谷川清隆 訳

Commun.Math. Phys. **82**(1981)137-151.

力学系の小さなランダム摂動とアトラクターの定義
Small random perturbations of dynamical systems and the definitions of attractors

David Ruelle

要約.
コンピューターによって作り出されたり、物理実験に見られる「ストレンジアトラクター」には必ずしも開ベイスンがない。このことを考慮し、Conley のアイデアに基づいてアトラクターを新しく定義しなおす。小さなランダムな摂動のもとで観察されるアトラクターはこの新しい定義に対応するものであることを主張する。

1. 序

(f^t) を力学系とする。すなわち、不連続または連続な時間 t をパラメーターとする写像 $M \mapsto M$ の群または半群とする。M は位相構造または可微分構造を有するとし、f^t は連続または可微分とする。しばしば M の部分集合 Λ があって近傍の点 x を引き寄せる。すなわち、$t \to \infty$ のとき、$f^t x$ は Λ に収束する。このような部分集合 Λ は吸引集合 (attracting set) またはアトラクターと呼ばれる。もっとも簡単な場合には、Λ は不動沈点 (attracting fixed point) または周期軌道である。しかし、もっと複雑な状況、とくにスメールの公理 A アトラクター、も調べられている (Smale[35],Bowen[4],Williams[37])。

物理系の漸近的ふるまい (またはあらゆる自然現象の長期にわたるふるまい) を記述するためにアトラクターは興味深い。とくに、(今やストレンジアトラクターと呼ばれる) ある種のアトラクターは初期条件に敏感に依存する現象を示す。すなわち、初期条件の小さな変化が時間とともに指数関数的に増大する (摂動は小さいときにのみ増大すればよい)。Landau[20] や Hopf[16] は流体力学の乱流を記述するのに準周期的アトラクターを用いた (このアトラクターは初期条件に関する敏感な依存性を示さない)。Lorentz[23] は近似対流方程式の中に敏感な依存性を示すアトラクターを見つけ、このことが天気の長期予報を困難にしているのではないかと指摘した。Ruelle and Takens[33] は流体力学乱流は非準周期的アトラクターによって記述すべきであると主張した (またストレンジアトラクターの名称を導入した)。Ahler[1], Gollub and Swinney[14] らの流体力学実験からすると、乱流を説明するのに、初期条件に関する敏感な依存性を持つストレンジアトラクターを使う方がよさそうである。乱流の始まりはこのやり方でうまく理解できる (Ruelle[29] でレビューされている)。

力学系は計算機で調べることができる。このやり方で各種の新しいアトラクターが発見され (Henon[15],Feigenbaum[10-12])、よく調べられてきた。

上で考察したことからすると、アトラクターを正確に数学的に定義することが望ましい。それをするのがこの論文の目的である。各種の要請を満たすように定義したいのだが、この要請の中には相矛盾するものがある。2節では、吸引集合を定義する際に課されるべきと思われる条件について議論する。3節と4節では、それぞれ吸引集合 (attracting set) とアトラクター (attractor) を定義し、その性質を調べる。5節では、適当な条件のもとで小さなランダム摂動を受けた力学系は漸近的にアトラクターの上に「暮らしている」と主張する。6節では、いくつか所見を述べる。

2. 吸引集合およびアトラクターに関する条件

M 上には距離 dist が与えられていると仮定するのが都合よい。ただし、3節では位相、4節では一様構造のみ必要である。連続写像 $f^t : M \mapsto M$ の族 (f^t) は $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_+$(不連続時間)、$\mathbf{R}$, または $\mathbf{R}_+$(連続時間) によって添字 (index) されている。群または半群の性質

$$f^0 = \text{identity}, \quad f^s \circ f^t = f^{s+t},$$

は定義されているところではどこでも成り立つ。$(x,t) \mapsto f^t x$ は定義域で連続であるとする (これは連続時間のときのみ新しい要請であって、4節でだけ使う)。定理 4.4 では、一様連続性も要請するが、可微分力学系へ応用するときには、これは自動的に満たされる。さて、吸引集合またはアトラクターが持つべき性質のリストをつくろう。

(A) **不変性**。すなわち、すべての t に対して $f^t\Lambda = \Lambda$.

(B) **吸引性**。Λ の近傍 U があって、t が十分大きければ Λ のどんな近傍 V をとっても $f^t U \subset V$ が満たされると仮定する。もっと弱い条件として、Λ の近傍 W があって、どんな $x \in W$ をとっても $\lim_{t\to\infty} \text{dist}(f^t x, \Lambda) = 0$ となる、がある。吸引集合の定義には強い方の条件を使うことにする。アトラクターは上の二つとは別の吸引性条件を満たすだろう。

(C) **閉集合性またはコンパクト性**。

(D) **既約性**。吸引集合がいくつかの重ならない不変な断片から成るとき、(たぶん) 遊走点のような「不適当」な点を除いて各断片をアトラクターと思いたい。既約性の条件の例としては、正の遷移性 ($x \in \Lambda$ があって、$(f^t x)_{t>0}$ の極限集合が Λ に一致する) または、Λ を台とするエルゴード測度の存在、がある。この論文のアトラクターの定義では、さらに別の条件 (鎖遷移性 chain transitivity) を課す。

(E) **既約断片への一意分解性**。

(F) **小さな摂動に対する安定性**。実験には摂動が、計算機実験には丸め誤差がつきものである。我がアトラクターの定義において小さな摂動は本質的な役割を果たす。

3節では、吸引集合を (A)-(C) によって定義する。4節で、吸引集合が既約な断片へ自然に分解されるようにしてアトラクターを定義する。たとえば、$\mathbf{R}$ 上のベクトル場 $x \mapsto X(x) = -x^4 \sin(\pi/x)$ は区間 $[-1,1]$ を吸引集合とし、対応する既約断片 (アトラクター) は n を奇数として $\pm 1/n$ と 0 である。$\{0\}$ は吸引集合でないことに注意しよう。アトラクターは実際は摂動

を受けた軌跡の無限時間後の極限集合であろうから、我々の定義の結果として、連結なコンパクト多様体上で滑らかな測度を保存する力学系の場合は多様体全体がアトラクターになる。実際、連結な多様体上ですべての t に対して $f^t =$ 恒等写像なる自明な系 (f^t) の場合、各点がアトラクターであるといってもよいし、多様体全体がアトタクターであるといってもよい。吸引集合よりもアトラクターの定義を弱くする必要性はファイゲンバウムのカントール集合の例から明らかである (6.1 節参照)。この集合は (非吸引的) 周期点の極限であるから、アトラクターではあるけれども吸引集合ではない。

3. 吸引集合

M をハウスドルフ空間とし、(f^t) を力学系 ($\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_+, \mathbf{R}$, または $\mathbf{R}_+$ によって index されており、$f^t : M \mapsto M$ は連続) とする。閉集合 $\Lambda \subset M$ は近傍 U があって以下の条件 (a) を満たし、条件 (b)、(b′)、(b″)、(b‴) のいずれかを満たすとき、吸引集合といわれる。

(a) Λ のどんな近傍 V をとっても、t が十分大きければ $f^t U \subset V$.
(b) t が十分大きければ $f^t \Lambda \supset \Lambda$.
(b′) すべての t に対して $f^t \Lambda = \Lambda$.
(b″) ある T があって $\cap_{t \geq T} f^t U = \Lambda$.
(b‴) すべての T に対して $\cap_{t \geq T} f^t U = \Lambda$.

3.1. 命題. 条件 (a) が与えられたとき、条件 (b)、(b′)、(b″)、(b‴) はすべて同値である。$U \neq \emptyset$ なら $\Lambda \neq \emptyset$ である。

証明. (b) ⇒ (b′) および (b‴). 各 T に対して、(a) から $\Lambda \subset \cap_{t \geq T} f^t U$ であり、一方 (b) より十分大きな T に対して $\Lambda \supset \cap_{t \geq T} f^t U$ である。だから十分大きな T, $T + \tau$ に対して

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq T+\tau} f^t U \supset f^\tau \bigcap_{t \geq T} f^t U = f^\tau \Lambda \tag{1}$$

とくに、すべての τ に対して $f^\tau \Lambda \subset \Lambda$ である。この包含関係に等号が含まれないとすると (b) は矛盾であるから、これより (b′) が出る。この結果から、(1) 式がすべての T に対して成り立つことがわかり、$\tau = 0$ として (b‴) が出る。

(b″) ⇒ (b). τ が与えられたとして、$x \notin f^\tau \Lambda$ とすると、$\Lambda \subset (f^\tau)^{-1}(M \backslash \{x\})$ でありまた (a) により、t を十分大きくとれば $f^t U \subset (f^\tau)^{-1}(M \backslash \{x\})$ となる。したがって、t が十分大きければ $f^t U \subset M \backslash \{x\}$ であるから、(b″) より $x \notin \Lambda$ を得る。これで $f^\tau \Lambda \supset \Lambda$ が示されたから、(b) が出た。

(b′) ⇒ (b) および (b‴) ⇒ (b″) は明らかである。これで同値であることが示された。Λ が空なら $V = \emptyset$ ととれるが、これは $U \neq \emptyset$ のとき (a) と矛盾する。

性質 (a), (b) を満たす集合 U を吸引集合 Λ の**基本近傍** (fundamental neighborhood) と呼ぼう。開集合 $W = \cup_t (f^t)^{-1} U$ は Λ の**ベイスン** (basin of attraction) と呼ばれる。W は $t \to \infty$ のとき $f^t x \to \Lambda$ を満たす点 $x \in W$ から成る。それゆえ W は U をどう選んだかには依らない。(f^t) が群のときには、Λ を多様体 M 全体ととることができる。このとき $\Lambda = U = W$ である。

3.2. 命題. U **が** M **の開集合で、十分大きなすべての** t **に対して** f^tU **が** U **に含まれ、相対コンパクトのとき、**

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} f^t U,$$

はコンパクトな吸引集合であって、U **がその基本近傍である。**

証明. 仮定により、十分大きな τ をとれば、$f^\tau U$ の閉包 K はコンパクトで U に含まれる。だから、

$$\bigcap_{t \geq 0} f^t K \subset \Lambda \subset \bigcap_{t \geq \tau} f^t U \subset \bigcap_{t \geq 0} f^t K,$$

であって、

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} f^t K,$$

はコンパクトである。

V は開集合で $V \supset \Lambda$ とする。$\cap_{t \geq 0} f^t K \backslash V = \emptyset$ であるから、コンパクト性により、$t_1, t_2, \ldots, t_n$ があって、

$$f^{t_1} K \cap \ldots \cap f^{t_n} K \subset V,$$

である。だから、t を十分大きくとれば、$f^t K \subset V$ であり、それゆえ、t を十分大きくとれば、$f^t U \subset V$ である。こうして性質 (a) が満たされ、定義により (b$''$) が成り立つから Λ は吸引集合である。

3.3. 既約性. 既約な吸引集合の定義は４．５節で述べる。

4. アトラクター

この節では、M は距離 dist によって与えられる一様位相を持つものとする。また $(x, t) \mapsto f^t x$ は $M \times \{t\}$ 上で連続と仮定する。曲線 (必ずしも連続でない) すなわち、M の点 $(x_t)_{t \in [t_0, t_1]} (t_1 \geq t_0)$ の族は、$\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ および $t, t + \alpha \in [t_0, t_1]$ のときはいつも

$$\mathrm{dist}(f^\beta x_{t+\alpha}, f^{\alpha+\beta} x_t) < \varepsilon$$

が満たされるなら、ε 擬軌道 (ε pseudoorbit) と呼ばれる。不連続時間の場合には、これは $t = t_0, \ldots, t_1 - 1$ に対して $\mathrm{dist}(f x_t, x_{t+1}) < \varepsilon$ であることを意味する (Bowen[3] およびその中の引用文献参照)。上の ε 擬軌道の長さは $t_1 - t_0$ であって、x_{t_0} から x_{t_1} まで行くということにする。a から b に行く ε 擬軌道で長さ T のものと b から c に行く ε 擬軌道で長さ T' のものをつなげると、2ϵ 擬軌道 (不連続の場合は ε 擬軌道) で長さ $T + T'$ で a から c に行くものが得られる。新しい関係 $a \succ b$ を導入しよう。これを「a から b に行く」と読む。これは a から b に行く少し摂動を受けた軌道があることを意味する。実際、$a, b \in M$ が与えられたとき、任意に小さな $\varepsilon > 0$ に対して a から b に行く ε 擬軌道があるとき、$a \succ b$ と書く。次の性質が成り立つことは容易に分かる。

4.1. 命題. 関係 $\succ$ **は前順序である。すなわち、反射的** ($a \succ a$) **かつ推移的** ($a \succ b$ **かつ** $b \succ c$ **なら** $a \succ c$) **である。また関係** $\succ$ **は閉じている** (x, y **がそれぞれ** a, b **に収束し、しかも** $x \succ y$ **なら** $a \succ b$ **である**)**。**

$a \succ b$ かつ $b \succ a$ のとき $a \sim b$ と書く。$\succ$ は前順序であるから、$\sim$ は同値関係であって、同値類の上に順序を誘導する。このことを $a \succ b$ なら $[a] \geq [b]$ と記す。極小の同値類を**アトラクター**と呼ぼう。a が不動点または $\mathrm{card}[a] > 1$ のとき同値類 $[a]$ を**基本類** (basic class) であるということにする。

上の定義は本来 Conley[9](Hurley[17] も参照されたし) による。しかし、ここでは、若干異なる用語と力点のおき方をした。基本類の和は Conley の**鎖回帰集合** (chain recurrent set) である。この集合は吸引集合によってうまく特徴づけることができる (Conley[9,p.37])。集合 S は基本類に含まれているとき、**鎖遷移的** (chain transitive) といわれ、基本類は**鎖成分** (chain component) と呼ばれる。我々のいう吸引集合は Conley の意味のアトラクターである。アトラクターの名前は既約性条件を満たす集合のためにとっておくことにする。我々のアトラクターは Hurley の**鎖遷移的準アトラクター** (chain transitive quasiattractor) である。Conley と Hurley はコンパクトな M(および連続時間) に興味を絞った。我々は、物理的応用 (たとえば Navier-Stokes 方程式；M はバナッハ空間) のことを考えて、もっと一般の状況について議論する。この節の結果はおしなべて、それほど新しくない (しかもそれほど難しくない)。ここでの結果は、５節の小さなランダム摂動の議論 (それがこの論文の新機軸の部分である) のための基礎である。

4.2. 命題. 各同値類 $[a]$ は閉じている。

$[a]$ が基本類であるための必要十分条件は各 $\varepsilon > 0$ 対して、a から a に行く長さ > 1 の ε 擬軌道があることである。

基本類すべての和は閉じている。アトラクターは基本類である。

a が非遊走点なら $[a]$ は基本類である。

$[a]$ が基本類なら、すべての t に対して $f^t[a] \subset [a]$ である。

これらはやはり明白な結果である。たとえば、$[a]$ が基本類なら小さな δ に対して a から a に行く長い δ 擬軌道があり、したがって、a から $f^t a$ に行く ε 擬軌道と $f^t a$ から a に行く ε 擬軌道がある。だから $f^t a \in [a]$ であり、それゆえ $f^t[a] \subset [a]$ である。

4.3. 系. (f^t) のエルゴード確率測度 ρ がコンパクトな台を持てば、この台は基本類に含まれる。

証明. $\mathrm{supp}\rho$ 上の実連続関数の環は可分である。だからエルゴード定理により $a \in \mathrm{supp}\rho$ があって、$\mathrm{supp}\rho$ は $\{f^t a\}$ の閉包である。命題 4.2 より $f^t a \in [a]$ であるから $\mathrm{supp}\rho \subset [a]$ である。

4.4. 定理. Λ をコンパクトな吸引集合とする。Λ の近傍があって、f^1 はその上で一様連続であるとする (M が局所コンパクトのとき、または M がバナッハ多様体で f^1 が C^1 のとき、この条件が満たされる)。

(a) $a \in \Lambda$ で $a \succ b$ なら $b \in \Lambda$.

(b) a が Λ のベイスン内にあり、$[a]$ が基本類なら、$[a] \subset \Lambda$ かつすべての t に対して $f^t[a] = [a]$ である。

(c) a が Λ のベイスン内にあれば、少なくとも一つアトラクター $[b]$ があって、$a \succ b$ であって、必然的に $[b] \subset \Lambda$ である。

(d) 類 $[a] \subset \Lambda$ がアトラクターであるための必要十分条件は $[a]$ のどんな近傍 V に対しても $[a]$ の近傍 V' があって、$x \in V'$ かつ $x \succ y$ なら $y \in V$ が成り立つことである。

(e) コンパクトな集合 $K \subset \Lambda$ が与えられたとき、$K^* = \cup_{z \in K}[z]$ がコンパクトであることはわかっている (命題 4.1 より)。すべての $\theta > 0$ に対して適当に $\varepsilon > 0$ を選ぼう。このとき、$y \succ x \in K$ であって、x から y に行く ε 擬軌道があるならば、$\mathrm{dist}(y, K^*) < \theta$ である。

(f) Λ がアトラクターであるための必要十分条件は Λ が基本類であることである。

証明. Ω を Λ の近傍とし、f^1 は Ω の上で一様連続であるとする。$\delta > 0$ と Λ の近傍 Ω' をうまくとれば Ω' の δ 近傍が Ω に含まれるようにできる。Λ の任意の基本近傍 $\overline{U}$ に対して、t を十分大きくとれば $f^t\overline{U} \subset \Omega'$ となることはわかっている。だから、すべての $n \geq 0$ に対して $f^n U \subset \Omega'$ となるようにもっと小さな基本近傍を選ぶことができる。

Λ の近傍 V として U に含まれるものをとる。$\delta' > 0$ と Λ の近傍 V' をうまくとれば V' の δ' 近傍が V に含まれるようにできる。Λ と $[0,1]$ のコンパクト性および $(x,t) \mapsto f^t x$ の連続性を利用すれば、$0 \leq t \leq 1$ のときに $f^t V'' \subset V'$ となるような Λ の近傍 V'' を選べる。したがって V'' から出発する長さ $t \leq 1$ の δ' 擬軌道は V の点で終わる。最後に $\delta'' > 0$ と Λ の近傍 V''' を選んで、V''' の δ'' 近傍が V'' に含まれるようにとる。

U は Λ の基本近傍であるから、正の整数 N があって、$t \geq N$ なら $f^t U \subset V'''$ である。とくに、

$$n = N, N+1, \ldots, 2N-1 \text{ のとき } f^n U \subset V'''.$$

f^1 の一様連続性から、適当に $\varepsilon > 0$ を選べば、U の点から出発する長さ $N, N+1, \ldots, 2N-1$ の ε 擬軌道達は V'' 内の点で終わる。$\varepsilon < \delta'$ と仮定して悪い理由はないから、U の点から出発する長さ $t \in [N, 2N]$ のすべての ε 擬軌道達は V 内の点で終わる。$V \subset U$ と仮定しているから、U の点から出発する長さ $t \geq N$ の ε 擬軌道はすべて V 内の点で終わる。

(a) $a \in \Lambda$ のとき、$c \in \Lambda$ を用いて $a = f^N c$ と書ける。だから、a から b に行く長さ $t \geq 0$ の各 ε 擬軌道に対して、c から b に行く長さ $N + t \geq N$ の ε 擬軌道があるから、$b \in V$ である。こうして $a \succ b$ で $a \in \Lambda$ なら $b \in \Lambda$ であることが示された。

(b) a が Λ のベイスン内にあって、$[a]$ が基本類なら小さな ε を用いて a から a に行く長い ε 擬軌道を構成できる。この擬軌道は U に入ると仮定することができ、したがって、a は Λ の任意の近傍 V 内にあると仮定することができる。だから $a \in \Lambda$ である。x がこの擬軌道上終点から長さ t のところにある点であるとすると、この擬軌道の長さが ∞ になり、ε が 0 に向かったとき、x は極限 $c \in \Lambda$ に向かうと (コンパクト性) から仮定できる。このとき、$f^t c = a$ かつ $c \sim a$ であるから、$f^t[a] \supset [a]$ である。命題 4.2 より $f^t[a] \subset [a]$ であるから、すべての t に対して $f^t[a] = [a]$ を得る。

(c) こんどは、a が Λ のベイスン内にあるとき、アトラクター $[b]$ で $a \succ b$ なるものがあって、b が必然的に Λ に属することを示したい。問題は $a \in U$ の場合に帰着するから、すでに述べた議論にしたがって、集合 $\{[x] : a \succ x\}$ に極小の要素があることを示せばよい。$a \succ x_\alpha$ を満たす類 $[x_\alpha]$ の全順序集合 X を考える。X が下に有界であることが示せればツォルンの補題より $\{[x] : a \succ x\}$ に極小要素のあることがでる。すべての α に対して $x_\alpha = f^{t_\alpha} x$ で $t_\alpha \geq 0$ が有界

の場合は自明である。それ以外の場合は、すでに述べた議論により、距離 $\mathrm{d}(x_\alpha, \Lambda)$ は 0 に収束し、$\mathrm{d}(x_\alpha, y_\alpha)$ が 0 に収束するような $y_\alpha \in \Lambda$ を選べる。b が (y_α) の適当に選んだ部分ネットの極限であれば、対応する部分ネット (x_α) は b に収束する。したがって、すべての a に対して $x_\alpha \succ b$ であるから、$[b]$ は X の下限である。

(d) V を $[a] \subset \Lambda$ の近傍とし、$[a]$ のどんな近傍 V' をとっても、$x \in V'$ かつ $x \succ y$ のときに $y \in V$ とはならないとする。このとき、$x_\alpha \succ y_\alpha$, $\mathrm{d}(x_\alpha, [a]) \to 0$ かつ $y_\alpha \notin V$ を満たす (x_α), (y_α) をみつけることができる。部分ネットをとることにより、$x_\alpha \to x \in [a]$, $y_\alpha \to y \in \Lambda \backslash V$ と仮定できる。だから $x \succ y \notin V$ であり、$[a]$ はアトラクターでは有り得ない。逆に、$[a]$ がアトラクターでなければ、$x \in [a]$ と $y \notin [a]$ で $x \succ y$ なるものがある。したがって、$V_\alpha \ni y$ なら上で挙げた性質をもつ V' はありえない。

(e) 性質が成り立たないとすると、$x_n \in K$ なる列 (x_n),(y_n) があって、$y_n \succ x_n$ であり、x_n から y_n に行く $1/n$ 擬軌道があり、また、y_n から K^* への距離 $\geq \theta$ である。$x_n \to \overline{x} \in K$, $y_n \to \overline{y} \in \Lambda$ と仮定できるから $\overline{x} \sim \overline{y}$ であり、$\overline{y} \in K^*$ となって $\mathrm{dist}(\overline{y}, K^*) \geq \theta$ と矛盾する。

(f) Λ がアトラクターなら命題 4.2 によって Λ は基本類である。一方、Λ が基本類なら (c) によってアトラクターである。

4.5. 既約吸引集合の定義. 定理 4.4 の状況のもとで、吸引集合が基本類であるならば (または同じことであるが、アトラクターであるならば) 既約である、というのは自然である。とくに、吸引集合は正に遷移的であるか、エルゴード確率測度の台になっていれば既約である (系 4.3 参照)。

4.6. Remark. 定理 4.4 の状況のもとで、$[a]$ が吸引集合の共通部分であれば、$[a]$ はアトラクターである (定理 4.4(a) を使う)。逆に、$\{f^t\}$ が群のとき、あるいは Λ に近傍 U があって t が大きいときに f^tU が相対コンパクトのとき (この場合、U、コンパクトな $S \subset U$、および s を選んで、$t \geq s$ のときに $f^tU \subset S$ とできる)、どんなアトラクターもそれを含む吸引集合の共通部分である。この結果は基本的には Conley[9,p.37] のものであり、Hurley による鎖遷移的な準アトラクターの導入の動機になった。これを証明するために、$[a]$ をアトラクターとし、a から x に行く任意に長い ε 擬軌道があるような点 x の集合の内点の集合を U_ε とおく。これより、U_ε は、$t \geq 1$ として、f^tU_ε の ε 近傍を含む。$K_\varepsilon = \cap_{t\geq 0} f^tU_\varepsilon$ と書こう。ε を十分小さくとって、U_ε が Λ の基本近傍に含まれるようにする。このとき $K_\varepsilon \subset \Lambda$ でもある。仮定により、$t \geq s$ のとき $\mathrm{clos} f^tU \subset S$, $\mathrm{clos} S \subset U$ かつ $t \geq 0$ のとき f^tS は閉集合であると仮定できる。とくに、

$$K_\varepsilon = \bigcap_{t\geq 0} f^tS,$$

であり、K_ε はコンパクトである。開集合 $V \supset K_\varepsilon$ に対して、t が十分大きければ $f^tU_\varepsilon \subset V$ であることを言おう。これが成り立たないとして、$t_{n+1} - t_n \geq s$ して $x_n \in f^{t_n}S \backslash V$ とおく。すると (？)$f^{t_{n+1}}S \subset f^{t_n}S$ である。U_ε は Λ の基本近傍に含まれるから、$x_n \to x \in \Lambda \backslash V$ ととれて、$x \in \cap f^tS = K_\varepsilon$ を得るが、これは $x \notin V$ に矛盾する。こうして、K_ε は吸引集合であり、

$$[a] \subset \bigcap_{\varepsilon>0} K_\varepsilon \subset \bigcap_{\varepsilon>0} U_\varepsilon = [a],$$

が得られ、仮定が証明された。

5. 小さなランダム摂動

力学系に小さなランダム摂動が加えられたとき、運動が漸近的にアトラクターに集中することを示すのがこの節の発想である。「絶対連続」条件を満たす有界摂動を加えられた離散時間の力学系に関してこれ (...？) を示すことができる。

5.1. コンパクトな台を有する拡散. M を距離空間とし、$f : M \mapsto M$ は離散力学系 (f^t) を生成する連続写像とする。$\varepsilon > \delta > 0$ とする。M 内にコンパクトな台を持つ確率測度の空間からそれ自身へのアフィン写像 F は以下の条件を満たすとき f に同伴する (ε, δ) 拡散である、ということにする：

(脚注) δ は x における単位質量、$B_x(\varepsilon)$ は x を中心とする半径 ε の球、$\overline{B}_x(\varepsilon)$ はその閉包。

(a) $\mathrm{supp} F\delta_x \subset f\overline{B}_x(\varepsilon)$
(b) $\mathrm{supp} F\delta_x \supset f\overline{B}_x(\delta)$
(c) $\phi : M \mapsto \mathbf{R}$ が連続なら $x \mapsto (f\delta_y)\phi$ は連続で、$(F\mu)\phi = \int \mu(dx)[(F\delta_x)\phi]$ である。とくに、

$$\mathrm{supp} F\mu = \mathrm{closure} \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\mu} \mathrm{supp} F\delta_x.$$

(d) $\phi : M \mapsto \mathbf{R}$ が連続なら集合 $\{(F\delta_y)\phi : y \in \overline{B}_x(\delta)\}$ は閉区間である。

$\overline{B}_x(\delta)$ 上にもっと弱い位相を見つけて、この集合がコンパクトであり、写像 $y \mapsto (F\delta_y)$ が $\overline{B}_x(\delta)$ 上のコンパクト位相および測度上の漠位相 (vague topology) に関して連続にできれば、性質 (d) は成り立つ。

5.2. Remark. 上の定式化は F を f の前に小さな拡散が加ったものと考えることに対応している。これによって、無限次元の場合にもコンパクトな台を持つ測度を扱える。有限次元 (局所コンパクト) な場合には F を f の後に小さな拡散が加わったものと考えることができる。

条件 (a) は摂動が有界であることを表し、条件 (b) は「絶対連続」型の条件である。これらなしには次の結果が成り立つことは期待できない。

5.3. 定理. **(f^t) を離散力学系とし、類 $[a]$ はアトラクターでないとする。十分小さく ε をとって、F は f に同伴する (ε, δ) 拡散、ν は M 内にコンパクトな台を持つ確率測度とする。このとき、**

$$\lim_{t \to \infty} (F^t\nu)(B_a(\delta)) = 0. \tag{2}$$

とくに、ν_∞ が測度 $F^t\nu$ の漠極限 (vague limit) のとき、$a \notin \mathrm{supp}\nu_\infty$ である。

(脚注) ν_∞ が $F^t\nu$ の漠極限であるとは、すべての $\alpha > 0, N$ および連続な $\phi_1, \ldots, \phi_N : M \mapsto \mathbf{R}$ に対して、任意に大きい t が存在して

$$\mid (F^t\nu)(\phi_i) - \nu_\infty(\phi_i) \mid < \alpha \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, N$$

のときである。

証明. $a \succ b$ および $b \notin [a]$ とする。$b \notin [a]$ であるから、ε を十分小さくとると b から a に行く 2ε 擬軌道はない。したがって、$B_{fb}(\varepsilon)$ から $B_a(\varepsilon)$ に行く擬軌道はない。とくに、$B_{fb}(\varepsilon)$ から $B_a(\delta)$ に行く擬軌道はない。

$x \in \overline{B}_a(\delta)$ なら、(b) より $\mathrm{supp} F\delta_x \supset f\overline{B}_x(\delta) \ni fa$ を得る。$a \succ b$ であるから、a から b に行く δ 擬軌道、たとえば $x_0 = a,\, x_m = b$ として $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ がある。$fx_0 \in \mathrm{supp} F\delta_x$ であることはいま見た。(c) を使えば、

$$fx_1 \in \mathrm{supp} F^2\delta_x, \ldots, fx_m \in F^{m+1}\delta_x,$$

が得られる。ϕ は $[0,1]$ に値を持ち、$\overline{B}_{fb}(\varepsilon)$ 内に台を持つ連続関数とし、$\phi(fb) > 0$ とする。すると

$$\text{すべての } x \in \overline{B}_a(\delta) \text{ に対して } (F^{m+1}\delta_x)(\phi) > 0,$$

である。(d) を考慮すると、$\beta > 0$ があって、

$$x \in \overline{B}_a(\delta) \text{ に対して } (F^{m+1}\delta_x)(\phi) \geq \beta,$$

である。したがって、μ を正の測度とすると、(c) より

$$(F^{m+1}\mu)(B_{fb}(\varepsilon)) \geq (F^{m+1}\mu)(\phi) \geq \beta\mu(B_a(\delta)).$$

$y \in B_{fb}(\varepsilon)$ とする。(a) と (c) より、$\mathrm{supp} F^n\delta_y$ の各点は或る 2ε 擬軌道 $(b, y, y_1, \ldots, y_n)$ に対して fy_m の形をしている。b から a に行く 2ε 擬軌道はないから、$\mathrm{supp} F^n\delta_y$ は $B_a(\delta)$ と共通点を持たない。

確率測度 ν が与えられたとして、

$$t = t_1, \ldots, t_k \text{ のとき } F^t\nu(B_a(\delta)) \geq \gamma > 0,$$

とする。このとき、$T \geq t_1, \ldots, t_k$ なら

$$\begin{aligned} 1 &\geq (F^{T+m+1}\nu)(M \backslash B_a(\delta)) \\ &\geq k\beta\gamma, \end{aligned}$$

を得る。これからただちに (2) 式が得られる。

5.4. 「大きな」台を持つ拡散. 上では $F\delta_x$ が小さなコンパクトな台を持つとした。今度は、$\mathrm{supp} F\delta_x$ が小さくない場合、たとえばコンパクトでない場合について議論しよう。確率測度から確率測度へのアフィン写像は、条件

$$(F\delta_x)(f\overline{B}_x(\varepsilon)) > 1 - \alpha, \tag{a'}$$

を満たし、5.1 の条件 (b) ー (d) を満たすとき、f に同伴する $(\varepsilon, \delta, \alpha)$ 拡散である、ということにする。ε が十分小さいとき、定理 5.3 の証明と同様な議論をし、同じ β を選べば、

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} (F^t\nu)(B_a(\delta)) \leq \frac{\alpha}{\beta},$$

が得られる。いくつかの場合には、$\alpha/\beta \to 0$ と仮定して、台に a を含まない不変測度を得ることができる。しかし、簡単かつ一般的な結果を得るのは難しいようである。「大きな」台を持つ拡散は連続系では自然に起こり得るので重要である。

5.5. 議論. 写像 f に同伴する (ε, δ) 拡散の議論に戻ろう。確率測度 ν のコンパクトな台はコンパクトな吸引集合 Λ のベイスンに含まれており、しかも Λ のある近傍において f は一様連続であるとする。このとき、定理 4.4 と定理 5.3 が両方とも適用できる。

A を Λ 内の全アトラクターの和集合とし、$\overline{A}$ をその閉包、$A^* = \cup_{z\in A}[z]$ とする。a が Λ のベイスン内にあれば、定理 4.4(c) より、$a \succ b \in A$ とみなせる。$\theta > 0$ が与えられたとき、定理 4.4(e) より、ε を適当に選んで、a が A^* の θ 近傍に含まれず、$a \succ b \in A$ ならば b から a に行く 2ε 擬軌道がないようにできる。定理 5.3 の証明の中で a, b, ε をこのように選ぶと、(2) 式が成り立つ。言い換えると、$\theta > 0$ が与えられたとき、ε を十分小さくとって、F が f に同伴する (ε, δ) 拡散であって、ν が Λ のベイスン内のコンパクトな台を持つ確率測度のとき、

$$\lim_{t\to\infty}(F^t\nu)(B_a(\delta)) = 0,$$

が或る $\delta = \delta(a)$ および A^* の θ 近傍に含まれないすべての a に対して成り立つ。$t \to \infty$ とし、その後 $\varepsilon \to 0$ としたときの $F^t\nu$ の漠極限が定義でき、それは A^* 内に台を持つ Λ 上の確率測度である。こうして、定理 5.3 の系が得られた (実際上定理の証明の系であるが)：

5.6. 系. (f^t) **を離散力学系とし、**F **は** f **に同伴する** (ε, δ) **拡散、**ν **は吸引集合** Λ **のベイスン内にコンパクトな台を持つ確率測度とする。**Λ **のある近傍上で** f **は一様連続と仮定する。**Λ **内の全アトラクターの和集合を** A **で表し、**$\overline{A}$ **を** A **の閉包、**$A^* = \cup_{z\in A}[z]$ **とする。**

A^* **の各近傍** Θ **に対して、**ε **が十分小さければ**

$$\lim_{t\to\infty} F^t\nu(M\backslash\Theta) = 0,$$

である。とくに、任意の漠極限 $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty} F^t\nu$ **は** A^* **内に台を持つ。**

この補題の中で、A^* をもっと小さな集合で置き換えることができるかもしれない。いずれにせよ、A が閉集合 (たとえばアトラクターの数が有限) の場合、$A^* = A$ であり、台が漸近的に A に含まれるような測度が得られる。

6. 後注.

6.1. 例. ファイゲンバウム [10-12] は区間の写像を調べているときに、分岐の無限列が極限へ集積する注目すべき現象に出会った。$n = 0, 1, \ldots$ としたとき、周期 2^n の吸引周期軌道が反発的になり、周期 2^{n+1} の吸引周期軌道が生じる。$n \to \infty$ のとき、カントール集合が現れる。これは 4 節の意味でアトラクターである。このファイゲンバウムのカントール集合は吸引集合ではない。なぜなら、そのいくらでも近くに周期 2^n の反発周期軌道があるから。

区間 $[0, 1]$ から「まん中の３分の１」の区間を相次いで取り去ることによる通常のカントール集合の構成法から出発して、各「取り去られた」区間内に反発不動点を導入して力学系がつくれる。この力学系では、カントール集合は吸引不動点から成る。この場合、アトラクターの集合は非可算である (Hurley[17,3.4] 参照)。

2 節でベクトル場 $X(x) = -x^4 \sin(\pi/x)$ の例を出した。これを $x < 0$ のときに $X(x) = -\mathrm{e}^{1/x}$ と修正すれば、n が奇数の点 $1/n$ はアトラクターである。ところがその極限 0 はアトラクターでない。だからアトラクターの集合は必ずしも閉集合でない。

円 $\mathbf{R}(\bmod 2\pi)$ の上にベクトル場 $X(x) = 1 - \cos x$ を考える。円全体がアトラクターである。しかし、非遊走点は 0 だけである。だからアトラクターは遊走点を含み得る。しかもとくに、どんなエルゴード的確率測度の台とも異なり得る。

6.2. 安定および不安定多様体. 簡単のために (f^t) は群であるとして、点 a の安定および不安定多様体を次式で定義する：

$$\begin{aligned} \Psi_a^- = & \ \{x : \lim_{t\to\infty} \mathrm{d}(f^t x, f^t a) = 0\}, \\ \Psi_a^+ = & \ \{x : \lim_{t\to\infty} \mathrm{d}(f^{-t} x, f^{-t} a) = 0\}, \end{aligned}$$

このとき、$[a]$ が基本類なら $\Psi_a^- \succ a \succ \Psi_a^+$ である。(とくに、$[a]$ と $[b]$ が基本類で $\Psi_a^+ \cap \Psi_b^- \neq \emptyset$ なら $a \succ b$ である。$a \sim b$ なら $\Psi_a^+ \cap \Psi_b^- \subset [a]$ である。$[a]$ がアトラクターなら $\Psi_a^+ \subset [a]$ である。) この結果はきわめて一般的に成り立つが、可微分力学系 (可微分写像または流れ) の場合がことに興味深い。というのは、$\Psi_a^\pm$ はこのときしばしばはめ込まれた可微分多様体であり、これに関しては、なにがしかの理解が進んでいる。

6.3. 公理A力学系. $(f^t)(t \in \mathbf{Z}$ または $t \in \mathbf{R})$ は公理Aおよびサイクルなし条件を満たす力学系とする。このとき、公理A基本集合およびアトラクターは我々が基本類およびアトラクターと呼んだものに外ならない。基本集合は有限個しかなく、通常我々が基本類上に導入したのと同じ関係で順序付けられている。公理A系は可微分力学系の一般論をまねて構築しようとするときの模範である。ことに、これから我々が議論しようとする漸近測度に関してあてはまる。

6.4. 漸近測度とストレンジアトラクター. 力学系 (f^t) に小さなストカスティックな摂動を加えたときに定常測度の「雑音なし」の極限として生じる測度を漸近測度と呼ぼう。ここではMはコンパクトな多様体であるとし、拡散 F の核 $F\delta_x$ は M 上のリュベーグ測度に関して絶対連続であるとする。5 節の議論から、漸近測度の台に関して情報が得られる。(サイクルなしの) 公理A可微分写像および流れの場合、測度そのものに関して情報が得られる。アトラクターごとに丁度一つの漸近測度が得られる。これは、不安定多様体上のリュベーグ測度な関して絶対連続な不安定多様体上の条件付確率を持つものとして特徴付けられる。公理A系の場合は、非吸引的基本集合の近くでの t が大きいときの $f^t\nu$ のふるまいが知られている。すなわち、ν がリュベーグ測度に関して連続な密度を持てば、基本集合の近傍内に残っている質量は指数関数的に減衰する。公理Aが成り立たないときでも、いろいろな場合に漸近測度が不安定多様体の上で絶対連続であると期待できる。しかし、例外も知られている。Pugh and Shub[26] によって示された通り、不安定多様体上に絶対連続な測度があれば、それは多様体上リュベーグ測度 > 0 の集合をなす初期点に関するエルゴード平均である。

漸近測度を見つける問題はその台を評価する問題より本質的に深い問題であることを指摘しておく。これを理解するために、5 節の議論が M(M はコンパクトとして）の位相のみを使ったことに注意しよう。一方、漸近測度は本質的に可微分構造に依存する。たとえば、アノソフ微分同相の漸近測度の測度論的エントロピーは微分同相が構造安定であるにも拘らず、微分同相が摂動を受けると変化する。

アトラクターは主として実験(計算機、物理および化学実験)の中でその姿を現す。これらは漸近測度を備えており、ストレンジアトラクター(strange attractor)は漸近測度が正のリャプーノフ指数を持つ事実、すなわち、(ほとんどいたるところで)$f^{\mathrm{t}}x$ と $f^t(x+\Delta x)$ が指数関数的に離れて行くこと、によって定義できるかも知れない。いまの時点では、ストレンジアトラクターを漸近測度に関する考察とは無関係に定義出来るかどうかはっきりしない。これは上で注意したように、構造の観点から重要な問題である。

6.5. ディジタル計算機によるアトラクターの生成. ディジタル計算機によって長い軌道 $\{f^tx : t \in [0,N]\}$ を計算するときは丸め誤差の存在に気を付けなければならない。丸め誤差は有界であり、その分布はある意味で絶対連続と仮定してよさそうである。したがって、5 節の議論が適用でき、計算機は多分本当にここで定義したアトラクターを具現する「アトラクター」を生成しているのであろう。(計算機は微分方程式を解いている場合でも、いつでも離散力学系をしらべていることに注意しよう。) しかし、気をつけなければいけないのは、ある場合には、漸近的なふるまいに達するためには N を非常に大きくする必要があることである。また心にとどめておく必要があるのは、まったく同じ数に作用するとき、計算機はまったく同じ丸め誤差を生じることである。計算機が一度訪れた点に戻ってきた途端に、誤差が絶対連続で独立な分布をするという我々の仮定に違背する。計算機は有限機械であるから、この種のループは必然的に生じるが、そのループがきわめて長いと思われる。現実に、Levy[22] の観察によれば、Henon アトラクターを通常の精度で計算すると、比較的短いループ(長さ $\sim 10^3$)が現れる。これを避けるためには、ループの長さが N に関して大きくなるように精度を選ぶ必要がある。

6.6. 物理実験への応用. 流体力学系(または化学系、その他)の実験について議論するときにはいくつかの困難に出会う。時間が連続であることはそれ自体深刻な問題ではないが、ランダムなゆらぎが有界であると仮定できなくなる(ゆらぎが異なる時刻において相関なしのとき)。さらに、ゆらぎの分布はほとんどわかっていない(平衡状態における温度ゆらぎに関してはよい理論があるが、この理論は平衡状態からはずれたところへは簡単に拡張できない。Fox[13] 参照)。5.4 節を参考にすれば、アトラクターでない基本集合から離れ去るまでの時間(これは β^{-1} 程度の大きさである)を尺度にして大きなゆらぎの頻度(α によって測られる)が小さいとすれば、実験データはアトラクターの近くにあるだろう。この条件は、たとえ現実によく満たされるにしても、原理的には実証するのは難しい。

References

1. Ahlers, G: Low-temperture studies of the Reyleigh-Bénard instability and turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1185-1188 (1974).
2. Bourbaki, N.: *Topologie Générale* (fascicule de résultats). Paris: Hermann 1953.
3. Bowen, R.: Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms. *Lecture notes in Mathematics* Vol.470. Berlin: Springer 1975.
4. Bowen, R.: On Axiom A Diffeomorphisms. CMBS Regional Conference, Ser. 35, Providence RI, Am. Math. Soc. 1978.
5. Bowen, R, Ruelle, D.: The ergodic theory of Axiom A flows. *Invent. Math.* **29**, 181-202 (1975).
6. Campanino, M., Epstein, H.: On the existence of Feigenbaum's fixed point. *Commun. Math. Phys.* **79**, 261-302 (1981).

7. Collet, P., Eckmann, J-.P.: Iterated maps on the interval as dynamical systems. Progress in Physics Vol.1, Boston, Birkhauser 1980.

8. Collet, P., Eckmann, J-.P., Lanford, O.E.: Universal properties of maps of an interval. *Commun. Math. Phys.* **76**, 211-254 (1980).

9. Conley, Ch.: Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference, Ser. 38, Providence, RI: Am. Math. Soc. 1978.

10. Feigenbaum, M.J.: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* **19**, 25-52 (1978).

11. Feigenbaum, M.J.: The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **21**, 669-706 (1979).

12. Feigenbaum, M.J.: The transition to a periodic behavior in turbulent systems. *Commun. Math. Phys.* **77**, 65-86 (1980).

13. Fox, R.F.: Hydrodynamic fkuctuation theories. *J. Math. Phys.* **19**, 1993-1999 (1978).

14. Gollub, J.P., Swinney, H.L.: Onset of turbulence in a rotationg fluid. *Phys. Rev. Lett.* **35**, 927-930 (1975).

15. Hénon, M.: A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* **50**, 69-77 (1976).

16. Hopf, E.: A mathematical example displaying the features of turbulence. *Commun. Pure Appl. Math.* **1**, 303-322 (1948).

17. Hurley, M.: Attractors: persistence and density of their basins (to appear).

18. Kifer, Yu.I.: On small random perturbations of some smooth dynamical systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR* Ser. Math. **38**, 1091-1115 (1974). English translation: *Math. USSR Izv.* **8**, 1083-1107 (1974).

19. Kifer, Yu.I.: Stochastic stability of the topological pressure. *J. Anal. Math.* **38**, 255-286 1980).

20. Landau, L.D.: Turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **44**, 339-342 (1944).

21. Lanford, O.E.: A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures (to appear).

22. Levy, Y.: Some remarks about computer studies of dynamical systems (to appear).

23. Lorenz, E.N.: Deterministic Nonperiodic flow. *J. Atmos Sci.* **20**, 130-141 (1963).

24. Misiurewicz, M.: Structure of mappings of an interval with zero entropy. *Publ. Math. IHES* **53**, 5-15 (1981).

25. Pesin, Ya.B.: Invariant manifold families which correspond to non-vanishing characteristic exponents. *Izv. Akad. Nauk SSSR* Ser. Math. **40**, 1332-1379 (1976). English translation: *Math. USSR Izv.* **10**, 1261-1305 (1975).

26. Pugh, C.C., Shub, M.: Differentiability and continuity of invariant manifolds (to appear).

27. Ruelle, D.: *Ame. J. Math.* **98**, 619-654 (1976).

28. Ruelle, D.: Dynamical systems with turbulent behavior. Mathematical problem in theoretical physics. *Lecture Notes in Physics*, Vol.80, pp.341-360, Berlin: Springer 1978.

29. Ruelle, D.: Thermodynamic formalism. Encyclopedia of math and its Appl. Vol.5, Reading, Mass.: Addison-Wesley 1978.

30. Ruelle, D.: Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. Math. IHES* **50**, 275-306 (1979).

31. Ruelle, D.: Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space. *Ann. Math.* (to appear).

32. Ruelle, D.: Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence. *Bull. Am. Math. Soc.* (New Series) **5**, 29-42 (1981).

33. Ruelle, D., Takens, F.: On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167-192 (1971).

34. Sinai, Ya.G.: Gibbsian Measures in ergodic theory. *Usp. Math. Nauk* **27**, 21-64 (1972). English translation: *Russ. Math. Surv.* **27**, 21-69 (1972).

35. Smale, S.: Differentiable dynamical systems. *Bull. Am. Math. Soc.* **73**, 747-817 (1967).

36. Smale, S.: The $\Omega-$stability theorem. Global analysis. *Pure Math.* Vol.14, pp.289-298, Providence, R.I.: Am. Math. Soc. 1970.

37. Williams, R.F.: Expanding attractors. *Publ. Math. IHES* **43**, 169-203 (1974).