谷川清隆 訳

Astronomical Journal **104** (1992), 1633-1640

太陽系力学のためのシンプレクティック積分法
Symplectic integrators for solar system dynamics

Prasenjit Saha and Scott Tremaine

要約

太陽系力学の問題の多くは$H = H_{Kep} + \epsilon H_{pert}$の形のハミルトン関数で記述できる. ただし$\epsilon \ll 1$であり, H_{Kep}はケプラー二体問題のハミルトン関数で, ϵH_{pert}は(たとえば)惑星からのはるかに小さな摂動による部分である. この種のハミルトン関数に対するシンプレクティック積分子を概観する. その際, H_{Kep}の可積分性を利用する方法に焦点をあてる. このような積分子の永年誤差はうまい出発手続きを使えばϵ倍ほど小さくできることを示す. たとえば, はじめに非常に小さな刻み幅から始めて徐々に最終的刻み幅までに大きくすればよい. 結果として得られる積分子は太陽系の広い範囲の問題に使えるものの中で最善である.

序

当今のディジタルコンピュータの速さからすると直接積分によって, 非常に長期間にわたって太陽系の軌道の進化を調べることができる. 長期積分には正確で頑丈な積分アルゴリズムが必要である.

過去数十年間は直交座標で高次の多段法が多く使われてきた. 多段法では前数段の位置と加速度に多項式をあてはめて最新の位置を求める. もっとも人気のあるのが13段のStörmer積分子である. これはSussman & Wisdom(1988)による外惑星の8.45億年の計算も含めて多くの長期積分に使われてきた. Störmer法の欠点は(他の多くの積分スキームと同様)位置の誤差が時間の2次で成長することである. この問題は対称多段積分子(Lambert & Watson 1976)によって回避できる. この場合, 誤差は線形に成長する. 最近Quinlan & Tremaine(1990)は太陽系の仕事に合うように高次の形[1] を導いた. Quinn et al.(1991)は12段対称多段法で全惑星を3百万年積分した.

上記以外にいわゆるシンプレクティック積分子を使う方法がある. これはハミルトン系特有のアルゴリズムであって, ハミルトン力学に特徴的な厳密な保存則を強調する. 初歩的な概観論文としてChannel & Scovel(1990), またもっと詳しいものとしてSanz-Serna(1992)の論文を見よ. たとえばシンプレクティック積分子は相体積を保存するので, みかけ上の散逸がない. 欠

[1] 今回の論文では, τを時間刻みとして1刻みあたり誤差が$O(\tau^{n+1})$のとき積分子の次数をnとする従来の用法にしたがう. 1階の方程式にはこの定義は正しく, また2階の方程式を一組の1階の方程式と考えれば自然である. けれども2階の方程式の専門文献によれば次数は$n-1$である. たとえばわれわれの用法では13段のStörmer積分子は14次であるが, Henrici(1962)やQuinlan & Tremaine(1990)の用法では13次である. ときには12次といわれることもある.

点は, 高次の場合同じ次数の多段アルゴリズムに比べてアルゴリズムが複雑なことである. ハミルトン関数が次の形に書ければシンプレクティック積分子の構成法は簡単になる.

$$H = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}). \tag{1}$$

ここで $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ は正準な運動量と座標である. 非相対論的重力 N 体問題のハミルトン関数は $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を直交座標および運動量としてこの形をしている (T と V は単に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーである). Gladman & Duncan(1990) は直交座標で 4 次のシンプレクティック積分子を使って太陽系外縁の 10^3 個の粒子の進化を 2×10^7 年追いかけた.

太陽系力学の特徴は可積分ケプラー問題への摂動がたいていの場合小さいことである. つまり運動がハミルトン関数

$$H = H_{Kep} + \epsilon H_{pert} \tag{2}$$

によって記述されることである. ただし $\epsilon \ll 1$ は惑星と太陽の質量比あるいは (衛星の場合には) 潮汐力と惑星引力の比である. このことから, 積分はケプラー問題の作用・角変数で行なうのが良さそうである. この場合, 非摂動運動は単純である (作用は定数で角度は時間に線形に増大する). このやりかたの難しいところは摂動ハミルトン関数 ϵH_{pert} を作用・角変数で計算する面倒なところである.

この論文では Wisdom & Holman(1991; 以後 WH と呼ぶ) が導入した一群の特別な積分子を扱う. そのうちのひとつを使って WH は外惑星系を 10 億年追いかけ, Sussman & Wisdom(1992) は全惑星を 1 億年追いかけた. このような積分子は Kinoshita et al.(1991 ; 以後 KYN と呼ぶ) も独自に示唆している. これらの積分子の特徴は二組の変数を使うことであるである. すなわちケプラーハミルトン関数 H_{Kep} を積分するための作用・角変数と摂動ハミルトン関数 ϵH_{pert} を積分する直交座標である. KYN では積分子は「修正シンプレクティック積分子」と呼ばれ, WH では「N 体写像」と呼ばれたが, ここではもっと意味のわかりやすい「混合変数シンプレクティック」(あるいは MVS) 積分子という名を採用する. たとえば MVS2 は 2 次の積分子を表す.

MVS 積分子の重要な性質は, (まるめ誤差を除いて)「代理」ハミルトン関数

$$\tilde{H} = H + H_{err} \tag{3}$$

の力学を厳密に追いかけることである. H_{err} は刻み幅 τ に依存し, (形式的には)τ のべき級数で表すことができる. 次数 n の積分子の場合, $H_{err} \sim O(\epsilon\tau^n)$ である. 高次の積分子も知られているが, 2 次および 4 次の積分子がなかんずく有用である. シンプレクティック積分子のありがたい性質, たとえば永年エネルギー誤差のないこと, 経度の誤差が (2 次でなく)1 次で成長することなどは, $\tilde{H}$ が存在することからただちに言える[2] . 積分子の性質が H_{err} によって完全に記述できることは積分子を解析するのにたいへん都合がよい.

MVS 積分子を精密化することがこの論文の寄与である. 主要な長期誤差が $O(\epsilon\tau^n)$ 程度の大きさの平均運動 (mean motion) の一定誤差に起因することを示す. つぎにこの誤差を除去す

[2] 代理ハミルトン関数があることは経度が線形的に増大するための必要条件ではない. ここで考えるよりもっと一般のシンプレクティック積分子の場合, 代理ハミルトン関数を持つことは知られていないけれども経度が線形的に増大する. またシンプレクティック多段積分子も線形増大性を示す. ただ多段法の場合, シンプレクティック性を定義するのは容易ではない.

るための特殊な初期手続きを記述する. この手続きによって平均運動の平均誤差はたかだか $O(\epsilon^2\tau^n)$ 程度になる. この改良によって MVS 積分子が太陽系のはば広い問題を扱うのものとしていまのところ最善のものになった.

2 節ではシンプレクティック積分子の理論のうち関係する側面を概観する. 3 節では新しい初期手続きについて述べ, 4 節ではもうひとつの解釈を述べる. それによるとハミルトン定式化の多くを回避しつつも同じ結論が得られる. 5 節では数値テストを行ない, われわれの解析法を正当化し, この新しい初期手続きによる改良を説明する. 6 節はまとめである. 論文の本文では相対論的補正は考えないが, 補遺で手短に議論する.

シンプレクティック積分子に関する若干の理論

「シンプレクティック」は「面積保存」の一般化である. ハミルトン系の生息する $2N$ 次元相空間 $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ においてシンプレクティック変換は任意の閉ループによって任意の曲面 p_jq_j 上に射影された面積が保存する変換である. 言い換えると, $d\mathbf{p}\wedge d\mathbf{q}$ が保存する. (接触変換あるいは正準変換という呼び方もある.) とくにハミルトン関数のもとでの時間進化はシンプレクティックである.

ハミルトン系に適用した数値的積分子は次のような写像と考えることができる.

$$(\mathbf{p},\mathbf{q})_{t=0}\to(\mathbf{p},\mathbf{q})_{t=\tau}. \tag{4}$$

ただし τ は刻み幅であり, われわれはこの写像を何度も繰り返す.

シンプレクティック積分子であるとは写像 (4) が (まるめ誤差を除いて) シンプレクティックであることを保証するときである. これにより積分子がもとのハミルトン流れの幾何学的構造の多くを保存する. ただ精度に関しては何もわからない.

次に

$$H=H_A+H_B, \tag{5}$$

の形のハミルトン関数に話しを限ろう. ここで H_A と H_B はそれぞれ可積分であるとする. (2) 式の太陽系のハミルトン関数はこの形をしている. 実際, H_{Kep} 自身は可積分であり, H_{pert} も位置だけの関数だから可積分である. もうひとつの例は (1) のようにハミルトン関数が運動エネルギーと座標だけに依存するポテンシャルの和として表される場合である.

(5) の形の系の場合, ハミルトン方程式は次のように書ける.

$$\dot{\mathbf{z}}=\{\mathbf{z},H_A+H_B\}. \tag{6}$$

ここで $\mathbf{z}$ は $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ であり, $\{\ ,\ \}$ はポアッソン括弧である. 作用素を導入する.

$$A\equiv\{\ ,H_A\}\quad\text{および}\quad B\equiv\{\ ,H_B\}. \tag{7}$$

(6) の形式解は次で与えられる.

$$\mathbf{z}(\tau)=\exp[\tau(A+B)]\mathbf{z}(0). \tag{8}$$

H_A と H_B は可積分としたから $\exp(\tau A)$ と $\exp(\tau B)$ の計算法は判っている. シンプレクティック積分子を開発するために真の時間進化作用素 $\exp[\tau(A+B)]$ を $\exp(\tau A)$ や $\exp(\tau B)$ の積 (合成) で近似する. これは Baker-Campbell-Hausdorff(BCH) の恒等式を使ってやれる. すなわち

$$\exp A \exp B = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] + \langle \text{残りの項} \rangle). \tag{9}$$

ここで [,] は交換子であり, $\langle$ 残りの項 $\rangle$ は A と B が入れ子になった交換子のみから成っている.

たとえば次を考えよう.

$$\exp(\tau A) \exp(\tau B) = \exp[(\tau(A + B) + \langle \text{誤差} \rangle]. \tag{10}$$

ただちに示せるように, $\langle$ 誤差 $\rangle$ は $\{\ , H_{err}\}$ と書ける[3] . 言い換えると (10) 式の左辺の作用列は, ハミルトン関数

$$H_A + H_B + H_{err}$$

のもとで時間 τ だけ進化させた場合と同じである. (10) と BCH 恒等式より, ただちに次が出る.

$$H_{err} = (\tau/2)\{H_A, H_B\} + O(\tau^2). \tag{12}$$

(10) 式の左辺で記述される積分子の時間刻み τ の 1 回分は, はじめに H_B のみの影響のもとで力学系を時間 τ だけ進め, 次に H_A のみの影響のもとで時間 τ だけ進めることである. 誤差ハミルトン関数 H_{err} は $O(\tau)$ であるから, 時間刻みごとの誤差は $O(\tau^2)$ である. だからこの積分子は 1 次である.

(10) 式の左辺で記述される 1 次のシンプレクティック積分子を S1 と書くことにする. H_A と H_B が直交座標と運動量に (式 (1) に見られるように) 分離可能なら, 積分子を CS1 と書き, H_A の作用変数が H_B の作用変数と正準共役でないなら (「混合変数」), 積分子を MVS1 と書く.

高次の積分子を得るために次式を考える.

$$\exp(\frac{1}{2}\tau A) \exp(\tau B) \exp(\frac{1}{2}\tau A) = \exp[(\tau(A + B) + \langle \text{誤差} \rangle]. \tag{13}$$

BCH 恒等式を使うとただちに次が得られる.

$$H_{err} = \frac{\tau^2}{12}\{\{H_A, H_B\}, H_B + \frac{1}{2}H_A\} + O(\tau^4). \tag{14}$$

だから (13) 式の左辺で記述される方法は 2 次である. 2 次と 1 次の積分子の近しい関係に注意しよう. 2 次の積分子で系を N 刻み進めることは, H_A のもとで系を時間 $\frac{1}{2}\tau$ だけ進め, 次に 1 次の積分子で $N-1$ 刻み進め, さらに H_A のもとで系を時間 $\frac{1}{2}\tau$ だけ進めることと等価である. 余分の

[3] これを納得するために, $[A, B] \equiv \{\{\ , H_B\}, H_A\} - \{\{\ , H_A\}, H_B\}$ を考える. ヤコビの恒等式 $\{\{X, Y\}, Z\} + \{\{Y, Z\}, X\} + \{\{Z, X\}, Y\} = 0$ を使えば $[A, B] \equiv \{\ , \{H_A, H_B\}\}$ であることが判る. $\langle$ 誤差 $\rangle$ は A と B が入れ子になった交換子のみから成っているから, 入れ子になった H_A と H_B のポアッソン括弧から成るハミルトン関数 H_{err} を使って $\langle$ 誤差 $\rangle \equiv \{\ , H_{err}\}$ と書ける

半刻み分が積分子の精度を 1 次から 2 次に改善するのに役立っている. $H_A = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, H_B = V(\mathbf{q})$ の場合には, 積分子は単なる蛙跳び (leapfrog) である[4] .

4 次の積分子を得るには, 2 次の積分子 3 つを $1 : -2^{1/3} : 1$ なる刻み比でつなげればよい. Yoshida(1990) はさらに高次の積分子も求めている.

公式の対称性から明らかなように, この節の積分子はまるめ誤差を除いて時間反転可能 (可逆) である. BCH 恒等式は積分子の公式を対称化するために Forest & Ruth(1990) が最初に利用した. 誤差がハミルトン関数 H_{err} によって記述されることを Yoshida(1990) が示した. この節で述べたことを含んでもっと詳しいことは WH および KYN に加えて上の 2 つの論文に書いてある. また Wisdom & Holman(1992) が (H_{err} が必ずしも τ の級数展開の低次だけで記述できない場合に) 刻みが大きいときの MVS2 を解析している.

(2) の形のハミルトン関数を使って太陽系を積分するときには, H_{Kep} のみの作用のもとで時間を進めるのは作用・角変数または軌道要素を使えば実に簡単であることに注意しよう. ϵH_{pert} のもとで時間を進めることは直交座標を使えば簡単である (位置を固定したまま速度を変える). WH が指摘しているように, 直交座標から軌道要素への変換, 平均近点離角を進めること, さらに逆変換などのの全操作はガウスの f, g 関数を使って効率的に実体化できる.

3. 出発手続き

代理ハミルトン関数 $\tilde{H} = H + H_{err}$ は KYN で示されたように積分誤差を見積もるのに使える. (2) の形の太陽系のハミルトン関数に MVS 積分子を適用した場合に誤差の主要項を見つけるだけでなく, 取り除けることをこれから示そう.

積分子の精度の一番重要な目安は平均運動 (mean motion) の平均誤差である. というのは, これによって (a) 位置の誤差の成長率が決まり (位置誤差のほとんどは経度の誤差であるから), (b) もとの力学系の平均運動共鳴や共鳴近傍の効果が数値積分にも現れるかどうかが決まるからである.

以下の議論では, 摂動論を使って (H_{err} を H への摂動とあつかって) 代理ハミルトン関数 $\tilde{H}$ を解析し, 代理系の振動数 $\tilde{\omega}$ と現実系の振動数 ω を比較し, ふたつの振動数の差を減少させる方法について議論する. regular な軌道のみ考え, とくに H は少なくとも近似的に作用変数, 角変数を持つと仮定する. また H_{err} が十分小さくて (つまり τ が十分小さくて), 1 次の摂動論がよい近似であると仮定する.

考えるのは MVS2 であるが, 高次の場合にも議論は当てはまる. ハミルトン関数 (2) を H_{err} の表式 (14) に代入して次を得る.

$$H_{err} = \frac{\epsilon\tau^2}{24}\{\{H_{Kep}, H_{pert}\}, H_{Kep}\} + O(\epsilon^2\tau^2). \tag{15}$$

[4] ふつう蛙跳びは次のように書く.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_{1/2} = \mathbf{q}_0 + \tfrac{1}{2}\tau\mathbf{p}_0,\\
&\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} - \tau\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}_{n+1/2} = \mathbf{q}_{n-1/2} + \tau\mathbf{p}_n,\\
&\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{n-1/2} + \tfrac{1}{2}\tau\mathbf{p}_n.
\end{aligned}$$

ところが簡単に判るように, この形は上の本文で述べたものと同値である (Ruth 1983 も参照せよ).

ポアッソン括弧を現実系 (H) の作用・角変数を用いて評価する. $\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}$ を H の作用・角変数とし, $\boldsymbol{\omega} \equiv (\partial H/\partial \mathbf{J})$ を正準振動数とする. $\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}$ と H_{Kep} の作用・角変数 (ドローネー (Delaunay) 要素) の差は $O(\epsilon)$ であり, 次式で与えられる[5] .

$$\begin{aligned} J_1 &= L + O(\epsilon); \quad J_2 = G + O(\epsilon); \quad J_3 = H + O(\epsilon); \\ \theta_1 &= l + O(\epsilon); \quad \theta_2 = g + O(\epsilon); \quad \theta_3 = h + O(\epsilon). \end{aligned} \tag{16}$$

H_{Kep} は L にしか依らないから, H_{Kep} は $O(\epsilon)$ の精度では $J_2, J_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ のみに依存する. ゆえに ω_2, ω_3 は $O(\epsilon)$ である. だから次を得る.

$$H_{err} = -\frac{\epsilon\tau^2}{24}\left(\frac{\partial H_{Kep}}{\partial J_1}\right)^2\left(\frac{\partial^2 H_{pert}}{\partial \theta_1^2}\right) + O(\epsilon^2\tau^2). \tag{17}$$

H_{err} はフーリエ成分を使って次のように表せる.

$$H_{err} = \epsilon\tau^2 \sum_{\mathbf{m}} X_{\mathbf{m}}(\mathbf{J}) \exp(i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}) + O(\epsilon^2\tau^2). \tag{18}$$

ここで $\mathbf{m}$ は整数 m_1, m_2, m_3 のベクトルであり, また (17) 式の項 $(\partial^2 H_{pert}/\partial\theta_1^2)$ により, $X_{\mathbf{m}} = 0$ となるのは $m_1 = 0$ のときである. だから H_{err} は H_{pert} とは違うけれども $O(\epsilon)$ の精度では永年項 (平均近点離角 l に依らない項) を持たない.

そこで (18) 式の $O(\epsilon\tau^2)$ の項からくる誤差に焦点を当てよう. 摂動論より, 代理系の作用変数と振動数に対して $O(\epsilon^2\tau^2)$ までの精度で次を得る.

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} - \epsilon\tau^2 \sum_{\mathbf{m}} \frac{\mathbf{m} X_{\mathbf{m}}}{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}} \exp(i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}) \tag{19a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{\mathbf{J}}) = \boldsymbol{\omega}(\tilde{\mathbf{J}}) + \epsilon\tau^2 \frac{\partial X_0}{\partial \mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega}(\tilde{\mathbf{J}}). \tag{19b}$$

小分母の問題は生じない. というのは, $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}$ がゼロに近くなるのは $m_1 = 0$ のときのみであり, そのときには $X_{\mathbf{m}} = 0$ だからである.

$\tilde{\mathbf{J}}$ は代理系 $(\tilde{H})$ では一定であり, $\mathbf{J}$ は現実系 (H) で一定であるから, 振動数の誤差が (19) 式の $O(\epsilon\tau^2)$ の次数までゼロである (すなわち $\tilde{\omega} = \omega$) ためには, 積分のはじめに同じ次数まで $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}$ であることが必要十分である. この条件が満たされると, 振動数の誤差は $O(\epsilon^2\tau^2)$ となり, $\epsilon \leq 10^{-3}$ であることを考えると, 太陽系の問題ではかなりの改善である.

問題： 代理系の作用変数が現実系の作用変数との差が $O(\epsilon\tau^n)$ となるようにするには (一般に n 次の) 積分子をどのように出発させればよいか？少なくともふたつの可能性がある.

(i) 肩ならしスタート (warm start): ハミルトン系がゆっくり変化すれば作用変数 (断熱不変量) は変化しない. だからひとつの方法は刻み幅を 0 から τ までゆっくり増加させて (実際には H から $\tilde{H}$ までゆっくり変える) 積分子を走らせることである. これが時間 T の間に行なわれたとすると, 作用変数の変化は

$$\Delta\mathbf{J} \sim \frac{\epsilon\tau^n}{T} \sum_{\mathbf{m}} \frac{\mathbf{m} X_{\mathbf{m}}}{(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega})^2} \sim \frac{\epsilon\tau^n}{\omega_1^2 T}. \tag{20}$$

[5] 記法が重複していることに注意. (16) 式で「H」はドローネー要素を表す. ただほかの場所では H はハミルトン関数を表す. ドローネー要素自身は, たとえば Plummer(1960) の 143 節あるいは Brouwer & Clemence(1961) の 9.9 節で導出されている.

これを積分子の肩ならし (warming up) と呼ぼう. 積分子を肩ならしするにはたくさんのやり方がある. われわれは, S 刻み前進し, $2S$ 刻み後退し, ふたたび S 刻み前進する. その際, 刻み幅を毎回 $\tau/(4S)$ だけ増加させる. この過程によって時間は初期値に戻る. 不思議なことに, 初期条件に小さな誤差を人工的にいれると後の時間における誤差がかなり減少する.

(ii) (iterated start): (19) 式によれば $\tilde{\mathbf{J}}$ は軌道周期程度の間に振動する. このことから MVS 積分子を軌道上の異なる点から出発させ, 適当な時間の間積分し, もっと短い時間刻みで行なった積分を参照して精度を吟味し, 最良の出発点 (この点は $\tilde{\mathbf{J}}$ が $\mathbf{J}$ に一番近い点である) を選び出すことが考えられる.

これらの出発手続きを行なうと, 主要な誤差は 3 つの作用変数の短周期誤差と J_2 および J_3 の $O(\epsilon\tau^2)$ 程度の長周期誤差と, 作用変数の $O(\epsilon^2\tau^2)$ 程度の平均誤差から成る. 平均誤差を $O(\epsilon)$ 倍減少させることができて, 出発手続きは数値積分における平均運動の精度を実質的に改善する.

5 節では両方の出発手続きを吟味する. 特別の出発手続きを経ない積分子を cold start と呼ぶことにする.

4. もうひとつの解釈

この節では今回の結果のいくつかを別のやり方で導く. これは MVS 積分子の取扱い法としては WH に近い.

太陽系の問題のためのシンプレクティック積分子を導くためにハミルトン関数 (2) を次で置き換える.

$$\tilde{H} = H_{Kep} + \epsilon H_{pert}\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - k\tau). \tag{21}$$

すなわち, H_{pert} にデルタ関数の picket fence を乗じる. 前と同様 $\tilde{H} = H + H_{err}$ と置けば次を得る.

$$H_{err} = \epsilon H_{pert}\left[\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - k\tau) - 1\right]. \tag{22}$$

τ が (典型的な軌道周期に比べて) 小さければ, 誤差ハミルトン関数は高振動数の項のみを含み, これらは運動に大した影響を与えない (WH 参照).

デルタ関数が作用するとき以外は $\tilde{H}$ で記述される系は H_{Kep} のみの影響のもとで進化する. この進化は H_{Kep} が可積分だからただちに計算できる. デルタ関数を横切るときの進化は H_{pert} のみによって記述され H_{pert} が座標のみに依存するから簡単に計算できる. その結果得られる積分子は, 積分をデルタ関数の直前で始めかつ終えれば 2 節の MVS1 積分子と同値である. 積分をデルタ関数の中間で始めかつ終えれば, 積分子は MVS2 と同値である. いくつかのデルタ関数をひとつの時間刻み中で使えば高次の積分子が得られる. しかしこの方法は 2 節で使った方法に比べ積分子の導き方が一般的でない. というのは, 2 節で述べた積分子 MVS4 では過去へ向かっての進化が追えるのにこの方法ではできないからである.

では, 積分子を使って系を時間間隔 $[0, t]$ の間追いかけたときに, 誤差ハミルトン関数 H_{err} がもとのハミルトン関数 H の作用変数 $\mathbf{J}$ にどんな影響を与えるのだろうか. $\dot{\mathbf{J}} = -\partial\tilde{H}/\partial\boldsymbol{\theta} = -\partial H_{err}/\partial\boldsymbol{\theta}$ を得る. H_{err} は $O(\epsilon)$ であるから次を得る.

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0 - \int_0^t \left(\frac{\partial H_{err}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right) dt' + O(\epsilon^2). \tag{23}$$

ここで被積分関数は非摂動相空間座標 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \equiv \mathbf{J}(t=0), \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}t, \boldsymbol{\omega} = (\partial H/\partial \mathbf{J})_{\mathbf{J}_0}$ において評価する.

摂動ハミルトン関数の典型的な項は

$$H_{pert} = Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}) \exp(i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}, \tag{24}$$

の実数部である. 但し $\mathbf{n}$ は整数ベクトルである. (簡単のため, $n_1 = 0$ の永年項を無視した. だから $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}$ は $O(1)$ である.) (22) 式を使えば (23) 式が評価できて次を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) = \quad & \mathbf{J}_0 + \epsilon i \mathbf{n} Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}_0) \exp(i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \frac{\exp(i\lambda t) - 1}{i\lambda} \right. \\ & \left. - \tau \sum_{k=k_1}^{k_2} \exp[i\lambda(t_0 + k\tau)] \right\} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{25}$$

ここで $\lambda = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}$ であり, k_1 と k_2 は $t_0 + k\tau \in [0, t]$ を満たす最小および最大の整数である. 和を足し合わせて次を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) = \quad & \mathbf{J}_0 + \epsilon i \mathbf{n} Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}_0) \exp(i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \frac{\exp(i\lambda t) - 1}{i\lambda} - \tau \exp(i\lambda t_0) \right. \\ & \left. \times \frac{\exp[i(k_2+1)\lambda\tau] - \exp[ik_1\lambda\tau]}{\exp(i\lambda\tau) - 1} \right\} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{26}$$

そこで $\mathbf{J}(t)$ の時間平均を求めよう. それを $\langle \mathbf{J} \rangle$ と表す. t または k_2 を引数として含む指数関数項は平均すればすべてゼロになるので, 残りは次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J} \rangle = \quad & \mathbf{J}_0 + \epsilon i \mathbf{n} Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}_0) \exp(i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0) \\ & \times \left\{ \tau \frac{\exp[i\lambda(t_0 + k_1\tau)]}{\exp(i\lambda\tau) - 1} - \frac{1}{\lambda} \right\} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{27}$$

MVS2 積分子の場合, 最初のデルタ関数と出会うのは積分を開始してから $\frac{1}{2}\tau$ 後であるから $t_0 + k_1\tau = \frac{1}{2}\tau$ であり, 次を得る.

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \mathbf{J}_0 + \epsilon \mathbf{n} Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}_0) \exp(i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \frac{\tau}{2\sin\frac{1}{2}\lambda\tau} - \frac{1}{\lambda} \right\} + O(\epsilon^2). \tag{28}$$

誤差ハミルトン関数によって平均作用変数が $\Delta\mathbf{J} = \langle \mathbf{J} \rangle - \mathbf{J}_0$ だけずれ, そのために振動数が $\Delta\boldsymbol{\omega} = (\partial^2 H/\partial \mathbf{J}^2)\Delta\mathbf{J}$ だけずれる. MVS2 の場合は (28) 式の括弧の中の量が $O(\tau^2)$ であるから, ずれは $O(\epsilon\tau^2)$ である. このずれが長期積分における位置誤差の主要源である. というのもこのずれのために経度の誤差は時間に線形的に成長するからである.

この誤差を取り除くための鍵は, T と γ を正定数として, H_{pert} に $\exp[\gamma(t-T)]$ を乗じた人工的な問題を考えればでてくる. ただちに示せるように, この修正の効果は (26) 式の $\mathbf{J}$ の表式で $i\lambda$ を $\gamma + i\lambda$ に, また $i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0$ を $i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}_0 - \gamma T$ に置き換えるところにしか現れない. そこで, 区間 $[0, T]$ で $\mathbf{J}(t)$ を平均し, 区間の長さ $T \to \infty$ とし, 一方成長率 $\gamma \to 0$ とし, γT が一定となるようにする. するときっちり (27) 式が得られる. ただ平均誤差 $\langle \mathbf{J} \rangle - \mathbf{J}_0$ には $\exp(-\gamma T)$ が係数としてつく. だから $\gamma T \gg 1$ なら平均誤差は $O(\epsilon)$ から $O(\epsilon^2)$ へと小さくなる.

この結果からすると, 誤差ハミルトン関数が出発時にゼロであって, 刻み幅 τ にともなう定常値までゆっくり成長するなら, 平均作用変数のずれの最低次の項が取り除かれるようだ. これを実現する手っ取り早い方法は刻み幅を小さく始めて長い時間をかけて刻み幅 τ まで大きくすることである. これが 3 節の「肩ならし法」である. 別のやり方もあり得る. たとえば高次の積分子から始めて順次最終的に使う積分子まで次数を下げていくのである. 第三の方法もあり得る. (27) 式によれば平均作用変数は軌道周期の時間程度の間に出発位相 θ_0 の関数として振動する. だからうまい時刻から始めると, ずれは劇的に減少する. これが 3 節の「iterated start」の原理である.

5. 数値結果

試験的に太陽-木星-小惑星系を積分する. 小惑星を $a = 2.6AU(3:1$ と $8:3$ 共鳴の間), $e = 0.25$ および $i = 0.2$ ラジアンで出発させる. 計算は日心座標で行なう. 結果を示すときには「軌道」を単位にして行なうが, これは初期軌道の周期 (約 4 年) のことである. 積分子が異なると 1 刻みあたり力の計算回数が異なるので, 刻み幅あたりでなく 1 軌道あたりの力の計算回数を使って話しを進める. 軌道積分の誤差を計算するために, 同じ軌道を (誤差が 5 倍以上小さくなるように) 小さな刻みで計算しなおす.

MVS 積分子の場合, ほとんどの時間は H_{Kep} のもとで軌道を進めるときに消費される. H_{pert} での進化には全計算時間の 10%程度しか使わない. けれども相互作用する惑星が N 個ある系の場合には, H_{Kep} の消費時間が N 倍になるのに対して, H_{pert} の消費時間は N^2 倍になる. 多段積分子の 1 刻みに要する時間は, MVS 積分子において H_{Kep} を計算する時間の約 60% である. (この見積もりはもちろん計算プログラムの善し悪しに依るのだろうが, われわれの使ったプログラムはそれなりに良かったと信じている.)

図 1 で MVS 積分子と文献に現れるほかの積分子を比較した. とくに刻み幅の肩ならし法による改善に注意して欲しい (MVS2 と WH と記された曲線を比較せよ). この図に示されるよりずっと高い精度が必要な場合には, Quinlan & Tremain(1990) の述べた対称多段積分子が最良だろう. 理由は単に高次だからである. 一方, ここで示されるより刻み幅を大きくする場合には, 多段法に比べて低次の MVS 積分子の方がよいだろう.

図 1 に示される積分子では, 平均経度または平均近点離角の誤差は時間に線形に成長する. ただ例外は Störmer 積分子で, この場合時間の 2 次で成長する. この方法はつい最近まで太陽系の長期積分でよく使われてきたが, いまや新しい積分子によって取ってかわられる運命にある.

図 2(a) と 2(b) は MVS2 が 2 次の積分子であること, また肩ならしによって精度が向上することを詳しく示している. 丸印で示した積分では, 最終的な刻み幅まで 4000 軌道ほど肩ならしした (きっちりした肩ならし期間は乱歩的に少しずつ変えて, 肩ならし期間が十分長い限り, 期間の長さに結果が依存しないことを確かめた). $\times$ 印の積分は数軌道の短い肩ならしで行なったものである (きっちりした期間の長さはやはり乱歩的に変えた). この場合, 肩ならしが足りなくて誤差を小さくできない. 軌道の初期位相を乱歩的に選んだ効果が見える (?). 1 軌道あたり力の計算回数が 30 未満のときには肩ならしの効果は少なく, もっと計算回数が少ない場合には効果はまったくなくなる.

図 1, 2

図 3 は図 2(b) と同様の結果であるが MVS4 積分子で iterated start を行なったものである. この場合, まるめ誤差のために平均近点離角の精度が向上しない. (図 1 において, ほかの積分子よりも MVS4 の力の計算回数を少なくしたのはこのためである.)

図 3, 4

最後に, 図 4 に示されるとおり, MVS2 で肩ならしを行なうと, ϵ^2 に比例する経度誤差がでる.

6. まとめ

この論文で調べてきた太陽系の問題のための積分子は, 最近 Wisdom & Holman(1991; WH) や Kinoshita et al.(1991; KYN) によって導入されたものである. これらはシンプレクティック積分子であって, $H_{Kep} + \epsilon H_{pert}, \epsilon \ll 1$ の形のハミルトン関数で記述される系に適用できる. ただし H_{Kep} はケプラー運動を記述し, ϵH_{pert} は惑星摂動 (また衛星の場合は潮汐摂動) を記述する. このような完全な形は本質的でない. 必要なのはハミルトン関数がふたつの部分から成っていて, 個々に考えたときにはそれぞれが可積分であることである.

実際に使うにあたって, 積分子を書き下すことは容易である. 2 次の積分子の場合, (幅 τ の)1 刻みは 3 つの操作から成る. (i) H_{Kep} のもとで時間 $\frac{1}{2}\tau$ だけ系を進化させる. (ii) ϵH_{pert} のもとで時間 τ だけ系を進化させる. (iii) ふたたび H_{Kep} のもとで時間 $\frac{1}{2}\tau$ だけ系を進化させる. (詳しいアルゴリズムに関しては WH 参照.) (i) や (ii) の終りでなく (iii) の終りに時間進化は「代理」系の進化と同じになる. この系のハミルトン関数 $\tilde{H}$ であって H との差は $O(\epsilon\tau^2)$ である. 高次の積分子も知られている.

これらの積分子の主要誤差を洗い出し, それを除去する方法を示したことが今回の論文の寄与である. この誤差は基本的には代理ハミルトン系 $(\tilde{H})$ の作用変数がもとの系 (H) の作用変

数と異なることから生じる. (軌道の位相に依存する) 作用変数の誤差は振動数の誤差となって現れ, それがさらに時間に線形的に成長する位相誤差を引き起こす. 理論的にまたその後数値的に示したとおり, うまい出発手続きを行なえば, たとえば非常に小さな刻み幅から始めて刻み幅をゆっくり最終的な刻み幅まで増加させれば, 誤差が取り除ける. この簡単な改良によって長期誤差は ϵ 倍 (小惑星軌道では 2 桁) ほど小さくなる. 文献に載っているほかのアルゴリズムと比較した. この新しい積分子にうまい出発手続きを組み合わせれば, 太陽系の広い範囲の問題にとって当面最良の結果が得られる.

多数の議論をしてくれ, プログラムを使わせてくれた Gerald Quinlan に感謝する. また情報を提供してくれた Jack Wisdom および Haruo Yoshida に感謝する. この研究はカナダの自然科学および工学研究評議会から補助金を受けて行なった.

補遺

惑星軌道を正確に積分しようとするなら相対論的効果を補正する必要がある. これによる相対振幅 (fractional amplitude) は $O(G\mathcal{M}_\odot/c^2 r)$ 程度である. ただし r は半径である ($r = 1AU$ なら上の項の大きさは $\sim 10^{-8}$). 太陽と惑星に対するハミルトン関数は $H_{classical} + H_{gr}$ と書ける (Landau & Lifshitz 1975). ただし

$$\begin{aligned} H_{classical} &= \frac{p_\odot^2}{2\mathcal{M}_\odot} + \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} - G\mathcal{M}_\odot \sum_i \frac{m_i}{r_i} - G\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \\ H_{gr} &= \frac{G^2\mathcal{M}_\odot^2}{2c^2} \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} - \sum_i \frac{p_i^4}{8m_i^3 c^2} - \frac{3G\mathcal{M}_\odot}{2c^2} \sum_i \frac{p_i^2}{m_i r_i}. \end{aligned} \tag{29}$$

ここで $\mathcal{M}_\odot$ と m_i は太陽と惑星の質量であり, $(\mathbf{p}_\odot, \mathbf{q}_\odot)$ と $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ はそれらの運動量と座標である. また $r_{ij} = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|, r_i = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_\odot|$ であり, 和は惑星すべてにわたって取る. 相対振幅 $O(Gm_i/c^2 r_i)$ または $O(G\mathcal{M}_\odot/c^2 r_i)^2$ の小さな補正は無視した. 座標はシュワルツシルド計量 (Weinberg 1972) の調和形式あるいは等方形式に対応する.

残念ながらハミルトン関数 $H_{classical} + H_{gr}$ は (5) のような分離形に書けない. 相対論的補正は小さいから, H_{gr} を U_{gr} で置き換える近似が有効である. これは H_{gr} の項のうち主要項とくに長軸歳差の項を含んでいる. U_{gr} が

$$U_{gr}(r) = -\frac{3(G\mathcal{M}_\odot)^2}{c^2 r^2}, \tag{30}$$

を満たせば (Nobili & Roxburgh 1986), 相対論的長軸歳差は正しく再現される. しかしこのポテンシャルからは H_{gr} と同じ平均運動が得られない. 平均運動を補正するには r^{-1} に比例するポテンシャルを加えればよい. こうすると長軸歳差は影響を受けない. 次のようにする.

$$U_{gr}(r) = 3\frac{(G\mathcal{M}_\odot)^2}{c^2 a r}\left[\frac{4}{(1-e^2)^{1/2}} - 1\right] - \frac{3(G\mathcal{M}_\odot)^2}{c^2 r^2}\ . \tag{31}$$

ここで a と e はいま考えている軌道の軌道半長径と離心率である. 明らかに, a と e が長期間にわたってほぼ一定であるときのみこの形は役に立つ.

参考文献

Brouwer, D., & Clemence, G.M. 1961, *Methods of Celestial Mechanics* (Academic, New York).

Channell, P.J., & Scovel, C. 1990, *Nonlinearity* **3**, 231.

Forest, E., & Ruth, R.D. 1990, *Physica D* **43**, 105.

Gladman, B. & Duncan, M. 1990, *Astron. J.* **100**, 1680.

Henrici, P. 1962, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*(Wiley, New York).

Kinoshita, H., Yoshida, H., & Nakai, H. 1991, *Celest. Mech. & Dynam. Astr.* **50**, 59(KYN).

Lambert, J.D., & Watson, I.A. 1976, *J. Inst. Maths. Applics.* **18**, 189.

Landau, L.D., & Lifshitz, E.M. 1975, *The Classical Theory of Fields*, 4th English edition (Pergamon, Oxford), p. 342.

Nobili, A.M., & Roxburgh, I.W. 1986, in *Relativity in Celestial Mechanics and Astrometry*, edited by J. Kovalevsky and V.A. Brumberg (Reidel, Dordrecht), p. 105.

Plummer, H.C. 1960, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy* (Dover, New York).

Quinlan, G.D. & Tremaine, S. 1990, *Astron. J.* **100**, 1964.

Quinn, T.R., Tremaine, S., & Duncan, M. 1991, *Astron. J.* **101**, 2287.

Ruth, R.D. 1983, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **30**, 2669.

Sanz-Serna, J.M. 1992, *Acta Numerica*, to be published.

Sussman, G.J., & Wisdom, J. 1988, *Science* **241**, 433.

Sussman, G.J., & Wisdom, J. 1992, preprint.

Wisdom, J., & Holman, M. 1991, *Astron. J.* **102**, 1528.

Wisdom, J., & Holman, M. 1992, preprint.

Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York).

Yoshida, H. 1990, *Phys. Lett. A* **150**, 262.

Yoshida, H. 1991, preprint.