谷川清隆 訳

Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **71**, 109-136(1999)

地球交差軌道の平均化

Averaging on Earth-crossing orbits

G.F. Gronchi and A. Milani

要約.

惑星交差小惑星 (および彗星) は近接衝突や直接衝突を惑星のどれかと引き起こす可能性がある．これにより, N 体ハミルトン関数に特異性が現われ, 昔から使われる永年摂動を計算するために使われる運動方程式の平均が定義されなくなる．本論文で示すのは, 厳密な仕方である種の一般化した平均運動方程式を定義し, 一般解は一意, 区分的に滑らかであるようにできることである．平面の場合も 3 次元の場合も, Kantorovich の特異点抽出法によって行う．特異点を近似するために使う修正された距離は Wetherill が衝突の確率を計算するために使ったものである．平均力学のいくつかの例を計算する．平均相空間を系統的に探索して永年共鳴の場所を確定するのは次のステップである．

1．序

地球軌道交差小惑星は, その軌道が 交点交差 を起こすことで特徴づけられる．すなわち, 地球の軌道面上の接触楕円の点のひとつが地球の接触楕円に属する．これが成り立つとき, 近接衝突が生じ得る．しかもランダムに起こる．各近接衝突において, 軌道要素は急速に変化する．他の惑星の軌道を横切るときも同じことが起こる．たとえば, 彗星が木星軌道を横切るときがそうである．

惑星への任意の近接衝突の可能性は直接の物理衝突の可能性に対応する．これも起こり得る．数学的な観点からすると, 惑星交差小惑星の軌道は惑星を質点として重力 N 体問題としてモデル化されるなら, 衝突は重力ポテンシャルの特異点, つまりハミルトン関数の特異点において起こる．この特異性は 1 次の極型である．

衝突特異性の存在は何らかの解析的理論を構築する際には基本的困難として考えられてきた．とはいうものの, 非常に近接した衝突を示す N 体問題の解でさえ存在するし, それがまったくワイルドなふるまいを示すというわけでもない. 例として, 図 1-4 は地球交差小惑星 (実は金星交差小惑星でもある) の軌道要素の時間進化を示す．軌道要素の時系列はスペースガードプロジェクト (SPACEGUARD PROJECT) の文脈で得られてきた．これは当面, 惑星交差軌道の数値計算として最大級の研究である (Milani et al., 1989)．軌道半長径は 2 つの軌道交差の間では一定であり, 近接衝突の間にいそいで変化する．ほかの軌道要素たとえば e, I, ω は滑らかに見える軌跡を動きながら大きな相対的変化を受ける．ただ, その跳びは小さく, 図のスケールでは見えない．

図 1,2

次に, 軌道要素 e, I, ω, Ω の「永年」運動を, 昔から主小惑星帯で行われてきた (Williams and Faulkner, 1981) と同様, ある種の平均方程式によって記述することはできないのか, という問題が生じる. これができるなら, 惑星交差軌道に対しても「**永年共鳴**」の概念に厳密な意味を与えることが可能になるだろう. いままでのところ, 非惑星交差軌道の地球近接軌道に対してのみ成功してきた (Michel and Froeschlé, 1997). 逆に, 無矛

図 3,4

盾な平均法が存在しないなら, 惑星軌道交差の永年共鳴などというものはない. 不思議な国のアリスの忠告にしたがって, 答えのない謎などにかかずらわることをやめる. ところが永年共鳴は存在する. 数百万年にわたる惑星交差軌道の進化を制御するのに大きな役割を果たしている (Michel et al., 1996).

本論文は, 原理的な問題として, 数学的に, 特異性のある平均法問題を解く. 永年摂動の定義を一般化する. 古典的定義が衝突によって収束しなくなる場合にも適用可能. 議論は古在近似に制限する. つまり, 摂動天体は円運動で同一平面 (Kozai, 1962). しかし, よく知られているように, これは最初の可積分段階であって, 摂動論はこの上に建設す

る (Morbidelli and Henrard, 1991).

主結果は, 高速変数 (小惑星と全惑星の平均運動) に関して平均したハミルトン関数で定義されるハミルトン方程式の解の存在定理である．この解は, 軌跡が角 (かど) を持つ (3 次元の場合; 2 次元の場合は微分可能) 交点交差において一般化された意味を持つ (??). 引数 ω の周回または秤動の「永年」周波数はこの一般解で定義される．また Ω の周回周波数は求積で計算できる．

本論文の構成は以下のとおりである. 2 節では, 平面の場合に, 上で再定義した意味での**永年摂動**の存在を証明する. 3 節では同様な議論をもっと現実的な 3 次元に拡張する.

本論文はこの「特異平均法」近似を実現する数値的に効果的なアルゴリズムを含んでいない. 特異平均法は数個の積分を巻き込んでおり, これらのうちいくつかは数値的に扱うのは難しい. とはいうものの, いくつかの見やすい例を今までに知られた数値アルゴリズムで計算し, 4 節で示した.

5 節では, 惑星交差軌道の永年摂動や固有要素の理論を構築するために通るべき研究の道筋を示唆する．また平均しない元の方程式からの誤差を見積もることの困難についても述べる．

2．平面の場合

はじめに平面の場合を議論する．摂動天体, 例えば地球がある準拠系で円軌道 $C_\oplus$ 上にあり, 小惑星はこの面に対して軌道傾斜角ゼロ．これは必ずしも現実的ではないが, 3 次元の場合に使う手法のよい導入になっている．

2.1．Wetherill 近似

軌道面上, 近点方向を x 軸にとる．小惑星の楕円軌道 $E_{\rm ast}$ と地球軌道 $C_\oplus$ は

$$E_{\rm ast}: \begin{cases} x = a(\cos u - e), \\ y = a(1-e^2)^{1/2}\sin u, \end{cases} \qquad C_\oplus: \begin{cases} x' = a'\cos u', \\ y' = a'\sin u, \end{cases}$$

u, u' は離心近点離角．2 つの軌道が P, Q で交わるとする．P での u, u' は $\overline{u}, \overline{u}'$ であるとする．対応する平均近点離角は $\overline{\ell}, \overline{\ell}'$ であるとする．Q は x 軸に関して対称な位置にある．$C_\oplus$ および $E_{\rm ast}$ への P における接線を使う (図 5).

$$r': \begin{cases} x' = a'\cos\overline{u}' - a'\sin\overline{u}'(\ell' - \overline{\ell}'), \\ y' = a'\sin\overline{u}' + a'\cos\overline{u}'(\ell' - \overline{\ell}'), \end{cases}$$
$$r: \begin{cases} x = a(\cos\overline{u} - e) - \dfrac{a\sin\overline{u}}{1 - e\cos\overline{u}}(\ell - \overline{\ell}), \\ y = a(1-e^2)^{1/2}\sin\overline{u} + \dfrac{a(1-e^2)^{1/2}\cos\overline{u}}{1 - e\cos\overline{u}}(\ell - \overline{\ell}), \end{cases}$$

ただし, 直線のパラメータ化としては, 直線上の速度がちょうど楕円の P における速度と同じになるようにした．

定義.

(1) D は ℓ, ℓ' の関数として, $C_\oplus$ 上の動点と $E_{\rm ast}$ 上の動点の距離であるとする．

(2) d は ℓ, ℓ' の関数として, r 上の点と r' 上の点の距離であるとする．

図 5

(3) d_1 は対称な点 Q に関して定義された同様な関数であるとする.

d を近似として, 短い距離の間使うことはWetherill(1967) によって導入され, 衝突確率の計算道具として利用された.

距離は, どの準拠系を使ったかに依存しない. だから, 平均を行った後では, 近点経度 ϖ がどこにあろうと問題にならない. つまり,

$$\frac{\partial}{\partial\varpi}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' = 0$$

である. ただし, 積分はトーラス $T = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ 上で行われる.

<u>平均値の近似計算</u>

トーラス上で平均した摂動関数を計算するのに, カントロビッチ (Kantorovich) の特異点抽出法 (Demidovic and Maron, 1966) を使う:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{D} d\ell d\ell' = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1}\right) d\ell d\ell' + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{d} d\ell d\ell' + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{d_1} d\ell d\ell'$$

後の2つの積分は解析的に実行できる. 同じ技術を使って ϖ に共役な変数 $G = \sqrt{k^2 a(1-e^2)}$ (k はガウスの重力定数) に関する微分も計算できる. 軌道半長径は平均化方程式の解に沿っては一定であるから,

$$\frac{d}{dG}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' = -\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{k^2 a}}\right) \frac{d}{de}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell'$$

であり, e に関する微分は

$$\frac{d}{de}\int_T \frac{1}{D} = \frac{d}{de}\int_T \frac{1}{d} + \frac{d}{de}\int_T \frac{1}{d_1} + \frac{d}{de}\int_T \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1}\right) \tag{2}$$

から計算できる.

記法を簡単化するため記号を導入する

$$\xi = \ell - \overline{\ell}, \qquad \xi' = \ell' - \overline{\ell}', \qquad \underline{\xi} = (\xi', \xi)$$
$$A = a'^2, \quad B = a^2(1-e^2)^{1/2}, \quad C = \frac{a^3}{a'}\left(2 - \frac{a'}{a}\right)$$

接線に沿っての距離 d は変数 ξ, ξ' に関する同次 2 次形式として計算できる．すなわち，

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -B & C \end{pmatrix}, \quad d^2 = \underline{\xi}\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}\ \underline{\xi}. \tag{3}$$

簡単にチェックできるように，

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \geq 0, \qquad \det(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \geq 0$$
$$\det(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e \sin \overline{u} = 0$$

だから，2 つの軌道がアプス線で接触しない限り，つまり，近点 ($\overline{u} = 0$) または遠点 ($\overline{u} = \pi$) で接しない限り，2 次形式は非縮退である．アプス線で接する場合，楕円と円は 1 本の接線を共有する．以下の議論ではこの場合を除く．d_1^2 も同様な計算で得られる．これも同じ行列で定義される 2 次形式である．だから d についてのみ議論する．

2.2. 解析積分

ξ, ξ' の定義を考慮して，近似逆距離関数の平均は

$$I = \int_{-\pi-\overline{\ell}}^{+\pi-\overline{\ell}} \int_{-\pi-\overline{\ell}'}^{+\pi-\overline{\ell}'} \left(A\xi'^2 + C\xi^2 - 2\xi\xi' B\right)^{-1/2} d\xi d\xi'$$

である．

線形変換を使って，この 2 次形式を対角化したい．$d^2 = L^2 + M^2$ にしたい．ただし，L と M は新しい変数である (図 6)．この変換はただひとつではない．次を選ぶ．

$$\begin{aligned} &\xi = \frac{1}{\rho} M, \qquad \xi' = \frac{1}{\tau}\left[L - \frac{\sigma}{\rho} M\right], \\ &\rho = -\frac{a^2}{a'} e \sin \overline{u}, \quad \sigma = -\frac{a^2}{a'}(1-e^2)^{1/2}, \quad \tau = a' \end{aligned} \tag{4}$$

変換のヤコビ行列式 Δ は明らかに $\Delta = |1/\rho\tau|$ である．よって

$$\begin{aligned} I = & \int\int (A\xi'^2 + C\xi^2 - 2B\xi\xi')^{-1/2} d\xi' d\xi \\ = & \int\int (L^2 + M^2)^{-1/2} \partial(\xi', \xi)/\partial(L, M) dLdM \\ = & \ \Delta \int_R (L^2 + M^2)^{-1/2} dLdM \end{aligned}$$

ただし，R は (L, M) 面での積分領域で平行四辺形．この平行四辺形 R がつぶれるのは，2 次形式が縮退のときであり，それは接触が遠点または近点で生じたときである．

積分を実行するためには，平行四辺形を原点から出る直線により 4 つの三角形に分割する．$\theta_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ を直線の角度方向とする．積分は極座標に変換し，θ に関し 4 つの別々の積分を実行すれば得られる．

$$\begin{aligned} I = \ \Delta \Bigg[& \rho(\pi - \overline{\ell}) \log\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \frac{-2\tau(\pi + \overline{\ell}')}{\zeta_2 - \zeta_1} \log \frac{(z_3 - \zeta_2)(z_2 - \zeta_1)}{(z_2 - \zeta_2)(z_3 - \zeta_1)} - \\ & -\rho(\pi + \overline{\ell}) \log\left(\frac{z_4}{z_3}\right) + \frac{2\tau(\pi - \overline{\ell}')}{\zeta_2 - \zeta_1} \log \frac{(z_1 - \zeta_2)(z_4 - \zeta_1)}{(z_4 - \zeta_2)(z_1 - \zeta_1)} \Bigg] \end{aligned}$$

図 6

ただし, $z_i = \tan(\theta_i/2)$ であり, ζ_1, ζ_2 は方程式

$$f(z) = -z^2 - 2\frac{\sigma}{\rho}z + 1 = 0,$$

の根である．すなわち,

$$\zeta_1 = \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \rho^2}}{\rho}, \quad \zeta_2 = b\frac{-\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \rho^2}}{\rho}.$$

定理 1. 近似逆距離関数の平均

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{d}d\ell d\ell'$$

は, 接衝突の場合を除いて, 変数 G, ϖ に関して可微分 (実解析的) 関数である．

証明. 普通の微分規則を上で得た解析的な表式に作用してみればよい．

2.3. 平均値の微分可能性

平均摂動関数に関して解析的な結論を導くためには, 近似 $1/d$ や $1/d_1$ の平均のふるまいばかりでなく, 差 $1/D - 1/d - 1/d_1$ の平均の性質を知る必要がある．3 段階で行われる．

ステップ I: 残余関数 $1/D - 1/d - 1/d_1$ はトーラス $T = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ において limited(?) である．

離心近点離角と平均近点離角の間の変換は滑らかである．ケプラー方程式

$$\ell = u - e\sin u$$

残余の表式を u, u' の関数と見ることができる．もちろん, 残余関数はトーラス上例外的な点を除いて滑らかである．例外的な点とは, $(u, u') = (\overline{u}, \overline{u}')$($P$ に対応) と, $(u, u') =$

$(-\overline{u}, -\overline{u}')$($Q$ に対応) である. 対称性があるから, $1/D-1/d$ が $(\overline{u}, \overline{u}')$ の近傍で limited(有界?) であることを証明すれば十分である.

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{d} = \frac{d-D}{dD} = \frac{d^2 - D^2}{dD(d+D)}$$

を使う. 真の距離 D は

$$D^2 = [a'\cos u' - a(\cos u - e)]^2 + \left[a'\sin u' - a(1-e^2)^{1/2}\sin u\right]^2$$

一方 d^2 の表式はすでに求めた.

$$\begin{aligned} d^2 = & \quad A\xi'^2 - 2B\xi'\xi + C\xi^2 \\ = & \quad a'^2(\ell' - \overline{\ell'})^2 - a^2(1-e^2)^{1/2}(\ell' - \overline{\ell'})(\ell - \overline{\ell}) + \frac{a^3}{a'}\left(2 - \frac{a'}{a}\right)(\ell - \overline{\ell})^2 \end{aligned}$$

これらを (u, u') の関数として表す. そのために

$$v = u - \overline{u}, \quad v' = u' - \overline{u}', \quad \ell - \overline{\ell} \approx v(1 - e\cos\overline{u}) + v^2\frac{e\sin\overline{u}}{2}$$

を導入する.

D^2 も d^2 も v, v' に関するテーラー展開されると, 2 次の項から始まる. それらは同じなので, 差を取ると消えて 3 次から始まる. すなわち,

$$d^2 - D^2 = Jv^3 + Kv'v^2 + Lv'^2v + \ldots$$

直線 $v' = \lambda v$ に沿って,

$$\begin{aligned} &d^2 - D^2 = v^3(J + \lambda K + \lambda^2 L) + \ldots, \\ &d^2D + dD^2 = 2v^3(G\lambda^2 - 2I\lambda + H)\sqrt{G\lambda^2 - 2I\lambda + H} + \ldots, \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, J, K, L, G, I, H は (a, e, e') のみの連続関数であり, トーラス上で一定である. これらのあからさまな表式は Gronchi(1997) に与えられている. さて

$$f(\lambda) = \frac{J + \lambda K + \lambda^2 L}{2(G\lambda^2 - 2I\lambda + H)^{3/2}}$$

と置く. 直線に沿っての極限を計算できる:

$$\lim_{v\to 0}\left[\frac{d^2 - D^2}{dD(d+D)}(v, \lambda v) = f(\lambda).\right]$$

残余関数が有界であることを証明するためには, 関数 $f(\lambda)$ が有界であることをチェックすればよい. これは多項式

$$g(\lambda) = G\lambda^2 - 2\lambda I + H,$$

の判別式から出る．すなわち，

$$\Delta_s = 4I^2 - 4GH < 0 \iff GH - I^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \det(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \geq 0.$$

2.1 節で示したように，この判別式がゼロになるのは接衝突のときのみである．

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = 0$$

であるから，$1/D - 1/d$ は $(v, v') = (0, 0)$ の近傍で有界であると結論できる．

<u>ステップ 2</u>: 残余関数の微分

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1}\right)$$

はトーラス上で次数 1 の極特異性のみ持つ．

対称性を考慮して，$1/D - 1/d$ のみについて議論する．e に関する偏微分はステップ 1 と同様 v, v' に関してテーラー展開される．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{d} = \frac{C_1 d + D_1 v' + \dots}{d^3}, \quad \frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{D} = \frac{C_2 d + D_2 v' + \dots}{D^3},$$

と書ける．ここでドットは v, v' に関する高次の項を表し，C_1, D_1, C_2, D_2 は (a, e, e') のみの関数である．Gronchi(1997) の直接計算によれば，分子の 1 次の係数は同じである．すなわち，

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$$

このおかげで，差の微分が展開できて，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right) = \ & (C_1 v + D_1 v')\left(\frac{1}{D^3} - \frac{1}{d^3}\right) + \frac{E_1 v^2 + F_1 v v' + G_1 v'^2}{D^3} - \\ & - \frac{E_2 v^2 + F_2 v v' + G_2 v'^2}{d^3} + \dots\end{aligned}$$

上の公式のうち，次数 > 1 の極特異性を生み出しそうな部分は

$$(C_1 v + D_1 v')\left(\frac{1}{D^3} - \frac{1}{d^3}\right)$$

である．これを調べるために，展開

$$\frac{1}{D^3} - \frac{1}{d^3} = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{D^2} + \frac{1}{dD} + \frac{1}{d^2}\right)$$

を利用し，直線 $v' = \lambda v$ の通る平面 (v, v') を探検しよう．ステップ 1 により，$1/D - 1/d$ は $(v, v') = (0, 0)$ の近傍で有界 (limited) である．定数 m を

$$m = \max_{\lambda \in \mathbf{R}}\left\{\left|\lim_{v \to 0}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)(v, \lambda v)\right|\right\}$$

で定義する. 極特異性の次数を見積もるために, 補助関数

$$h(\lambda, v) = \frac{1}{v} h_1(\lambda) + \Gamma(\lambda),$$

を使うことができる. ここで,

$$\begin{aligned} h_1(\lambda) = & \frac{3m(C_1+\lambda D_1)}{(G\lambda^2 - 2I\lambda + H)} + \frac{(E_1-E_2)+\lambda(F_1-F_2)+\lambda^2(G_1-G_2)}{(G\lambda^2-2I\lambda+H)^{3/2}}, \\ \Gamma(\lambda) = & \frac{\Gamma_0+\lambda\Gamma_1+\lambda^2\Gamma_2+\lambda^3\Gamma_3}{(G\lambda^2-2I\lambda+H)^{3/2}}, \end{aligned}$$

である. ただし, $E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ は (a, a', e) のみの連続関数である. G, I, H はステップ 1 で定義した量であることを注意しておく. だから, 分母は方程式 (6) と同じ多項式 $g(\lambda)$ のみを含んでおり, これは決してゼロにならない (ただし, 近日点または遠日点での接衝突は回避されるとしている).

この展開, およびステップ 1 で使ったと同様な $\lambda \to \infty$ での計算から, 補助関数 h が次数 1 の極特異性のみを持つと結論できる. 残余関数の微分は同じ次数の特異性, つまり次数 1 の極特異性のみを持つ.

ステップ 3: 積分記号下での微分

議論を, 接衝突を含まない (a, a', e) 空間のコンパクトな部分集合に制限することにより, $(0,0)$ に次数 1 の極を持つ優 (majorant) 関数 $K^* = K^*(v, v')$ を,

$$\left| \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} \right) \right| \leq K^*(v, v'),$$

が P の近傍で成り立つとして定義できる. さらに, この優関数はトーラス T 上で積分可能である. 同じ議論は対称点 Q についても行うことができる.

この積分優関数および積分下での微分の標準的定理 (たとえば, Fleming, 1964) を使えば, 平均残余関数は e に関して微分可能であること, また

$$\frac{d}{de} \int_T \int \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) dv dv' = \int_T \int \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) dv dv'$$

が成り立つことが言える.

こうして, われわれが証明したのは,

定理 2. 平均摂動関数は, 接衝突の場合を除いて, 変数 e, ϖ に関して連続微分可能である.

証明. 2.2 節および上のステップ 3 において, 平均摂動関数の異なる項の e 微分が存在することを証明した. ϖ に関する微分はゼロである.

2.4. 平均ハミルトン関数

円平面制限三体問題のハミルトン関数を日心座標で書くと,

$$H = H_0 - R_{\rm dir} - R_{\rm ind}$$

となる. H_0 は無摂動二体問題ハミルトン関数, $R_{\rm dir} = k^2 m/D$ は直接摂動関数 (m は惑星質量を太陽質量で割ったもの) であり, $R_{\rm ind}$ は摂動関数の間接項である.

平均ハミルトン関数は

$$\overline{H} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (H_0 - R_{\rm dir} - R_{\rm ind}) d\ell d\ell',$$

によって定義される. 間接項の離角による平均は古典結果によりゼロであるから, また H_0 は ℓ, ℓ' に依らないから,

$$\overline{H} = H_0 - \frac{k^2 m}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{D} d\ell d\ell' = H_0 - \overline{R}, \tag{8}$$

となる.

古典的結果によれば平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ はつねに存在し, 惑星交差の場合でも連続関数である. なぜかというと, 次数 1 の極特異性を持つ関数を 2 次元トーラス上で improper 積分すると絶対収束だからである (Fleming, 1964). 前節で証明した 2 つの定理より, 平均ハミルトン関数も変数 (a, e, ϖ) の微分可能関数である. ただし, 接接触の場合, つまり $a(1 \pm e_c) = a'$ なる e の臨界値 e_c の場合を除く. だから, どの $a > a'/2$ に対しても, 変数平面 $(e\cos\varpi, e\sin\varpi)$ は円 $e = e_c$ によって 3 つの連結成分に分割され, 平均ハミルトン関数はそれぞれの中で滑らかである. 内部領域は古典的議論で, 外部領域は本論文で証明される.

H で定義されるハミルトン関数に平均法を適用すると, 微分方程式の右辺は衝突点において次数 2 の極特異性を持つ. 対応する improper 積分は決して絶対収束しない. だから, 積分記号下の微分定理は適用できず, 交点交差が起こる場合は微分方程式が平均化できない. にもかかわらず, 平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ は連続微分可能関数であり, $\overline{H}$ をハミルトン関数とするハミルトン方程式を定義することが可能である. この方程式は, (平均) 変数 $(e\cos\omega, e\sin\omega)$ の空間で, 平均 a が積分であるような連続微分可能力学を与える.

$\overline{H}$ は ϖ に依存しないから, 軌道半長軸 a も離心率 e も $\overline{H}$ で定義されるハミルトン系の解に沿っては変化しない. このハミルトン系の解は各 $e =$ 一定 の円上の一様回転で与えられる. その固有周波数は一定で

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\overline{R}}{de} \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{k^2 a}} = g(e)$$

で与えられる. 固有周波数のふるまいは図 7 に示した.

図 7.

この結果は3次元ケースへの序として紹介されることが多い．しかし, 3次元の場合の結果が, 軌道傾斜角がゼロの場合の極限として2次元の場合の結果を含むことを証明できるなら, 2次元の場合を考えることはとくに, 歳差周波数を決める場合など, 価値があるはずである．実際これが成り立つらしいことは3.3節で述べる．ただ, 完璧な証明は得ていない．

ここで述べる結果は平面楕円制限問題, すなわち, $e' \neq 0$ の場合に拡張可能であろうと予測する． Wetherill近似が使えて, 近似関数 $1/d$ は本質的に同じ形をしている．しかし, 接衝突の線は分岐し, ハミルトン関数はもはや ϖ から独立ではなくなり, $(e\cos\varpi, e\sin\varpi)$ 平面内で複雑な幾何を与える．

3．3次元の場合

軌道半長径 a, 離心率 e, 近日点引数 ω の楕円と半径 a' の円が与えられたとき, 交点距離 (nodal distance) は次の式からきっちり計算できる:

$$d^+_{\rm nod} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega} - a'; \quad d^-_{\rm nod} = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\omega} - a'; \tag{9}$$

注意しておくが, 交点距離は負になり得る．小惑星の交点が惑星の交点より太陽に近い場合は負である．

a, a' を固定したとき, 座標 $(e\cos\omega, e\sin\omega)$ なる平面内で, 交点交差 $d^+_{\rm ond} = 0$ および $d^-_{\rm ond} = 0$ は2つの円を定義する．これらは $e = 1$ 円に反対点で接する (図8).

Kozai(1962) にしたがって, 小惑星軌道に摂動を及ぼすのは, 円軌道, 同一平面にあるひとつまたは複数の惑星の引力のみであるという近似を採用する．このとき, ハミルトン関数を (8) とする平均問題は積分を持つ．この積分は, 惑星軌道面に直角な角運動量の成分に対応する:

$$Z = k\sqrt{a(1-e^2)}\cos I. \tag{10}$$

ここで軌道半長径 a も平均系の積分である．

したがって, 初期条件から Z 積分の値が決まると, 軌道傾斜角の最大値は, $e = 0$ のときに

$$I_{\rm max} = \arccos\frac{Z}{k\sqrt{a}}$$

となる．一方, 離心率は

$$e_{\rm max} = \sqrt{1 - \frac{Z^2}{k^2 a}}$$

と制限される．最大値は $I = 0$ のときに実現される．a と Z を固定すると, 図8に示したように, 平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ は $(e\cos\omega, e\sin\omega)$ 平面の $e = e_{\rm max}$ で限られる領域で定義される．しかし, $e < e_{\rm max}$ に含まれる交差線部分の上で, (ℓ, ℓ') での平均からは improper 積分が出る．衝突が次数1の極なのでこれは収束する．$Z =$ 一定 曲面上では軌道傾斜角 I は e の関数であって消去できる．

平面の場合と同様 (2.4節を見よ), 運動方程式に現われるハミルトン関数の微分は衝突時に次数2の極特異性を持つ．だから, 平均方程式は交点交差線に沿っては定義されない (少なくとも絶対収束する積分をもっては).

図 8

この節の目的は, 平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ によって指定され, すべての時間にわたって解を持つ一般化 (滑らかでない) 微分方程式を定義することが可能であることを示すことである.

3.1. Wetherill 近似

平面の場合と同様, 惑星の軌道 $C_{\oplus}$ は円で $e' = I' = 0$, 半径は a' とする. 小惑星の接触軌道 E_{ast} はゼロでない軌道傾斜角 $I \neq 0$ を持つとする. すると, E_{ast} 上に 2 点 P, Q, $C_{\oplus}$ 上に 2 点 P', Q' があって, それぞれ交点線に乗っており, P, P' は太陽に関して Q, Q' の反対方向にある. 組 (P, P') に注目しよう. これは相互昇交点 (構成法は Q, Q' についても同じ) であるとする. 記法を簡単にするため, $d_{\text{nod}} = d_{\text{nod}}^{+}$ を導入する.

r, r' は P において E_{ast} に接する直線と, P' において $C_{\oplus}$ に接する直線であるとする (図 9). これらの線は ℓ, ℓ' によってパラメータ化されているとする. 2 つのパラメータの値および P, P' における微分は, 接触軌道に沿っての ℓ, ℓ'(平均近点離角) の値およびそれに関する微分と同じであるようにする.

D は $C_{\oplus}$ 上の点と E_{ast} 上の点の距離とする. これは平均近点離角 ℓ, ℓ' の関数である. d は Wetherill(1967) におけるように, 直線 r 上の点と直線 r' 上の点の距離とする. これもパラメータ ℓ, ℓ' の関数である. d_1 は他の 2 つの直線上の点の距離とする. これは交点 Q, Q' の組から同様にして構成される.

発想は, ふたたび Kantorovich 法を使って, $T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 上で

$$\frac{\partial}{\partial e} \int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' \quad \text{および} \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell'$$

を計算することである.

図 9

3 次元の場合には, もうひとつの微分がある. すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial I}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell'.$$

ハミルトン方程式においては

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial G}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' = & -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e\sqrt{k^2 a}}\frac{\partial}{\partial e}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' + \\ & +\frac{\cos I}{\sin I\sqrt{k^2 a(1-e^2)}}\frac{\partial}{\partial I}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell'\end{aligned}$$

を計算しなければならない. しかし簡単な計算でわかるように

$$\frac{\partial}{\partial I}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell'$$

は 1 次の極特異性を持つので, Kantorovic 法を使わずに計算できる.

$\overline{\ell}, \overline{\ell}'$ は点 P, P' に対応する平均近点離角であるとする. 交点 P, P' において交点交差が起こるとき, D も d も $(\ell, \ell') = (\overline{\ell}, overline \ell')$ においてゼロである. $(e\cos\omega, e\sin\omega)$ 面のこのような交点交差の近傍において, 分解

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial e}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' &= \frac{\partial}{\partial e}\int_T \frac{1}{d} d\ell d\ell' + \frac{\partial}{\partial e}\int_T \left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) d\ell d\ell' \\ \frac{\partial}{\partial \omega}\int_T \frac{1}{D} d\ell d\ell' &= \frac{\partial}{\partial \omega}\int_T \frac{1}{d} d\ell d\ell' + \frac{\partial}{\partial \omega}\int_T \left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) d\ell d\ell'\end{aligned}$$

を使う.

$1/d$ の積分が $1/D$ の積分よりいいのは, d^2 が単純な解析表現を持つことである.

$$\xi = \ell - \overline{\ell}; \quad \xi' = \ell' - \overline{\ell}'; \quad \underline{\xi} = (\xi', \xi)$$

を定義する．また 2 本の直線の間の距離

$$d^2 = d_{\rm nod}^2 + a^2 \left(\frac{1+e\cos\overline{u}}{1-e\cos\overline{u}}\right)\xi^2 + a'^2\xi'^2 - 2\xi\xi'(Ga'\cos I) - 2\xi d_{\rm nod}F,$$

を定義する．ただし,

$$\begin{aligned} F = F(e,\omega) &= a\left[\frac{\sin\overline{u}\cos\omega + (1-e^2)^{1/2}\cos\overline{u}\sin\omega}{1-e\cos\overline{u}}\right], \\ G = G(e,\omega) &= a\left[\frac{-\sin\overline{u}\sin\omega + (1-e^2)^{1/2}\cos\overline{u}\cos\omega}{1-e\cos\overline{u}}\right] \end{aligned}$$

である．

ベクトル–行列表現では,

$$d^2 = \underline{\xi}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\xi} + \underline{B}\cdot\underline{\xi} + d_{\rm nod}^2$$

となる．ここで, 行列 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ とベクトル $\underline{B}$ は (a,e,ω,I,a') の係数関数を持つ:

$$A_{11} = a'^2, \quad A_{12} = A_{21} = -Ga'\cos I, \quad A_{22} = a^2\left(\frac{1+e\cos\overline{u}}{1-e\cos overlineu},\right)$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -\{a[(\cos\overline{u}-e)\cos\omega - (1-e^2)^{1/2}\sin\omega\sin\overline{u}] - a'\}F.$$

平面の場合 (3) と違って, 自乗距離 d^2 は非同次の 2 次形式である．行列 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ は $I \neq 0$ ならつねに非縮退である．不等式

$$1-\cos^2 I\sin^2\omega \geq \cos^2 I\cos^2\omega, \quad 1-\cos^2 I\cos^2\omega \geq \cos^2 I\sin^2\omega$$

を使う．ここで, 等式は $I=0$ のときのみ成り立つ．すると, 不等式

$$\det(\underline{\underline{A}}) \geq \frac{a'^2a^2\cos I}{(1-e\cos\overline{u})^2}\left[\sin\overline{u}\cos\omega + (1-e^2)^{1/2}\cos\overline{u}\sin\omega\right]^2 \geq 0 \tag{11}$$

が導ける．ここで係数は $\overline{u}$, すなわち, 平均近点離角 $\overline{\ell}$ に対応する交点 P の離心近点離角の関数であり, $\overline{u}$ と $overline\ell$ は (a,e,ω,I,a') の滑らかな関数である．

こうして, $I>0$ に対して, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ の行列式は常に正である．この非縮退性は幾何学的に解釈できる．というのは, 2 本の直線 r と r' は平行に成り得ないからである．$I=0$ の場合, 非縮退条件は 2.1 節で議論したものに帰着する．

3.2. 解析積分

平均を取る際の被積分関数を簡単にするため, 2 次形式 d^2 の線形項を消去するための座標変換を探す．非同次 2 次形式

$$Q(\underline{\xi}) = \underline{\xi}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\xi} + \mathbf{B}\cdot\underline{\xi} + C,$$

が与えられたとき, 変換

$$\underline{\xi} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{y} + \underline{\mathbf{S}}, \tag{12}$$

により線形項を消去する．ただし, $\underline{\mathbf{S}} = (S_1, S_2) \in \mathbf{R}^2$, $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ であり, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ は 2×2 行列である．線形項が消去できるのは

$$2\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{B}} = \underline{0} \tag{13}$$

のときである．

$\underline{y}$ 座標でさらに簡単な形 $y_1^2 + y_2^2$ に 2 次形式を帰着するために, 行列

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{pmatrix} 1/\tau & -\sigma/\tau\rho \\ 0 & 1/\rho \end{pmatrix}$$

を使うことができる．ただし,

$$\tau = \sqrt{A_{11}}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}}{A_{11}}}, \qquad \sigma = A_{12}\sqrt{\frac{1}{A_{11}}}$$

変換 (12) のあとで,

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 + \tilde{C}$$

となる．ただし, 定数 $\tilde{C}$($\underline{\xi}$ に関する) は

$$\tilde{C} = d_{\rm nod}^2 + \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{S}} = d_{\rm nod}^2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{S}}$$

である．これは 2 本の直線 r と r' の間の最小距離の 2 乗を表す．この最小距離は一般に交点距離より小さいが, ゼロになるのは交点距離がゼロのときのみである．だから $1/d$ にはおかしな (spurious) 特異性は出てこない

積分を計算するには, 関数 $1/D$ が ℓ と ℓ' に関して周期的であることを利用する．こうして, 移動後トーラス

$$\tilde{T} = [-\pi + S_1 + \overline{\ell}', \pi + S_1 + \overline{\ell}'] \times [-\pi + S_2 + \overline{\ell}, \pi + S_2 + \overline{\ell}]$$

の上での積分を行なっても結果は変わらない．積分区間の端点は (a, e, ω, I, a') の関数である．このようにして, 特異性は原点 $\underline{y} = \underline{0}$ においてのみ生じ得る．積分長方形の境界に沿っての特異性は避けることができている．

摂動関数の積分は (定数因子を除いて)

$$\begin{aligned} I = & \int_{-\pi+S_1+\overline{\ell}'}^{\pi+S_1+\overline{\ell}'} \int_{-\pi+S_2+\overline{\ell}}^{\pi+S_2+\overline{\ell}} \frac{1}{d(\ell, \ell')} d\ell d\ell' \\ = & \int_{-\pi+S_1}^{\pi+S_1} \int_{-\pi+S_2}^{\pi+S_2} \frac{1}{d(\xi, \xi')} d\xi d\xi' \\ = & \Delta \int \int_R (y_1^2 + y_2^2 + \tilde{C})^{-1/2} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

である．ここで $\Delta = 1/|\sigma\tau|$ であり, 積分領域 R はアフィン変換 $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{T}}^{-1}(\underline{\xi} - \underline{\mathbf{S}})$ による $\tilde{T}$ の平行四辺形である．対称性 $(y_1, y_2) \to (-y_1, -y_2)$ を利用すると計算はもっと簡単になる:

$$I = 2\Delta \int\int_{R_1} (y_1^2 + y_2^2 + \tilde{C})^{-1/2} dy_1 dy_2$$

ここで R_1 は R のうち $y_2 \geq 0$ の部分である．極座標を使うと,

$$I = 2\Delta \int\int_S \frac{r}{\sqrt{r^2 + \tilde{C}}} dr d\theta$$

となる．S は R_1 に対応する領域である．r に関する積分は初等的であって

$$I = 2\Delta \sum_{i=1}^{3} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left[\sqrt{\tilde{C} + r_i^2(\theta)} - \sqrt{\tilde{C}} \right] d\theta$$

を得る．ここで, 角度 θ_i は極座標で積分領域のかどを定義する:

$$0 = \theta_1 \leq \theta_1 \leq \theta_3 \leq \theta_4 = \pi, \quad \tan\theta_2 = \frac{\rho}{\sigma + \tau}, \quad \tan\theta_3 = \frac{\rho}{\sigma - \tau},$$

また関数 $r_i(\theta)$ は平行四辺形 R_1 の辺をパラメータ表示する:

$$r_1(\theta) = \frac{\pi\tau}{\cos\theta - \sigma/\rho \sin\theta}, \quad r_2(\theta) = \frac{-\pi\rho}{\sin\theta}, \quad r_3(\theta) = \frac{-\pi\tau}{\cos\theta - \sigma/\rho \sin\theta}.$$

θ に依存しない部分を平均することによって, 積分計算は次のようになる:

$$I = 2\Delta \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{\tilde{C} + r_i^2(\theta)} d\theta - \pi\sqrt{\tilde{C}} \right). \tag{15}$$

積分記号の部分は楕円積分であり, これは軌道要素 (a, e, ω, I, a') の滑らかな関数である．正則性の問題はすべて有限項 $\sqrt{\tilde{C}}$ に集中する．交点距離 $d_{\rm nod}$ がゼロのとき, 直線 r と r' の間の最小距離 $\sqrt{\tilde{C}}$ もゼロになり, 自乗根は正則な関数でなくなり, いくつかの要素たとえば e, ω に関するその微分は交点交差において存在しなくなる．

3.3. 積分の微分

平均摂動関数の解析的性質に関して結論を出すためには, 残余関数の性質を知る必要があり, また式 (15) に現われる楕円積分の性質をいくつか知る必要がある．この節では, 交点交差 $P = P'$ はもうひとつの交点交差 $Q = Q'$ とは同時に起こらないと仮定する (これにより, $a' = a(1 - e^2)$ および $\omega = \pm\pi/2$ の高々2 点が排除される).

ステップ 1: 残余関数 $1/D - 1/d$ はトーラス $\tilde{T}$ で制限されている (limited). だからトーラス上で絶対積分可能であり, 積分は変数 $(e\omega)$ に関し連続である．

このステップは 2.3 節の平面の場合と厳密に類似している．交点交差があれば, 2 次形式 d^2 は平面の場合と同様同次であり, (v, v') 面を直線に沿って調べまわることにより, (5) に形式的に同一な方程式を得る．分母 $g(\lambda)$ は (6) のようである．係数が異なる表式

を持つ．今回は (a, e, ω, I, a') の関数である．分母 $g(\lambda)$ は 3 次元の場合も非ゼロである．なぜなら, その判別式は $\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ を含むが, これは軌道傾斜角がゼロでないときはゼロにならない ((11) 式を見よ).

残余関数は有界でほぼいたるところ連続であるから積分可能である．その上, 平面の場合と同様, (e, ω) 面のコンパクトな部分集合において一様に有界である．このことから積分の連続性が出る (Fleming, 1964 を見よ).

<u>ステップ 2</u>: 残余関数の偏微分

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right),$$

はトーラス $\tilde{T}$ 上で次数 1 の極特異性のみを持つ.

このステップは平面の場合と厳密に類似している．自乗距離 D^2 と d^2 の偏微分は衝突点の近傍でテーラー級数に展開され, 1 次の項は一致することがわかる．(7) 式におけるのと同じ議論を使って, 2 次の極特異性の係数も相殺する.

<u>ステップ 3</u>: 積分記号下の微分

このステップは平面問題よりやや込み入っている. なぜかというと, 移動後トーラス $\tilde{T}$ の定義, すなわち, 平行移動 $\underline{\mathbf{S}}$ の定義 (13) により, 変数 $e\omega$ への積分領域の依存性が導入され, そのため, 偏微分に新たな項が付け加わるのである．すなわち, e に関する微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial e} & \int_{f_1}^{f_2}\int_{g_1}^{g_2}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) d\ell d\ell' \\
= & \frac{\partial f_2}{\partial e}\int_{g_1}^{g_2}\left.\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\right|_{\ell=g_2} d\ell - \frac{\partial f_1}{\partial e}\int_{g_1}^{g_2}\left.\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\right|_{\ell=g_1} d\ell + \\
& + \int_{f_1}^{f_2}\left[\frac{\partial g_2}{\partial e}\left.\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\right|_{\ell=g_2} - \frac{\partial g_1}{\partial e}\left.\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\right|_{\ell=g_1}\right] d\ell' + \\
& + \int_{f_1}^{f_2}\int_{g_1}^{g_2}\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) d\ell d\ell'
\end{aligned}$$

であり, ω に関する微分も同様である．積分区間の両端は式 (14) で定義され, (e, ω) の滑らかな関数である．それらの微分には連続関数がかかる.

ステップ 1–3 で使ったのと同じ議論を差 $1/D - 1/d_1$ に適用できる．その際, トーラスの平行移動は同じではない．交点交差する直線が交わるとき, 二重交差点 (両方の交点が同時に惑星軌道に接する) において, 計算は複雑になるが結果は変わらない.

<u>ステップ 4</u>: Wetherill 近似の積分 (15) は, 項 $2\pi\Delta\sqrt{\tilde{C}}$ を除いて, e, ω の滑らかな関数である．ここで関数 δ は滑らかであるから, 滑らかでない項はただひとつ

$$\sqrt{\tilde{C}} = \sqrt{d_{\text{nod}}^2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B}}^t\underline{\mathbf{S}}} = |d_{\text{nod}}|\left[1 - \frac{a^2 a'^2 e^2 \sin^2\omega}{(1-e^2)\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}\right]^{1/2}$$

である (もっと詳しく言うと, $|d_{\text{nod}}|$ は $\sqrt{\tilde{C}}$ の非滑らか因子である).

交点交差に対応する e, ω の平均値は

$$1 - \frac{a^2 a'^2 e^2 \sin^2\omega}{(1-e^2)\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})} = \frac{a^4(1-e^2)}{\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}\sin^2 I$$

である．だから, 積分 (15) の非滑らか部分は $I \to 0$ のときゼロに向かう．これは平面の場合の正則性と無矛盾である．ただ $I \to 0$ のときの極限は特異である．Z 積分の値を決めたとき, $I = 0$ 面内に唯一の直線 $e =$ 一定 がある．この曲線は $Z =$ 一定 曲面内の曲線を $(e\cos\varpi, e\sin\varpi)$ 平面に射影した極限である．ただし, $I \to 0$ のとき $\omega + \Omega \to \varpi$ である．しかし, $Z =$ 一定 曲面は $I = 0$ 平面に横断的でない.

3.4. 平均ハミルトン関数の正則性

交点交差がないとき, 平均ハミルトン関数 (8) は, e, ω の関数として開集合 $W = \{0 < e < e_{\max}\}$ 内で 滑らかである． $e = 0$ のとき, 座標特異性がある． この特異性は $(e\cos\omega, e\sin\omega)$ に似た非特異座標を使っても取り除けるはずである． $e = e_{\max}$ に対しては $I = 0$ を得, 平面の場合に帰着する.

W において交点交差が起こるとき, $\tilde{W} = \cup W_i$ は非交差点の開集合であるとする. W_i は開連結成分 (たとえば, 図 8 には 3 つの成分がある) である．古典的な議論により, $\overline{H}$ は $\tilde{W}$ 上でなめらかであり, 積分 (15) 式内のすべても, $\sqrt{C}$ を除いて W 上で滑らかである．こうして, $|d_{\mathrm{nod}}|$ のふるまいを解析するだけでよい．これは (16) によれば $\sqrt{C}$ の非滑らか因子である．これは距離であり, 比較的単純なふるまいをする.

2 つの交点距離からひとつ, たとえば昇交点を選ぶ．すなわち, $d_{\mathrm{nod}} = d^+_{\mathrm{nod}}$ と取る．交点距離は $(e\cos\omega, e\sin\omega)$ 面の $d_{\mathrm{nod}} = 0$ なる円の内部では正, 外部では負である．とくに各連結開集合 W_i 上で一定符号を持つ. $\tilde{W}$ 上で滑らかな任意の関数 f に対して,

$$\frac{\partial^+}{\partial e} f, \quad \frac{\partial^+}{\partial \omega} f$$

は, $d_{\mathrm{nod}} > 0$ なる $\tilde{W}$ の部分 W^+ 内で計算した微分であるとし,

$$\frac{\partial^-}{\partial e} f, \quad \frac{\partial^-}{\partial \omega} f$$

は, $d_{\mathrm{nod}} < 0$ なる $\tilde{W}$ の部分 W^- 内で計算した微分であるとする.

この定義を積分 (15) 式に現われる項 $|d_{\mathrm{nod}}|$ に適用する．定義 (9) からの explicit な計算により,

$$\frac{\partial^+}{\partial e}|d_{\mathrm{nod}}| = -\frac{a[\cos\omega(1+e^2)+2e]}{(1+e\cos\omega)^2}$$
$$\frac{\partial^+}{\partial \omega}|d_{\mathrm{nod}}| = \frac{a(1-e^2)e\sin\omega}{(1+e\cos\omega)^2}$$

を得る．これらの関数は $\boxed{\text{limited}}$ であり, したがって W^+ の W における閉包へと拡張できる．そのい表現からわかるように, これらは W 内の W^+ の境界上でも滑らかである．一方,

$$\frac{\partial^-}{\partial e}|d_{\mathrm{nod}}| = \frac{a[\cos\omega(1+e^2)+2e]}{(1+e\cos\omega)^2}$$
$$\frac{\partial^+}{\partial \omega}|d_{\mathrm{nod}}| = -\frac{a(1-e^2)e\sin\omega}{(1+e\cos\omega)^2}$$

である．これらの関数は $\boxed{\text{limited}}$ であり, したがって, 滑らかな仕方で W^- の W における閉包へと拡張できる．しかし, 拡張は交点交差線の上で一致しない．上の公式から, 2

つの拡張が逆 (opposite) である (しかも一般に非ゼロ) ことをチェックできる．こうして, われわれは次の結果を証明した.

定理 3. 3 次元の場合の平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ は W 内の W^+ および W^- の閉包上で滑らかである．W 上では滑らかでない．しかしそのレベル線はかどおよび/あるいはカスプを交点交差線上に持つ．かどは $e \to e_{\max}$(つまり, $i \to 0$) のときに π に向かう角度を定義する.

平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ によって定義されるハミルトン方程式の解の存在について結論づけることができる．方程式の右辺は交点交差線上で定義されない．しかし, W^+ および W^- 上で定義された滑らかな解曲線で (滑らかな仕方で) 交点交差線に終るものは区分的に滑らかな曲線へと拡張可能である．これは一般解と考えることができる．この意味で, W のどの点を通っても一意の解がある．例外は二重交差点 (両交点で同時の) であり, ここでは本理論は適用できない.

4．例

3 節で述べた理論を説明するために, きちんと計算した例を見せよう．$\overline{H}$ の区分的に滑らかなレベル曲線を示す．これをするには求積のアルゴリズムを選び, 角変数 ℓ, ℓ' のトーラスにわたる二重積分を使って数値計算し, 適当なコンピュータ・グラフィックスも必要である.

4.1．数値積分およびグラフィクス

平均ハミルトン関数 $\overline{H}$ を計算するのに, 公式 (15) を使えばできる．超幾何級数を使ったり, 楕円積分を変数 θ で数値求積すればよい．しかし, $\overline{H}$ を計算するのにこれは必要ない．というのは, 絶対収束する improper 積分を数値的に計算するための有名なアルゴリズムがあるからである．これらは, 変換せずに積分 (8) に直接適用できる．3 節で導入されたアルゴリズムは $\overline{H}$ の微分を計算するときにのみ, したがってハミルトン方程式の右辺を explicit に計算するとき, たとえば与えられた初期条件を通る解を計算するときに本質的である.

公共使用に供されているライブラリー QUADPACK を使って計算した．これは Gauss–Kronrod 求積公式 (Piessens et al., 1983) の adaptive form を使っている．入れ子になったルーティン dqags を 2 回呼ぶ．これで二重積分としてのトーラス上の積分 (15) を計算する.

QUADPACK の採用するアダプティブアルゴリズムは「被積分関数のふるまいが非常に悪い」とか「積分はおそらく発散する」とか「ゆっくり収束する」とかの警告を発することができる．軌道傾斜角がちいさいとき, これが実際生じた．このような警告をかなり減らすことができた．また軌道傾斜角をゼロから離すことにより計算時間も大いに減らすことができた．すなわち, ある小さな $\epsilon > 0$ を使って $\cos I < 1 - \epsilon$ とした.

各図は a と (10) で定義される積分 Z を与えたときの平均摂動関数 $\overline{R}$ を示す．われわれが書いた単純なソフトウエアにより, 2 つ (またはそれ以上の) 惑星の摂動ポテンシャルを足し合わせることができる．計算に入れた惑星をすべて考慮したときに交点交差線があれば, それは示される．ω の値は, 0 と $\pi/2$ の間に限られる．なぜなら, 関数 $\overline{R}$ は

ω に関しても周期 π で周期的だからである. 図 10 と 11 では, 関数のグラフを曲面として示した. 座標 $(\omega, e, \overline{R})$ の 3 次元空間網目で近似してある. $\overline{R}$ のレベル線は (ω, e) 面にも現われる.

図 10.

4.2. 4 つのテストケース

最初の例は, 木星と土星の間の軌道半長径を持つ軌道である. 積分 $Z = k\sqrt{a}\cos I_{\max}$ の値の選び方としては, $I_{\max} \simeq 30^\circ$ とし, $e_{\max}$ は近日点が木星の内側, 遠日点が土星の外側になるようにした. 両惑星との交点交差線上の平均摂動関数の非なめらかなふる

まいは図 10 によく見える．非なめらかな線をグラフィックスで表現することはむずかしいが．交点交差線に沿っての angular 点およびカスプが見える．

図 11.

この例は, センタウルス型の軌道の可能なふるまいの近似を表現している．意外な様相も見える．Kozai 共鳴である．今の場合, ω が $\simeq 40^\circ$ のまわりを非対称的に秤動する．また $\omega = 90^\circ$ 付近に web–shaped 曲線がある．この中には木星との昇交点および降交点交差がある．これが避けられることなく周期的に繰り返される．後者を「ロシアンルーレット」秤動と呼ぶ．というのは, これらの軌道はある危険を伴うからである．非平均軌道がこのような状態に長く留まることは考えにくい．近接衝突の確率が非常に高い

からである. その上, 読者に警告しておくが, 強い摂動の場合, この理論で使われる近似はあらっぽ過ぎる. とくに $e' = 0$ の場合がそうである.

第二の例は, 地球と金星軌道を横切るアテネ型小惑星 (2100)RaShalom である. この場合も, 交点交差は起こさないが木星と土星は摂動関数に組み入れる. 図 11 が平均摂動関数のグラフ (上) である. 交点交差線が 3 本見える. 2 本は地球と, 1 本は金星と, である. そこでは曲面は滑らかでない.

同図 (下図も) のレベル曲線によると, 巨大惑星からの摂動の結果, 近日点引数 ω はいつも周回する. 3 節で定義した「一般的な意味で」, ハミルトン関数を $\overline{H}$ とするハミルトン方程式の解, 近日点の歳差周波数は well–defined である (??).

この小惑星は他にも面白い性質を持つ. しばしば, 地球との交点交差の近くの平均運動共鳴 (Toro 状態) に捉えられる (Milani & Bacelli, 1998). すなわち, 交点距離がゼロ線を通過するのに, 地球との近接衝突の確率は従来の統計理論からは出ない.

第三の例では, 火星交差小惑星 (1866)Sisyphus の接触要素と一致する a と Z の値を選ぶ. Sisyphus の $q = a(1-e)$ は 1AU より小さいので大変興味深い. ただ交点交差は起こらない. この防御機構は Milani et al.(1989) によって Kozai 類と分類された. 図 12 の摂動関数のレベル線によれば, ω 秤動と強い e-ω 結合の可能性がある. これは Kozai 類のふるまいを説明する. しかし, ω 秤動は木星の摂動関数によって駆動されており, 地球の効果は小さい. また火星の効果はほぼ無視できる. だから, 地球や火星との交点交差の線に沿ってのレベル曲線のかどは π に近く, 図ではよく見えない.

第四の例は, 木星族の周期彗星 49P/Arend–Rigaux の今の軌道要素を採用する. これは典型的な木星交差軌道であり, 交点交差線に沿ってのレベル線のかどは図 13 でよく見える. この軌道は火星交差でもあるが, 火星の質量は小さいので, 全摂動関数への影響は小さい.

5. 結論および将来の研究

惑星交差軌道の永年摂動問題は答えのない謎ではなくなった. 一意の解を持つ平均問題を数学的に健全に定義できる. 証明は構成的であるから, これらの解や対応する近日点や交点の周回の固有周波数を計算する well-defined なアルゴリズムがある.

仕事は 2 つの意味でまだ終っていない. まず, 平均化方程式 (ハミルトン関数 $\overline{H}$) の右辺を計算するために定義したアルゴリズムは, いくつか improper 積分を含んでいる. これらは絶対収束であるが, 数値的に安定なアルゴリズムを定義する必要がある. 効率的なアルゴリズムを定義し, それを信頼できるソフトヱアとして実体化することは可能であるが, それを実現する必要がある.

次に, 平均化方程式の解と真の解の平均との差をまだ見積もっていない. 後者は厳密に定義されてもいない. 著者の信ずるところによれば, 数値計算によってのみ, どの場合に, そしてどの程度の精度で平均化方程式が解の真のふるまいを表現するかを知ることができる. 決定的な質問は, 平均化方程式によって計算された永年共鳴の場所が, もとの方程式の相空間に存在する永年共鳴領域をどの程度予測できるか, である.

これらはわれわれが行うべき挑戦である.

図 12, 13.

参考文献

[1] Demidovic, B.P. and Maron, I.A.: 1996, *Foundations of Numerical Mathematics*, SNTL, Praha.

[2] Fleming, W.H. : 1964, *Functions of Several Variables*, Addison-Wesley.

[3] Gronchi, G.F.: 1997, 'Asteroidi incrociatori dell'orbita terreste: studio analitico dell'hamiltoniana mediata', Thesis, University of Pisa.

[4] Kozai, Y.: 1962, 'Secular perturbation of asteroids with high inclination and eccentricity', *Astron. J*, **67**, 591-598.

[5] Michel, P. and Froeschlé, C.: 1997, 'The location of linear secular resonaces for semimajor axes smaller than 2 AU', *Icarus*, **128**, 230-240.

[6] Michel, P., Froeschlé, C., and Farinella, P.: 1996, 'Dynamical evolution of two near-Earth asteroids to be explored by spacekraft: (433)Eros and (4660)Nereus', *Astron. Astrophys.*, **313**, 993-1007.

[7] Milani, A., Baccili, S.: 1998, 'Dynamical classification of Earth-crossing orbits: the dance of the Toro asteroids', Preprint.

[8] Milani, A., Caprino, M., Hahn, G., and Nobili, A.M.: 1989, 'Dynamics of planet-crossing asteroids: Classes of orbital behavior', *Icarus* **78**, 212-269.

[9] Morbidelli, A. and Henrard, J.: 1991, 'Secular resonances in the asteroid belt: theoretical perturbation approach and the problem of their location', *Celest. Mech.* **51**, 131-168.

[10] Piessens, R., De Doncker-Kapenga, E and Uberhuber, C.W.: 1983, *QUADPACK: A Subroutine Package for Automatic Integration*, Springer-Verlag.

[11] Wetherill, G.W.: 1967, 'Collisions in the asteroid belt', *J. Geophys. Res.* **72**, 2429-2444.

[12] Williams, J.G. and Faulkner, J.: 1981, 'The position of secular resonance surface', *Icarus* **46**, 390-399.