谷川清隆 訳

Physical Review Letters **50** (1983), 346-349

ストレンジアトラクターの特徴づけ
Characterization of Strange Attractors

Peter Grassberger and Itamar Procaccia

Chemical Physica Department, Weizmann Institute of Science,
Rehovot, 76100, Israel

要約

ストレンジアトラクターの新しい計量を導入する．これによってひとつの観測量の時系列からストレンジアトラクターの性質を決定するアルゴリズムを提唱する．この計量とフラクタル次元及び情報理論的エントロピーとの関係について議論する．

カオス的ふるまいを示す散逸力学系はしばしば相空間に奇妙なアタラクターを持つ[1−3]．ストレンジアトラクターは典型的にフラクタル次元 D で特徴づけられ、これは自由度の数 F よりも小さい．すなわち $D < F$ である．いままでのところ、このフラクタル次元 (ハウスドルフ次元)、アトラクターの「奇妙さ」を測るのに最も普通に使われてきた[5−10]．次元を定義することから生じた box-counting アルゴリズムによって直接この数を計算する試みがいくつかなされてきた[7−10]．$D > 2$ のときはいつも D を計算するのが非常にむずかしい．重要なことは、$D > 2$ のアトラクターを有する力学系で単一の時系列からアトラクターのこの尺度を引き出すことは非実際的であることが判ってきた[10]．では実験信号をどのように解析したらよいのか? この報告では、ストレンジアトラクターを測るのに、任意の時系列からポアンカレ写像に訴えることなく簡単に得られる尺度で、しかもフタクタル次元に強く関係するものを提唱する．実はこの尺度は多くの場合 D そのものよりふさわしい尺度であることを議論する．

この尺度はアトラクター上の長い時系列の点の間の相関を考えて得られる．このような長時系列の n 個の点を $\{\overrightarrow{X}_i\}_{i=1}^N \equiv \{\overrightarrow{X}(t + i\tau)\}_{i=1}^N$ で表わす．ここで τ は任意に固定した時間増分である．相関積分の定義は次のとおりである．

$$\begin{aligned} C(r) \equiv \; & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \theta(r - |\overrightarrow{X}_i - \overrightarrow{X}_j|) \\ & \equiv \int_0^r d^d r' c(\overrightarrow{r}'), \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\theta(x)$ はヘビサイド関数であり、$c(\overrightarrow{r})$ は標準的相関関数である．この論文の主要点は r が小さいとき $C(r)$ が r のべきのようにふるまうことである．すなわち、

$$C(r) \propto r^{\nu}. \tag{2}$$

その上、指数νがDにも、また以下で議論するうまく定義したエントロピーとも強く関係している．解析を続ける前に、(2) のふるまいの例を2つ図1に示した．

Hénon 写像[11][図1(a)] とローレンツモデル[1][図1(b)] の相関積分の対数を$\log r$の関数として描いてある．同じように納得できるべき乗則がKplan-Yorke写像[5]、Rabinovich-Fabricant[12]方程式、およびカオス開始時のロジスティック写像[13]でも得られている (表I参照)．Zaslavskii写像では長時間の積分にもかかわらずはっきりしたべき乗則は得られていない．

表Iからνはすべての場合にDに非常に近いが (引用されている誤差は「educared guess」である)、決してDより大きくない (Zaslavskii 写像は例外で、べき乗則が見られない)．以下ではHénon 写像での値$\nu = 1.21$は系統誤差の影響で間違っていることを議論する．改良された方法によれば実は$\nu = 1.25 \pm 0.02$であって、誤差範囲内で$\nu = D$である．そこでストレンジアトラクターの各種尺度の間の関係について議論しよう．

一辺の長さlの超立方体でアトラクターを覆うことを考えよう．アトラクターがフラクタルなら、アトラクターの一部を含む立方体の数$M(l)$は次で与えられる．

$$M(l) \sim l^{-D}. \tag{3}$$

そこで集合$\{\overrightarrow{X}_i\}_{i=1}^N$の点で$i$番目の空でない立方体に含まれるものの数を$\mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$で表わす．$O(1)$の不定性 (すなわち、隣り合う立方体の数) を除いて、次のように書ける．

$$C(l) \sim \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{M(l)} \mu_i^2 = \frac{M(l)}{N^2} \langle \mu^2 \rangle. \tag{4}$$

ここで$\langle \cdots \rangle$は点を含む細胞すべてにわたる平均である．

シュバルツの不等式から次を得る．

$$\begin{aligned} C(l) \geq \frac{M(l)}{N^2} \langle \mu^2 \rangle = & \frac{1}{N^2 M(l)} \left[\sum_{i=1}^{M(l)} \mu_i \right]^2 \\ & = \frac{1}{M(l)} \\ & \sim l^D. \end{aligned} \tag{5}$$

ここで$\sum \mu_i = N$であり、式 (3) を使った．これから次が得られる．

$$\nu \leq D. \tag{6}$$

奇妙さの尺度を測るこの2つの量の間の関係をもっと理解するために、3番目の量、情報理論的エントロピーを導入しよう．これは精度lでアトラクター上の点を指定するのに必要な極小情報であって次式で与えられる．

$$S(l) = -\sum_{i-1}^{M(l)} p_i \ln p_i, \tag{7}$$

ここでp_iはi番目の立方体に点が入るための確立である ($N \to \infty$のとき$p_i = \mu_i/N$である)．一様な被覆の場合 (すなわち$p_i = 1/M(l)$のとき)、エントロピーは$S^0(l) = \ln M(l) = const - D \ln l$である．一般の場合、$S(l) < S^0(l)$である．Ansats

$$S(l) = S_0 - \sigma \ln l, \tag{8}$$

を採用すれば (ここで σ は Farmer によれば「情報次元」であり、Renyi[16] によれば「次元」である)、次の不等式に導かれる．

$$\sigma \le D. \tag{9}$$

最後に $\nu \le \sigma$ を証明したい．これで σ は上からも下からも評価される．証明の概略は以下のとおりである．立方体の辺の長さが l と $2l$ の 2 つの nested 被覆を考える．明らかに $M(l) = 2^D M(2l)$ である．p_i を細かい被覆の i 番目の立方体に点が入る確率とし、P_i を粗い被覆の j 番目の立方体に点が入る確率 $P_j = \sum_{i\in j} p_i$ とする．そこで ω_i を $p_i \omega_i P_j$ で定義する．明らかに $\sum_{i\in j}\omega_i = 1$ である．

式 (4) によれば、相関積分 $C(l)$ は $O(1)$ の不定性を除いて次式で与えられる．

$$C(l) \sim \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^2 = \sum_{j=1}^{M(2l)} P_j^2 \sum_{i\in j} \omega_i^2.$$

そこで ω_i が j に依存しないとすれば、$C(l)/C(2l) = \langle \omega^2 \rangle / \langle \omega \rangle$ と書ける．一方次を考えよう．

$$S(2l) - S(l) = \sum_j P_j \sum_{i=j} \omega_i \ln \omega_i = \langle \omega \ln \omega \rangle / \langle \omega \rangle.$$

量 $W = \omega / \langle \omega \rangle$ を定義すれば、不等式 [17,18] $\langle W^2 \rangle \ge \exp[\langle W \ln W \rangle]$ を利用して不等式 $\nu \le \sigma$ を証明できる．だから ν と D を結合して、次の不等式を通してストレンジアトラクターの情報量をたいへんうまく評価することができる．

$$\nu \le \sigma \le D. \tag{10}$$

強調しておきたいことは、アトラクターの被覆が一様なら、(10) 式で等号がじつげんされることである [18,19]．ロジスティック写像で $\nu \ne D$ であることは、被覆が一様でないことを示している．ある種の近傍は点が他よりしばしば訪れるという意味で、高い「優先度 (seniority)」を持つ．フラクタル次元はこの優先度を無視している．アトラクターの幾何学的構造にしか関係しないのであるアトラクターの領域のうち、点がたまにしか訪れないところも、煩雑に訪れるところと同じように D に貢献する．ところが相関積分 (およびエントロピー) はこの効果に敏感である．この意味で、ν の方が D よりもアトラクターの尺度としてふさわしい．というのは、これはアトラクターの被覆の力学過程に敏感だからである．ν と D のこの違いは、異なる場所の異なる優先度の重要性の尺度を与える．

表 I のデータは ~ 20000 点を使って得られたが、Zaslavskii 写像を除いて収束性はすでに数千点で明らかである．(これは Hénon 写像で D を計算する box-counting の収束性に 200,000 点必要であること、また数千点ではローレンツモデルで収束しないことなどと比較すべきことである.)

参考文献 20 と 21 から、我々の方法の変種として、$\overrightarrow{X}_i$ を測る代わりにひとつの成分、たとえば X_i を測る方法がある．すると新しい f 次元相空間がベクトル

$$\overrightarrow{\xi}_i = (X_i, X_{i+\tau}, X_{i+2\tau}, \ldots, X_{i+j\tau}),$$

を使って構成され、これが (1) 式に $\overrightarrow{X}$ の代わりに代入される．ローレンツモデルで $f = 3$ にしてこの手法を使って得られた結果の例が Fig1(b) に示されている．+ 印は変数 x のみを追い

かけて得られた．べき乗則はここでも満たされている．1 変数データから計算された ν の値は 2.06 ± 0.02 である．実験的な観点からすると、この手法はたいへん好ましい．事実、この次の論文で示されるように、これによって高次元の力学系で ν を矛盾なく決定できる [14]．また、尺度の補正から来る系統誤差を、厳密に必要とするより「埋め込み次元」f を大きく選ぶことにより取り除ける．Hénon 写像で $f = 3$ と選んで、上で引用したように $\nu = 1.25 \pm 0.02$ を得る．もっと詳しいことは参考文献 14 で与える．

まとめると、相関積分のべき乗性の指数 ν をアトラクターの奇妙さの尺度として導入した [22]．この指数の値は 1 変数または多変数の時系列から得ることができる．計算は比較的やさしく収束も速い．指数 ν とフラクタル次元や情報エントロピーとの関係について議論した．アトラクターを軌道が一様に訪れるなら、これら尺度はすべて一致する．そうでないとき、ν の方が D より力学的にふさわしい量であることを示す努力をした．この新しい特性指数をストレンジアトラクターに支配される実験系で測定して欲しい．

この論文は一部イスラエルの基礎研究委員会およびミネルバ基金の補助を受けた．議論してくれた H.G.E.Hentschel 博士および R.M.Mazo 教授に感謝する．

参考文献

[1] E.N. Lorentz, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130.

[2] D. Ruelle and F. Takens, Commun. math. Phys. **20** (1971), 167.

[3] E. Ott, Rev. Mod. Phys. **53** (1981), 655.

[4] B.B. Mandelbrot, *Fractals - Form, Chance and Dimension* (Freeman, San Francisco, 1977).

[5] J.C. Kaplan and J.A. Yorke, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed points*, edited by H.-O. Peitgen and H.-O. Walther, Lecture Notes in Mathematics Vol. 730 (Springer, Berlin, 1979).

[6] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 1044.

[7] D.A. Russel, J.D. Hanson, and E. Ott, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 1175.

[8] H. Froehling, J.P. Crutchfield, D. Farmer, N.H. Packard, and R. Shaw, Physica **3D** (1981), 605.

[9] P. Grassberger, J. Stat. Phys. **26** (1981), 173.

[10] H.S. Greenside, A. Wolf, J. Swift, and T. Pignataro, Phys. Rev. **A25** (1982), 3453.

[11] M. Hénon, Commun. Math. Phys. **50** (1976), 69.

[12] M.I. Rabinovich and A.L. Fabricant, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **77** (1979), 617.

[13] R.M. May, Nature **261** (1976), 459.

[14] P. Grassberger and I. Procaccia, to be published.

[15] G.M. Zaslavskii, Phys. Lett. **69A** (1978), 145.

[16] J. Balatoni and A. Renyi, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. **1** (1956), 9, and in *Selected Papers of A. Renyi*, Vol.1 (Academiai Budapest, Budapest, 1976); J.D. Farmer, Physica **4D** (1982), 366.

[17]W. feller, *An Introduction to probability Theory and Its Applications* (Wiley, New York, 1971), Vol.2, 2nd ed.

[18]B.B. Mandelbrot, in *Turbulence and Navier-Stokes Equations*, edited by R. Temam, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 565 (Springer, Berlin, 1975).

[19]T.A. Witten, Jr, and L.M. Sander, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 1400.

[20]N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. farmer, and R.S. Shaw, Phys. rev. Lett. **45** (1980), 712.

[21]F. Takens, in *Proceedings of the Sumposium on Dynamical Systems and Turbulence*, University of Warwick, 1979-1980, edited by D.A. Rand and L.S. Young (Springer, Berlin, 1981).

[22] この論文を投稿してからL.S. Youngの報告、J.D. Farmer, E. Ott, and J.A. Yorkeの報告を知った．かれらは小さい方の尺度について議論した．