谷川清隆 訳

Progress of Theoretical Physics **61** (1979), 1605-1616

散逸力学系のエルゴード問題への数値的アプローチ

A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems

Ippei Shimada and Tomomasa Nagashima

Department of Physics, Hokkaido University, Sapporo 060
Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering
Hokkaido University, Sapporo 060

要約

リャプーノフ特性指数に基づいて、数自由度の散逸力学系のエルゴード性を、ローレンツ系を例に数値的に研究する．ローレンツ系は１次元リャプーノフ指数に関しては $(+, 0, -)$ 型のスペクトルを示し、アトラクター上のほとんどすべての初期点から出発する軌道に対しては指数は同じ値を取る．

この結果は公理 A のカテゴリーに必ずしも属さない一般の力学系のエルゴード性をリャプーノフ特性指数のスペクトルの枠内で特徴づけ得ることを示唆する．

1. 序

最近、散逸力学系の非線形性に起因するカオス運動が、物理学や物理学以外の分野で大きな関心を呼んでいる [1)]．しかし公理 A を満たさない一般の力学系においては、理論的に確立された方法によってこれらのカオス運動の解析は少ししか進んでいない [2)~4)]．

この論文の目的のひとつは、散逸力学系で広く見られるカオス運動を系統的に特徴づけ得る数値的方法を与えることである．このための基本的発想は、力学系の漸近軌道不安定性を特徴づける１次元リャプーノフ指数の完全な組を利用することにある [5)~9)]．第二の目的は、カオス運動の分岐の問題を議論するための実用的な道具としてリャプーノフ指数の概念が使えることを示すことにある．

これらの目的のためには、なんらかの数値的方法によってリャプーノフ指数を評価することが重要な問題となる．なぜなら、カオス運動を示す方程式は大域的に一価の解析解を持つことが一般に期待できないからである．保測微分同相写像の場合、Benettin et al. [11)] は最近、われわれの論文で展開したのとほぼ同じ方法を指摘している．

２節では k 次元リャプーノフ指数の存在とその性質について簡単に議論する．特性指数と不変測度の関係また測度論的エントロピー (コルモゴロフ エントロピー) との関係についてコメ

ントする．補遺では、数値的に k 次元リャプーノフ指数を評価する一般スキームを簡単に展開し、他の近似的方法との関係について議論する．

3 節では有名な乱流モデルであるローレンツモデル [12] をわれわれの方法に基づいて調べ、この系の 1 次元リャプーノフ指数の完全な組の結果を与える．リャプーノフ指数に基づくわれわれの手法の応用として、4 節ではローレンツ系のカオス解の分岐の問題を調べる．

2. 不規則運動に対するリャプーノフ特性指数に関する部分的まとめ

外的擾乱に接していないのにカオス運動を示す力学系は軌道のある種の不安定性を持つと考えられている．この点からすると、軌道からの小さな変位の時間的ふるまいを調べるための基本的方法があることに注意する価値がある．この方法はリャプーノフの方法と呼ばれる．これは軌道の第一変分を使う．

さて、時間進化が N 次元ユークリッド空間の微分方程式の組によって記述される系

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

を考えよう．初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ のもとでの方程式 (1) の解は

$$\mathbf{x}(t) = T^t \mathbf{x}_0, \tag{2}$$

と書ける．ここで T^t はすべての相点の時間 t 進化を記述する写像である．

一方、軌道の第一変分の時間進化方程式は以下の非自励線形微分方程式にしたがう．

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(T^t \mathbf{x}_0)\delta\mathbf{x}. \tag{3}$$

方程式 (3) の解は

$$\delta\mathbf{x}(t) = U^t_{\mathbf{x}_0}\delta\mathbf{x}_0, \tag{4}$$

と書ける．ここで $U^t_{\mathbf{x}_0}$ は方程式 (3) の基本行列であり、$\delta\mathbf{x}_0$ は $t = 0$ における初期変位である．方程式 (4) の基本行列は次の鎖則を満たす．

$$U^{t+s}_{\mathbf{x}_0} = U^t_{T^s\mathbf{x}_0} \circ U^s_{\mathbf{x}_0} \tag{5}$$

微小変位の漸近的ふるまいが $t \to \infty$ のときの基本行列の漸近的ふるまいで記述できることは見やすい．さて、この行列の $t \to \infty$ のときの漸近的ふるまいは以下の指数によって特徴づけられる [5),6),11)]．すなわち、$k = 1, 2, \ldots, N$ に対して、

$$\lambda(e^k, \mathbf{x}_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{||U^t_{\mathbf{x}_0}\mathbf{e}_1 \wedge U^t_{\mathbf{x}_0}\mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge U^t_{\mathbf{x}_0}\mathbf{e}_k||}{||\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_k||} \tag{6}$$

(6) の記号の意味は次の通りである．e^k は $\mathbf{x}_0$ における接空間 $\mathbf{E}_{\mathbf{x}_0}$ の k 次元部分空間であり、$\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は e^k の基底の組であり、$\wedge$ は外積、$||\circ||$ はなんらかのリーマン計量に関するノルムである．(6) で定義される指数は $\mathbf{x}_0$ を出発する軌道に沿っての接空間の k 次元立方体 (parallelopiped) の体積の膨張率を表わし、k 次元リャプーノフ指数と呼ばれる．この定義から明らかなように、指数は基底の選び方に依らず、k 次元部分空間 e^k にのみ依存する．

以下の議論で使うリャプーノフ指数の性質をまとめておくのが便利である．

1) 1次元指数 $\lambda(e^1, \mathbf{x})$ はたかだか N 個の異なる値を取り、これを $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq N}$ と書き、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ と約束する．

2) k 次元指数 $\lambda(e^k, \mathbf{x})$ はたかだか ${}_N C_k$ 個の異なる値を取り、各値は k 個の異なる 1 次元指数の和に関係している．たとえば、$N = 3$ の場合、k 次元指数 $\lambda(e^k, \mathbf{x})$ $(k = 1, 2, 3)$ はそれぞれ以下の値を取る．

$$\begin{aligned}
\lambda(e^1, \mathbf{x}) =& \ \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \text{ のどれか} \\
\lambda(e^2, \mathbf{x}) =& \ \{(\lambda_1 + \lambda_2), (\lambda_1 + \lambda_3), (\lambda_2 + \lambda_3)\} \text{ のどれか} \\
\lambda(e^3, \mathbf{x}) =& \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)
\end{aligned}$$

3) 基底の組 $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ が接空間でランダムに選ばれていれば、$k = 1, 2, \ldots, N$ に対して k 次元指数 $\lambda(e^k, \mathbf{x})$ は、確率 1 で、その持ち得る ${}_N C_k$ 個の異なる値の集合の中で極大値に収束する．(この命題は Benettin et al. により、微分同相写像の場合に証明された [11].)

リャプーノフ指数に関する上の議論が意味があるのは (6) 式で定義される量の極限の存在が保証されているときだけであることに注意しよう．

この極限の存在証明は Oseledec が行なった．ここでの議論にふさわしい形で彼の定理を記述しよう．

<u>Oseledec の乗法的エルゴード定理</u>. T^t 不変な測度 μ と $||\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}|| \in L^1(\mu)$ があれば、k 次元リャプーノフ指数 $\lambda(e^k, \mathbf{x}_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ が μ の意味でほとんどすべての $\mathbf{x}_0$ に対して存在する．この定理の記号は、上の議論で使ったものと同じである．

これ以後、力学系のリャプーノフ指数と測度論的エントロピー (K エントロピー) の間のいくつかの関係について考えを述べる．リャプーノフ指数の存在がが K エントロピーと直接関係することは知られている．いままでに得られた関係のうち、最も弱いものは次の関係である．

$$H(\mu) - \int \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(x) d\mu \leq 0. \tag{7}$$

ここで $H(\mu)$ は不変測度 μ を持つ力学系の K エントロピーである．

この不等式は Ruelle[14),15)] が証明した．ハミルトン系および公理 A 系の場合、(7) 式で等式が成り立つ [17)]．(7) 式の等式が保証されていれば、正のリャプーノフ指数の和の相平均は K エントロピーそのものになる．さらに、(7) 式の等式を満たす力学系のカテゴリーはいま述べた力学系よりもっと広いと期待される．

3. ローレンツ系の 1、2、および 3 次元リャプーノフ指数

この節では、補遺で展開した数値的方法に基づいて、ローレンツによる有名な乱流モデルに対して 1 次元リャプーノフ指数の完全な組に関するはっきりした結果を出す．

ローレンツモデルは次の微分方程式系で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X & +\sigma Y & \\ (\gamma - Z)X & -Y & \\ XY & & -bZ \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{8}$$

ここで (σ, b, γ) はパラメータである．ローレンツモデルは散逸系であり、したがってハミルトン系と違って、もともとの不変測度を持たない．この系では、パラメータ γ(σ と b はうまく選んで) がある値を越えると、カントール集合のような複雑な幾何学的な構造を持つ高次元アトラクターが現れ、アタラクター上の軌道は周期的でない．

一言注意しておくと、ローレンツ系の高次元アトラクターは公理 A 系のストレンジアトラクターのような確立された数学的なカテゴリーには属さない．なぜなら、アトラクターのはじに不動点 $(0, 0, 0)$ があって、アトラクターの一様双曲構造が実現されないからである．

われわれの計算においてパラメータは $\sigma = 16.0, b = 4.0$ および $\gamma = 40.0$ と置く．このパラメータ値はもとのローレンツの値 $\sigma = 10.0, b = 8/3$ および $\gamma = 28.0$ とは異なるが、アトラクター上の軌道の幾何学的構造はもとのものと領域 $50 \geq \gamma\gamma_T \equiv \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ の範囲で定性的に同じである．数値積分法は倍精度 Runge-Kutta-Gill 法であり、典型的時間差は 0.01 とした．補遺で調べた方法で軌道方程式および変分方程式を積分して (再規格化時間は $\tau = 1.0$ とした)、1、2、および 3 次元リャプーノフ指数を計算した．これらはそれぞれあるきちんとした値に収束した．

$\mathbf{x}_0$ から出発した軌道の 3 つの指数 $\lambda(e^1, \mathbf{x}_0), \lambda(e^2, \mathbf{x}_0), \lambda(e^3, \mathbf{x}_0)$ ははじめの部分空間 $e^k(k = 1, 2, 3)$ の選び方に依存しなかったことを指摘しておく．数値結果は図 1 に示した．2 節の 3) で記述したリャプーノフ指数についての陳述にしたがって、指数 $\lambda(e^k, \mathbf{x}_0)$ $(k = 1, 2, 3)$ の評価値はそれぞれ疑いもなく極大値を選んでいる．したがって次の関係が成り立つことが期待できる．

$$\lambda(e^1, \mathbf{x}_0) = \lambda_1, \lambda(e^2, \mathbf{x}_0) = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda(e^3, \mathbf{x}_0) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

ここで $\lambda_i(i = 1, 2, 3)$ は 1 次元リャプーノフ指数であって、$j > i$ なら $\lambda_i \geq \lambda_j$ としている．したがって 1 次元リャプーノフ指数を次のように評価できる．

$$\lambda_1 = \lambda(e^1, \mathbf{x}_0), \lambda_2 = \lambda(e^2, \mathbf{x}_0) - \lambda(e^1, \mathbf{x}_0) \quad \text{および} \quad \lambda_3 = \lambda(e^3, \mathbf{x}_0) - \lambda(e^2, \mathbf{x}_0). \tag{10}$$

図 1 の示すところによれば、リャプーノフ指数 $\lambda(e^k, \mathbf{x}_0)$ $(k = 1, 2, 3)$ は部分空間 e^k の基底の初期の取り方に依存しないし、状態空間の初期値 $\mathbf{x}_0$ の取り方にも依存しない．

前段落の陳述にもかかわらず、ローレンツ系には、その他にも自明なリャプーノフ指数がある．すなわち、$(0, 0, 0)$ の不動点に向かう軌道の指数である．これらの軌道の 1 次元リャプーノフ指数は $(0, 0, 0)$ における線形ベクトル場のスペクトルとなり、我々が数値実験で得た $\lambda_i(i = 1, 2, 3)$ とは異なる値を取る．したがって、$(0, 0, 0)$ の不動点に向かう軌道はある意味で無視できると考えられる．

上で述べた結果と関連して、2 つの意見を述べておこう．最初は、補遺で展開した数値スキームの ability についてである．すでに知られているように、ローレンツ系のベクトル場の発散は一定値を取る．すなわち、$\mathrm{divF}(x) = -(\sigma + b + 1) = -21.0$ である．ローレンツ系のこの性質を使ってわが数値スキームの ability をテストした．

すなわち、3 次元指数 $\lambda(e^3, \mathbf{x}_0)$ は体積要素の拡大率であるから、ベクトル場の発散と直接比較できる．3 次元指数の時間収束性と 1、2 次元指数の時間収束性をはっきり示す結果を表 I に与えた．3 次元指数 $\lambda(e^3, \mathbf{x}_0)$ の結果から、計算時間さえ長くとれば、原理的には、$\lambda(e^2, \mathbf{x}_0$ や $\lambda(e^1, \mathbf{x}_0)$ の計算精度が $\lambda(e^3, \mathbf{x}_0)$ の精度と同じ程度になると期待できる．

関係 (10) によれば、ローレンツ系に対して 1 次元リャプーノフ指数 λ_i $(i = 1, 2, 3)$ の完全な組を評価できる．結果は表 II に与えておいた．同時に、補遺軌道方程式 (A.4) を使う方法で評

価した極大 1 次元指数も与えた．補遺の議論から理解できるように、今回の方法で得たものと軌道方程式を使って得た極大 1 次元指数の 2 つの値は、補遺で述べた条件が満たされればよく一致する．これが第二の remark である．

4. 別の型のアトラクターおよびローレンツ系のリャプーノフ指数

リャプーノフ指数のスペクトル型とアトラクターの型は互いに強く関係していると想像できる．ローレンツ系の非周期運動は正の指数を持ち、1 次元指数 λ_i $(i = 1, 2, 3)$ のスペクトルは $(+, 0, -)$ 型の双曲性を示す．明らかに安定周期軌道は $(-, -, 0)$ 型のリャプーノフ指数で特徴づけられる．この意味で、1 次元リャプーノフ指数のスペクトル型は新しい型のアトラクターの出現を調べるのに有用な道具である．この点からすると、前回の論文で報告したとおり、ローレンツ系 (σ と b を固定して) は γ が大きいとき安定な周期アトラクターで終わる．

以下では前論文で報告しなかった新しい様相をいくつかつけ加える．γ の中間領域 $50 \leq \gamma \leq 330$ においてパラメータ γ を変えると ($\sigma = 16.0$ および $b = 4.0$)、ローレンツ系の解は非常に複雑な分岐のふるまいを示す．状況は図 2 に示した．

アトラクターの大域的な分岐スキームを議論または予言するためには、この系に対してポアンカレ写像の詳しい知識が必要である．上で議論したパラメータ γ の範囲では、横断性が破れる可能性がある．つまり、横断面 $Z = \gamma - 1$ 上でポアンカレ写像を取ったとき、軌道が面を横断的に横切らないこもしれない．したがって、いまの段階で前と同様にローレンツ系の分岐スキームの大域的構造を述べることはできない．

しかし周期的アトラクターに関してはパラメータ γ のある制限された領域ではっきりした分岐が次のように起こる．最初の型は対称性破壊型とも呼ぶべきもので図 3(a) に示した．もとの安定リミットサイクルが不安定化し、一組の安定リミットサイクルが分岐で現われる．写像 $(X, Y, Z) \overset{S}{\mapsto} (-X, -Y, Z)$ のもとで、リミットサイクルのひとつはもう一方に写る．軌道は初期値に応じて 2 つのリミットサイクルのどちらかに吸引される．したがって変換 S に関するローレンツ方程式の対称性はこの型の分岐の後では壊れる．第二は普通の Brunovsky 分岐 [20)]であり、図 3(b) に示した．この型の Brunovsky 分岐の後ではリミットサイクルの周期はもとの周期 ω の 2 倍になる．この分岐では対称性は変わらない．

系が吸引周期軌道を持ち、変換 S のもとでの対称性を持つような値から γ を減少させると、はじめに対称性破壊型分岐が起こる．この型の分岐の後で一連の Brunovsky 分岐が起こり、リミットサイクルの周期は $\omega \cdot 2^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の形でどんどん長くなる．

カオス解は周期 n の安定なリミットサイクルを持つようなパラメータ区間が消滅するパラメータ γ の極限値を越えると現われると考えられる．これに似た分岐現象が Rössler モデル [21)] やある種の化学反応モデル [22)] に見られる．カオスに至るこの一連の分岐はトムによって導入された一般化カタストロフィ [23)] の例であると考えられる．

このような分岐を解析するにはたいへん微妙な問題が絡んでいることに注意すべきである．すなわち、安定なリミットサイクルとカオス運動のリャプーノフ指数 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ のスペクトル型は互いに違うはずであるから、スペクトル型が $(+, 0, -)$ から $(0, -, -)$ に変わる臨界点があるのは明らかである．この臨界点において指数のひとつが符号を変えゼロに縮退する．指数がこのように縮退すると力学系は構造不安定になる．だからこの臨界点の近くで数値的に問題を解析するにあたっては細心の注意が必要である．

5. 結論および議論

ローレンツ系の 1 次元リャプーノフ指数の完全な組 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ が存在すること、および指数がローレンツアトラクターの近傍を出発するほとんどすべての軌道に関して同じ値を取ることが数値的に示された．上の結果はアトラクター上に不変測度が存在することおよびローレンツ系がこの不変測度に関してアトラクター上でエルゴード的であることを強く支持する．さらに、1 次元指数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ のスペクトルが $(+, 0, -)$ 型であることから、アトラクター上の運動が正定値 K エントロピーを取り、したがって mixing 性を持つ．

1 次元指数のもうひとつの自明な組があって、これはローレンツ系の非遊走集合の一様双曲構造を破っていることを述べておこう．この矛盾する事実は次のように考えられる．ローレンツ系は公理 A を厳密な意味では満たさないが、測度論的な意味ではそれほどひどく破っていない．つまり自明なリャプーノフ指数に属する軌道は非遊走集合の中で測度ゼロの空間しか占めない．

ここで記述したローレンツ系の結果は前論文で指摘してあった．しかし前論文では軌道方程式 (A.4) を使う方法を採用し、状態空間での指数的軌道離散の存在を視覚化するのに都合がよかった [24)~26)]．tangent 方程式を解くことにより、この論文では、正のリャプーノフ指数の存在が数学的な基礎の上で力学系のエルゴード理論と関係していることがもっとはっきりした．

4 節で述べたように、この論文で採用したリャプーノフ指数の方法は定量的に不規則運動を特徴づけるだけでなく、アトラクターの分岐の問題に適用するにも影響力がある．

論文を終えるにあたって、4 次元以上の散逸力学系のカオス運動をリャプーノフ指数の完全な組 $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ のスペクトル型にしたがって分類することを提唱する．4 次元の場合、明らかに 2 種類のカオス運動があって互いに区別できることが理解できる．実際、リャプーノフスペクトルの型が $(+, +, 0, -)$ と $(+, 0, -, -)$ の 2 つあるからである．

4. 謝辞

この仕事は文部省の科学研究費の補助を受けた．

補遺 A. k 次元リャプーノフ指数の数値評価法

定義 (6) に基づいて、1 次変分方程式を積分してリャプーノフ指数を評価するときに技術的な問題がある．すなわち、コンピューターの計算に overlflow の危険性がある．というのは 1 次変分方程式は少なくとも指数関数的に発散する解を持つからである．

この危険性から計算を守るために各時間積分の後で次のように基底を変える．

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^{j+1} = \;& U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_1^{j}/||U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_1^{j}||,\\
\mathbf{e}_2^{j+1} = \;& U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_2^{j} - (\mathbf{e}_1^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_2^{j})\cdot\mathbf{e}_1^{j+1}/||U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_2^{j} - (\mathbf{e}_1^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_1^{j+1})\cdot\mathbf{e}_1^{j+1}||,\\
\mathbf{e}_3^{j+1} = \;& U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_3^{j} - (\mathbf{e}_1^{j+1}\cdot)U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_3^{j})\cdot\mathbf{e}_1^{j+1} -\\
& (\mathbf{e}_2^{j+1}\cdot)U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_3^{j})\cdot\mathbf{e}_2^{j+1}/||U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_3^{j} - (\mathbf{e}_1^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_3^{j+1}) - (\mathbf{e}_2^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_3^{j+1})\cdot\mathbf{e}_2^{j+1}||,\\
\ldots\\
\mathbf{e}_k^{j+1} = \;& U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_k^{j} - (\mathbf{e}_1^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_k^{j})\cdot\mathbf{e}_1^{j+1}\ldots\\
& (\mathbf{e}_{k-1}^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_k^{j})\cdot\mathbf{e}_{k-1}^{j+1}/||U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_k^{j} - (\mathbf{e}_1^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_k^{j+1})\cdot\mathbf{e}_1^{j+1}\ldots - (\mathbf{e}_{k-1}^{j+1}\cdot U_{\mathbf{x}_0}^{\tau}\mathbf{e}_k^{j+1})\cdot\mathbf{e}_{k-1}^{j+1}||.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

鎖則を使い、基底 $\{U^\tau_{\mathbf{x}_0}\mathbf{e}^j_i\}_i$ を $\{\mathbf{e}^{j+1}_i\}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ および $i = 1, 2, \ldots, k$ に変えて次の方程式を得る．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\quad \log\frac{||\wedge_i U^{n\tau}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{e}^0_i||}{||\wedge_i\mathbf{e}^0_i||} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{||\wedge_i U^\tau_{\mathbf{x}_j}\mathbf{e}^j_i||}{||\wedge_i\mathbf{e}^j_i||}. \tag{A.2}$$

方程式 (A.2) に至る基底の変換法は外積の次のような性質を使えば正当化できる．すなわち、$\{\mathbf{e}_i\}$ と $\{\mathbf{f}_i\}$ が同じ k 次元空間を生成するなら、次の関係が成り立つ

$$\frac{||\wedge_i U\mathbf{e}_i||}{||\wedge_i\mathbf{e}_i||} = \frac{||\wedge_i U\mathbf{f}_i||}{||\wedge_i\mathbf{f}_i||}.$$

次に、今回の我々の方法と参考文献7) で Benettin らが開発した近似法との関係を述べておくのが有用であろう．参考文献7) の Benettin らの手法は、$\tau \ll 1$ および $||\mathbf{e}^j_i|| \ll 1$ なる制限の下で我々の方法に収束する．この制限の下で、次の近似関係が成り立つ．

$$U^\tau_{\mathbf{x}_j}\mathbf{e}^j_i) \approx T^\tau(\mathbf{x}_j + \mathbf{e}^j_i) - T^\tau_{\mathbf{x}_j} \tag{A.3}$$

したがってリャプーノフ指数として近似的に次を得る．

$$\lambda(e^k, \mathbf{x}_0) \approx \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{||\wedge_i||T^\tau(\mathbf{x}_j + \mathbf{e}^j_i) - T^\tau(\mathbf{x}_j)||}{||\wedge_i\mathbf{e}^j_i||} \tag{A.4}$$

ここで T は方程式 (2) に現われる写像である．

表式 (A.4) の特別の場合 (k=1) は最初に Benettin ら [7] が使ってハミルトン系の K エントロピーの評価について議論した．著者らは前論文で彼らの方法を散逸力学系に応用し、散逸系における乱流現象が古典力学系のエルゴード理論の枠内で議論できることを指摘した．

参考文献

1) たとえば *Synergetics*(ed. H.Haken, Springer, Berlin, 1977) を見よ．

2) S. Smale, Bull. Amer. J. Math. Soc. **73** (1967), 747.

3) D. Ruelle, Amer. J. Math. **98** (1970), 619.

4) R. Bowen and D. Ruelle, Inventiones Math. **29** (1975), 181.

5) V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1960).

6) V.I. Oseledec, Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968), 197.

7) G. Benettin, L. Galgani, and J.M. Strelcyn, Phys. Rev. **A14** (1976), 2338.

8) T. Nagashima and I. Shimada, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 1318.

9) S.D. Feit, Comm. Math. Phys. **61** (1978), 249.

10) V.I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems of celestial Mechanics* (Benjamin, New York, 1968).

11) G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.M. Strelcyn, C. R. Acad. Sci. Paris **286** (1978), A-431. また次も見よ.
G. Contopoulos, L. Galgani, and A. Giorgilli, Phys. Rev. **A** (to appear).

12) E.N. Lorentz, J. Atmos. Sci. **20** (1960), 130.

13) この段落で使っている数学用語の詳細については、例えば次を見よ.
Y. Matsushima, *Introduction to manifold*(in Japnese) (Shokabo, Tokyo, 1965).

14) D. Ruelle, preprint.

15) D. Ruelle, *Proceedings of the International Conference on Bifurcation Theory and Its Applications in Scientific Disciplines* (New York, 1977).

16) Ya. B. Pesin, Soviet Math. Doklady **17** (1976), 196.

17) J. Guckenheimer, G. Oster, and A. Ipaktchi, J. Math. Biol. **4** (1977), 101.

18) I. Shimada and T. Nagashima, Prog. Theor. Phys. **59** (1978), 1033.

19) T. Shimizu and N. Morioka, Phys. Letters **66A** (1978), 182.

20) P. Brunovsky, *Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems* Warwick, 1968 & 69.

21) T. nagashima, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 64 (1978), 368.

22) K. Tomita and T. Kai, Phys. Letters **66A** (1978), 91.

23) R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis* (W.A. Benjamine, New York, 1974), Chap.6.

24) H. Fujisaka and T. Yamada, Phys. Letters **66A** (1978), 450.

25) K. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **59** (1978), 74.

26) H. Yahata, Prog. Theor. Phys. **61** (1979), 791.