谷川清隆 訳

Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8**(1988), 11-26

The gradient structure of a flow: I

C. Conley

要約. 各流れは一意の勾配流 (勾配部分) を dominate し, 後者はまた元の流れに dominate される任意のほかの勾配流を dominate する. 勾配部分 (鎖回帰集合) の不動点に運ばれる点の集合は回帰関係によって特徴づけることができる. 与えられた流れのフィルター付けは勾配部分のフィルター付けに対応する.

0. 序

この研究の対象はコンパクト距離空間の流れの集まりである. それを状態空間 (state space) と呼ぶ. この流れの集まりは, コンパクト-開位相が与えられればそれ自身完備な距離空間である. 一般的な観点からすれば目的は, 状態空間および流れの空間によって構成される数学的実体を調べること, とくに位相に関係するものを調べることにある.

背景に関していえば, 流れは調べるべき別の対象 (たとえば電気回路網) の不完全なモデルになっていることが仮定されており, 構成された実体はこの対象の性質に関係することが仮定されている. しかし, そのような見方がここでの展開を邪魔すべきではない.

そのような実体の例として, 各流れにその閉不変集合の集まりを指定する関数がある. これが流れの空間上で上半連続な関数である [5] という点において位相に注目していることになる. また別の例として, 状態空間と流れの空間の積の上で定義された関数は各組に流れに関する状態の $\omega-$ 極限集合を指定する. この関数は簡単にわかる形では位相に関係しているようには見えない. しかし, 以下では両方の変数に関して上半連続な置き換えを行なう (3.4 節).

やや毛色の変わった例として流れのフィルター付けを持ち出す. フィルター付けとは状態空間の閉部分集合の有限な減少列であって, 各集合は流れによってその内部に移される. 自然なやり方で, 流れの空間の上に束 (sheaf) が構成でき, その軸 (stalks) はフィルター付けを用いて定義される代数構造 (グラフ, コホモロジー代数, および準同形) から成る. 位相依存性は束構造に現われる ([3], [4], [6] および [7]).

この実体, すなわち流れの空間上の勾配構造の束がここでの主たる興味の対象である. 最初のステップではフィルター付けの存在を軌道の回帰性に関係づける. これをこの論文で行なう. 次の論文で束を構成し代数的側面が役割を果たす問題について議論する.

これらの問題は一般に流れの 1-ないし 2-パラメーター族に関連する. これらの族に関しては, 束の軸がなんらかの仕方で変化するときのパラメーターの値を区別することに興味がある. この問題の場合, このような変化はホモクリニックまたはヘテロクリニック軌道のような格別興味ぶかい軌道の存在に対応している. この軌道は今度は偏微分方程式の進行波解の存在に対応している.

この論文は５つの節から成る．１節では記法を列挙する．２節では, 以後の作業に合うように工夫してアトラクターを取り扱う．３節では回帰性の概念を導入する．主要な点は $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖を用いて一般化された $\omega-$ 極限集合と回帰集合を定義するところにあり, 通常の $\omega-$ 極限集合を含む最小の準アトラクターとして前者を特徴づけるところにある．４節では流れの「勾配部分」を記述する．流れはその勾配部分によって分類できそうである．このような分類の重要性のいくつかは, 次のような陳述からわかる．すべての回帰流れは同じ (自明な) 類に属する, また domination 関係のもとで「ω 相似」(4.3A な) すべての流れは相似な勾配部分を持つ．これから, とくにフィルター付けに同伴する代数構造は同一であること (したがって相似類の不変量) が出る．これは次の論文で示す．最後の節で Morse 分解を定義し, フィルター付けの存在に関係づける．

1．記法

1.1. X は距離関数 ρ をもつコンパクトな距離空間とする．$X \times X$ 上の距離も ρ で表わす.

$Y \subset X$ に対して, $\mathrm{Cl}\, Y$, ∂Y, $\mathrm{Comp}\, Y$, $\mathrm{Int}\, Y$, および $\mathrm{Ext}\, Y$ はそれぞれ Y の閉包, 境界, 補集合, 内部, および補集合の内部を表わす.

$A, B \subset X$ なら $A \backslash B \equiv A \cap \mathrm{Comp}\ B$ である.

1.2. X 上の流れを $f = f : X \times R \to X$ で表わす．$Y \subset X$ および $J \subset R$ に対して, f が文脈からわかる場合には $Y \cdot J \equiv f(Y \times J)$ で表わす.

各流れ f に $f^*(x, t) = f(x, -t)$ で定義される後向きの流れ f^* が対応する．$f^{**} = f$ に注意しよう.

1.3. $Y \cdot R = Y$ なら Y は f のもとで不変である．Y が不変なら $\mathrm{Cl}\, Y$, ∂Y, $\mathrm{Comp}\, Y$, $\mathrm{Int}\, Y$, および $\mathrm{Ext}\ Y$ も不変であり, これらは f^* のもとでも不変である．また, $f|Y$ は制限 $f|Y \times R \to Y$ を表わす.

f の不動点は不変集合であるような点である．$C(f)$ を不動点の集合とする (C は「critical」の C である．通常の勾配の場合, 臨界点 (critical point) は不動点に対応する).

1.4. $Y \subset X$ に対して, $\omega(Y, f) \equiv \cap_{t \in R} \mathrm{Cl}\ \{Y \cdot (t, \infty)\}$ とおく．このとき $\omega(Y, f)$ は閉不変集合であり, Y が連結なら連結である．$Y \equiv \{x\}$ に対して $\omega(x, f)$ は x のふつうの意味の ω 極限集合である．対応する α 極限集合をいつも $\omega(x, f^*)$ と書くことにする.

1.5. 集合 $\{y | \omega(y, f) \cap Y \neq \emptyset\}$ はこのとき $\alpha(Y, f)$ と書ける．しかし, 混乱を避けるために, $\tilde{\alpha}(Y, f)$ と書くことにする．この集合は明らかに不変であるけれども, Y が閉じているからといって必ずしも閉じていない.

一般に, $\tilde{\alpha}(Y_1 \cap Y_2, f) \subset \tilde{\alpha}(Y_1, f) \cap \tilde{\alpha}(Y_2, f)$ および $\tilde{\alpha}(Y_1 \cup Y_2, f) = \tilde{\alpha}(Y_1, f) \cup \tilde{\alpha}(Y_2, f)$ である.

1.6. $\mathcal{P} \subset X \times X$ に対して $\mathcal{P}^* \equiv \{(x, y) | (y, x) \in \mathcal{P}\}$. $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$ に注意しよう.

2．アトラクターおよび準アトラクター

定義 2.1A.　集合 A が f のアトラクターと呼ばれるのは A に (閉) 近傍 N があって $A = \omega(N, f)$

を満たすときである．

A がアトラクターなら, $\tilde{\alpha}(A,f)$ は A の影響領域 (domain of influence) と呼ばれる．

A が f^* のアトラクターなら, A は f のリペラーと呼ばれ, $\tilde{\alpha}(A,f^*)$ はやはり影響領域 (domain of influence) と呼ばれる．

定義 2.1B. アトラクター近傍とは, X の閉部分集合 N で $\omega(N,f) \subset \mathrm{Int}\ N$ を満たすものである．

補題 2.2A. N がアトラクター近傍なら, 集合 $A \equiv \{x | x \cdot R \subset N\}$ はアトラクターであって, $N \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ である．

証明. 閉集合 N の中の極大の不変集合であるから A は閉じている．$A' = \omega(N,f)$ とおく．このとき, A' は A を含む閉不変集合である．$y \in A'$ および任意の t に対して, $t' \leq t$ があって $y \cdot t' \in N$ である．だから $\omega(y,f^*) \cap N \neq \emptyset$ である．したがって, $y \cdot R \cap \partial N = \emptyset$ である．$y \cdot R \cap \partial N = \emptyset$（論文には $y \cdot R \cap N = \emptyset$ とあるが間違いであろう）であるから, $y \cdot R \subset N$ である．だから $A = A'$ である．$A \cap \partial N = \emptyset$ であるから N は A の近傍である．だから A はアトラクターである．$x \in N$ に対して $\omega(x,f) \subset \omega(N,f) = A$ である．だから, $N \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ である．
□

Remark. N が X の任意の閉部分集合で, $x \in \partial N$ に対して $\omega(x,f) \cap \mathrm{Ext}\ N \neq \emptyset$ が成り立つなら, $A \equiv \{y | y \cdot R \subset N\}$ はアトラクターである．ただし, $N \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ は必ずしも成り立たない.

定理 2.2B. A がアトラクターなら A は閉不変集合であり, $\tilde{\alpha}(A,f)$ は開不変集合であり, $A^* \equiv \mathrm{Comp}\ \tilde{\alpha}(A,f)$ はリペラーである．

また, $\tilde{\alpha}(A,f) = X \backslash A^*, \tilde{\alpha}(A^*,f^*) = X \backslash A$ である．また, $A^{**} = A$ である．

証明. A が閉不変であること, $\tilde{\alpha}(A,f)$ と A^* が不変であることは明らかである．

N を A の近傍として $A = \omega(N,f)$ と書く．このとき $N \subset \tilde{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}(A,f)$ である．したがって, $\tilde{\alpha}$ は A の近傍である．$\partial\tilde{\alpha}$ は閉不変集合であるから, その各点の ω 極限集合を含む．さらに, $\partial\tilde{\alpha} \cap A = \emptyset$ である．だから $\partial\tilde{\alpha} \cap \tilde{\alpha} = \emptyset$ であり, $\tilde{\alpha}$ は開である．$x \in \tilde{\alpha}$ なら $x \cdot R$ は N と交わり, よって $\omega(x,f) \subset \omega(N,f) = A$ であることに注意する．

さて $A^* = \mathrm{Comp}\ \tilde{\alpha}$ は閉不変集合である．U を $\mathrm{Cl}\ U \subset N$ なる A の任意の開近傍とし, $N^* = \mathrm{Comp}\ U$ とする．このとき, $x \in \partial N^* = \partial U \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ に対して $\omega(x,f) \subset A \subset \mathrm{Ext}\ N^*$ が成り立つ．だから N^* は f^* のアトラクター近傍である．集合 $\{x | x \cdot R \subset N^*\}$ は $\tilde{\alpha}(A,f)$ と互いに素であるが, $A^* = \mathrm{Comp}\ \tilde{\alpha}(A,f)$ の点をすべて含んでいるはずである．だから A^* は f^* のアトラクターである．

$x \in \tilde{\alpha}(A,f) \backslash A$ に対して $\omega(x,f^*) \subset \mathrm{Ext}\ N \subset \mathrm{Int}\ N^*$ である．だから, $\omega(x,f^*) \subset A^*$ かつ

$x \in \tilde{\alpha}(A^*, f^*)$ である．よって $\tilde{\alpha}(A^*, f^*) = X \backslash A$ であるから定理は証明された． □

系 2.2C. A の任意の閉近傍 N で $\tilde{\alpha}(A, f)$ に含まれるものはアトラクター近傍である．

証明. $x \in \partial N$ とすると, $\omega(x, f^*) \subset A^* \subset \mathrm{Ext}\ N$ であるから． □

Remark. $\emptyset$ と X はともにアトラクターかつリペラーであり, その近傍はそれぞれ $\emptyset$ と X である．

定理 2.2D. A_1 と A_2 がアトラクターなら, $A = A_1 \cap A_2$ も $\overline{A} = A_1 \cup A_2$ もアトラクターである．また $A^* = A_1^* \cup A_2^*$, $\overline{A}^* = A_1^* \cap A_2^*$, $\tilde{\alpha}(A, f) = \tilde{\alpha}(A_1, f) \cap \tilde{\alpha}(A_2, f)$ および $\tilde{\alpha}(\overline{A}, f) = \tilde{\alpha}(A_1, f) \cup \tilde{\alpha}(A_2, f)$ である．

証明. N_1 と N_2 をそれぞれ A_1 と A_2 のアトラクター近傍とする．このとき $N_1 \cap N_2$ は明らかにアトラクター近傍であって, $A_1 \cap A_2$ が対応するアトラクターである．

(一般的定義と違って)$\beta = 1, 2$ に対して $\tilde{\alpha}(A_\beta, f) = \{y | \omega(y, f) \subset A_\beta\}$ であるから, 明らかに $\tilde{\alpha}(A_1 \cap A_2, f) = \tilde{\alpha}(A_1, f) \cap \tilde{\alpha}(A_2, f)$ である．したがって, $A^* = \mathrm{Comp}\ \tilde{\alpha}(A, f)$ は $A_1^* \cup A_2^*$ である．上の議論を A_1, A_2 および f の代わりに A_1^*, A_2^* および f^* に適用すれば定理が出る． □

定義 2.3A. アトラクターの共通部分を準アトラクターと呼ぶ(?)．f の準リペラーは f^* の準アトラクターのことである．

Remark. アトラクターは孤立した（isolated）不変集合である ([2],[5])．だから準アトラクターは準孤立不変集合である ([5])．アトラクターであり同時にリペラーである集合は X と $\emptyset$ だけである．しかしながら, 準アトラクターであり同時に準リペラーであるような自明でない集合は有り得る．

Remark. 任意の部分集合 $Y \subset X$ に対して Y を含むような最小の準アトラクターが唯一存在する．

定理 2.3B. A を f の閉不変集合とする．このとき A が準アトラクターであるための必要十分条件は A の任意の近傍がアトラクター近傍を含むことであり, A がアトラクターであるための必要十分条件は A の十分小さな各閉近傍がアトラクター近傍であることである．

証明. 2.2C と 2.3A からただちに出る． □

定理 2.4A. アトラクターの任意の閉かつ開の部分集合はアトラクターである．準アトラクターの任意の成分は準アトラクターである．

証明. 準アトラクターの成分はアトラクターの成分の共通部分であるから, アトラクターの閉かつ開の部分集合の共通部分である．だから, 第二の主張は第一の主張から出る．

$A' \subset A$ をアトラクター A の閉かつ開の部分集合とする．このとき A' の閉近傍 N があって $N \subset \tilde{\alpha}(A, f)$ かつ $N \cap A = A'$ を満たす．だから N はアトラクター近傍であり ($x \in \partial N$ なら

$\omega(x,f^*) \subset A^* \subset \mathrm{Ext}\ N)$, $A' = \{x | x \cdot R \subset N\}$ はアトラクターである． □

2.4B. アトラクターの成分がアトラクターであることは一般に成り立たない．しかし,

補題. x はアトラクター A の点であって, x の任意の近傍が A の少なくとも 2 つの成分と共通点を持つとする．このとき, x の近傍でその閉包が $\tilde{\alpha}(A,f)$ に含まれるようなものはどれも連結でない．

とくに, X は x において局所連結でない．

証明. Y は $\mathrm{Cl}\ Y \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ なる連結集合とする．このとき, $\omega(Y,f)$ は A 内の連結集合であり, Y が共通点をもつような A の成分と共通点を持つ．だから Y は A の一つの成分とのみ共通点を持ち, x の近傍では有り得ない． □

定理 2.4C. X が局所連結なら各アトラクターは有限個の成分から成り, 各成分はアトラクターである．

証明. 2.4A と 2.4B から出る． □

Remark. 局所連結な空間のアトラクターが局所連結であるとは言えない．

定理 2.4D. A を f のアトラクターとし, $\overline{A} \subset A$ を $\overline{f} \equiv f|A$ のアトラクターとする．このとき $\overline{A}$ は f のアトラクターである．

したがって, A を f の準アトラクターとして, $\overline{A}$ が $\overline{f} \equiv f|A$ の準アトラクターなら, $\overline{A}$ は f の準アトラクターである． □

証明. X に相対的に $\overline{A}$ の閉近傍 N を選んで $N \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ および $N \cap A \subset \tilde{\alpha}(\overline{A},\overline{f})$ となるようにする．たとえば, $\varepsilon = \min\{\rho(A, X \backslash \tilde{\alpha}(A,f); \rho(\overline{A}, A \backslash \tilde{\alpha}(\overline{A},\overline{f})\}$ として, N を $\overline{A}$ の閉 $\varepsilon/2$ 近傍とする．このとき, $x \in \partial N$ に対して $x \in \tilde{\alpha}(A,f) \backslash A$ であるか $x \in A \cap \tilde{\alpha}(\overline{A},\overline{f})$ である．前者の場合, $\omega(x,f^*) \subset \mathrm{Ext}\ \tilde{\alpha}(A,f) \subset \mathrm{Ext}\ N$ であり, 後者の場合, $\omega(x,f^*) \subset A \cap \mathrm{Ext}\ \tilde{\alpha}(\overline{A},\overline{f}) \subset \mathrm{Ext}\ N$ である．だから N は (X における) アトラクター近傍であり, 定理が出る． □

定理 2.4E. X' を f の任意の閉集合とし, A を f のアトラクター (または準アトラクター) とする．このとき $A' \equiv A \cap X'$ は $f' = f|X'$ のアトラクター (または準アトラクター) である．

証明. N を A のアトラクター近傍とする．このとき $N \cap X'$ は A' のアトラクター近傍である． □

3. 鎖回帰集合と Ω 極限集合

3.1. $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖

定義 3.1A. $(x,y) \in X \times X$ および $\varepsilon, t > 0$ が与えられたとき, x から y への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖とは, 集まり $(x = x_1, \cdots, x_{n+1} = y; t_1, \cdots, t_n)$ で, $1 \leq i \leq n$ に対して, $t_i \geq t$ および $\rho(x_i \cdot t_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ を満たすものである．

補題 3.1B. x から y へのおよび y から z への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖があれば x から z への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖がある.

証明. 2つの鎖をつなげればよい. □

3.2. 半順序 $\mathcal{P}(f)$

定義 3.2A. $\mathcal{P}(f) \equiv \{(x, y)|$ 任意の $\varepsilon, t > 0$ に対して x から y への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖がある $\}$.

定理 3.2B. $\mathcal{P}(f)$ は推移関係である.

証明. 補題 3.1B より. □

補題 3.2C. $(x, y) \in \mathcal{P}(f)$ なら, 任意の $\bar{t}$ に対して $(x \cdot \bar{t}, y) \in \mathcal{P}(f)$ である.

証明. $\varepsilon, t > 0$ が与えられたとして x から y への $(\varepsilon, t+|\bar{t}|, f)-$ 鎖を構成する. $x_1 = x$ を $\overline{x}_1 = x \cdot \bar{t}$ で置き換え, t_1 を $\bar{t}_1 = t_1 - \bar{t} (> t)$ で置き換えれば, $x \cdot \bar{t}$ から y への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖が得られる. □

定理 3.2D. $\mathcal{P}(f)^* = \mathcal{P}(f^*)$(1.6 節参照).

証明. $(x, y) \in \mathcal{P}(f)$ とし, $\varepsilon, t > 0$ が与えられたとする. $\varepsilon' \leq \varepsilon$ を選び, $\rho(y, z) < \varepsilon'$ に対して $\rho(y \cdot (-t), z \cdot (-t)) < \varepsilon$ が成り立つようにする. このとき $(x = x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} = y; t_1, \cdots, t_n)$ を x から y への $(\varepsilon', 2t, f)-$ 鎖とすると, 容易にわかるように, $(y = x_{n+1}, x_n \cdot (t_n - \mathrm{t}), x_{n-1} \cdot t_{n-1}, \cdots, x_1 \cdot t_1, x; t, t_n - t, t_{n-1}, \cdots, t_1)$ は y から x への $(\varepsilon, t, f^*)-$ 鎖である. (初期軌道孤を y に加えた. そうしないと鎖はその孤をただ逆戻りする.) □

定理 3.2E. $\mathcal{P}(f)$ は $X \times X$ 内で閉じている.

証明. (x, y) を $\mathcal{P}(f)$ の極限点とし, $\varepsilon, t > 0$ は与えられているとする. 3.2C によれば, $(x \cdot t, y)$ も $\mathcal{P}(f)$ の極限点である. $\rho((x', y'), (x \cdot t, y)) < \varepsilon/2$ となるように $(x', y') \in \mathcal{P}(f)$ を選ぶ. x' から y' への $(\varepsilon/2, t, f)-$ 鎖を選ぶ. $x_{n+1} = y'$ を $\overline{x}_{n+1} = y$ と置き換えれば, x' から y への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖が得られる. また $(x = x_1, x_2 = x'; t_1 = t)$ は x から x' への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖である. 3.1B より x と y は $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖で結べる. だから定理が出る. □

定理 3.2F. $(x, y) \in \mathcal{P}(f)$ なら, $\mathrm{Cl}\ (x \cdot R) \times \mathrm{Cl}\ (y \cdot R) \subset \mathcal{P}(f)$ である.

証明. 3.2C, 3.2D, および 3.2E を応用すればよい. □

定理 3.2G. $x \in \omega(y, f^*)$ なら $(x, y) \in \mathcal{P}(f)$ である.
$y \in \omega(x, f)$ なら, $(x, y) \in \mathcal{P}(f)$ である. このとき $(x, z) \in \mathcal{P}(f)$ であるための必要十分条件は $(y, z) \in \mathcal{P}(f)$ である.

証明. $x \in \omega(y, f^*)$ とし, $\varepsilon, t > 0$ が与えられているとする. $t' > t$ を選んで $\rho(x \cdot t, y \cdot (-t')) < \varepsilon$ とする. このとき, $(x = x_1, x_2 = y \cdot (-t'), x_3 = y; t_1 = t, t_2 = t')$ は x から y への $(\varepsilon, t, f)-$ 鎖である.

$y \in \omega(x, f)$ とする. $(\varepsilon, t) > 0$ が与えられたとき $t' > t$ を選んで $\rho(x \cdot t', y) < \varepsilon$ とする. この

とき $(x,y;t')$ は x から y への求める鎖である．

$(y,z)\in\mathcal{P}(f)$ なら, 3.2B より (x,z) も $\mathcal{P}(f)$ に含まれる．$(x,z)\in\mathcal{P}(f)$ で $\varepsilon,t>0$ が与えられたとき, $\bar{t}$ を選んで $\rho(x\cdot\bar{t},y\cdot t)<\varepsilon$ とする．3.2F により $(x\cdot\bar{t},z)\in\mathcal{P}(f)$ である．また $(y,x\cdot\bar{t};t)$ は y から $x\cdot\bar{t}$ への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖である．だから y から z への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖が存在し, 定理が出る．□

3.3. 鎖回帰集合と同値関係

定義 3.3A. $R(f)\equiv\{x|(x,x)\in\mathcal{P}(f)\}$ とおく．$R(f)$ を鎖回帰集合と呼ぶことにする．

$\mathcal{E}(f)\equiv\mathcal{P}(f)\cap\mathcal{P}(f)^*$ とおく．

定理 3.3B. $R(f)$ は f の閉不変集合であり, 非遊走集合を含み, $R(f)=R(f^*)$ を満たす．

$\mathcal{E}(f)=\mathcal{E}(f^*)\subset R(f)\times R(f)$ は $R(f)\times R(f)$ の中で（したがって $X\times X$ の中で）閉じており, 同値関係である．

証明. $R(f)$ が閉不変であることは 3.2E と 3.2F から出る．$R(f)=R(f^*)$ は 3.2D から出る．$\mathcal{E}(f)=\mathcal{E}(f^*)$ は 3.2D から出る．$\mathcal{E}(f)$ が閉じていることは 3.2E から出る．$(x,y)\in\mathcal{E}(f)$ なら, x も y も $R(f)$ に属す．$x\in R(f)$ なら, $(x,x)\in\mathcal{P}(f)$ であるから, $(x,x)\in\mathcal{E}(f)$ である．$\mathcal{E}(f)$ は定義より対称であり, $\mathcal{P}(f)$ が推移的であるから $\mathcal{E}(f)$ も推移的である．だから $\mathcal{E}(f)$ は $R(f)$ 上の同値関係である．x を非遊走点とし, $\varepsilon,t>0$ とする．このとき, x から x への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖が簡単に構成できる．□

定理 3.3C. $\mathcal{E}(f)$ の同値類は $R(f)$ の成分の和であり, それぞれは, X のたかだか一つの成分と非自明に (non-trivially) 共通点を持つ．

証明. R' を $R(f)$ のある成分とし, $x,y\in R'$ とする．このとき, R' は閉じているから, $(\varepsilon,t)>0$ が与えられると, R の中に有限列 $\{x=x_1,\cdots,x_{n+1}=y\}$ があって $\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon/2$ を満たす．$(x_i,x_i)\in\mathcal{P}(f)$ であるから x_i から x_i への $(\varepsilon/2,t,f)-$ 鎖がある．この鎖の最後の点を x_{i+1} で置き換えれば, x_i から x_{i+1} への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖が得られる．だから x から y への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖があることがわかる．ところで x と y は R' の任意の点であったから, R' 内のすべての点が同値であることがわかる．

$(x,y)\in\mathcal{E}(f)$ のとき, x から y への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖があるが, これは, x と y が任意の ε に対して X 内で「ε 連結」であることを示している．だから x と y は X の同じ成分に含まれる． □

Remark. 上のことは, x と y が $R(f)$ の同じ成分に属することを言ってはいない．なぜなら, 鎖は $R(f)$ に属していないかも知れないからである．ただし, 3.6D を見よ．

3.4. Ω 極限集合

定義 3.4A. $C\subset X$ に対して, $\Omega(C,f)\equiv\{y|(x,y)\in\mathcal{P}(f)$ なる $x\in C$ が存在する $\}$．このとき $\Omega(C,f)=\cup_{x\in C}\Omega(x,f)$ であることに注意しよう．

定理 3.4B. C が閉じていれば, $\Omega(C,f)$ は閉不変集合である．

$\{C_n\}_1^\infty$ が X の閉集合列で $C=\limsup\{C_n\}_1^\infty$ であれば, $\Omega(C,f)\supset\limsup\{\Omega(C_n,f)\}_1^\infty$ で

ある．

<u>証明</u>. $\Omega(C,f)$ は 3.2F により不変集合である．その他は 3.2E から出る．□

定理 3.4C. C が閉じていれば, $\Omega(C,f)\supset\omega(C,f)$ である．

<u>証明</u>. $y\in\omega(C,f)=\cap_{t\in R}\mathrm{Cl}\,\{C\cdot(t,\infty)\}$ とする．このとき $n>0$ が与えられると, $x_n\in C$ があって, $\rho(x_n\cdot n,y)<1/n$ を満たす．$x\in C$ を $\{x_n\}_1^\infty$ の極限点とする．$\varepsilon,t>0$ が与えられたとき, 0 と ε の間に ε' を選んで $\rho(x',x)<\varepsilon'$ なら $\rho(x'\cdot t,x\cdot t)<\varepsilon$ となるようにする．n を選んで $n>2t, 1/n<\varepsilon$ および $\rho(x_n,x)<\varepsilon'$ とする．このとき $(x=x_1,x_2=x_n\cdot t,x_3=y;t_1=t,t_2=n-t)$ は x から y への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖である．だから $(x,y)\in\mathcal{P}$ であり $y\in\Omega(C,f)$ である． □

定理 3.4D. C が閉じていれば, $\Omega(C,f)=\Omega(\omega(C,f),f)$ である．

<u>証明</u>. 3.2G より $\Omega(x,f)=\Omega(\omega(x,f),f)$ である．だから $\Omega(C,f)=\cup_{x\in C}\Omega(\omega(x,f),f)$ である．$x\in C$ のときはいつも $\omega(x,f)\subset\omega(C,f)$ であるから, $\Omega(C,f)\subset\Omega(\omega(C,f),f)$ である．ところが 3.4C および 3.2B より $\Omega(C,f)\supset\Omega(\omega(C,f),f)$ であるから定理が出る． □

定理 3.4E.

(1) $y\in\Omega(x,f)$ のための必要十分条件は $x\in\Omega(y,f^*)$ である．

(2) $(x,y)\in\mathcal{E}(f)$ なら, $\Omega(x,f)=\Omega(y,f)$ である．

(3) $\Omega(x,f)\cap\Omega(x,f^*)$ が空でないための必要十分条件は, $x\in R(f)$ である．このとき, これは正確に x の同値類である．

(4) $x\in R(f)$ に対して, $\omega(x,f)\cup\omega(x,f^*)\subset\Omega(x,f)\cap\Omega(x,f^*)$ である．

(5) どんな場合にも, $\Omega(x,f)$ は共通点を non-trivially にもつ $R(f)$ の任意の成分を含む.

<u>証明</u>. (1) は 3.2D より出る．(2) と (3) は 3.2B と定義より出る．(4) は 3.2G より, (5) は 3.3C より出る． □

3.5. Ω 極限集合の (ε,t) 近似

定義 3.5A. $\Omega'(C,\varepsilon,t,f)\equiv\{y|$ ある $x\in C$ があって, x から y への (ε,t,f) 鎖がある $\}$. $\overline{C}\subset C$ なら $\Omega'(\overline{C},\varepsilon,t,f)\subset\Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ であることに注意しよう．

補題 3.5B. $\Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ は開いており, $\Omega(C,f)$ を含む.

<u>証明</u>. x から y への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖が与えられたとして, $\varepsilon'\equiv\rho(x_n\cdot t_n,y)$ とおく．$\rho(z,y)<\varepsilon-\varepsilon'$ なる z に対して $x_{n+1}=y$ を $\overline{x}_{n+1}=z$ で置き換えれば x から z への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖が得られる．だから $\Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ は開いている．□

補題 3.5C. $\Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ の閉包はアトラクター近傍であり, 対応するアトラクターの ε 近傍を含む.

証明. $y \in \Omega' \equiv \Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ で $\rho(z, y\cdot t) < \varepsilon$ なら $(y,z;t)$ は y から z への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖であるから $z \in \Omega'$ である．$y \in \partial\Omega'$ に対して $\omega(y,f^*)$ の近傍 U を選んで $z \in U$ なら $\rho(z\cdot t, \omega(y,f^*)) < \varepsilon$ となるようにする．このとき各 $z \in U$ は $\omega(y,f^*)$ に $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖によってつながっており (connected to), したがって y へもつながっている．$y \in \partial\Omega'$ であるから y は開集合 Ω' には含まれない．だから $U \cap \Omega' = \emptyset$ および $\omega(y,f^*) \subset \mathrm{Ext}\ \Omega'$ であるから $\mathrm{Cl}\ \Omega'$ はアトラクター近傍である．

$\Omega' \supset Y$ なら証明の最初の文章は $Y \cdot t$ の ε-近傍が Ω' に含まれることを意味する．$\mathrm{Cl}\ \Omega'$ 内のアトラクターである A に対しては $A = A \cdot t$ である．だから補題は証明された． □

定義 3.5D. $\Omega(C,\varepsilon,t,f) \equiv \{x | x \cdot R \subset \Omega'(C,\varepsilon,t,f)\}$.

定理. $\Omega \equiv \Omega(C,\varepsilon,t,f)$ は $\Omega(C,f)$ を含むアトラクターである．$\tilde{\alpha}(\Omega,f)$ は Ω の ε 近傍を含む．とくに, 高々有限個の集合 $\Omega(C,\varepsilon,t,f)$ が異なるだけである．

証明. 異なる集合の数に関する主張以外は3.5B と 3.5C の言い換えに過ぎない．最後の主張を見るにために, このような集合のハウスドルフ距離は少なくとも ε あることを確かめて欲しい．すると結果はハウスドルフ計量を有する X の閉部分集合の空間がコンパクトであるという事実から出る． □

補題 3.5E. アトラクター A と近傍 $U \supset A$ が与えられたとき, $\bar{\varepsilon}, \bar{t} > 0$ があって, $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ および $t \geq \bar{t}$ に対して $\Omega'(A,\varepsilon,t,f) \subset U$ である．このとき, $U \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ として, $\Omega(A,\varepsilon,t,f) = A$ である．

証明. A の近傍 N を選んで $N \subset U$ および $A = \omega(N,f)$ とする．このとき $\bar{t}$ があって $\overline{N} \equiv \mathrm{Cl}\ \{N \cdot [\bar{t},\infty)\} \subset \mathrm{Int}\ N$ を満たす．$\bar{\varepsilon} = \rho(\partial N, \overline{N})$ とおく．$x \in N, \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ および $t \geq \bar{t}$ が与えられたとき, $(x = x_1, \cdots, x_{n+1} = y; t_1, \cdots, t_n)$ を x から y への $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖とする．$x_i \in N$ なら $x_i \cdot t_i \in \overline{N}$ であるから $x_{i+1} \in N$ である．$x_1 \in N$ であるから $x_{n+1} = y \in N$ であって結果が出る． □

3.6. Ω 極限集合の特徴づけ

定理 3.6A. $\Omega(C,f)$ は f の準アトラクターのうち $\omega(C,f)$ を含む最小のものにちょうど一致する．とくに, $\omega(C,f)$ が連結なら $\Omega(C,f)$ も連結である．

証明. 定義より $\Omega(C,f) = \cap_{\varepsilon,t>0}\Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ である．だから $\Omega(C,f)$ は準アトラクター $\cap_{\varepsilon,t>0}$ $\Omega(C,\varepsilon,t,f)$ を含む．一方, $\Omega(C,f)$ は $\Omega'(C,\varepsilon,t,f)$ における閉不変集合であるから, $\Omega(C,\varepsilon,t,f)$ に含まれるはずである．だからこれは後者の共通部分に等しく, 準アトラクターである．3.4D によりこれは $\omega(C,f)$ を含み 3.5E により $\omega(C,f)$ を含む任意のアトラクターに含まれる．準アトラクターの成分は準アトラクターであるから (2.4A 参照), $\omega(C,f)$ の連結性は $\Omega(C,f)$ の連結性を意味する． □

系 3.6B. $\mathrm{Comp}R(f) = \cup\{\tilde{\alpha}(A,f)\backslash A | A$ は f のアトラクター $\}$ である．

証明. A がアトラクターであって $x \in \tilde{\alpha}(A,f)\backslash A$ なら $\omega(x,f) \subset A$ であって 3.6A より $\Omega(x,f) \subset A$ である．だから $x \notin \Omega(x,f)$ かつ $x \in \mathrm{Comp}R(f)$ である．$x \notin \Omega(x,f)$ なら, $\Omega(x,\overline{f})$ を含む

けれども x を含まないアトラクター A がある．このとき $\omega(x,f) \subset \Omega(x,f) \subset A$ であるから，$x \in \tilde{\alpha}(A,f)$ である． □

定理 3.6C. A を f の準アトラクターとし，$\overline{f} = f|A$ とする．このとき，任意の $x \in A$ に対して $\Omega(x,\overline{f}) = \Omega(x,f)$ である．

A^* を f の準リペラーとし，$\overline{f} = f|A^*$ とする．このとき，任意の $x \in A^*$ に対して $\Omega(x,\overline{f}) = A^* \cap \Omega(x,f)$ である．

証明. 第一の場合，2.4D より $\Omega(x,\overline{f})$ は $\overline{f}$ の準アトラクターであるばかりでなく f の準アトラクターでもある．これは $\omega(x,f)$ を含み $\Omega(x,f)$ に含まれるから，3.6A より $\Omega(x,f)$ に等しいはずである．

第二の場合，2.4E より $A^* \cap \Omega(x,f)$ は $\overline{f}$ の準アトラクターであって $\omega(x,f)$ を含みしたがって $\Omega(x,\overline{f})$ を含む (3.6A より)．$\overline{A}^*$ は $\Omega(x,\overline{f})$ を含むアトラクターに双対的な，$\overline{f}$ の任意のリペラーとする．2.4D より $\overline{A}^*$ は f のリペラーでもある．このとき，その (f に関する) 双対的アトラクターは $\Omega(x,f)$ を含むはずであり，$\Omega(x,f) \cap A^*$ を含むはずである．だから $\overline{f}$ の任意のアトラクターで $\Omega(x,\overline{f})$ を含むものは $\Omega(x,f) \cap A^*$ をも含み，したがって $\Omega(x,\overline{f}) = \Omega(x,f) \cap A^*$ である． □

定理 3.6D. $R(f)$ の同値類達はちょうど $R(f)$ の成分達に一致する．

$\hat{f} \equiv f|R(f)$ とすると $\mathcal{P}(\hat{f}) = \mathcal{P}(f)$ である．だから $R(f)$ の点同士を結ぶ $(\varepsilon,t,f)-$ 鎖は $R(f)$ に含まれるように選ぶことができる．

証明. $E(x) = \Omega(x,f) \cap \Omega(x,f^*)$ を x の同値類とする．$\overline{f} \equiv f|\Omega(x,f)$ および $\overline{\overline{f}} \equiv \overline{f}|E(x)$ とおく．3.6C の第一の文章より $\Omega(x,\overline{f}) = \Omega(x,f)$ である ($x \in \Omega(x,f)$ に注意せよ)．2.4E より $E(x) = \Omega(x,f^*) \cap \Omega(x,f)$ は $\overline{f}$ の準アトラクターである．だから 3.6C（第二の文章）より $\Omega(x,\overline{\overline{f}}) = E(x) \cap \Omega(x,\overline{f}) = E(x)$ である．

3.6A より $E(x)$ は連結であり，だから $R(f)$ の成分である (3.3C を利用して)．同様に $E(x)$ は $\Omega(x,\overline{\overline{f}}^*$ に等しい．$\overline{\overline{f}}$ の鎖は $\hat{f}$ 鎖でもあるから $E(x)$ のすべての点は $\hat{f}$ の下で同値であり，$\mathcal{E}(\hat{f})$ の同値類は $R(\hat{f})$ の成分に含まれるから $E(x)$ が $\mathcal{E}(\hat{f})$ の同値類であることが出る． □

4. f の勾配部分

4.1. 軌道上で減少する関数

定義 4.1. X 上の流れ f が与えられたとき，次を定義する:

$\mathcal{D}'(f) \equiv \{g : X \to R | g$ は連続，また $x \in X$ および $t > 0$ に対して $g(x \cdot t) \leq g(x)\}$.

$R'(f) \equiv \{x \in X | g \in \mathcal{D}'(f)$ に対して $t > 0$ があって $g(x \cdot t) = g(x)\}$.

$\mathcal{D}(f) \equiv \{g \in \mathcal{D}'(f) | x \notin R(f)$ および $t > 0$ なら $g(x \cdot t) < g(x)\}$.

4.1B. これらの定義は Auslander[1] から借用した．彼はもっと一般的な状況に興味を持っていた．集合 $R'(f)$ を Auslander は一般化回帰集合と呼び，$R'(f)$ の点を軌道 prolongation によって特徴づけ，その名を正当化した．以下の補題 4.1E は彼の結果と同じタイプのものである (ただ

しもっと簡単であり，ここでの目的に沿っている)．補題 4.1C と 4.1D も彼によってもっと一般の状況のもとで証明されている．

補題 4.1C. $R'(f)$ は閉不変集合である．

証明. $R'(f)$ は, $g \in \mathcal{D}'(f)$ および $t > 0$ に対して $C(g,t) \equiv \{x|g(x\cdot t) - g(x) = 0\}$ と定義される閉集合 $C(g,t)$ の共通部分である．だから $R'(f)$ は閉じている．$x \notin R'(f)$ に対して, $g \in \mathcal{D}'(f)$ が存在して, $t > 0$ に対して $g(x\cdot t) < g(x)$ である．$\bar{t} \in R$ が与えられたとき, $\overline{g}$ を $\overline{g}(x) = g(x\cdot(-\bar{t}))$ で定義する．このとき $\overline{g} \in \mathcal{D}'$ であり, $t > 0$ に対して $\overline{g}((x\cdot\bar{t})\cdot t) = g(x\cdot t) < g(x) = \overline{g}(x\cdot\bar{t})$ である．だから $x \notin R'(f)$ はすべての $\bar{t} \in R$ に対して $x\cdot\bar{t} \notin R(f)$ を意味し, よって Comp $R'(f)$ および $R'(f)$ は不変である． □

補題 4.1D. $\mathcal{D}'(f)$ は (sup norm 距離のもとで, あるいは同等だがコンパクト-開位相のもとで) 完備距離空間であり, $\mathcal{D}(f)$ は $\mathcal{D}'(f)$ 内で Baire の第二カテゴリーの稠密集合を含む．とくに $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$ である．

証明. $\mathcal{D}'(f)$ は, sup norm 距離を持つ X 上の連続関数の空間の閉部分集合である．だから $\mathcal{D}'(f)$ は完備距離空間である．

$R'(f) = X$ なら $\mathcal{D}'(f) = \mathcal{D}(f)$ であって補題が成り立つ．

そうでないとき, m をある固定した正整数とする．$x \in \text{Comp } R'(f)$ に対して, $g(x\cdot 1/m) < g(x)$ なる関数 $g \in \mathcal{D}'$ を選ぶ．g は連続だから, x のコンパクトな近傍 $C(x)$ で $g|C(x) > g|C(x)\cdot 1/m$(点ごとに pointwise) なるものがある．

だから Comp $R'(f)$ の被覆があられ, そこから可算部分被覆 $\{c_N\}_1^\infty$ が得られる．

さて各正の整数 n に対して, $\phi(n,m)$ を集合 $\{g \in \mathcal{D}'(f)|g|C_n > g|C_n\cdot 1/m\}$ とする．C_n はコンパクトであるから, $\phi(n,m)$ は $\mathcal{D}'(f)$ 内で開である．C_n の構成法から, これは空でない．$\overline{g} \in \mathcal{D}'(f)$ および $\varepsilon > 0$ に対して, $g \in \phi(n,m)$ は $\overline{g} + \varepsilon g \in \phi(n,m)$ を意味する．だから $\phi(n,m)$ もまた $\mathcal{D}'(f)$ 内で稠密であり, $\cap_{n=1}^\infty \phi(n,m)$ は Baire の第二カテゴリーの稠密集合であって, この中の g および $x \in \text{Comp } R'(f)$ に対して, $g(x\cdot 1/m) < g(x)$ なる性質を持つ．

$\overline{\phi}(m) \equiv \{g|x \in \text{Comp } R'(f)$ なら $g(x\cdot 1/m) < g(x)\}$ とする．このとき, $\overline{\phi}(m)$ は第二 Baire カテゴリーの稠密集合を含むことは $\cap_{m=1}^\infty \overline{\phi}(m)$ と同様である．しかし, 後者はまさに $\mathcal{D}(\{)$ であるから定理が証明された． □

補題 4.1E. $R'(f) \subset R(f)$.

証明. $\overline{x} \notin R(f)$ と仮定する．3.6B より, アトラクター A で $\overline{x} \in \tilde{\alpha}(A,f)\backslash A$ なるものがある．A^* を双対リペラーとする．

$\rho : X \to [0,1]$ を $\rho\ A^* = 1, \rho|A = 0$ なる任意の連続関数とする．$\overline{\rho}(x) = \sup\{\rho(y)|y \in x\cdot[0,\infty)\}$ と定義する．明らかに, $\overline{\rho}$ は軌道上で減少する．だから連続であるとすれば $\mathcal{D}'(f)$ に属する．

$x \in \tilde{\alpha}(A,F)\backslash A$ に対して $\rho(x) = \delta$ とおく．$C \subset \tilde{\alpha}(A,f)$ を x のコンパクトな近傍で $\rho|C > \delta/2$ なるものとする．A の近傍 u で $g|u < \delta/2$ なるものを選ぶ．$\text{Cl}\{C\cdot(t,\infty)\} \subset u$ を満たす $t > 0$ を選ぶ．このとき, $x' \in C$ に対して $\overline{\rho}(x') = \sup\{\rho(y)|y \in x'[0,\infty]\} = \sup\{\rho(y)|y \in x'\cdot[0,t]\}$

である．ρ は連続で $x' \to x$ のとき $x'[0,\infty] \to x \cdot [0,t]$ であるから $\overline{\rho}$ は x において連続である．

だから $\overline{\rho}$ は $\tilde{\alpha}(A,f)\backslash A$ のすべての点で連続である．明らかにこれは A^* の点でも A の点でも連続である．A の近くの点から出発する正の半軌道は A の近くにいるからである．だから $\overline{\rho}: X \to R$ は連続で, $\mathcal{D}'(f)$ に属する．

明らかに, $\overline{\rho}$ は $\tilde{\alpha}(A,f)\backslash A$ 内のすべての軌道のある点で減少する．だからこの集合, とくに $\overline{x}$ は Comp $R'(f)$ に含まれる．だから Comp $R(f) \subset$ Comp $R'(f)$ であり補題が出る． □

Remark 4.1F. $R'(f) = R(f)$ は一般には成り立たない．たとえば, X を平面の単位正方形とし, f をベクトル場 $\dot{x} = 0, \dot{y} = -xy(1-x)(1-y)$ で生成される流れとする．このとき $R'(f)$ は正方形の境界であり (不動点は明らかに $R'(f)$ に属し, 関数 $g(x,y) = y$ はそのほかのすべての軌道上で減少する), $R(f) = X$ である (非自明なアトラクターはひとつもない).

4.2. 勾配流

定義 4.2A. $R(f)$ が完全不連結 (totally disconnected) のとき, 流れ f は勾配流と呼ばれる．

Note. このとき $R(f)$ は不動点から成り, 点的な (point-like) 成分を持つ．4.1F の例は, 一定でない軌道上で減少する関数が存在し, 一方フィルターづけがない, という意味で「勾配」である．ここではフィルターづけの概念が重要であるという観点である．

定理 4.2B. f が勾配的 (gradient-like) なら $R'(f) = R(f)$ であり, とくに $g \in \mathcal{D}(f)$ に対して g はすべての非一定軌道上で狭義減少である．(このことは「勾配流」の名を正当化している.)

証明. $R(f)$ は不動点から成り, すべての不動点は $R'(f)$ に含まれるから $R'(f) \supset R(y)$ である．逆向きの包含関係は 4.1E から出る．残りは定義よりしたがう． □

4.3. Domination

定義 4.3A. f と f' をそれぞれ X および X' 上の流れとし, h を X から X' の上への連続写像とする．各 $x \in X$ に対して $h(x \cdot [0,\infty)) = h(x) \cdot [0,\infty)$ なら, f は写像 h で f' を支配する (dominate) ということにする．記号では, $f > f'(h)$ と書く．$f > f'$ かつ $f' > f$ なら, f と f' は $\omega-$ 相似ということにする．

補題 4.3B. コンパクト距離空間上の流れの間の関係 $>$ は反射的かつ推移的である．

$f > f'(h)$ とする．このとき Y が f の閉不変集合なら, $h(Y)$ は f' の閉不変集合である．Y が f' の閉不変集合なら, $h^{-1}(Y)$ は f の閉不変集合である．

補題 4.3C. $f > f'(h)$ なら, 任意の $Y \subset X$ に対して $h(\omega(Y,f)) = \omega(h(Y),f')$ である．

証明. X と X' はコンパクトで Hausdorff であるから, 任意の $U \subset X$ に対して $h(\mathrm{Cl}(Y)) = \mathrm{Cl}(h(Y))$ である．

定義 (4.3A) より, $t \in R$ に対して $h(Y \cdot [t,\infty)) = h(Y) \cdot [t,\infty)$ である ($\cdot$ は f にも f' にも使っている).

だから $h(\mathrm{Cl}(C \cdot [t,\infty)) = \mathrm{Cl}(h(C) \cdot [t,\infty))$ および $\cap_{t \in R} h(\mathrm{Cl}(C \cdot [t,\infty)) = \omega(h(C),f')$ である．

集合 $\mathrm{CL}(C\cdot[t,\infty))$ はコンパクトで t の増加とともに減少し, また X' は Hausdorff であるから, $\cap_{t\in R}h(\mathrm{C};(C\cdot[t,\infty))=h(\cap_{t\in R}\mathrm{Cl}(C\cdot[t,\infty))=h(\omega(C,f))$ である．だから定理は証明された．
□

補題 4.3D. $f>f'(h)$ とする．

A' と A'^{*} が f' のアトラクター-リペラーの組なら, $h^{-1}(A')$ と $h^{-1}(A'^{*})$ は f のアトラクター-リペラーの組であり, $h(\tilde{\alpha}(h^{-1}(A'),f)=\tilde{\alpha}(A',f')$ である．

A と A^{*} が f のアトラクター-リペラーの組で $h(A)\cap h(A^{*})=\emptyset$ なら, $h(A)$ と $h(A^{*})$ は f' のアトラクター-リペラーの組であり, $h(\tilde{\alpha}(A,f)=\tilde{\alpha}(h(A),f)$ である．

証明. f の 2 つの閉不変集合 A と A^{*} がアトラクター-リペラーの組を構成するための必要十分条件は, これらが互いに素であって $x\in\mathrm{Comp}(A\cup A^{*})$ から $\omega' x,f^{*})\subset A^{*}$ および $\omega(x,f)\subset A$ が言えるときであることを観察して欲しい．A' と A'^{*} が f' のアトラクター-リペラーの組なら, $h^{-1}(A')$ と $h^{-1}(A'^{*})$ は互いに素な閉不変集合である．また, $x\in\mathrm{Comp}(h^{-1}(A')\cup h^{-1}(A'^{*}))$ から $h(x)\in\mathrm{Comp}(A'\cup A'^{*})$ が言え, 4.3C を適用すれば, $h^{-1}(A')$ と $h^{-1}(A'^{*})$ が f のアトラクター-リペラーの組をなすことがわかる．

A と A^{*} が f のアトラクター-リペラーの組なら, $h(A)$ と $h(A^{*})$ は素であり, $C(??)$ から $h(A)$ と $h(A^{*})$ が f のアトラクター-リペラーの組をなすことがしたがう．□

定理 4.3E. $f>f'(h)$ ならすべての $x\in X$ に対して $h(\Omega(x,f))\subset\Omega'(h(x),f')$ および $h(R(f))\subset R(f')$ である．

証明. $\Omega(h(x),f)$ は $\omega(h(x),f')=h(\omega(x,f))$ を含むアトラクターの共通部分であり, アトラクターの逆像はアトラクターであるから, $h^{-1}(\Omega(h(x),f'))$ は明らかに $\Omega(x,f)$ を含む．$R(f)$ に関する結果は $\Omega-$ 極限集合に関する結果から出る． □

定理 4.3F. f' が勾配流で $f>f'(h)$ なら, $h(R(f))=R(f')$ である．

証明. $x'\in R(f')$ なら, x' は f' の不動点である．だから $h(x)=x'$ なら $h(\omega(x,f))=x'$ である．$\omega(x,f)\subset R(f)$ であるから, $h(R(f))\supset R(f')$ であり, 4.3E により定理は証明された．□

4.4. f の勾配部分

定義と Remarks 4.4A. $\overline{\mathcal{E}}(f)\equiv\mathcal{E}(f)\cup\{(x,x)|x\in X\}$ とおく．このとき $\overline{\mathcal{E}}(f)$ は X 上の同値関係であり, 各同値類は Comp $R(f)$ の点であるか, $R(f)$ の成分である．また $\overline{\mathcal{E}}(f)$ は $X\times X$ において閉じているから同値類は X の上半連続な分解から成る閉集合である．

$\overline{X}$ を $\mathcal{E}$ の同値類の集合とし $\pi:X\to\overline{x}$ は各点をその同値類へ送るものとする．集合 $u\subset\overline{x}$ は $\pi^{-1}(u)$ が開のとき開と定義する．このとき開集合達は $\overline{x}$ がコンパクトな距離空間となるように $\overline{x}$ 上に位相を構成する．

補題 4.4B. $\pi(R(f))$ は $\overline{X}$ の完全不連結部分集合である．

証明. $U\subset X$ を $\partial U\cap R(f)=\emptyset$ なる開集合とする．$x\in\pi^{-1}(\pi(U))$ と仮定し, $y\in U$ を $\pi(y)=\pi(x)$ とおく．このとき $x=y$ であるか x と y は $R(f)$ の同じ成分に属すかどちら

かである．どちらにしても (後者の場合 $\partial U \cap R(f) = \emptyset$ を用いて), $x \in U$ である．だから, $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ であり, とくに開いている．$\pi(R(f))$ の 2 つの点が与えられたとき, $R(f)$ の 2 つの成分が対応する．境界が Comp $R(f)$ に属するような X の素な開集合を選び各々が成分の一つを含むようにする．このときこれら 2 つの開集合の像は素であって $\overline{X}$ において開であり, $\overline{x} \backslash \pi(R(f))$ 内に境界を持つ．また各々は $\pi(R(f))$ 内に与えられた点の一つを含む．だから $\pi(R(f))$ は完全不連結である．□

定義 4.4C. $\overline{x} \in \overline{X}$ に対して, $\hat{f}(\overline{x}, t) \equiv \pi(\pi^{-1}(\overline{x}) \cdot t)$ と定義する．

補題. すべての $\overline{x}$ および t に対して, 集合 $\hat{f}(\overline{x}, t)$ はちょうど一点から成る．また $\overline{x} \in \hat{f}(\overline{x}, t)$ のための必要十分条件は $\overline{x} \in \pi(R(f))$ である．

証明. $\overline{x} \notin \pi(R(f))$ なら, $\pi^{-1}(\overline{x})$, したがって $\pi^{-1}(\overline{x}) \cdot t$ は $R(f)$ に属さないただ一つの点から成る．このとき $\pi(\pi^{-1}(\overline{x}) \cdot t)$ は $\overline{x}$ には等しくないただ一つの点から成る．$\overline{x} \in \pi(R(f))$ なら, $\pi^{-1}(\overline{x})$ は f のもとで不変であり, だから $\pi^{-1}(\overline{x}) \cdot t = \pi^{-1}(\overline{x})$ かつ $\hat{f}(\overline{x}, t) = \{\overline{x}\}$ である．□

定義 4.4D. $\overline{f} : \overline{X} \times R \to \overline{X}$ を $\overline{f}(\overline{x}, t) \in \hat{f}(\overline{x}, t)$ で定義する．$\overline{f}$ を f の勾配部分と呼ぶ．

定理. $\overline{f}$ は $\overline{X}$ 上の $f > \overline{f}(\pi)$ なる勾配流である．$\overline{\overline{f}}$ が f に支配される任意の勾配流なら, $\overline{f}$ は $\overline{\overline{f}}$ を支配する．

とくに, $\overline{f}$ の不動点は $R(f)$ の成分と一対一に対応する．

証明. 定義より, 次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccc} X \times R & \xrightarrow{f} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi\times\mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \overline{X} \times R & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{X} \end{array}$$

だから $\overline{f}$ が流れなら, これは f によって支配される．ふたたび定義より, すべての $\overline{x}, t_1$ および t_2 に対して $\overline{f}(\overline{x}, t_1 + t_2) = \overline{f}(\overline{f}(\overline{x}, t_1), t_2)$ および $\overline{f}(\overline{x}, 0) = \overline{x}$ である．

$\overline{x}_n \to \overline{x}$ および $t_n \bar{t}$ なら, $\limsup\{\pi^{-1}(\overline{x}_n)\} \subset \pi^{-1}(\overline{x})$ であるから, $\limsup\{\pi^{-1}(\overline{x}_n) \cdot t_n\} \subset \{\pi^{-1}(\overline{x}) \cdot t$ である．だから $\limsup\{\pi(\pi^{-1}(\overline{x}_n) \cdot t_n)\} = \limsup\{\overline{x}_n \cdot t_n\} \subset \pi(\pi^{-1}(\overline{x}) \cdot t) = \overline{x} \cdot t$ であり, 後者は点であるから $\overline{x}_n \cdot t_n \to \overline{x} \cdot t$ である．だから $\overline{f}$ は連続で, 流れも連続である．

次に A および A^* が f のアトラクター-リペラーの組であるとする．$R(f)$ のどの成分も A と A^* の両方同時には共通点を持たないから, $\pi(A) \cap \pi(A^*) = \emptyset$ である (4.4A)．だから $\pi(A)$ と $\pi(A^*)$ は $\overline{f}$ のアトラクター-リペラーの組を構成し $\pi(\tilde{\alpha}(A, f)) = \tilde{\alpha}(\pi(A), \overline{f})$ である (4.3D)．とくに, $\pi(\mathrm{Comp}\ R(f)) = \pi(\cup\{\tilde{\alpha}(A, f) \backslash A | A$ は f のアトラクター $\}) = \cup\{\tilde{\alpha}(-(A), \overline{f}) \backslash \pi(A)\} \subset$ Comp $R(\overline{f})$ である．また 4.3E より, $\pi(R(f)) \subset R(\overline{f})$ である．だから $\pi(R(f)) = R(\overline{f})$ である．

4.4C(補題) より, $\pi(R(f))$ は $\overline{f}$ の不動点の集合にちょうど等しい．この集合は 4.4B により完全不連結であるから, $\overline{f}$ は勾配流である．また 4.4C から, $R(\overline{f})$ と $R(f)$ の成分の間には一対一の対応がある．

$\overline{\overline{f}}$ を別の勾配流とし, $f > \overline{\overline{f}}(h)$ であれば, $R(f)$ の各成分は $R(\overline{\overline{f}})$ の単一の点に写されるはずである (4.3E より, また $R(\overline{\overline{f}})$ が不動点から成ることより)．だから写像 $\overline{h} : \overline{X} \to \overline{X}$ を

$\overline{h}(\overline{x}) = h(\pi^{-1}(\overline{x}))$ で定義できる．このとき簡単にわかるように, $\overline{h}$ は連続で, $\overline{f} > \overline{\overline{f}}(\overline{h})$ である．
□

定理 4.4E. f と f' が $\omega-$ 相似なら, これらの勾配部分もそうである．

<u>証明</u>. $f > f'(h)$ および $f' > f(h')$ と仮定し, $\overline{f}$ と $\overline{f'}$ は支配写像 π と π' の勾配部分とする．このとき, $f > \overline{f'}(\pi' \circ h)$ であるから, $\overline{f} > \overline{f'}$ である．同様に $\overline{f'} > \overline{f}$ である． □

5. Morse 分解とフィルターづけ

定義 5.1. s が準アトラクターと準リペラーの共通部分なら, s は準 Morse 集合と呼ばれる．
s がアトラクターとリペラーの共通部分なら, s は Morse 集合と呼ばれる．

Note. 準 Morse 集合は Morse 集合の共通部分である．

補題 5.2. s が準 Morse 集合であるための必要十分条件は $s = \Omega(s, f) \cap \Omega(s, f^*)$ である．

<u>証明</u>. 任意の閉集合 C に対して $\Omega(C, f)$ は準アトラクターであり, $\Omega(C, f^*)$ は準リペラーである．だから $\Omega(C, f) \cap \Omega(C, f^*)$ は Morse 集合である．
$s = A \cap \hat{A}^*$ と仮定する．ここで A は準アトラクターで, $\hat{A}^*$ は準リペラーである．s は不変であるから $\omega(s, f) = s$ であり, ゆえに $s \subset \Omega(s, f) \subset A$ および $s \subset \Omega(s, f^*) \subset \hat{f}^*$ である．だから $s = \Omega(s, f) \cap \Omega(s, f^*)$ である． □

補題 5.3. s と $\overline{s}$ が準 Morse 集合で $s \cap R(f) = \overline{s} \cap R(f)$ なら $s = \overline{s}$.

<u>証明</u>. コンパクトな距離空間 Y の任意の流れ f に対して, $\Omega(R(f), f) = Y$ であることを観察してほしい．すなわち, $\Omega(R(f) < f)$ は準アトラクターである．Y における補集合が空でなければ, それは閉不変集合を含むはずであるから, それらはどれも $R(f)$ と非自明に交わる．
次に, $x \in R(f|\overline{s})$ なら, x は $R(f)$ に含まれ, よって $\overline{s} \cap R(f)$ に含まれ, s に含まれる．だから $\Omega(s, f) \supset \Omega(R(f|\overline{s}), f) \supset \Omega(R(f|\overline{s}), f|\overline{s}) = \overline{s}$ である．同様に, $\Omega(s, f^*) \supset \overline{s}$ であり, よって $s \supset \overline{s}$ である．s と $\overline{s}$ の役割を入れ換えれば結果が出る． □

補題 5.4. s が Morse 集合であるための必要十分条件は $s = \Omega(s, f) \cap \Omega(s, f^*)$ であって, $s \cap R(f)$ が $R(f)$ 内で閉かつ開であることである．

<u>証明</u>. $s = A \cap \hat{A}^*$ と仮定する．ここで A はアトラクターで, $\hat{A}^*$ はリペラーである．5.3 より, $s = \Omega(s, f) \cap \Omega(s, f^*)$ である．また, $A \cap \hat{A}^* \cap R(f) = \tilde{\alpha}(A, f) \cap \tilde{\alpha}(\hat{A}^*, f^*) \cap R(f)$ である．$\tilde{\alpha}(A, f) \backslash A$ と $\tilde{\alpha}(\hat{A}^*, f^*) \backslash \hat{A}^*$ は $R(f)$ と素だからである．だから $s \cap R(f)$ は $R(f)$ 内で閉かつ開である．
そこで $s \cap R(f)$ は $R(f)$ 内で閉かつ開であるとし, $s = \Omega(s, f) \cap \Omega(s, f^*)$ と仮定する．u は s を含む開集合で $u \cap R(f) = s \cap R(f)$ なるものとする．$\mathrm{Comp}(u) \cap \Omega(s, f^*) \subset \mathrm{Comp}\omega(s, f)$ であるから, 最初の集合に含まれる x に対して $\Omega(s, f)$ を含むが x を含まないアトラクター $A(x)$ がある．$\mathrm{Comp}(u) \cap \Omega(s, f^*)$ はコンパクトであるから, $\Omega(s, f)$ を含むアトラクターの有限の集まり $A_1, \ldots, A_n$ があって, それらの補集合は $\mathrm{Comp}(u) \cap \Omega(s, f^*)$ を被覆する．このとき,

$A \equiv A_1 \cap \cdots \cap A_n$ は $\Omega(s,f)$ を含むアトラクターであって $\mathrm{Comp}(u) \cap \Omega(s,f^*)$ と素である．

同様に, $\Omega(s,f^*)$ を含むリペラー $\hat{A}^*$ で $\mathrm{Comp}(u) \cap A$ と素なものを見つけることができる．このとき $A \cap \hat{A}^* = \overline{s}$ は u に含まれる Morse 集合であって s を含む．また, $s \cap R(f) = u \cap R(f) \supset \overline{s} \cap R(f) \supset s \cap R(f)$ であるから $s \cap R(f) = \overline{s} \cap R(f)$ である．5.3 より, $s = \overline{s}$ であり, 結果が出る．□

定義 5.5. f に関する X の Morse 分解とは Morse 集合の順序つき集まり $\{s_1, \ldots, s_n\}$ であって, つぎを持たすものである．

(a) $R(f) = \cup_1^n R(f) \cap s_i$,

(b) $i < j$ に対して, $\Omega(s_i, f) \cap s_j = \emptyset$ かつ $\Omega(s_j, f^*) \cap s_i = \emptyset$.

定義. f に関する X のフィルターづけとは f のアトラクターの有限な増大列 $\emptyset = A_0, \ldots, A_n = X$ である．

定理 5.6. フィルターづけと Morse 分解には一対一の対応があり, フィルターづけ $\{\emptyset = A_0, \ldots, A_n = X\}$ には $s_i = A_i \cap A_{i-1}^*, i = 1, \ldots, n$ なる Morse 分解 $s_1, \ldots, s_n$ が対応する．

このとき Morse 分解 $s_1, \ldots, s_n$ にはフィルターづけ $A_i = \Omega(s_1 \cup \cdots \cup s_i, f), i = 1, \ldots, n$ および $A_0 = \emptyset$ が対応する．

<u>証明</u>. $\{\emptyset = A_0, \ldots, A_n = X\}$ をフィルターづけとする．集合達 $s_i \equiv A_i \cap A_{i-1}^*$ は明らかに互いに素な Morse 集合であって, $i < j$ ならいつでも $\Omega(s_i, f) \cap s_j = \Omega(s_j, f^*) \cap s_i = \emptyset$ を満たす．$x \in R(f)$ とする．このときある i に対して, $x \in A_i$ かつ $x \notin A_{i-1}$ である．$x \notin A_{i-1}$ かつ $x \in R(f)$ であるから $x \notin \tilde{\alpha}(A_{i-1}, f)$ である．だから $x \in A_{i-1}^*$ であり, ゆえに $s_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ である．だから $\cup s_i \cap R(f) = R(f)$ であり, $\{s_i, \ldots, S_n\}$ は Morse 分解である．

次に $\{s_1, \ldots, s_n\}$ を Morse 分解とし, $i = 1, \ldots, n$ に対して $A_i \equiv \Omega(s_1 \cup \cdots \cup s_i, f)$ および $A_0 = \emptyset$ とおく．このとき, $A_0, \ldots, A_n$ は明らかに準アトラクターの減少列である．

$j > i$ とする．このとき $k = 1, \ldots, i$ に対して $\Omega(s_k, f) \cap s_j = \emptyset$ であるから, $A_i = \Omega(s_1, \ldots, s_i, f) = \cup_{k=1}^i \Omega(s_k, f)$ は s_j と素である．だから $A_i \cap R(f) = \cup_{k=1}^i s_k \cap R(f)$ であり, これは $R(f)$ の閉かつ開部分集合である．A_i は準アトラクターであるから, A_i を含むアトラクター $\overline{A}_i$ で, $\overline{A}_i \cap R(f) = A_i \cap R(f)$ なるものがあるはずである．すると 5.3 より $A_i = \overline{A}_i$ であり, したがってアトラクターである．だから $\{\emptyset = A_0, \ldots, A_n = X\}$ はフィルターづけである．

A_i は $s_1, \ldots, s_i$ を含み $s_{i+1}, \ldots, s_n$ と素であるから, $A_i \cap A_{i-1}^*$ は s_i を含む Morse 集合であって $j \neq i$ に対して s_j と素である．これは $A_i \cap A_{i-1}^* \cap R(f) = s_i \cap R(f)$ を意味するから, 5.3 より $s_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ であり, 一対一対応が確立された．□

References

[1] J.Auslander. Generalized recurrence in dynamical systems. *Contr. Diff. Eqs.* **3** (1964), 65-74.

[2] R.Churchill. Isolated invariant sets in compact metric spaces. *J. Differential Equations.*

[3] C.Conley. On the continuation of invariant sets of a flow. *Proc. Intern. Congr. Mathematicians* 1970. Gauthier-Villars, Paris(1971), 909-913.

[4] C.Conley. On a generalization of the Morse index. *Proc. NRC-MRC Conf. on ordinary Differential Equations*, Washington, DC, June 1971. Academic Press, New York(1972), 27-33.

[5] C.Conley. Some abstract properties of the set of invariant sets of a flow. *Illinois J. Math.* **16** (1972), 663-668.

[6] C.Conley & R.Easton. Isolated invariant sets and isolating blocks. Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 35-61.

[7] J.Montgomery. Some perturbation theorems for flows on a compact metric space. *Thesis*. University of Wisconsin(1971).