近い 3 連星系が存在する. この新しいタイプの二等辺周期軌道が 3 次元的に安定であるかどうかの問題は現在調査中である.

別の重要な問題として, $0 < \alpha \leq 1$ を分岐パラメータとして, f のトポロジー的分類の**分岐集合**を得ることがある. この分岐解析の結果はすぐ出版されるだろう [36]. 二等辺問題は一般化 Sitnikov 問題の極限的な場合である. 連星の角運動量は第二の自由パラメータとして考えられ, 2 次元の分岐集合が得られるはずである.

6　補遺: 三体衝突多様体

省略

参考文献

[1] E.T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of particles and Rigid Body, 4th ed.(Cambridge University Press, Cambridge, 1947).

[2] H. Bruns, Uber die Integrale des VielKorper-Problems, *Acta Math.* **11**, 25-96(1887).

[3] H. Poincare, Sur le Probleme des Trois Corps et les Equation de la Dynamique, *Acta Math.* **13**, 1-270(1890).

[4] H. Poincare, *Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste* 3 Vols (Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899).

[5] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*(Amer. Math. Soc., New York, 1927).

[6] K.F. Sundman, Memoirs sur le probleme des trois corps, *Acta Math.* **36**, 105-179(1912).

[7] S. Smale, Topology and mechanics, *Invent. Math.* **10**, 305-331(1970); **11**, 45-64(1970).

[8] R. Easton, Some topology of the 3-body problem, *J. Diff. Eqns.* **10**, 371-377(1991).

[9] K. Zare, the effects of integrals on the totality of solutions of dynamical systems, *Celest. Mech.* **14**, 73-83(1976).

[10] K. Zare, Bifurcation points in the planar problem of three-bodies, *Celest. Mech.* **16**, 35-38(1977).

[11] K. Zare, Properties of the moment of inertia in the problem of three bodies, *Celest. Mech.* **24**, 345-354(1981).

[12] V.G. Golubev, Hill stability in the unrestricted three-body problem, *Sov. Phys. Dokl.* **10**, 373-375(1968).

[13] C. Marchal and D. Saari, Hill regions for the general three-body problem, *Celest. Mech.* **12**, 115-129(1975).

[14] V. Sebehely, *Theory of Orbits*(Academic Press, New York, 1967).

[15] S. Smale, Differentialble dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747-817(1967).

[16] V.M. Alekseev, Quasirandom dynamical systems I, II, III, *Math. USSR Sbornik* **5** 73-128(1968); **6**,505-560(1968); **7**, 1-43(1969).

[17] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* (Princeton University press, Princeton, 1973).

[18] K. Sitnikov, The existence of oscillatory motions in the three-body problem, *Sov. Phys. Dokl.* **5**, 647-650(1961).

[19] W.D. MacMillan, An integrable case of the restricted problem of three bodies, *Astron. J.* **27**, 11-13(1913).

[20] K. Wodner, The original Sitnikov article – New insights, in *Sitzungsber. der math-nat Kl. d. Osterr. Akad. d. Wiss. Abt II* (Springer-Verlag, Vienna, 1994), Vol.202, 1-10.

[21] R. McGehee, A stable manifold for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics, *J. Diff Eqns.* **14**, 70-88(1973).

[22] R. McGehee, Triple collision manifold in the collinear three body problem, *Invent. Math.* **27**, 191-227(1974).

[23] J. Hietarinta and S. Mikkola, Chaos in the one-dimensional gravitational three-body problem, *Chaos* **3**, 183-203(1993).

[24] R. Broucke, On the isosceles triangle configurations in the planar general three-body problem, *Astron. Astrophys.* **73**, 303-313(1979).

[25] R.L. Devaney, Triple collision in the planar isosceles three body problem, *Invent. Math.* **60**, 249-267(1980).

[26] R. Moeckel, Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple collision, *Am. J. Math.* **103**, 1323-1341(1981).

[27] C. Simo, Analysis of triple collision in the isosceles problem, in *Classical Mechanics and Dynamical Systems*(Marcel Dekker, New York, 1980).

[28] C. Simo and R. Martinez, Qualitative study of the planar isosceles problem, *Celest. Mech.* **41**, 179-251(1988).

[29] R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM*(Soc. Ind. Appl. Math.) *J. Math. Anal.* **15**, 857-876(1984).

[30] K. Zare and V. Szebehely, Order out of chaos in the three-body problem: regions of escape, in *From Newton to Chaos*(eds. A.E. Roy and B.A. Steves), Plenum Press, New York, 1995.

[31] M. Henon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *Astron. J.* **69**, 73-79(1964).

[32] W.H. Jefferys, An atlas of surface of section for the restricted problem of three bodies, *Publ. Dep. Astron. Univ. Texas at Austin*, Ser.II **3**(1971).

[33] R.H. Smith and V. Szebehely, The onset of chaotic motion in the restricted problem of three-bodies, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **56**, 409-425(1993).

[34] R. Dvorak, Numerical results to the Sitnikov problem, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **56**, 72-80(1993).

[35] T. Levi-Civita, Triettorie singulari er urti mel problema ristretto die tre corpi, *Ann. Math. Pura Appl.* **9**, 1-32(1903).

[36] S. Chesley and K. Zare, Bifurcation in the mass ratio of the planar isosceles three-body problem, in —it Dynamics of Small Bodies in the Solar System, ed. A.E. Roy and B.A. Steve, to appear.

[37] E.M. Standish, Sufficient conditions for escape in the three-body problem, *Celest. Mech.* **4**, 44-48(1971).

[38] S. Chesley, Early detection of energetic escape in the three-body simulations, in preparation.

[39] E. Fehlberg, New high-order Runge-Kutta formulas with an arbitrarily small truncation error, *Z. Angew. Math. Mech.* **46**, 1-16(1966).

[40] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, 2nd ed.(Academic Press, Boston, 1993).

[41] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed.(Addison Wesley, Reading, MA, 1989).

[42] V.M. Alekseev, On the capture orbits for three-body problem for negative energy constant, *Usp. Math. Nauk* **24**, 185-186(1969).

[43] G. Contopoulos and C. Polymilis, Geometrical and dynamical properties of homoclinic tangles in a simple Hamiltonian system, *Phys. Rev.* E**67**, 1546-1557(1993).

[44] J. Schubart, Numerische Aufsuchung periodischer Losungen im Dreikorperproblem, *Astron. Nachr.* **283**, 17(1956).

[45] M. Henon, Stability of interplay motions, *Celest. Mech.* **15**, 243-261(1977).

[46] M. Henon, A family of periodic solutions of the planar three-body problem and thier stability, *Celest. Mech.* **13**, 267-285(1976).