谷川清隆 訳

Physical Review A **14** (1976), 2338-2345

コルモゴロフ・エントロピーと数値実験
Kolmogorov Entropy and numerical experiments

Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, and Jean-Marie Strelcyn

要約

力学系を数値的に調べれば、普通コルモゴロフ (または計量) エントロピーに関係すると思われる量によって、近くの軌道の発散率の評価が得られる．この論文では、まず、Oseledec および Pesin の数学的結果に基づいて、このような関係をどのように精密化できるかを示す．次に、例として Hénon-Heiles モデルの場合にコルモゴロフ・エントロピーを数値的に調べる．

I. 序

近年、力学系とくにハミルトン系のいわゆる乱雑な (stochastic) ふるまいを数値計算によって調べるための試みが多くなされている．しかし、乱雑さ (stochasticity) は一般に定性的に定義され吟味されており、それを記述するための経験的パラメータと厳密な理論的概念との関係はとても明確とは言えない．

最も有力な経験的な道具の一つとして相空間の近くの軌跡の発散の研究がずっと行なわれてきた．このような方法によって流れのコルモゴロフ (または計量) エントロピーに厳密に関係すると推察される定量的なパラメータ (「エントロピー」的な (entropy-like) 量) が定義できる [1−4]．

この論文の目的は、このエントロピー的な量を、計量エントロピーとの精密な関係を導きつつ解析し、数値計算で観察されるある種の性質を説明することにある．この関係は自由度 2 のハミルトン系の場合はとくに簡単であることがわかる．例として、有名な Hénon-Heiles モデル [5−7] の場合にエントロピー的な量を計算し、その性質を吟味する．さらにエントロピー自身をエネルギーの関数として描くことができる．

II 節ではまず必要な数学的道具を集める．すなわち、Oseledec[8] の結果および Pesin[9,10] の基本的結果がそれである．(後者の結果を指摘してくれた A.B.Katok 博士 (モスクワ) に感謝する.) 次にエントロピー的な量の定義を思い起こし、経験的に観察されるその性質を説明する．Hénon-Heiles モデルの数値結果は III 節で取り扱う．

この論文はできる限り自己完結的に書いた．しかし、エルゴード理論に親しんでいること、とくにエントロピーに慣れ親しんでいることが要求される (たとえば参考文献 11 および 12 参照)．ここで使う可微分多様体の初等的な概念については、例えば参考文献 13 を参照されたい．

II. 数値計算の理論的解析

A. 数学的準備: リャプーノフ特性数とエントロピー

まず主たる定義を与え、記法を固定する.

M を可微分、n 次元、コンパクト、連結な C^2 リーマン多様体とする．$x \in M$ なら x における M の接空間、および M 上のリーマン計量によって接空間に誘導されるノルムをそれぞれ E_x および $||\cdots||$ で表わす．X は M 上に定義される C^2 級ベクトル場であって、$\{T^t\}$ は X によって誘導される流れであるとする．すなわち、任意の t に対して $T^t x = x(t)$ とする．ここで $\{x(t)\}$ はベクトル場 X の積分曲線であって $x(0) = x$ を満たす．微分同相写像 T^t から誘導される E_x から $E_{T^t x}$ の上への接写像 (tangent mapping) を dT^t_x で表わす．また、流れ $\{T^t\}$ は規格化測度 μ を保存すると仮定する．この測度は M 上のリュベーグ測度と同値であり、局所座標でのその密度は C^r 級であるとする．すなわち、流れ $\{T^t\}$ は n 次で C^r 級の積分不変量を許す.

以下の定理 A と B は、参考文献 8 の定理 2 と 8 の部分的まとめであるが、これが本論文のこれ以後の考察の基礎である.

定理 A. 可測集合 $M_1 \subset M,\ \mu(M_1) = 1$ があって、どの $x \in M_1$ に対しても次の性質が成り立つ.

(a) どのベクトル $e \in E_x,\ e \neq 0$ に対しても、極限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln ||dT^t_x(e)|| = \lambda(x, e)$$

が存在して有限である．M がコンパクトなので、この極限は M 上のリーマン計量には依存しない.

(b) E_x の基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ があって、次が成り立つ.

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda(x, e) = \inf_{\Pi} \lambda(x, \tilde{e}_i).$$

ただし

$$\Pi = \{(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n) : (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)\ \text{は}\ E_x \text{の基底}\ \}.$$

e が E_x 内で動くとき、$\lambda(x, e)$ は次の値のみを取る.

$$\{\lambda(x, e_i)\}_{1\leq i\leq n}.$$

数 $\lambda(x, e)$ はベクトル $e \in E_x$ のリャプーノフ特性数と呼ばれ、流れ $\{T^t\}$ および点 x のみに依存する数 $\lambda(x, e_i)$ は x における流れ $\{T^t\}$ のリャプーノフ特性数 (Lyapunov characteristic number) と呼ばれる．これ以後、記法 $\lambda(x, e_i) = \lambda_i(x),\ 1 \leq i \leq n$ を使い、$\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \cdots \leq \lambda_n(x)$ とする．このとき関数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は M 上で定義され、M 上のリュベーグ測度に関して可測であることが示せる.

また $\lambda_n(x)$ を $\lambda_{\max}(x)$ とも書く．この量がこの論文の興味の主たる対象である．というのは、以下で示されるように、これはエントロピー的量に対応するからである.

$x \in M_1$ が与えられたとき、数 $\{\lambda_i(x)\}_{1\leq i\leq n}$ は必ずしもすべてが異なるとは限らない．$\{\nu_j(x)\}_{1\leq j\leq s(x)}$ を $\{\lambda_i(x)\}_{1\leq i\leq n}$ が取る異なる値とし、$k_j(x)$ を $\nu_j(x)$ の多重度とする．また $i < j$ なら $\nu_i < \nu_j$ とする．

定理 B. どの $x \in M_1$ に対しても、E_x の線形部分空間 $H_1, \ldots, H_s$ で $s = s(x)$ なるものがあって、(a) $E_x = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$ ($\oplus$ は直和); (b) $\mathrm{dim} H_j = k_j(x),\ 1 \leq j \leq s$; (c) $e \neq 0$ で $e \in H_j$ なら

$$\lim_{t\pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln ||dT_x^t(e)|| = \pm\nu_j(x), \quad 1 \leq \nu \leq s;$$

(d) $e \neq 0$ で $e \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$ で $e \notin H_1 \oplus \cdots \oplus H_{j-1}$ なら、$\lambda(x, e) = \nu_j(x),\ 1 \leq j \leq s$ である．

定理よりただちに、E_x 内にベクトル e を「でたらめ (at random)」に選べば、$\lambda(x, e) = \nu_s(x) \equiv \lambda_{\max}(x)$ が見つかることが期待できる．実際、$\lambda(x, e) < \nu_s(x)$ なるベクトル e は部分空間 E_x を構成するが、この部分空間は正の余次元を持ちリュベーグ測度ゼロである．

さてリャプーノフ特性数と計量エントロピーを結ぶ Pesin の基本定理を思いだそう．

定理 C. 上で与えた条件のもとで、次を得る．

$$h_\mu(\{T^t\}) = \int_M \left[\sum_{\lambda_i(x)>0} \lambda_i(x) \right] d\mu(x).$$

ここで $h_\mu(\{T^t\})$ は不変測度 μ に関する流れ $\{T^t\}$ のエントロピーである．

以下の注意はリャプーノフ特性数の定義そのものからただちに出る帰結である．すなわち、ベクトル場 X が特異点を持たないとする．つまりどの $x \in M$ に対しても $X(x) \neq 0$ とする．このとき任意の $x \in M$ に対して $\lambda(x, X(x)) = 0$ である．その結果、流れ $\{T^t\}$ のリャプーノフ特性数の少なくともひとつがどの $x \in M$ に対してもゼロになり、よって $x \in M_1$ に対して $\lambda_{\max}(x) \geq 0$ を得る．

上の注意および Pesin の定理より、次の不等式を得る．

$$\begin{aligned} \int_M \lambda_{\max}(x) d\mu(x) &\leq h_\mu(\{T^t\}) \\ &\leq (n-1) \int_M \lambda_{\max}(x) d\mu(x). \end{aligned} \tag{1}$$

次に自由度 N のハミルトン系の特別の場合を考えよう．$R^{2N},\ N \geq 1$ の開部分集合 U 上で定義された C^2 級の関数 $H(q, p)$ が与えられたとし、それが $(q, p) \in U$ に対して $\mathrm{grad} H(q, p) \neq 0$ を満たすとする．ここで $q = (q_1, \ldots, q_N), p = (p_1, \ldots, p_N)$ である．U 上のハミルトン流 $\{T^t\}$ はこうしてハミルトン関数 H を持つハミルトンの運動方程式によって定義される．

エネルギー面 $\Omega_E = \{(q, p) \in U : H(q, p) = E\}$ は必ずしもコンパクトでなくてよい．エネルギーのある区間があって、その区間内では Ω_E が $(2n-1)$ 次元の部分多様体 Γ_E を含み、それがコンパクト、連結かつ $\{T^t\}$ 不変であるとする．

$\{T_E^t\}$ を流れ $\{T^t\}$ の Γ_E への制限とする．よく知られているように、R^{2N} 上のリュベーグ測度は Γ_E 上に不変測度 μ_L(厳密に正であり、局所座標に関し C^2 級である) を誘導し、それは $\mu_L(\Gamma_E) = 1$ と規格化できる．このような条件のもとで、不等式 (1) は次のようになる．

$$\int_{\Gamma_E} \lambda_{\max}(q, p) d\mu_L(q, p) \leq h_{\mu_L}(\{T_E^t\}) \leq 2(N-1) \int_{\Gamma_E} \lambda_{\max}(q, p) d\mu_L(q, p). \tag{2}$$

このような不等式はエントロピー的量とエントロピーの間の結びつきを議論するための基礎となる．もっと厳しい不等式で、特定の仮定の下で成り立つものは IIIB 節で興味の対象となるが、これは IID 節で導出する．

この副節を終えるにあたって、流れ $\{T^t\}$ に関してここで考えた Oseledec および Pesin の結果が微分同相写像 T に対しても簡単に定式化できることを注意しておく．

B. エントロピー的な量

ここでは参考文献 4 および Chirikov とその共同研究者によって行なわれた仕事 [1–3] で定義された量 $k_n(\tau, x, d)$ と $k(\tau, x, d)$ について記述しよう．

ここでは Γ_E 上のハミルトン流 $\{T_E^t\}$ の場合を引用するが、滑らかな多様体上の流れや微分同相写像の場合も同じように扱うことができる．

$\tau > 0$ が与えられたとき、Γ_E からそれ自身の上への微分同相写像 T^τ を考える．点 $x \in \Gamma_E$ および x に非常に近いけれども同じ軌道上にない別の点 $y \in \Gamma_E$ を固定する．x と y を結ぶ線分を d で表わし、その長さを $|d|$ で表わす．

$x_1 = T^\tau x$ および $|d_1| = ||T^\tau x - T^\tau y||$ とする．$||\cdots||$ はユークリッドノルムである．x_1 から出て $T^\tau y$ を含む半直線上で、$||y_1 - x_1|| = |d|$ なる唯一の点を y_1 と記す．次にこのような手続きを行なって $x_2 = T^\tau x_1 = T^{2\tau} x,\ |d_2| = ||T^\tau x_1 - T^\tau y_1||$ を定義する．ここで y_2 は、$x_2 = T^\tau x_1$ から出て $T^\tau y_1$ を含む半直線上で、$||y_2 - x_2|| = |d|$ なる唯一の点のことである．以下同様にこれを繰り返す (図 1 参照)．

こうして正数列 $\{|d_i|\},\ i = 1, 2, \ldots$ が得られるので、次の量が定義できる．

$$k_n(\tau, x, d) = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{|d_i|}{|d|}.$$

参考文献 4 で記述された数値計算から、そこで考察されたモデルの場合、$|d|$ が大き過ぎなければ、(i) 極限 $\lim_{n\to\infty} k_n(\tau, x, d) = k(\tau, x, d)$ が存在するように思われ、(ii) $k(\tau, x, d)$ は τ に無関係であり、(iii) $k(\tau, x, d)$ は d に無関係である．

図 1

一般に、広い類のハミルトン系 [1–4,7,14] 上での数値計算によれば、エネルギー E を決めたとき、これらの系の Γ_E はすべておおざっぱに言って $\{T_E^t\}$ 不変な 2 つの領域に分解される．そのうちひとつは秩序領域 (あるいはときに安定領域) と呼ばれ、流れ $\{T_E^t\}$ の軌跡が準周期運動

に似た性質で特徴づけられる．もうひとつはストカスティック領域と呼ばれ、軌跡のふるまいが非常に不規則であることが特徴で、Anosov 流 (参考文献 1 参照、またとくに参考文献 7 と 14 参照) に似たふるまいを示す．このような特徴づけは厳密ではないが、否定もできない発見的な価値を持っている．そのうえ、(iv) x を Γ_E の秩序領域に取れば $k(\tau,x,d)=0$ であり、(v) x を Γ_E のストカスティック領域に取れば $k(\tau,x,d)$ は x の選び方に依らない．しかもこのとき、$k(\tau,x,d)$ はつねに正である．性質 (v) からすると、x を Γ_E のストカスティック領域に取る限り、$k(\tau,x,d)$ の代わりに単に $k=k(E)$ とすることができる．数 $k(E)$ はエントロピー的量と考えられた．IIC 節ではこのような陳述に精密な意味を与えよう．

C. エントロピー的な量の正体

ここでは IIB 節の (i)-(iii) を説明し、(iv) と (v) に関して発見的な注意をすることができる．これは $k(\tau,x,d)$ をリャプーノフ特性数 $\lambda(x,e)$ と同一視することに基づく．ただし $e=y-x$ である．

(a) τ を固定し、また $|d|$ が十分小さければ、明らかに $|d_1|/|d| \approx ||dT_x^\tau(e)||/||e||$ であり、そのうえ、

$$\frac{|d_2|}{|d|} \cong \frac{1}{||e||}\left|\left|dT^\tau_{T^\tau_x}\left(\frac{||e||}{||dT_x^\tau(e)||}dT_x^\tau(e)\right)\right|\right| = \frac{||dT_x^{2\tau}(e)||}{||dT_x^\tau(e)||},$$

である．ここで $T^{t+s}=T^tT^s$ から出る性質 $dT_x^{t+s}=dT^t_{T^s_x}dT^s_x$ を使った．一般に次が成り立つ．

$$\frac{|d_i|}{|d|} = \frac{||dT_x^{i\tau}(e)||}{||dT_x^{(i-1)\tau}(e)||}, \quad i=1,2,3,\ldots$$

その結果、

$$\begin{aligned} k_n(\tau,x,d) = &\ \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^n \ln\frac{|d_i|}{|d|} \\ \cong &\ \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^n \ln\frac{||dT_x^{i\tau}(e)||}{||dT_x^{(i-1)\tau}(e)||} \\ = &\ \frac{1}{n\tau}\ln\frac{||dT_x^{n\tau}(e)||}{||(e)||}, \end{aligned}$$

であり、これから、定理 A の注意 (a) より $k(\tau,x,d)=\lim_{n\to\infty}k_n(\tau,x,d)$ をリャプーノフ特性数 $\lambda(x,e)$ と同一視できる．この同一視の誤差は $|d|$ をゼロにすればゼロに向かう．

(b) IIB 節の性質 (ii) はこのときリャプーノフ特性数の定義そのものから直ちに出る．

(c) 上の (a) において $k(\tau,x,d)$ は $\lambda(x,e)$ と同一視されてきた．このとき定理 B の後の注意から、d をでたらめに選べば $k(\tau,x,d)=\lambda_{\max}(x)$ と期待できることがわかる．

(d) IIB 節の (i)-(iii) はリャプーノフ特性数に関する Oseledec の定理と $k(\tau,x,d)$ の定義そのものの帰結であるが、一方、性質 (iv) と (v) は経験的なものであると考えるべきで、よく理解されているとは到底言い難い．だから以下の考察は必要から生じた発見的なものである．

秩序領域に対しては、リャプーノフ数がゼロになることは、数値的に計算した軌跡が準周期的であることに関係しているはずである．(iv) について言えるのはこの程度のことである．

一方、性質 (v) はストカスティック領域がエルゴード的であるか、あるいはストカスティック領域の測度に近いエルゴード領域を含むのではないかという考えを支持する．これに関係し

て、リュベーグ測度を保存する流れでエルゴード的でないのに、リャプーノフ特性数が1つを除いてほぼいたるところゼロでない例があることを思い出そう[15].

D. エントロピーとの結びつき

エントロピーとエントロピー的な量の結びつきに関しては、唯一の厳密な関係は本質的には不等式 (2) である．この関係式は Pesin の定理 (この論文の定理 C) とベクトル場が特異点を持たないという仮定から出る．

しかし IIB および IIC 節で記述した発見的描像が使える．そこではストカスティック領域と秩序領域が存在するように見える特定のモデルを考えた．実はこのとき $\lambda_{\max}(x)$ が Γ_E の秩序領域ではゼロ、Γ_E のストカスティック領域 S_E では正定数 $k(E)$ に等しいと仮定できる．そこで不等式 (2) から次が得られる．

$$\mu_L(S_E)k(E) \le h_{\mu_L}(\{T_E^t\}) \le 2(N-1)\mu_L(S_E)k(E). \tag{3}$$

IIIB で使うことになる、もっと精度のよい (stringent) 関係は $H(q,p) = H(q,-p)$ なるハミルトン系に関しては得られる．ハミルトン関数がこの条件を満たすモデルについてはすでに引用文献を与えておいた．実際、$\psi : \Gamma_E \to \Gamma_E$ を $\psi(q,p) = (q,-p)$ で定義し、ストカスティック領域 S_E が ψ 不変であって、関数 $\lambda_{N+1}, \ldots, \lambda_{2N-1}$ が S_E 上ほとんどいたるところで μ_L 一定と仮定すれば、S_E 上で容易に次の関係を導き出せる．

$$\lambda_{2N-k} = -\lambda_k,\ k = 1, \ldots, N \tag{4}$$

(とくに $\lambda_N = 0$ である.) これは次のように理解できる．$x = (q,p)$ とする．$H(\psi(x)) = H(x)$ より、よく知られているとおり、流れの可逆性 $T_E^{-t} = \psi T_E^t \psi^{-1}$ を得る．このとき定理 B の (c) より、すべての $0 \ne e \in H_j,\ 1 \le j \le s$ に対して成り立つ次の関係を得る．

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{|t|} \ln ||dT_x^t(e)|| = -\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{|t|} \ln ||dT_x^t(e)||.$$

だからただちに $\lambda(x,e) = -\lambda(\psi(x), d\psi(e))$ を得る．上で述べた性質はこれから出る．

結果として、不等式 (3) を強めることができ、次が得られる．

$$\mu_L(S_E)k(E) \le h_{\mu_L}(\{T_E^t\}) \le (N-1)\mu_L(S_E)k(E). \tag{5}$$

これは $n = 2$ のときは特に興味深い．というのは、これから次の近似的等式が得られるからである．

$$h_{\mu_L}(\{T_E^t\}) \cong \mu_L(S_E)k(E). \tag{6}$$

この関係から、Hénon-Heiles モデルの場合、$k(E)$ と $\mu_L(S_E)$ の数値的評価に基づいて、エネルギーの関数としてエントロピーの近似曲線を得ることができる．

このモデルに対しては、関係 (4) を得るために導入した 2 つの付加的な仮説を数値的に確かめることができた．

III. 数値例: Hénon-Heiles モデル

A. Hénon-Heiles モデル

ここでは Hénon-Heiles モデル [5] の定義を思いだし、その主たる性質を記述する．これは自由度 2 の力学系であって、次のハミルトン関数で与えられる．

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3,$$

ここで $q_1, q_2, p_1, p_2 \in R$ であり、R^4 の流れはこのとき次のハミルトン方程式で定義される．

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = p_2$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -q_1 - 2q_1 q_2, \quad \frac{dp_2}{dt} = -q_2 + q_2^2 - q_1^2.$$

簡単に示せるように、エネルギー曲面 Ω_E は $0 < E < \frac{1}{6}$ に対して一意の空でないコンパクトな 3 次元多様体 Γ_E を許し、そこに定義されるベクトル場 X_H は特異点を持たない．

これは、IIB 節での一般的かつ定性的な記述に従えば、数値計算によって秩序領域とストカスティック領域の存在が示された初めてのモデルである．

図 2,3

この図は図 2 にはっきりと描かれている．これは参考文献 5 の図を再掲したものである．このような図は運動方程式の数値積分のグラフ表現であって、Γ_E 上の 3 次元流を 2 次元写像の研究に帰着させる標準的な道具である．これについてはこれから述べよう．

Γ_E 内に $q_1 = 0$ なる 2 次元曲面を考えて、この曲面を $p_1 > 0$ で解が横切るときの点を相続いて打つ．$H(q, p) = E$ を使って p_1 を消去し、$q_1 = 0$ と置けば、q_2 と p_2 を 2 次元曲面上の座標として使える．$p_1^2 \geq 0$ であるから、これらの点は次の領域に制限される．

$$\tilde{\Gamma}_E = \{(q_2, p_2) : \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) - \frac{1}{3} q_2^3 \leq E\}.$$

図 2 は $E = 0.125$ に対するものであるが、これから判るように、いくつかの初期条件で相続く点が q_2, p_2 面でいろいろな閉曲線上に乗っている．その他の初期条件 (ストカスティック領域

の) では、相続く点が規則性なしに散らばっている．実際、散らばっている点はあるひとつの解のものである．

$\tilde{\mu}_L$ は $\tilde{\Gamma}_E$ 上の (2 次元) リュベーグ測度で $\tilde{\mu}_L(\tilde{\Gamma}_E) = 1$ と規格化されているとする．$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}_L(\tilde{S}_E)$ とする．ただし $\tilde{S}_E$ は $\tilde{\Gamma}_E$ のストカスティック領域である．Hénon and Heiles は $\tilde{\mu}(E)$ を E の関数として数値的に評価し、図 3 に示される $1 - \tilde{\mu}(E)$ のグラフを得た．これとの関係で、最近示された [16] ことだが、$0 < E < \frac{1}{6}$ では厳密に $\tilde{\mu}(E) < 1$ である．

B. 数値計算の結果

我々の数値結果を述べることにしよう．計算は CDC 7600 上で行なった．精度は 14 桁である．積分アルゴリズムはいわゆる中心点法 [17] であって時間間隔の 3 次まで補正した．時間間隔は普通 0.004 とした．

目的は IIB 節で述べた量 $k_n(\tau, x, d)$ を計算することである．E が与えられたとき、初期点 x を $\tilde{\Gamma}_E$ 内に選んだ．すなわち、任意に q_2 と p_2 固定し、$q_1 = 0$ と取り、条件 $H(q,p) = E$ から p_1 を決める．ずらした点 y は x から $|d|$ の距離に選んだ．普通 $|d| = 3 \times 10^{-4}$ とした．普通 $\tau = 0.2$ で n は 10^5 まで計算した．

IIB および IIC 節で議論した k_n の性質 (i)-(v) はよい精度で確認できた．

結果が τ に依らないこと (IIB 節の (ii)) について言えば、任意の n に対して性質

$$k_{jn}(\tau/j, x, d) \cong k_n(\tau, x, d), \quad j = 2, 3, \ldots,$$

が、IIC 節での考察から、成り立つことが期待できることを注意しておく．たとえば、ストカスティック領域の点 x_0 で $E = 0.125$ に対して、この性質は $j = 2$ の場合は誤差約 5×10^{-5} の範囲で、$j = 10$ の場合は 5×10^{-4} の範囲で、n が 10^5 まで満たされる．これらの値をパーセンテージの誤差に直せば、それぞれ 0.1% および 1% である．

同様に、性質 [IIB 節の性質 (iii) 参照]

$$k_n(\tau, x, \alpha d) \cong k_n(\tau, x, d), \ \alpha \neq 0,$$

は任意の n に対して成り立つことが期待される．典型的な例として、$\alpha = 2.2$ のときは誤差は約 5×10^{-5} であり、上で与えた初期条件の場合、パーセント誤差は 0.1% であった．

その代わり、d の方向に依存しないことは $n \to \infty$ の極限においてのみ成り立つことが期待される．いくつかチェックした．すなわち、上の条件において d の方向を変え、k_n の値が異なることを発見した．その違いは $n = 250$ のときは 20% であり、$n = 2500$ のときは 2% であり、$n = 25000$ 以上のときは 0.2% であった．

次に n と x への依存性について考えよう．低エネルギーのとき、Hénon-Heiles によれば (図 3 参照)、ストカスティック領域の測度は無視できる．このとき、図 4 に $E = 0.08$ の場合で示されるように、いろいろな初期値で k_n は n が増えると減少する (少なくとも十分大きな n のとき)．n が十分大きいと、すべての曲線は log-log 尺度で直線に近づくように見える．これは $k_n \cong \alpha n^{-\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ の形のふるまいに対応する．このたいへん規則的なふるまいは $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$ なる予想を支持する．とくに、このモデルでは、図 4 の点線との比較で判るように、$\beta \cong 1$ が一般的な規則であるように見える．

k_n のこの一般的ふるまいは、初期点 x をうまく秩序領域に取るという条件の下で、エネルギーが増えても変わらない．これは図 5 に示されている．

図 4,5

こんどは典型的なエネルギー $E = 0.125$ の場合を吟味しよう．この場合、秩序領域とストカスティック領域の測度は同程度である (図 3 参照)．図 6 では、$E = 0.125$ に対して 6 本の曲線を描いておいた．曲線 1 は図 4 と 5 の曲線と同じ一般的性質を示す。これは $q_2 > 0$ なる q_2 軸のまわりの大きな秩序領域から取った初期点 x に対応する．曲線 2 はこのような領域を取り囲む小さな島のひとつから取った点に対応し、曲線 3 は p_2 軸の近くの 2 つの対称秩序領域のひとつから取った点に対応する．これらの曲線に対しても、極限はゼロのようだ．ただ極限への近づき方はやや規則的でない．このような様子は秩序領域のこれらの成分に特徴的であるようであり、いまのところ厳密にこれを説明するのは難しい．この問題に将来戻って来たい．曲線 4-6 はストカスティック領域の初期点 x に対するものであり、x に無関係な極限に近づくことがかなり明らかである．この性質は同じエネルギーで別のたくさんの初期点でチェックした．

図 6,7

一般に、任意のエネルギー $E > 0$ に対して量 $k = \lim_{n\to\infty} k_n$ の値として E のみに依存して常にゼロまたは正を得た．このような正の値を IIB 節と同じように $k(E)$ と記そう．$k(E)$ として得られた値は図 7 で星印で表わされている．秩序領域で得られたゼロの値は点で表わされて

いる．$E = 0.105$ と $E = 0.1666$ の間の正の値はすべて図 6 のものと同じ精度でうまく定義されている．とくに、そのうち 2 つ (すなわち、$E = 0.105$ と $E = 0.110$) は、Hénon-Heiles によればストカスティック領域の測度が無視できるエネルギーに対応する (図 3 参照)．$E = 0.975$ と 0.1 における 2 点では、精度がずっと悪く、このようなエネルギーでゼロでない k を持つ初期点を見つけるのにかなり注意が必要であった．この 2 つの点を除いて、正の値は指数関数 $k(E) = 3.4e^{22E}$ でよく合わせることができた．これは図 7 に示されている (連続線).

計量エントロピー $h(E) = h_{\mu_L}(\{T_E^t\})$ を関係式 (6) を基にエネルギー E の関数として評価する時点に来た．エントロピー的量 $k(E)$ は上で記述した数値計算から求まるから、$\mu_L(S_E)$ を E の関数として知るだけでよい．直接評価のために、これが IIIA 節で定義された関数 $\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}_L(\tilde{S}_E)$ で近似的に与えられるとし、Hénon-Heiles によって数値的に評価されたものとする (図 3)．だから、近似的に次式が成り立つ.

$$h(E) \cong \tilde{\mu}(E)k(E). \tag{7}$$

例えば、粗っぽい補間として、$\tilde{\mu}(E)$ として、$E < 0.11$ のとき $\tilde{\mu}(E) = 0$、$0.11 \leq E \leq \frac{1}{6}$ のとき $\tilde{\mu}(E) = 1 - 17.6(E - 0.11)$ なる関数を取り、$k(E)$ として指数関数 $k(E) = 3.4e^{22E}$ を取れば、$0 < E < 0.11$ のとき $h(E) = 0$、$0.11 \leq E \leq \frac{1}{6}$ のとき $h(E) = 60e^{22E}(E - 0.11)$ なる関数を得る．これは図 7 で点線で表わされている．われわれの知るところまだ証明されていないが、おそらく $0 < E < \frac{1}{6}$ のとき $h(E) > 0$ であろう.

IV. 結語

今回の論文に強く関係するいくつかの未解決問題に言及して論文を終えよう．(i) 最大リャプーノフ数以外のリャプーノフ数をどうやって計算するか? (ii) Hénon-Heiles モデルのストカスティック領域は、M. Hénon が示唆するように複数のエルゴード成分から成るか? (iii) 数値的に見ても理論的に見ても、Hénon-Heiles モデルの関数 $\tilde{\mu}(E)$ は $0 < E < \frac{1}{6}$ のとき $\tilde{\mu}(E) > 0$ であるか? この最後の問題は $0 < E < \frac{1}{6}$ のとき $h(E) > 0$ であるかという問題に関係している.

校正中に加えた注意

定理 A と B は V.M.Millionscikov によっても証明されている．Mat. Sbornik **78**, 179 (1969) [Math. USSR Sbornik **7**, 171(1969)] 参照.

参考文献

[1]B. V. Chirikov: Researches concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity. CERN Transcript 71-40 Geneva, 1971(unpublished).

[2]B. V. Chirikov and F. M. Izrailev: in Colloque International CNRS sur les Tranformations Ponctuelles et leurs Applications, 10-14 Sept. (Toulouse, France, 1973)(unpublished).

[3]B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and V. A. Tayurski, *Comput. Physics Commun.* **5**, 11(1973).

[4]M. Casartelli, E. Diana, L. Galgani, and A. Scotti, *Phys. Rev. A* **13**, 1921(1976).

[5]M. Hénon and C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73(1964).

[6] J. Moser and W. T. Kyner, *Lectures on Hamiltonian Systems and Regorous and Formal Stability of Orbits about an Oblate Planet* (Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1968).

[7] J. Ford, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, edited by E.D.G. Cohen (North-Holland, Amsterdam, 1975), Vol.3.

[8] V. I. Oseledec, *Tr. Mosk. Mat. Obsch.* **19**, 179(1968) [*Trans. Mosc. math. Soc.* **19**, 197(1968).]

[9] Ya. B. Pesin, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **226**, 774(1976).

[10] Ya. B. Pesin, (to be published).

[11] P. Billingsley. *Ergodic Theory and Information* (Wiley, New York, 1965).

[12] P. Walters, *Ergodic Theory-Introductory Lectures: Lecture Notes in Mathematics* No. 458 (Springer, Berlin, 1975).

[13] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964).

[14] J. Ford, *Stochastic Behavior in Nonlinear Oscillator Systems: Lectures in Statistical Physcis* No.28 (Springer, Berlin, 1974).

[15] Ya. B. Pesin, *Funkt. Anal. Jego Prilog* **8**, 81(1974).

[16] M. Braun, *J. Diff. Eq.* **13**, 300(1973).

[17] See, for example, L. Verlet, *Phys. Rev.* **159**, 98(1967).