谷川清隆 訳

*Commun. Math. Phys.* **99** (1985), 177-195

# アトラクターの概念について
# On the concept of attractor

John Milnor

**要約**

軌道の確からしい（probable）漸近的ふるまいに基づいて,「アトラクター」の概念の新しい定義を提唱する. この定義は十分広いので, 滑らかでコンパクトな力学系ならどれも最低一つのアトラクターを持つことになる.

## 0. 序

アトラクターは 20 年程前に導入されて以来, 力学系について考えるときに, その役割の重要性はますます増大している. にもかかわらず, その最も有用な定義に関しては, 一致が見られない. 1 節では, 文献中に現れるいくつかの定義を比較する. 2 節で, ほとんどどの初期条件についてもあてはまる漸近的ふるまいに基づいて, これらに代わる定義を提唱する. 残りの二つの節で, 多数の例によってこの定義を説明し, これらのアトラクターの安定性と頑丈さ（robustness）について議論する. 3 つの補遺をつけた. 第一の補遺では, 互いに緊密に関連する純粋に位相的な定義同士を比べ, 第二ではテストケースとして, 区間の実 2 次写像を調べ, 第三ではストレンジアトラクターについて議論する.

## 1. 歴史

Auslander, Bhatia, and Seibert(1964) によれば：

> 常微分方程式の位相的性質を調べるにあたって, コンパクトな不変集合（これは臨界点やリミットサイクルの一般化とみることができる）の安定性の理論が中心的役割を果たす. ... コンパクトな不変集合 $M$ のリャプーノフ安定性（あるいは単に安定性）とは $M$ の十分近くから出発するどの軌道も $M$ の或るはじめに与えた近傍内に留まることとする. 集合 $M$ が漸近安定であるのは, それが安定であって, しかも「アトラクター」であるとき, すなわち, $M$ の... ある近傍内のすべての軌道が $M$ に近づくときである.

(La Salle and Lefschetz(1961, p.31) と比較せよ.) アトラクターという言葉は滑らかな流れにおける一つの不動点に適用されて, すでに Coddington and Levinson(1955) や Mendelson(1960) によって使われていた. しかし, 複数の点からなるアトラクターは Auslander-Bhatia-Seibert の論文で初めて調べられたようだ. 彼らは不安定な場合, すなわち, 軌道がアトラクターの近くから出発してアトラクターに再び収束する前に遠くまで歩き回ってくる場合を考えた. 4 節の例 1 を比較して見よ. 彼らの定義はときどき利用されているが（La Salle,1976, Hirsch,1984 お

よびたぶん Smale,1977 を見よ）, 広く受け入れられてはおらず, その後のたいての人々は定義の中に何らかの安定性を要請している. Smale(1967) は, よく読まれている彼の概観的な論文において, 公理 $A$ アトラクターともいうべきもっと複雑な対象物を定義した. Smale のアトラクターは, コンパクトな多様体からそれ自身への滑らかな写像 $f$ における「双曲集合」であって, 稠密な軌道を含み, 周期点がいたるところ稠密で, かなり厄介な安定性条件, すなわち, アトラクター $A$ は近傍 $U$ を持ち, $A$ は像 $f^m(U), m > 0$ の共通部分に等しいという条件, を満たす. Williams(1968) は関連はするが, もっと簡単な定義を与えた：

> $\Omega(f)$ の部分集合 $A$ は, それが分解不可能 (indecomposable) で, $f(U) \subset U$ かつ $\cap_{i>0} f^i(U) = A$ なる近傍 $U$ があるとき, $f$ のアトラクターである.

ここで $\Omega(f)$ は $f$ の非遊走集合であり, また $f$ 不変な閉集合が分解不可能とは, 二つの素な閉不変部分集合の直和でないときである. アトラクターの概念が非常な興味を呼び起こしたのは, Ruelle and Takens(1971) が流体の乱流的ふるまいが「ストレンジ」アトラクターによって引き起こされているかもしれないと示唆したときである. 実は, この考えを支持する明白な例がずっと以前に Lorentz(1963) によって計算されていた. Ruelle and Takens の用いたアトラクターの定義も, Smale のと同様, 安定性に関し, 厄介な形をしている：

> 非遊走集合 $\Omega$ の閉部分集合 $A$ は, 近傍 $U$ があって $\cap_{t>0} D_{X,t}(U) = A$ のときアトラクターである.

ここで記号 $D_{X,t}$ はベクトル場 $X$ によって生成される滑らかな多様体上の流れを表す. (この条件は漸近安定性を意味しないことに注意しよう. たとえば, Besicovitch, 1937 によれば, 原点を不動にする平面の同相写像があって, 零点でないどの軌道もいたるところ稠密であるにもかかわらず, 単位円盤の相続く像の共通部分が原点である. Anosov and Katok(1970) も見よ.)

筆者の論点は, 以上挙げた定義がみな厳しすぎるということである. というのは, これらの定義からすると, 多くの興味深い例が排除されてしまう. さらに, 多くの場合, これらの定義にしたがうと, 流れや写像の像を追って行ったときに, たいていの点が現実にはどこへ行くのかを記述する便利な言葉がないという厄介な状況に陥る. この点を説明するために, 3 節では, 上の定義によればアトラクターがまったく存在しないけれどもほとんどすべての軌道が唯一のコンパクトな集合に収束するような区間の 2 次写像について述べる. もっと厳しくない定義を Guckenheimer(1976) が提出した. それによると, アトラクターが持つべきなのは：

> ... $X$ によって生成される流れのもとで前方向に不変な近傍の基本系.

Auslander, Bhatia, and Seibert の言葉で言えば, これはリャプーノフ安定性の条件である (4 節参照). この性質を持つ集合は重要で有用である. しかしながら, リャプーノフ安定な集合がすべてアトラクターと呼ばれるべきだとは筆者は思わない. 例がある. 原点に収束する或る同心円の集まり上では恒等写像に帰着するが, その他の点では原点から点を少し遠ざけるような平面上の可微分写像または流れを考えよう. このとき, 原点はリャプーノフ安定であるから Guckenheimer の定義によればアトラクターと呼ばれるべきであるが, 原点は他のどの点も引き寄せない.

文献にはほかにも多くのアトラクターの定義がある. 筆者の好みのものは Collet and Eckmann(1980) によるものである. 彼らは写像 $f$ のアトラクターを非公式に次のように定義する：

$f$ の作用のもとでたいていの点が向かう集合

この考えが今回の論文の基礎になっている．もっと別の議論やその他の定義に関しては, Conley(1978), Guckenheimer and Holmes(1983, 5.4 節), Kan(1984), Ruelle(1981,1983) や Zeeman(1983) を参照してほしい．

**2．アトラクター, 極小アトラクター, および尤極限集合 (likely limit set)**　$M$ を滑らかでコンパクトな多様体とする. 境界があってもよい. $f$ は $M$ から $M$ の中への連続写像とする. 記号 $f^n = f \circ \cdots \circ f$ は $f$ の $n$ 回目の繰り返しとする. 点 $x \in M$ の $\omega$ 極限集合 $\omega(x)$ は $x$ の相続く像の列 $x, f(x), f^2(x), \ldots$ のすべての集積点の集まりであることを思い起こそう. 位相空間 $M$ に何らかの距離を選ぶと, $\omega(x)$ は, $f^n(x)$ から $S$ の一番近い点までの距離が $n \to \infty$ のときゼロに収束するような最小の閉集合 $S$ としても記述できる. $M$ 上の連続な流れの場合もまったく同様に $\omega$ 極限集合が定義できる. $\omega(x)$ は常に空でない閉集合であって, $\omega(f(x)) = \omega(x)$ であることに注意しよう. さらに, $\omega(x)$ はいつも非遊走集合 $\Omega(f)$ に含まれる.

$M$ 上に, どんな座標近傍に制限してもリュベーグ測度に同値な測度 $\mu$ を選ぼう. これは 1 の分割を用いてまたはリーマン計量に同伴する体積形式を用いて構成できる. 特定のどの測度を用いるかは問題でない. なぜなら, たいていは測度ゼロの集合と測度正の集合を区別するだけだからである.

<u>定義</u>. 閉部分集合 $A \subset M$ は次の二つの条件を満たすとき <u>アトラクター</u> と呼ばれる:

(1) <u>吸引領土</u>(realm of attraction) $\rho(A)$, すなわち $\omega(x) \subset A$ なる点 $x \in M$ すべての集合, は厳密に正の測度を持つ.

(2) 厳密に小さな閉集合 $A' \subset A$ で $\rho(A')$ が $\rho(A)$ と測度ゼロの集合の不定性を除いて一致するものはない.

第一の条件は, でたらめに選ばれた点が $A$ に吸引される確率が正であることを言い, 第二の条件は, $A$ のどの部分も本質的な役割を果していることを言っている.

<u>注意</u>．文献では, ふつう, 集合 $\rho(A)$ が開集合の場合には「ベイスン」(basin of attraction) とよばれ, 低次の滑らかな多様体の場合には「安定多様体」と呼ばれている. これらの用語を避けたのは, 我が集合 $\rho(A)$ が一般に開集合でないし (3 節参照), もちろん低次の多様体でもないからである. 任意の閉集合 $A$ が与えられたとき, $\rho(A)$ が必然的にボレル集合 (あるいは正確に言えば, 可算個の $\sigma$ コンパクト集合の共通部分) であること, したがって可測であることを確かめるのは容易である.

アトラクターの基本的性質は次の通りである. アトラクター $A$ は必ず空でない閉集合であって, 非遊走集合 $\Omega(f)$ に含まれ, $f(A) = A$ である. アトラクターの有限個の和はまたアトラクターである. もっと一般に, アトラクターの任意個の和集合の閉包はアトラクターである. 証明は簡単である. アトラクターがいつも存在することを示すために, とくに重要なアトラクターを構成しよう.

<u>定義</u>．尤極限集合 (likely limit set)$\Lambda = \Lambda(f)$ とは測度ゼロの集合の外にあるどの点 $x \in M$ に対しても $\omega(x) \subset \Lambda$ なる性質を持つ $M$ の最小の閉部分集合である.

**補題 1.** 尤極限集合 $\Lambda$ はきちんと定義されており, $f$ のアトラクターである. 事実, $\Lambda$ は他のす

べてを含む唯一の最大のアトラクターである.

証明のスケッチ. $\{U_i\}$ を $M$ の開部分集合達の可算基とし, $U$ はほとんどすべての $x$ に対して $U_i \cap \omega(x) = \emptyset$ であるような $U_i$ の和集合とする. このとき, ほとんどすべての $x$ に対して $U \cap \omega(x) = \emptyset$ である. $U$ の補集合はいま求めている尤極限集合である. この先の議論は一直線である. □

$f$ が保測写像であれば, すなわち, 各可測な集合 $S$ に対して $\mu(S) = \mu(f(S))$ であれば, $\Lambda(f)$ は多様体 $M$ 全体に等しい. さらに, 各アトラクターは測度ゼロの集合を除いてそれぞれ吸引領土と一致する. この場合, この種の構造物はたぶんそれほど興味を引かない. しかしながら, $\Lambda$ が $M$ の真部分集合のときは, ほとんどすべての軌道の漸近的ふるまいを調べるためのよい道具になる.

もっと一般的にアトラクターを構成するやり方がある. $S \subset M$ を測度正の任意の部分集合とするとき, $S$ のほとんどすべての点 $x$ の $\omega(x)$ を含む $M$ の最小の閉部分集合として, $\Lambda(f, S)$ を定義する. $\Lambda(f, S)$ がきちんと定義されており, これがアトラクターであることを確かめるのは容易である. これの吸引領土が測度ゼロの集合を除いて $S$ を必然的に含むことに注意しよう. 明らかに, どのアトラクターもこのやり方で構成できる. ある特別な場合がとくに興味深い.

**補題 2.** $S$ が測度正のコンパクトな集合で $f(S) \subset S$ を満たすとき, $S$ は必ず少なくとも一つのアトラクターを含む.

証明. なぜなら, $\Lambda(f, S)$ はアトラクターであり, 明らかに $S$ に含まれる. □

とくに興味深いのは極小アトラクター, すなわち, アトラクターを真部分集合として含まないアトラクターである. 明らかに, 閉集合 $A \subset M$ が極小アトラクターであるための必要十分条件は
(1) 吸引領土 $\rho(A)$ は正の測度を持つ,
(2) 厳密に小さな閉集合 $A' \subset A$ で $\rho(A')$ が正の測度であるようなものがない.

$f$ の異なる極小アトラクターの数は高々可算個である. $A$ が極小アトラクターのとき, $\rho(A)$ 内のほとんどすべての $x$ に対して $\omega(x)$ は正確に $A$ に等しいことに注意しよう. $f$ の極小アトラクターの和が尤極限集合 $\Lambda$ 全体に等しいか, あるいはすくなくとも $\Lambda$ 内でいたるところ稠密であるようなたくさんの興味深い場合がある.

**補題 3.** 尤極限集合 $\Lambda$ が有限個の互いに素な極小アトラクター $A_1, \ldots, A_n$ の直和であるとする. このとき, 対応する吸引領土 $\rho(A_i)$ は測度ゼロの集合を除いて, 互いに素な測度の正の集合への $M$ の分割を形成する. どのアトラクターも極小アトラクターの和であり, $M$ 内のほとんどすべての点 $x$ に対して極限集合 $\omega(x)$ はちょうど或る $A_i$ に等しい.

証明. 各 $A_i$ の近傍 $U_i$ を選んで $f(U_i)$ が $U_i, i \neq j$ と互いに素であるようにし, $U$ を $U_i$ の和集合とする. このとき, ほとんどすべての軌道 $x_0, x_1, \ldots$ は $t$ が十分大きいとき, $x_t \in U$ を満たす. だから, $t$ が十分大きいとき, $x_t$ はどれか一つの $U_i$ に属する. この後の証明は一直線である. □

この補題が適用できる場合には, 極小アトラクターの集まりは非常に便利な道具となる. しかしながら, 極小条件が成り立つことを示すのは非常に難しく, また, $f$ が極小アトラクターを

持つという保証もない．恒等写像や 1 節の同心円写像が反例である．また, 2 変数の多項式写像

$$(c, y) \mapsto (c, y^2 - c)$$

はもっと興味深い反例である (1 図参照)．十分な数の極小アトラクターがなかったり, 極小アトラクターが判っていない場合, もっと一般のアトラクターの概念にたち帰る必要がある．

図 1

**3．ファイゲンバウムアトラクター**

この節では, 2 節の定義によれば唯一のアトラクターを持つけれども, 1 節のたいていの定義によればまったくアトラクターを持たないような滑らかな写像を記述することによって, 上で述べた考えを説明する．$c = 1.401155189...$ は実 2 次写像 $x \to x^2 - c$ が無数の異なる周期点を有するような最小の実数とする．この写像 $f(x) = x^2 - c$ はファイゲンバウムによって調べられた．というのは, この写像は安定な周期的ふるまいからカオス的ふるまいへの移行点にあるからである．写像の定義域をコンパクトにするため, 原点を含む区間 $I$ で $f(I) \subset I$ なるものをとり, $f$ は $I$ から $I$ の中への写像とする (2 図参照).

$f$ のもとでのゼロの軌道はほとんど周期的な点列であって, 以下のように記述できる (Misiurewicz, 1979 参照)．数 $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ はすべて異なる．しかしながら, 差 $a_m - a_n$ は $m - n$ が 2 の高次のべきで割り切れるときはいつも非常に小さい．こうして, この軌道の閉包 $A$ はカントール集合であって, 各点 $a_n = f^n(0)$ を 2 進整数 $n$ に対応させると, $A$ は 2 進整数の環 $\lim_{\leftarrow}(\mathbf{Z}/2k\mathbf{Z})$ に同相である．$f$ を $A$ に制限したものは, 各 2 進整数に 1 を加える同相写像に対応することに注意しよう．したがって, $A$ には周期点がない．しかし, $A$ の各点に任意に近い周期点があることを示せる．これらの周期点は 2 のべき乗の周期を持ち, すべて不安定である．

$f : I \to I$ の力学的構造は次の通りである．$I$ のほとんどすべての初期点 $x_0$ に対して, 相続く像 $x_n = f^n(x_0)$ はカントール集合 $A$ に収束する．だから, $A = \Lambda(f)$ は $f$ の唯一のアトラクターである．しかし, 可算個の例外点があって, これらの相続く像は $A$ に収束しない．さらに, これらの例外点は $I$ の中でいたるところ稠密である．なぜなら, Guckenheimer(1979) によれば, $f$ は周期的なアトラクターを持たないからどんな任意に小さい開区間 $U \subset I$ をとっても, その

或る将来の像 $f^n(U)$ が原点を含むからである．原点を含むこの近傍内の周期点に写されるような点 $x \in U$ をとれば, $\omega(x)$ が $A$ と素な周期軌道であることがわかる．だから, $A$ はたしかに漸近安定でない．

図 2

しかし, $A$ はリャプーノフ安定であり, 実際は, 漸近安定な集合の減少列（nested sequence）の共通部分に等しい．例外点が稠密な集合であるにもかかわらず, $A$ への収束の傾向はきわめて強い．$U$ を任意に小さい $A$ の近傍として, さらに小さい近傍 $V$ で $f(V) \subset V$ なるものをとろう．すると, $I$ 内の任意の点 $x_0$ から出発して相続く像 $x_n = f^n(x_0)$ を追っていくと, ちょうど二つの可能性がある．この軌道が最終的にこの開集合 $V$ に行き当たり, その後ずっと $V \subset U$ に捉えられてしまうか, うまく $V$ の外にある有限個の周期点のどれかに行き当たり, その後 $V$ の外の有限周期軌道に捉えられてしまうか, どちらかである．第一の可能性は初期点 $x_0$ の稠密な開集合に関して起こり, 第二の可能性は可算ないたるところ疎な初期値 $x_0$ の集合に関してのみ起こる．

もっと詳しい議論は補遺 2 で行う．流れの方を好む読者のために述べておくと, Kan(1984) は 3 次元球上の滑らかな流れの例で, ほとんどすべての軌道が「ソレノイド」, すなわち, 局所的にカントール集合と 1 次元多様体の直積に同相なもので周期軌道を一つも含まず, しかも周期軌道によって任意に近く近似できるもの, に収束するような, 我々のものと似た例を記述している．この例もリャプーノフ安定であるが漸近安定ではない．(Grebogi, Ott, Pelikan, and Yorke(1984) を参照, 関連しているが, 微分可能性の次数の低い例を Bowen and Franks(1976) や Franks and Young (プレプリント) が記述している.) 漸近安定でないことは, 他の多くのフラクタルアトラクターとも共有する点であると思われる．

## 4. 安定性と頑丈さ

$f : M \to M$ を或る固定した写像とする．前節と同様, 閉部分集合 $A \subset M$ で $f(A) = A$ を満たすものは, $f(U) \subset U$ を満たす任意に小さい近傍 $U$ を持つとき, リャプーノフ安定 (また「軌道安定」とも) と言われる．リャプーノフ安定でかつ Auslander-Bhatia-Seibert 条件, すなわち, 吸引領土 $\rho(A)$ が開集合であること, を満たすとき, 漸近安定と言われる．漸近安定の場合, 閉包が $\rho(A)$ に含まれる集合 $U$ をとると, 容易にわかるように, $A$ は前進像の列 $U \supset f(U) \supset f^2(U) \supset \ldots$

の共通部分に等しい． アトラクターの定義の一部に何の安定性条件も課していないことに注意しよう．もちろん, 多くの興味深いアトラクターは漸近安定であるか, 少なくともリャプーノフ安定である．しかしながら, 何らかの安定性を定義の一部として要請すると, 遷移的な場合を論ずるときに厄介なことになり, コンパクトな多様体上のどんな滑らかな写像も少なくとも一つのアトラクターを持つことが成り立たなくなる．この点を説明する簡単な例がある．

例 1. $M$ は実数の mod $2\pi$ をとった円とし,

$$f(\theta) = \theta + 1 - \cos(\theta) \pmod{2\pi}$$

とおく．このとき, 不動点 $\theta = 0$ は唯一のアトラクターである．このアトラクターはリャプーノフ安定でない．なぜなら, 自明でない近傍で $f$ によってそれ自身の中に写されるものがないからである．(図 3 を比較せよ．このような不動点を「片側安定」と記述することにする.) 実射影線 $R \to \infty$ 上でのまったく同様な例が無限遠点を唯一のアトラクターとして持つ写像 $f(x) = x + 1$ である．同様な安定性を示す有名な古典的フラクタルアトラクターの例がある．すなわち, カントール集合が唯一のアトラクターである円のダンジョワ (Denjoy) $C^1$ 写像である (Schweitzer, 1974 参照)．実に病理学的な例がある．$|x| \leq 1$ のとき $f(x) = 4x(1 - x^2)^2$ , それ以外のとき $f(x) = 0$ とおく．このとき, たしかに, 唯一のアトラクターは原点であるが, これは厳密に反発的な不動点である．

図 3

例 1 の簡単な変種がある．

例 2. 実数の mod $2\pi$ をとった円上で, $f(\theta) = \theta + \sin^2(\theta)$ とする．このとき, $A$ は 2 点 0 と $\pi$ からなる．それぞれは極小アトラクターであるが, どちらも安定でない．というのは, 片方にいくらでも近い点でその相続く像がもう一方に収束するものがある．

正の測度を持つアトラクターがその外にあるどんな点も吸引する必要はないことに注意しよう．たとえば, 円の無理数回転では, 円全体が極小アトラクターである．

例 3. Ulam-von Neumann アトラクター． $R\infty$ からそれ自身への 2 次写像 $f(x) = 2x^2 - 1$ を考える．このとき, 区間 $I = [-1, 1]$ のほとんどすべての点 $x$ に対して, 極限集合 $\omega(x)$ は区間 $I$ 全体である．これの証明は単位円上の 2 次写像 $z \mapsto z^2$ に関する対応する性質に基づく．すなわち, $f$ の $I$ への制限は, $z$ が単位円上を動くとして, 対応 $Re(z) \mapsto Re(z^2)$ に等しいという観察を利用する．一方, $I$ の外のどんな点 $x$ に対しても, $x$ の軌道は無限遠に発散する．したがって, $\Lambda(f)$ は不安定な極小アトラクターである区間 $I$ と安定なアトラクターである無限遠点からなる．$I$ の外側のどんな点も $I$ から反発される．

線形座標変換によって, この写像は $x \mapsto x^2 - 2$ の形にできる．もっと一般に, $c$ を任意のパラメーターとして, 写像 $x \mapsto x^2 - c$ を考えることができる．$c$ が区間 $[-1/4, 2]$ に属するとき,

この写像には有界なアトラクターが少なくとも一つある．この写像には有界なアトラクターが一つだけしかないかも知れない．それは, 周期軌道であるか, 区間の有限和であるか, あるいは(非可算個の例外的な場合に)3節のような概周期的なカントール集合である (補遺 2 の補題 4 参照)．たぶん, ほとんどすべてのパラメーターの値に対して, この有界アトラクターは漸近安定である．しかし, 概周期的な場合には単にリャプーノフ安定であり, 少なくとも可算個の場合があって, リャプーノフ安定ですらない．これらの中には二つの極限的な場合, $c = -1/4$ と $c = 2$ の場合が含まれる．また, 周期 3 の片側安定な軌道に対応する $c = 7/4$ の場合が含まれる．

二つの異なる極小アトラクターが必ずしも互いに素でないことに注意しよう．しかし, 二つの極小アトラクターの共通部分はあまりに小さくて, 測度の正などんな集合の点も吸引しないはずである．

<u>例 4</u>. 3 次写像 $f(x) = 3\sqrt{3}(x - x^3)/2$ の尤極限集合は二つの不安定な極小アトラクター $[-1, 0]$ と $[0, 1]$ と安定なアトラクター $\{\infty\}$ から成る．ここで係数 $3\sqrt{3}/2$ をとったのは, この二つの区間のどちらも正確にそれ自身の上に写されるようにするためである．この場合, 面白いことに, 二つのアトラクターの和 $[-1, 1]$ は漸近安定である．($[0, 1]$ が極小アトラクターであることの証明の概略は以下の通りである．まず, この区間に制限した $f$ は変数変換 $x = \sin^2(\theta)$ によって拡大写像になることが確認できる．したがって, Li and Yorke(1978) によって, この写像はリュベーグ測度に同値なエルゴード不変測度を有する.)

このような例における不安定性を記述するのに, 同伴するグラフを構成するのがしばしば便利である．

<u>定義</u>. 写像 $f$ に同伴する安定図式 (stability diagram) とは各極小アトラクター $A_i$ に対して頂点 $a_i$ を持つ 1 次元複体であって, 次のような辺を持つ．$A_i$ に任意に近い点 $x$ があって, その極限集合 $\omega(x)$ が $A_j$ と交わるときはいつでも頂点 $a_i$ から別の頂点 $a_j$ に向かう方向つきの辺がある．また, $A_i$ に任意に近い点 $x$ があって, この点の像は一時的に $A_i$ の或る固定した近傍の外をうろつき回るが, 極限集合 $\omega(x)$ は $A_i$ とまじわるときはいつでも $a_i$ をそれ自身に結ぶループがある．

$A_i$ がリャプーノフ安定なら, 対応する頂点からどこか別の頂点に行く辺はない．4 つの例に対応する安定図式を 4 図に示した．

図 4

次に, 写像 $f$ に摂動を加えたときの集合 $\Lambda = \Lambda(f)$ のふるまいを調べよう．二つの閉集合の間のハウスドルフ距離 (Hausdorff distance) とはどちらかの集合の点を中心とする半径 $\delta$ の閉球が必ずもう一方の集合の点を含むような $\delta$ の最小値であることを思い起こそう．

定義. 与えられた写像 $f$ の尤極限集合 $\Lambda = \Lambda(f)$ が頑丈 (robust) であるといわれるのは, $g$ が $f$ に $C^\infty$ 位相で収束する (荒っぽくいえば, 各 $k \geq 0$ に対して, $g$ の $k$ 番目の微分が一様に $f$ の $k$ 番目の微分に収束する) ときは常に $\Lambda(f)$ と $\Lambda(g)$ のハウスドルフ距離がゼロに収束するときである. 同様に, $f$ のアトラクター $A$ が頑丈なのは, $f$ に $C^\infty$ 近くの任意の $g$ にアトラクター $A'$ があって, これが $A$ にハウスドルフ近いときである.

このアトラクター $A'$ は $A$ と定性的にまったく異なり得ることに注意しよう. ハウスドルフ近接の条件はこれら二つの集合が計算機実験では区別しにくいことを保証しているだけである. たとえば, 補題 2 より, 任意の漸近安定な周期軌道は必ず頑丈である. しかしながら, この軌道 $A$ をハウスドルフ近似するアトラクター $A'$ は $A$ の周期のある整数倍の周期を持つかもしれないし, 無限の周期を持っているかもしれない. もっとも普通の可能性は分岐である. たとえば, 写像 $x \mapsto x - x^3$ と $x \mapsto x^2 - 3/4$ のどちらも唯一の安定な有限不動点を有し, この点は摂動のもとで分岐する. 3 節のファイゲンバウム写像 $f$ の唯一のアトラクター $\Lambda(f)$ も頑丈である. また, $g$ が $f$ に近くても尤極限集合 $\Lambda(g)$ は定性的に $\Lambda(f)$ とまったく異なり得る. このカントール集合は安定な周期軌道に簡単化したり, またはカオスアトラクターに複雑化し得る.

頑丈なアトラクターはどれもリャプーノフ安定であると予想される. この予想を説明するために, 例 1, 2, 3 や 4 は安定でなく, 簡単に示せるように, 頑丈でないことを注意しておく.

少なくとも 3 種類の異なった仕方でアトラクターは頑丈でなくなり得る. 単に蒸発してしまうか, もっと大きな集合に爆発してしまうか, もっと小さな集合に爆縮してしまうかする. (漸近安定なアトラクターの場合, 補題 2 によって, 最後の可能性だけが起こり得る. ) この 3 つの可能性を説明する例がある. 原点に片側安定なアトラクターを持つ写像 $x \mapsto x + x^2$ は, 唯一のアトラクターが無限遠にある写像によって任意に近く近似される. 無限遠点を唯一のアトラクターとする例 1 の平行移動 $x \mapsto x + 1$ は, どの軌道も稠密であって唯一のアトラクターが集合 $R \cup \infty$ 全体であるような分数線形変換 $x \mapsto (1 + x)/(1 - \varepsilon x)$ によって任意に近く近似される. 最後に, $c = 1.543689...$ を方程式 $c^3 - 2c^2 + 2c - 2 = 0$ の実根として, $f(x) = x^2 - c$ とする. $f^4(0) = f^3(0) = -f^2(0)$ である. このとき, $f$ には漸近安定な唯一の有限アトラクター $A = [f(0), f^2(0)]$ がある. (証明は例 4 の証明と同様である.) だが, $f$ は, 唯一の有限アトラクター $A_n$ が 0 と $n - 2$ 個の負数および唯一の正数 $f_n^2(0)$ から成る周期 $n$ の超安定な軌道であるような 2 次写像 $f^n$ の列 $f^3, f^4, \ldots$ の極限に等しい. だから $A_n$ は全ての $n$ に対して実質的に $A$ より小さい.

どのアトラクターも頑丈であっても新しいアトラクターが突然消滅してしまうおかげで, 尤極限集合が頑丈でないことが有り得ることに注意しよう. 例として, 写像 $f(x) = x + x^3$ の唯一のアトラクターは無限遠の安定な不動点であるが, $f$ に任意に近い写像で原点にもう一つの安定な不動点を持つものがある.

写像に摂動を加えたときにアトラクターが消滅しても, 「共鳴」, すなわち, 点の像が最終的に逃げ去るまえに長い繰り返しの間捉えられている領域, が残ることがある (Grebogi, Ott, and Yorke, 1983 参照). 実際上の応用においては, 摂動が非常に小さくて逃げ去るまでの時間が非常に長ければ, この種の共鳴と本当のアトラクターを区別するのは難しい.

**補遺 1. 生成的極限集合 (Generic Limit Set)**

2 節の尤極限集合の以下のような変種の方がしばしば扱いやすい. 点 $x \in M$ の或る性質が生成的な (generic)$x$ に関して成り立つとはこの性質がベール (Baire) のカテゴリー理論の意

味でほとんどすべての $x$ について成り立つとき, すなわち, $M$ のいたるところ疎な部分集合の可算和の外の $x$ で成り立つときである. 生成的極限集合 (generic limit set) $\Gamma \subset M$ を, 生成的な $x$ に対して極限集合 $\omega(x)$ を含むような $M$ の閉集合のうち最小のものと定義する. 「生成的アトラクター」なる概念もあるが, その定義は読者に任せる.

多くの場合, 二つの極限集合 $\Gamma$ と $\Lambda$ は互いに等しい. しかしながら, いつもそうとは限らない. 等号が成り立つためのよい判定条件は筆者には分からない. 集合 $\Gamma$ の方が計算しやすいようだ. なぜなら, $\Gamma$ の定義は純粋に位相的であるのに対して, $\Lambda$ の定義には位相と測度論が使われている. 一方, 集合 $\Lambda$ の方は応用の際に調べたい確からしい漸近的ふるまいにより密接に関係している. また, 集合 $\Lambda$ は数値実験の際に実際に図が書けるような何かに近い.

この二つの集合の間に成り立つ一般的関係で筆者の知る唯一のものは, 共通部分 $\Gamma \cap \Lambda$ が常に空でないことである. このことは, 生成的な $x$ に対して共通部分 $\omega(x) \cap \Lambda$ が空でない, というもっと正確な主張からの帰結である. 事実, $\Lambda$ の任意の近傍 $U$ をとったとき, 軌道全体が $U$ と素であるような点 $x$ の集合は閉集合であって, 測度がゼロであり, だからいたるところ疎である. したがって, 生成的な点 $x$ の軌道はこのような近傍のどれとも交わり, よって, $\omega(x) \cap \Lambda \neq \emptyset$ を満たす.

次の二つはかなり病理学的な例である.

<u>例 5</u>. 尤極限集合 $\Lambda$ が厳密に $\Gamma$ より大きいことが有り得る. 2次元球の上の滑らかな実数値関数で, 測度正のカントール集合に沿って極小になり, その他の点では非縮退の臨界点しか持たず, ただ一つの局所極大点 $x_0$ を持つもの, に同伴する勾配流（gradient flow）を考えよう. このとき, $\Gamma = \{x_0\}$ であるが, $\Lambda$ はカントール集合全体を含む. $C^1$ 馬蹄集合（horseshoe）を含む同様な例が Bowen(1975) によって与えられた.

<u>例 6</u>. 少なくとも, 微分不可能な写像 $f$ の場合は集合 $\Lambda$ が厳密に $\Gamma$ より小さいことが有り得る. もっと正確に言えば, 区間の連続写像で, 生成的軌道が稠密であるので $\Gamma$ は区間全体であり, $\Lambda$ がカントール集合であるようなものがある. 事実, 例をうまく修正すれば, $\Lambda$ を, 好みに応じて互いに素であったりなかったりする二つまたはそれ以上の極小アトラクターに分けることができる. 滑らかな写像でこの性質を持つものがあるかどうか, 筆者は知らない.

区間 $[-1,1]$ 上の連続な保測写像 $F(x) = 2|x| - 1$ から始めよう. このとき, それほど困難なく示せるように, 生成的な $x$ に対して, 極限集合 $\omega(x)$ は区間 $[-1,1]$ 全体に等しい（補遺2参照）. だから $\Gamma = [-1,1]$ である. しかし, $M$ 上にボレル確率測度 $\mu$ を構成して, $\mu$ −確率1で, 極限集合 $\omega(x)$ が $[-1,1]$ の或る固定した開部分集合を避けるようにしよう. $C$ は, 軌道全体が区間 $(1/2,1]$ と互いに素であるような点 $x$ すべてからなる閉集合とする. $C$ がカントール集合であることをみるのは容易である. 事実, $C$ 内の軌道 $x_0, x_1, \ldots$ に同伴する「こね列」('kneading sequence') $\mathrm{sgn}(x_0), \mathrm{sgn}(x_1), \ldots$ は二つの $+1$ が並ばないような符号の任意列で有り得る. したがって, 台が $C$ に等しい確率測度 $\mu_0$ を選んで, 点が測度ゼロであるようにできる. さて,

$$2\mu_{n+1}(S) = \mu_n(F(S \cap [-1,0])) + \mu_n(F(S \cap [0,1])),$$

とおいて, 帰納的に確率測度の列を定義し, $\mu_n$ の台が $n$ 重の逆像 $f^{-n}(C)$ 全体に等しくなるようにしよう. このとき, 測度 $\sum \mu_n / 2^{n+1}$ は区間 $[-1,1]$ 全体に一致する台を持つ. だが, $\mu$-確率1で, 極限集合 $\omega(x)$ は $C$ に含まれる. [$\mu_0$ をもっと注意深く定義すれば, $\omega(x)$ は実際に確率1で $C$ に等しいだろう.] 連続な変数変換 $y = \int_{-1}^{x} d\mu$ によって, $\mu$ は単位区間上の標準的なリュ

ベーグ測度に変換されることに注意しよう．したがって, $F$ は, $\Gamma$ が厳密に $\Lambda$ より大きな連続写像に位相共役 (topologically conjugate) である．

同様に, $\hat{C}$ を, 軌道が区間 $(-1/2, 0)$ と互いに素な点すべてからなる集合とし, $\hat{\mu}$ を同伴する測度として確率 1 で極限集合 $\omega(x)$ が $\hat{C}$ に等しくなるようにする．確率測度 $(\mu+\hat{\mu})/2$ を用いて, これら二つの構成物を結合すると, $\omega(x)$ は確率 $1/2$ で $C$ に等しく, 確率 $1/2$ で $\hat{C}$ に等しくなる．こうして, この場合, 二つの極小アトラクターがあって, これらは周期軌道 $C \cap \hat{C} = \{-3/5, 1/5\}$ に沿ってのみ交わる．$\hat{C}$ を構成するのに少し大きな区間 $(-4/4, 0)$ を用いることにより, この例を修正して, 二つの極小アトラクターが互いに素になるようにもできる．

**補遺 2. 区間の写像**

以下の議論は強く Guckenheimer(1979)[17] に依存している．

$x \mapsto f(x)$ は或る有限区間 $I$ をそれ自身の中へ写す実 2 次写像とする．この区間 $I$ として極大のものをとると, $f : I \to I$ は Guckenheimer の調べた写像の類に属する．すなわち, $f$ は $C^3$ 級であって, 内部に唯一の臨界点を持ち, シュバルツ微分が負であり：

$$2(Df)(D^3 f) - 3(D^2 f)^2 < 0,$$

$f$ は $I$ の両方の端点を, 微分 $Df(x_0) \geq 1$ なる片方の端点に写す．(最後の条件が本質的であるが, [17] ではこれをうっかり落としている.)

**補題 4.** これらの条件を満たす $f : I \to I$ に対して, 生成的極限集合 $\Gamma$ は有限周期の周期軌道であるか, 臨界点の軌道の閉包に等しいカントール集合であるか, または臨界点の最初の $2n$ 個の前進像によって限られる $n$ 個の区間の有限和であって, 臨界点をその内部に含むか, のいずれかである．さらに, 生成的な $x$ に対して, $\omega$ 極限集合 $\omega(x)$ は正確に $\Gamma$ に等しい．

はじめの二つの場合, 測度ゼロの集合の外のどんな $x$ に対しても, $\omega(x) = \Gamma$ である．だから, 尤極限集合 $\Lambda$ は $\Gamma$ に等しく, 極小アトラクターである．第三の場合にもこのことが成り立つことが大いに有り得ると思われるが, 筆者はこの問題を解決できなかった (上の例 6 参照).

<u>証明</u>. まず, $f$ が周期アトラクター, すなわち, 安定あるいは片側安定な周期軌道, $A$ を持つと仮定する．このとき, 近傍 (または片側近傍) $U$ があって, 一様に $A$ に収束する軌道を持つ点から成る．[17,p.135 および 2.8,3.1] によれば, 測度ゼロの閉集合の外のどんな点 $x$ に対しても, $x$ の軌道は結局この近傍 $U$ に落ち込み, したがって $A$ に収束する．だから明らかに $\Gamma = \Lambda = A$ である．

これ以後 $f$ は安定または片側安定な周期軌道を持たないとする．この場合を扱うために, 次が必要である．

<u>定義</u>. $f$ が可約であると言われるは, 原点の周りの閉区間 $I$ と整数 $N \geq 2$ があって, 相続く像 $J, f(J), f^2(J), \ldots, f^{n-1}(J)$ が互いに素な内部を持ち, $f^n(J) \subset J$ を満たすときである．

この発想は, 上が成り立つとき, $f$ に関する研究を, 部分区間 $J$ J からそれ自身の中へ写す写像とみなせる $n$ 重の繰り返し $g = f^n$ に関する研究に帰着できることである．事実, $f$ が可約なら, [17, 2.6 および 3.1] で証明されている通り, 測度ゼロの閉集合の外のどんな点 $x$ に対しても, $x$ の軌道はいずれは $J$ の内部と交わる．したがって, 尤極限集合 $\Lambda = \lambda(f)$ は $n$ 重の和 $\Lambda(g) \cup f(\Lambda(g)) \cup \ldots \cup f^{n-1}(\Lambda(g))$ に等しい．$\Gamma(f)$ も同様に記述できる．

区間 $J$ は極大であるように選ばれていると常に考えることができる. このとき, 簡単に分かるように, $g = f^n$ は $J$ の境界を片方の境界点に写す. 安定な周期軌道がないから, 境界のこの不動点において $g$ の微分は最小でも 1 でなければならない. シュバルツ微分が負の条件は合成によって保存されるから, 新しい写像 $g : J \to J$ は Guckenheimer の条件をすべて満たす.

この新しい写像 $g : J \to J$ も可約であるなら, おなじことをもう一度やる. 有限回の還元過程の後に既約な系を得ることのできる「有限可約系」と還元過程の無限に続く「無限可約系」を区別しなければならない (2 図). 明らかに, 有限既約系を理解するためには, 既約な写像を理解すればよい.

そこで, $f$ が既約であるとする. $\log(s) > 0$ を位相エントロピーとして [17, 4.5], $f$ が

$$f(y) = c \cdot |y| - 1 \quad \text{for} \quad |y| \leq 1/(s-1),$$

の形の折れ線写像に位相共役であることを示そう. $f$ が安定または片側安定な不動点を持つ自明な場合を除外しているから, $f$ が厳密に正の位相エントロピーを持たねばならぬことを簡単に確かめることができる. だから, Milnor and Thurston(1985)[35] より, $f$ は $F$ に半共役 (semi-conjugate) である. つまり, 単調な写像 $h$ を用いて, $h \circ f = F \circ h$ と書ける. だから, どんな逆像 $h^{-1}(y)$ も点であるか区間 $J$ である. ある $h^{-1}(y)$ が区間なら, $y$ の軌道は臨界点 0 を含む, すなわち, $F^m(y) = 0$, であろう. というのは, そうでないとすると, $J$ の任意の 2 点が同じこね列を持つことになるが, これは [17,2.6] によって不可能である. 実際は, 区間 $f^{m+1}(J)$ も $h$ のもとで一点に写されるから, 上の軌道は一度ならず 0 を含む. だから, ある 1 より大きな $n$ に対して $F^n(0)$ は 0 になってしまう. したがって, $f^n$ は区間 $h^{-1}(0)$ をそれ自身の中に写すことになり, $f$ は可約になって仮説に反する. この矛盾により, $h$ が事実同相写像であって, $f$ が $F$ に位相共役であることが示された.

こうして, 折れ線写像 $F$ を調べればよいことになった. 成長数 $s$ は $\sqrt{2}$ より大きいと仮定できる. というのは, そうでないとすると, $F$ が可約であることが容易に確かめられる. このとき, $F$ の生成的極限集合が区間

$$A = [-1, s-1] = [F(0), F^2(0)],$$

に等しいことを示そう. 事実, 容易に確かめられるように, $F(a) = A$ であり, 開区間 $|y| < 1/(s-1)$ の任意の点 $y$ の軌道はいずれはこの部分区間 $A$ に捉えられてしまう.

$A$ からそれ自身への写像 $F$ は, 以下のような強い遷移性を持つ. 任意の部分区間 $J \subset A$ に対して, 正の整数 $n$ があって, $F^n(J)$ は区間 $A$ 全体に等しい. というのは, $J$ が十分に小さくて二つの集合 $J$ と $F(J)$ がともには 0 を含まないとき, $F^2(J)$ は $J$ より少なくとも $s^2/2 > 1$ 倍だけ長い. だから, $J$ の相続く像は指数関数的に拡大して, いつかは $F^{m-1}(J)$ と $F^m(J)$ がともに 0 を含むようになり, それゆえ, $F^{m+1}(J) = A$ である.

この性質より, 生成的な点 $y$ に対して, 極限集合 $\omega(y)$ は集合 $A$ 全体に等しい. なぜなら, $\{U_i\}$ を $A$ の開部分集合の基とすると, 軌道が $U_i$ と交わる点 $y$ の集合は稠密かつ開である. だから, 生成的な $y$ の軌道はどの $U_i$ とも交わり, したがって, $A$ において稠密である. したがって, 生成的極限集合 $\Gamma(F)$ は $A$ に等しく, よって滑らかな写像 $f$ の生成的極限集合 $\Gamma(f)$ は対応する区間 $h^{-1}(A)$ である. もっとはっきり言うなら, $c$ を既約な写像 $f$ の臨界点とするとき, $\Gamma(f)$ は $f(c)$ と $f^2(c)$ によって限られる閉区間に等しい. 同様に, 有限可約写像 $f$ の生成的極限集合は臨界点の適当な前進像によって限られる有限個の区間の和である.

尤極限集合$\Lambda$を決めるのはずっと難しいように思われる. $\Lambda$が$\Gamma$の部分集合であることは上の議論から容易に分かるが, 筆者は既約または有限既約な場合に, $\Lambda=\Gamma$をしめすことができなかった.

最後に, 還元過程が有限回で終わらず, 無限回続くような場合を考えなければならない. この無限可約系の場合, 唯一のアトラクター$A=\Lambda=\Gamma$があって, カントール集合であり, 有限円群$Z/nZ$の逆極限に同相であるのをみるのはたやすい. さらに, 写像$f$は$A$上で概周期的であり, この極限群からそれ自身への加算機写像$\alpha\mapsto\alpha+1$に対応する. 有限円群のこのような逆極限はどれも起こり得るので, 非可算個の異なる例がある. 詳細は省略する. □

上の議論より, $f$が初期条件に関する敏感な依存性 ([17] で定義されている) を持つための必要十分条件は$\Gamma$が区間の有限和であること, が容易に分かる. Guckenheimerの調べた写像の類の場合, 定性的に異なる形のふるまいが丁度二つある. $f$が周期的または概周期的なアトラクター$A$を持つなら, $A=\Lambda(f)=\Gamma(f)$は測度ゼロの集合であり, $f$は初期条件に関して敏感な依存性を持たず, $f|A$の位相エントロピーはゼロである. そのほかの場合はすべて, 生成的極限集合は, 正の測度を有する区間または区間の和であり, 初期条件に関して敏感な依存性を持ち, $f|\Gamma(f)$のエントロピーは厳密に正である. 後者では, $f$の力学はカオス的と言うべきである.

結語. 区間の実2次写像の場合でも, 未解決な問題がたくさんある. たとえば, カオス的なケースでは, $\Lambda=\Gamma$かどうか, 複数のアトラクターがあるのかどうか, 決め方を筆者は知らない. 同値なことだが, 区間の和$\Gamma$の中のほとんどすべての軌道は$\Gamma$内でいたるところ稠密か? もっと一般に, $R\cup\infty$からそれ自身への写像に関する次の基本的問題にどうやって答えていいのか分からない. $f(x)$は少なくとも2次の有理関数であるか, 負のシュバルツ微分を有するとする. これから尤極限集合$\Lambda(f)$が$\Gamma(f)$に等しいことが出て, 有限個の極小アトラクターの和として表せるか? 同様に, 集合$\Gamma(f)$が [もっとずっと少なく$\Lambda(f)$が] どんなときに頑丈であるかを決めるための方法に関して何の発想も浮かばない. Guckenheimerの考えた写像の類に関しては, はっきりした推測を述べることができる: 区間$[f(0),f^2(0)]$が頑丈な極小アトラクターであるための必要十分条件は臨界点の軌道がこの区間内でいたるところ稠密であること, と予想される. (4節の$x\mapsto x^2-1.543689\ldots$に関する議論を比較せよ.)

**補遺 3. ストレンジアトラクター**

ストレンジアトラクターの概念はRuelle and Takens(1971) によって記述されたが, たぶん意図的に正確に定義されていない. もともとの議論は野生的トポロジーを強調していた. この主題へのすばらしい序論がRuelleの概観的論説 (1979-1980) にある. そこではむしろカオス的な力学的ふるまいが強調されている. Guckenheimer and Holmes(1983) はストレンジアトラクターを横断的ホモクリニック点を持つアトラクター, したがってカオス的ふるまいをするものとして定義した.

野生的トポロジーまたはフラクタル幾何学とストレンジな力学的ふるまいの間には必ずしも結び付きがないことに注意することが重要である. たとえば, 3節のフラクタルアトラクターは位相的に野生的であるが, 位相エントロピーがゼロであって, 実に地味な概周期的力学を有する. 一方, 円筒$S^1\times[-1,1]$からそれ自身への写像$(\theta,t)\mapsto(2\theta,t/2)$は滑らかな多様体$S^1\times 0$を唯一のアトラクターとして持つが, 力学的なふるまいは完全にカオス的である. 事実, この写像は円の上の標準的な不変測度に関してエルゴード的かつ混合的であり, 正のエントロピー

を有する．この例に摂動を加えたときのふるまいを以下で調べよう．繰り返し写像の代わりに可微分写像または流れを用いる同様の例として, トーラス上のアノソフ可微分写像, あるいは負曲率の多様体の単位接バンドル上の測地流を円上の 2 次写像の代わりに考えてもよい.

カオス的で, 位相的に野生的でありながら, ほぼ完全に解析できるほど簡単なアトラクターの例がある (Kaplan and Yorke, 1970). 円筒 $S^1 \times R$ からそれ自身への写像 $f_0(e^{i\theta}, x) = (e^{2i\theta}, cx)$ から始めよう．ここで, $c$ は $0 < c < 1/2$ なる定数である．明らかに, $f_0$ は漸近安定な唯一のアトラクターを持つ．というのは, すべての軌道は円 $S^1 \times 0$ に向い, 円上のほとんどすべての軌道はいたるところ稠密であるから．このアトラクター $S^1 \times 0$ は滑らかな多様体であるけれども力学的にカオス的である．さて $f_0$ に小さな摂動を加えて写像

$$f_\varepsilon(e^{i\theta}, x) = (e^{2i\theta}, cx + \varepsilon \cos\theta),$$

にする．このとき, 滑らかな多様体 $S^1 \times 0$ はフラクタルアトラクターにとって替わられる (5 図).

図 5

これを見るために, $x$ 座標のスケール変換によって, $f_\varepsilon$ を写像

$$f_1(e^{i\theta}, x) = \left(e^{2i\theta}, cx + \cos\theta\right),$$

に変える.

第三の変数 $y$ を導入して簡単化し, $f_1$ を $S^1 \times R \times R$ からそれ自身への滑らかな写像

$$(e^{i\theta}, x, y) \mapsto (e^{2i\theta}, cx + \cos\theta, cy + \sin\theta),$$

に拡張する．$w = e^{i\theta}$ および $z = x + iy$ とおけば, この写像を 3 次元多様体 $S^1 \times C$ からそれ自身への写像

$$F(w, z) = (w^2, cz + w),$$

と書ける.

**補題 5.** 唯一のアトラクター $A \subset S^1 \times C$ があって, 2 個一組の（dyadic）ソレノイドに同相であり, 漸近安定であって, 事実, すべての軌道を吸引する．もっと正確に言えば, $A$ の任意のコンパクトな近傍 $K$ に対して, 相続く像 $F^n(K)$ は $A$ に収束し, $S^1 \times C$ のほとんどすべての点

$(w,z)$ に対して, $\omega$ 極限集合 $\omega(x)$ は $A$ に等しい. $F$ を $A$ に制限したものが, 測度論的にエントロピーが $\log 2$ のベルヌーイシフト全体に同値であるような測度をこの集合 $A$ は支える.

ここで dyadic ソレノイドとは, 二乗する同相写像の逆列

$$S^1 \leftarrow S^1 \leftarrow S^1 \leftarrow \dots,$$

の極限である. だから, 定義によって, $\hat{S}$ の点は, 単位円上の点列 $\hat{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots)$ で

$$w_1 = \pm\sqrt{w_0}, w_2 \pm \sqrt{w_1}, \dots,$$

なるものに等しい. $A = g(\hat{S})$ を連続写像

$$g(\hat{w}) = (w_0, w_1 + cw_2 + c^2w_3 + \dots),$$

による $\hat{S}$ の像と定義する. $|c| < 1/2$ と仮定しているから, $g$ が位相埋め込みであることを確かめるのはたやすい. (もっと頑張れば, やや大きな $c$ でもこのことは確かめられる.) $F$ が $A$ をそれ自身の上へ同相的に写すことに注意しよう. 事実,

$$F((w_0, w_1 + cw_2 + c^2w_3) = (w_0^2, w_0 + cw_1 + c^2w_2 + \dots),$$

であるから, $F$ の $A$ への制限は, 位相群 ? からそれ自身への「シフト自己同形」

$$(w_0, w_1, w_2, \dots) \mapsto (w_0^2, w_0, w_1, \dots),$$

に対応する.

次に, $S^1 \times C$ 内の任意の出発点 $(w,z)$ に対して, $F^n(w,z)$ と集合 $A$ の距離が幾何学的に (かつ任意のコンパクトな集合の上で一様に) ゼロに収束する. 事実, $\hat{S}$ 内に任意の点 $\hat{w} = (w_0, w_1, \dots)$ を選んで $w_0 = w$ とし, $g(\hat{w}) = (w_0, z_0) \in A$ とおく. このとき, $F$ の定義を調べれば, $F^n(w,z)$ と点 $F^n(w_0, z_0) \in A$ の距離は正確に $c_n|z - z_0|$ に等しく, $n \to \infty$ のときゼロに収束することがわかる.

もっと幾何学的に言えば, $k$ を $1/(1-c)$ から $1/c$ までの開区間内の或る定数とし, $T$ を $|z| \leq k$ なるすべての点 $(w,z)$ から成る中味の詰まったトーラス (solid torus) とする. このとき, $F$ が写像度 2 で $T$ をその内部へ同相的に写し, $A$ が $F^n(T)$ の前進像の交わりに等しいことは容易に分かる. この形で, 例が Smale(1967) や Ruelle and Takens(1971), Ruelle(1979-1980) によって調べられた.

$F$ の $A$ への制限, または同値なことだが, $\hat{S}$ のシフト自己同形, のエルゴード的なふるまいを調べるために, $w_n = \exp(\pi i x_n)$ として, $\hat{S}$ の各点を $(w_0, w_1, \dots)$ と書く. 数 $x_0$ を 2 進法で $a_0 + a_1/2 + a_2/4 + \dots$ と表せば, $x_1$ は $a_{-1} + A_0/2 + A_1/4 + \dots$ と表せ, 高次の $x_n$ も同様に表せる. こうして, $\hat{S}$ のシフト自己同形はゼロと 1 の 2 重に無限な列 $\dots a, a_0, a_1, a_2, \dots$ の上のベルヌーイシフトに対応する.

$A \subset S^1 \times C$ のハウスドルフ次元は $1 - \log(2)/\log(c)$ と計算できる. これは厳密に 1 と 2 の間にあるので, $A$ は Mandelbrot(1982) によって定義されたフラクタル集合である.

さて, $A'$ を $S^1 \times C$ から $S^1 \times R$ への射影写像のもとでの $A$ の像とする. このとき, $A'$ が写像 $f$ のアトラクターであることが, 上の議論から容易にわかる. 事実, $A'$ の任意のコンパクトな

近傍 $N$ に対して, 相続く像 $f^k(N)$ は $A'$ に収束する．さらに, $A'$ はエントロピーが $\log 2$ の不変測度を支えるから, $A'$ 内のほとんどすべての軌道は稠密である．このアトラクター $A'$ はいたるところ疎である．なぜなら, これはハウスドルフ次元 $d \leq 1 - \log(2)/\log(c) < 2$ のコンパクトな集合であるから．事実, $A'$ は滑らかな概周期関数

$$\begin{aligned} g^n(\theta) = \; & \cos((\theta + 2\pi n)/2) + c \cdot \cos((\theta + 2\pi n)/4) + \\ & c^2 \cdot \cos((\theta + 2\pi n)/8) + \ldots , \end{aligned}$$

のグラフの和の閉包として記述できる．ただし, ここで $n$ はすべての整数の上を動く．２進位相で $n$ が $m$ に近いときにはいつも $g^n$ は $g^m$ に一様に近いから, 任意の２進整数 $N$ に対して, 関数 $g^N$ が定義できて, 実解析的である．この約束のもとで, 簡単に $A'$ は非可算個の異なる関数 $g^N$ のグラフの和である, と言うことができる．こうして, $A'$ は確かに多様体でない. そのハウスドルフ次元は $1 - \log(2)/\log(c) > 1$ であるようだ. (Farmer, Ott, and Yorke, 1983 と比較せよ.) 一方, 1 に十分近い $c$ を選んでこの例を修正すれば, 対応するアトラクター $A'$ が円筒の或る開部分集合全体を含むことが示せる．(Frederickson, Kaplan, Yorke, and Yorke, 1983 参照.)

円上の２次写像の代わりに, トーラスのアノソフ可微分写像 $(\phi, \psi) \mapsto (2\phi + psi, \phi + \psi)$ から始めて同様の構成を行えば, 位相的にトーラス $S^1 \times S^1$ に等しいアトラクターを得る．$\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2$ を整数行列に同伴する小さい方の固有値とする．このとき, $\lambda < c < 1$ ならこのトーラスはいたるところ微分不可能な仕方で多様体 $S^1 \times S^1 \times R$ に埋め込まれているが, $0 < c < \lambda^n$ なら $n$ 回連続微分可能である (Kaplan, Mallet-Paret, and Yorke(to appear) 参照).

# 参考文献


[1] Anosov, D.V., Katok, A.B.: New examples in smooth ergodic theory. *Trans. Moscow Math. Soc.*(1970) **23**, 1-35.

[2] Auslander, J., Bhatia, N.P., and Seibert, P.: Attractors in Dynamical Sysytems. *Bol. Soc. Mat. Mex.* **9** (1964), 55-66.

[3] Auslander, J., Bhatia, N. Besicovitch, A.S.: A problem on topological transformation on the plane. *Fundam. Math.* **27** (1937), 61-65.

[4] Bowen, R.: A horseshoe with positive measure. *Invent. Math.* **28** (1975), 203-204.

[5] Bowen, R.: Invariant measure for Markov maps of the interval. *Commun. Math. Phys.* **69** (1979), 1-17.

[6] Bowen, R. and Franks, J.: The periodic points of maps of the disk and the interval. *Topology* **15** (1976), 337-342.

[7] Coddington, E. and Levinson, N.: *Theory of ordinary differential equations*, McGrawhill, New York, 1955.

[8] Collet, P. and Eckmann, J.-P.: *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[9] Conley, C.: Isolated invariant sets and Morse index, *C.B.M.S. Regional Lect.* **38**, A.M.S., 1978.

[10] Farmer, J.D., Ott, E., and Yorke, J.A.: The dimension of chaotic attractors, *Physica* **7D**, 153-180(1983).

[11] Feigenbaum, M.: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **19**, 25-52(1978); **21**, 669-706(1979).

[12] Franks, J. and Young, L.-S.: A $C^2$ Kupka-Smale diffeomorphism of the disk with no sources or sinks(preprint).

[13] Frederickson, P., Kaplan, J. Yorke, E., and Yorke, J.: The Liapunov dimension of strange attractors, *J. Diff. Eq.* **49**, 185-207(1983).

[14] Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S., and Yorke, J.: Strange attractors that are not chaotic, *Physica* **13D**, 261-268(1984).

[15] Grebogi, C., Ott, E., and Yorke, J.: Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos, *Physica* **7D**, 181-200(1983).

[16] Guckenheimer, J.: A strange attractor, in *The hopf bifurcation and applications*(eds. Marsden and McCraken), Springer, Berlin, 1976, pp. 368-381.

[17] Guckenheimer, J.: Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps, *Commun. Math. Phys.* **70**, 133-160 (1979).

[18] Guckenheimer, J. and Williams, R.F.: Structural stability of Lorentz attractors, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50**, 59-72(1979).

[19] Guckenheimer, J. and Holmes, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, Springer, Berlin, 1983.

[20] Hénon, M.: A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Commun. Math. Phys.* **50**, 69-77(1976).

[21] Hirsch, M.: The dynamical system approach to differential equations, *Bull. Am. Math. Soc.* **11**, 1-64(1984)

[22] Jakobson, M.V.: Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps, *Commun. Math. Phys.* **81**, 39-88(1981).

[23] Jonker, L. and Rand, D.: Bifurcations in one dimension, *Invent. Math.* **62**, 347-365(1981); **63**, 1-15(1981).

[24] Kan, I.: Strange attractors of uniform flows, Thesis, Univ. Ill. Urbanana, 1984.

[25] Kaplan, J.L., Mallet-Paret, J., and Yorke, J.A.: The liapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus, *Erg.Th. Dyn. Syst* (to appear).

[26] Kaplan, J.L. and Yorke, J.A.: Chaotic behavior of multidimensional difference equations, pp. 204-227. In *Functional differential equations and the approximation of fixed points* (eds. Peitgen and Walther), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 730, Berlin, Springer, 1970.

[27] Lanford, O.: A computor assisted proof of the Feigenbaum conjecture. *Bull. Am. Math. Soc.* **6**, 427-434(1982).

[28] La Salle, J.P.: The stability of dynamical systems, Reg. Conf. App. Math. **25**, S.I.A.M., 1976

[29] La Salle, J.P. and Lefschetz, S.: *Stability by Liapunov's direct method*, Academic Press, New York, 1961

[30] Li, T. and Yorke, J.: Ergodic transformation from an interval into itself, *Trans. Am. Math. Soc.* **235**, 183-192(1978).

[31] Liapunoff, M.A.: Probleme generale de la stabilite du mouvement. *Annal. Math. Stud.* **17**, Princeton Univ. Press, 1947 (1907, translation from the 1892 Russian original).

[32] Lorentz, E.N.: Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130-141(1963).

[33] Mandelbrot, B.: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.

[34] Mendelson, P.: On unstable attractors, *Bol. Soc. Mat. Mex.* **5**, 270-276(1960).

[35] Milnor, J and Thurston, W.: On iterated maps of the interval (in preparation).

[36] Misiurewics, M.: Invariant measures for continuous transformations of $[0,1]$ with zero topological entropy, pp. 144-152 of Ergodic theory, Denker and Jacobs, Lecrue Notes in Mathematics, Vol. 729, Berlin, Springer, 1979.

[37] Misiurewics, M.: Absolutely continuous measures for certain maps of an interval, *Publ. Math. I.H.E.S.* **53**, 17-51(1981).

[38] Nusse, L.: Chaos, yet no chance to get lost, Thesis, Utrecht, 1983.

[39] Ruelle, D. and Takens, F.: On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.* **20**, 343-344(1971).

[40] Ruelle, D.: Strange attractors, *Math. Inell.* **2**, 126-137 (1979-80).

[41] Ruelle, D.: Small random perturbations and the definition of attractor, *Commun. Math. Phys.* **82**, 137-151(1981).

[42] Ruelle, D.: Small random perturbations and the definition of attractor, pp. 663-676 of *Geometric Dynamics*(ed. Palis), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1007, Springer, New York, 1983.

[43] Schweitzer, P.A.: Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Annal. Math.* **100**, 386-400(1974).

[44] Shaw, R.: STrange attractors, chaotic behavior and information flow, *Natuforsch.* **A36**, 80-112(1981).

[45] Smale, S.: differentiable dynamical systems, *Bull. Am. Math. Soc.* **73**, 747-817(1967).

[46] Smale, S.: Dynamical systems and turbulence, pp. 71-82 of Turbulence seminar(eds. Chorin, Marsden, Smale), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 615, Springer, Heidelberg, 1977.

[47] Ulam, S. and v. Neumann, J.: On combination of stochastic and deterministic processes, *Bull. Am. Math. Soc.* **53**, 1120(1947).

[48] Williams, R.F.: The zeta function of an attractor, pp. 155-162 of Conference on the Topology of Manifolds(ed. J. Hocking), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1968.

[49] Williams, R.F.: Expanding attractors, *Publ. Math. I.H.E.S.* **43**, 169-203(1974).

[50] Williams, R.F.: The structure of Lorentz attractors, pp. 94-112 of Turbulence Seminar(eds. Chorin, Marsden, Smale), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 615, Springer, Heidelberg, 1977.

[51] Williams, R.F.: The structure of Lorentz attractors, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50**, 73-100(1979).

[52] Williams, R.F.: Attractors, strange and perverse(to appear).

[53] Zeeman, E.C.: Catastrophe theory and applications, Summer school on dynamical systems, I.C.T.P. Trieste, 1983.