谷川清隆 訳

Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **4** (1908), 1-4

n 体問題の特異点について
Sur les singularités du problème des n corps

H. von Zeipel

n 体問題のある実数解が、時間 t が実領域 $0 \leq t < t_1$ に属するとき正則 (holomorphe) であるとする．t_1 がこの解の臨界点であれば、よく知られているように、

$$\lim_{t=t_1} \rho = 0, \tag{1}$$

である．ここで ρ は相互距離のうち最小のものである．

U で力関数を表わし、V で系の重心に関する慣性モーメントを表わすと、運動方程式とエネルギー積分からただちに次の関係が導ける．

$$\frac{d^2V}{dt^2} = 2U + 4h. \tag{2}$$

ここで h はエネルギー積分の値である．t が t_1 に向かうと、(1) により $\lim U = \infty$ である．方程式 (2) によれば、

$$\lim_{t=t_1} V = c, \tag{3}$$

である．ここで c は正またはゼロの有限または無限の決まった量である．

パンルベ (M. Painlevé) は微分方程式の解析理論講義 (Lecon sur la théorie analytique des équations différentielles, p.583) において、関係式 (1) からは必ずしも $t = t_1$ に 2 つまたはそれ以上の質点が空間のある特定の点で衝突するとは言えないと注意している．t が t_1 に近づくとき質点のどれかが極限位置に近づかないこともあり得る．

この論文の目的は問題のこの不定特異点 (?)(singularités indéterminée) の研究に貢献することである．筆者はその存在を扱うのではない．ただ以下の定理を示すつもりである．

定理. t が t_1 に近づくときに質点のどれかが有限距離の極限位置に近づかなければ、必然的に

$$\lim_{t=t_1} R = \infty, \tag{4}$$

を得る．ここで R は相互距離の最大のものである．

実際、式 (3) において c を有限として、すべての質点が $t \to t_1$ のとき有限距離の決まった位置に向かうことを示そう．

明らかに、整数 $p \geq 0$ および 2 つの量 $\varepsilon > 0$ と t_0 が存在して、領域 $t_0 < t < t_1$ 上の各 t に対して $s = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の相互距離のうちに ε より大きなものがつねに p 個ある．p が可能な

最大値を取るように p、ε および t_0 を選んであるものとする．このとき δ がどんなに小さくても、t_1 より前の区間 (τ_1, τ_2) があって、$\tau_1 < t < \tau_2$ である限り $s-p$ 個の距離が δ より小さい．実際、そうでなければ、小さな量 ε' と t_1 の近くの値 t'_0 があって、$t'_0 < t < t_1$ の各 t において $p+1$ 個の距離が ε' より大きくなってしまう．ところがこれはおかしい．というのは整数 p は可能な最も大きな整数と選ばれていたからである．

そこで量 $\sigma < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を好きなだけ小さく固定しよう．次に上で述べた δ を $\kappa < 1$ として $\delta = \kappa\sigma$ の形で選ぼう．κ は後で決める．最後に、区間 (τ_1, τ_2) は t に無限に近いとし、その区間では $s-p$ 個の距離は δ より小さいとする．このとき 2 つの場合が考えられる．

第一の場合．区間 (τ_1, τ_2) の各々はもっと大きな区間 (τ_0, τ_3) に属し、$\tau_0 < t < \tau_3$ である限り $s-p$ 個の距離は σ より小さく、$t = \tau_0$ および $t = \tau_3$ においては、少なくとも距離のひとつは σ に等しい．

第二の場合．ある値 t_σ が存在して、$t_\sigma < t < t_1$ の間、$s-p$ 個の相互距離は σ 未満にとどまる．

第一の場合が実現されると仮定しよう．$\tau_0 \leq t \leq \tau_3$ に対して、n 体系はいくつかの部分系 S_i に分割されて、点 P_α と P_β が同じ部分系に属するならば、この 2 点の距離 $\Delta_{\alpha,\beta}$ が σ より小さく、一方 P_α が P_β と異なる部分系に属すれば、$\Delta_{\alpha,\beta} > \varepsilon$ となる．次に μ_i を部分系 S_i の全質量とし、$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ をその重心の座標とする．$x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ を S_i に属する質点の座標とする．$x_{i,j} = \alpha_i + \xi_{i,j}, y_{i,j} = \beta_i + \eta_{i,j}, z_{i,j} = \gamma_i + \zeta_{i,j}$ と置く．

このとき運動方程式からただちに

$$\mu_i \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i},\ \mu_i \frac{d^2\beta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \beta_i},\ \mu_i \frac{d^2\gamma_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_i},\ (i = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

が得られる．そこで慣性モーメント V' および運動エネルギー T' を次式で導入する．

$$V' = \textstyle\sum_i \mu_i \left[\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2\right], \quad T' = \displaystyle\sum_i \mu_i \left[\left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_i}{dt}\right)^2\right].$$

また次のように略記する．

$$\Phi' = -\sum_i \left[\alpha_i \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} + \beta_i \frac{\partial U}{\partial \beta_i} + \gamma_i \frac{\partial U}{\partial \gamma_i}\right]. \tag{6}$$

このときただちに

$$\frac{d^2V'}{dt^2} = 2T' - 2\Phi', \tag{7}$$

であることがわかる．ところが慣性モーメントの初等的理論によれば $V = V' + \sum_i V_i$ である．ここで V_i は部分系 S_i のその重心に関する慣性モーメントである．a と b を質量のみに依存する量とすれば、明らかに $t = \tau_0$ および $t = \tau_3$ において $\sum V_i > a\sigma^2$ であり、一方 $\tau_1 < t < \tau_2$ である限り $\sum V_i < b\delta^2$ である．上で $\delta = \kappa\sigma$ と置いたときに約束したように、κ の適当な値を決めよう．次に $\kappa = \sqrt{\dfrac{a}{2b}}$ と置く．すると $b\delta^2 = \frac{1}{2}a\sigma^2$ が成り立つ．したがって関数 $W(t) = V' - V$ は区間 (τ_0, τ_3) の $t = \tau'$ において極大値を取り、$W(\tau') - W(\tau_3) > \frac{1}{2}a\sigma^2$ である．ところが $\lim_{t=t_1} V$

は有限であると仮定していた．区間 (τ_0, τ_3) が t_1 の十分近くに選ばれていれば、関数 $V'(t)$ はこの区間の $t = \overline{\tau}$ において急な極大値を取り、次が成り立つ．

$$V'(\overline{\tau}) - V'(\tau_3) > \frac{1}{3}a\sigma^2. \tag{8}$$

一方、区間 (τ_0, τ_3) において Φ' はいま考えている区間 (τ_0, τ_3) に無関係な有限値で抑えられる．したがって、V' は $t = \overline{\tau}$ において極大値を取り、方程式 (7) は $t = \overline{\tau}$ のとき $T' < \Phi'$ であることを示す．速度の成分 $\dfrac{d\alpha_i}{dt}, \ldots$ はしたがって $t = \overline{\tau}$ において有限である．方程式 (5) は、t が区間 (τ_0, τ_3) に属する限り、速度の大きさが T' とともにある固定した有限の値より小さいことを証明している．ところが V' は $t = \overline{\tau}$ に極大値を取る．不等式 (8) の第一項はしたがって $\overline{\tau} < t < \tau_3$ である限り $(t - \overline{\tau})^2$ の形の無限小であるが、これはばかげている．

したがって慣性モーメント V が $t = t_1$ のときに有限にとどまるなら、これは第二の場合であるが、それを σ とする．系は部分系 $S_1, S_2, \ldots$ に分かれる．しかもそれらの重心は ε より大きな距離はなれており、ある決まった位置 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ に向かう．最後に、各系 S_i 内で、すべての物体は別れ、t が t_1 に向かうとき Γ_i に対応する位置に向かう．これで定理は証明された．