谷川清隆 訳

Russian Mathematical Survey (1962), 85-191

古典力学および天体力学における小分母および運動の安定性の問題

Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics

V.I. Arnold

目次

参考文献

序章

§1. 結果

古典力学の定性的問題の困難さはよく知られている. 長期にわたる多くの数学者の努力にも拘らず, これら多くの問題は未解決である. ほんのごく最近, C.L.Siegel の仕事 (1942) および A.N.Kolmogorov の仕事 (1954) によって力学系の運動の安定性に関する問題を解くにあたってある程度の進展が見られた. とくに

1) 自由度 2 の保存系の**平衡点および周期解の安定性**はいわゆる一般楕円ケースで証明された.

2) 作用変数の**永劫断熱不変性**が自由度 1 の非線形振動系においてパラメータがゆっくり周期変化する場合に証明された. **軸対称磁場の「磁気トラップ」**が荷電粒子を永遠に閉じ込め得ることが確立された.

3) 多体問題において準周期運動が発見された. n 惑星の質量が中心天体の質量に比べて十分小さければ, ケプラー楕円の離心率と軌道傾斜角が小さいような大多数の初期条件に対して運動は準周期的である. さらに, **軌道半長径は永遠に元の値の近くにとどまり, 離心率と軌道傾斜角は小さいままとどまる**.

本論文は, これらの結果に関して完全な証明を与える. いままで, ノートの形でこれらは発表してきた [14]–[17].

小分母に対する著者の興味は A.N.Kolmogorov の 1957 年の講義によって刺激された. この機会を借りて, この論文への関心に対して A.N.Kolmogorov に深い感謝の意を表する.

著者は, 天体力学に関する仕事の部分に関しては V.M.Alekseev の助言を受けた. 1958 年夏の L.A.Artsimovich および M.A.Leontovich の論文から, 著者の注意は磁気モーメントの永劫断熱不変性の問題に向けられた. B.V.Chirikov との多くの議論はこの疑問への研究を可能にするのに役立った. G.A.Merman は原稿を注意深く読み, いくつもの所見を述べてくれた. L.Yu.Pius は III 章 4 節の計算を確認してくれた. 上に掲げた諸氏に感謝の意を捧げる.

数学者にはあまりよく知られていない力学の結果が必要であるとともに, 力学分野の研究者にほとんど知られていない数学的発想が必要である. 以下の 2 つの節で, これらについて述べる.

§2. 力学からの予備結果

1. 小分母とは何か? 天文学者は長い間, 相互作用する運動の周期の尽数関係に結び付いた共鳴現象が「小分母」をもたらし, 数学的困難を引き起こすことに気づいていた.

例 1. 一日の間に木星は軌道上を $\omega_1 = 299''.1$ だけ, 土星は $\omega_2 = 120''.5$ だけ動く.
周波数 ω_1, ω_2 はほぼ尽数関係

$$2\omega_1 - 5\omega_2 \approx 0.$$

にある. 表現 $m\omega_1 + n\omega_2$ は摂動論に現れる級数の分母として

$$\sum_{m,n \neq 0} a_{mn} \frac{e^{i(m\omega_1 + n\omega_2)t}}{m\omega_1 + n\omega_2} \tag{0.2.1}$$

の形で出てくる.

ラプラスの時代以来, この小分母 $2\omega_1 - 5\omega_2$ に関係する太陽まわりの惑星運動の大きな周期的摂動の存在が知られていた.

2. 安定性問題とは何か. この型の問題 (今日も未解決の問題) のうち, 第一でかつ高度に刺激的なのが惑星軌道の安定性への疑問である. 惑星同士の小さな摂動は十分長い時間の後では, 衝突や無限遠への逃散を引き起こすのであろうか.

H. Poincaré および A.M. Lyapunov の有名な仕事で展開された運動の安定性理論により漸近安定が可能であることが発見された. だが古典力学の安定性問題はいつも特性指数が純虚数という「中立」の場合に対応しており, 相空間体積の保存 (リュービルの定理) のために漸近安定な運動は可能でない. だから彼らのこの方法は非線形保存系の運動の安定性の研究にはなんの役にも立たない.

これらの研究が直面する基本的な困難は摂動論の級数 (0.2.1) が小分母 $m\omega_1 + n\omega_2$ によって発散するかどうかに結びついている. H. Poincaré は平面制限三体問題を調べ, 発散の困難が実に簡単な定式化のできるモデル問題にももちあがることを示した. G.D. Birkhoff はこれらの問題のひとつを詳しく調べた ([3] 参照).

例 2(バーコフの問題). p, q 平面の原点の近傍からそれ自身の上への面積保存解析写像 T が与えられたとする. 原点は不動点であるとする. この点は安定か?

T の線形部分は原点において p, q 面の回転であることが仮定されている.
最近この疑問への答えが肯定的であることがわかった. これについては 4 節で議論する.

3. 以下の章では, 「力学の恐るべき形式的道具」を使う. 運動方程式の正準形式はいま問題にしている方法を適用する場合本質的ではない (たとえば [18] を見よ). だが計算が容易になる. 配位空間, 相空間, ラグランジュ方程式, ハミルトン方程式, 循環座標, 保存則, 正準変換, ポアッソン括弧, 積分不変量, 作用-角変数などに慣れておくと便利である. これらは文献 [4] や [3], [5], あるいは [6] に記載されている. 制御用に次の問題を解いておくと都合がよい.

問題. 曲面 S の上を慣性によって (重力の作用なしに) 点が動いているとする. 相空間内に 2 次元不変多様体を見つけ, その上での相軌跡の運動を調べよ. S が a) トーラス, b) 回転楕円体, 3) 三軸楕円体, の場合を考えよ ([57] 参照).

§3．数学からの予備結果

1．準周期軌道 quasi-periodic(条件付き周期軌道 conditionally periodic) とは何か． トーラス (タイヤのチューブあるいは浮き輪) の表面を考えて見よう (図 1 参照).

図 1, 図 2.

表面に「地理」座標: 経度 q_1 と緯度 q_2 を導入する．角度 q_1 と q_2 をラジアンで表し, 2π の不定性を無視する．q_1, q_2 面の四角 $0 \leq q_{1,2} \leq 2\pi$ はトーラスの地図として使える．また q_1, q_2 面全体を辺の長さ 2π の四角に分割して使うのも便利である．トーラスの各点はこのような地図の各々に代表点を持つ (図 2).

トーラスに沿って等速で動く点 $q_1(t), q_2(t)$ を考えよう:

$$\frac{dq_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = \omega_2. \tag{0.3.1}$$

q_1, q_2 図上で, この運動は直線で表される．

m, n を整数として $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m}{n}$ なら, 時刻 $t = 2\pi\dfrac{m}{\omega_1} = 2\pi\dfrac{n}{\omega_2}$ に軌道は元の位置に戻ってくる．その間, 緯度方向に m 回転, 経度方向に n 回転する (図 2 では $m = 2, n = 3$ である).

しかし $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ が無理数なら, 動点は決して元の位置には戻らない．この場合, 運動 (0.3.1) は 2 周波数 ω_1, ω_2 で準周期的 (conditionally periodic) といわれる．軌跡 $q_1(t), q_2(t)$ はトーラスを巻く (a winding of the torus) といわれる．

準周期運動には準周期関数が密接に関係している．$F(q_1, q_2)$ がトーラス上の関数であってフーリエ級数で

$$F(q_1, q_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} f_{mn} e^{i(mq_1 + nq_2)},$$

と展開されるなら, 運動 (0.3.1) の場合のこの関数の時間変化は

$$f(t) = F[q_1(t), q_2(t)] = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} f_{mn} e^{i[(m\omega_1 + n\omega_2)t + \varphi m_n]}, \tag{0.3.2}$$

の形をしている．関数 (0.3.2) は準周期的といわれる．例として $f(t) = \cos t + \cos\sqrt{2}t$ を挙げることができる．どんな問題においても, (0.3.2) の形の級数が現れるなら, それは (0.3.1) の形の

運動が現れたことを意味する.

図 3 と図 4

2. 準周期軌道のある種の性質.
性質 1. 準周期運動の軌跡はトーラス上いたるところ稠密である.

これはつまり, 任意の領域 (domain)Δ が与えられたとき, 動点 $p(t), q(t)$ が遅かれ早かれそこに入ることを意味する. 性質 1 は次の事実からただちに出る.

1a) α を無理数とし, Δ を円 $|z| = 1$ の任意の弧とする. すると, 点 $e^{2\pi i n\alpha}(n = 1, 2, 3, \ldots)$ の中に Δ の点がある[1].

また, 準周期運動の軌跡は一様分布であることを指摘しておく ([58] 参照). 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間で, 動点が Δ に滞在する時間は, T が大きいときは領域 Δ(図 3 参照) の面積に比例する[2].

性質 2. 任意のリーマン積分可能な関数 $F(q_1, q_2)$ に対して, 時間平均は空間平均と等しい. すなわち,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(\omega_1 t, \omega_2 t)dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(q_1, q_2)dq_1 dq_2.$$

以下では, 性質 2 をよく説明する別の例を示そう (読者は読み飛ばしてもよい).

3. 近日点の平均運動に関するラグランジュの問題. x, y 平面のベクトルが 3 つのベクトルの和

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_1(t) + \mathbf{a}_2(t) + \mathbf{a}_3(t),$$

で与えられるとする. ただし, 長さはそれぞれ a_1, a_2, a_3 であり, 独立な[3] 角速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ で一様回転しているとする. $\varphi(t)$ はベクトル $\mathbf{a}(t)$ が x 軸となす角であるとする.

---

[1] 数 2^n は 7 から始まり得るか? 1a) によれば, 2^n は任意の数のコンビネーションで始まり得る

[2] 2^n は 7 から始まるのと 8 から始まるのとどちらが多いか?

[3] 数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が独立であるのは, $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0$ から $k_i = 0$ が言えるときである. ただし, k_i は整数である.

問題. ベクトル $\mathbf{a}$ の平均角速度を求めること.

$$\omega = \lim_{T \to \infty} \frac{\varphi(T)}{T}.$$

解. $\omega = \dfrac{\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ ただし, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は辺が a_1, a_2, a_3 の三角形の角度である.

近日点の運動との関連は III 章 1.2 節から理解することができる. この問題の歴史と文献については [52] 参照. この問題は Bol.Sierpenski と H.Weyl によって解かれた.

4. 以下の章では, 読者が可微分多様体の概念 ([55] 参照) に親しんでいることを仮定する．とくに, n 次元トーラスの点は n 個の角座標 $q_1, \ldots, q_n$ で与えられる．上記 1 項と 2 項を n 次元トーラスに一般化して考えることは読者にとって有用である．また測度論の初歩 ([56] 参照) を使う (読者は有理数の集合が測度ゼロであることを知っている必要がある).

一般論に行く前に, これから調べる現象の基本的性質がはっきりと見える非常に簡単な例について考察しておく.

§4. 安定性のもっとも単純な補題

2 節の例 2 に戻ろう．p, q **平面の原点の近傍からそれ自身の上への面積保存解析写像** T **が与えられている．不動点** O **は安定か?**

一般的方法 (I 章) をこの場合に適用した結果から始めよう.

1. 3 つの例. 線形変換の場合, 固有値 λ_1, λ_2 を計算すれば問題は解ける．面積保存性より $\lambda_1\lambda_2 = 1$ である．λ_1 と λ_2 が実数でなければ, $\overline{\lambda}_1 = \lambda_2$, $|\lambda_{1,2}| = 1$, $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ である.

<u>例 A</u>. p, q 面の点 O を中心として角度 ω の通常の回転 A を考えよう．各円 $p^2 + q^2 =$ 一定 は不変である．つまりそれ自身の中へと変換される．円を全体として ω だけ回転する．$\omega \neq 2\pi\dfrac{m}{n}$ である限り, 軌跡は円上いたるところ稠密である.

$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ なるどの線形変換も, 座標の線形変化
(change)S によって A の形にもって行ける．すなわち

$$\begin{array}{ccc} p, q & \to^{T} & p, q \\ \downarrow_{S} & & \downarrow_{S} \\ p', q' & \to^{A} & p'q' \end{array}$$

このような写像 T は**楕円回転**とよばれる.

図 5

非線形写像に移ろう．与えられた写像の
ゼロにおける線形部分が楕円回転である
とき, T は**楕円型**写像とよばれる.

<u>例 B</u>. 円 $p^2 + q^2 = 2\tau$ を角度

$$\omega(\tau) = \omega_0 + \omega_1\tau + \ldots \tag{0.4.1}$$

だけ回転する写像 B を考えよう (図 5).

この写像は楕円型であり, 安定である.

p, q と解析的変換 S で結び付いている座標系 p', q' を考えよう．ただし変換 S は面積保存であって, 原点 O をもとの場所から動かさないとする．p', q' 平面において例 B の写像 B を考えよう.

<u>例 C</u>. 写像 B を**座標** p, q **で書こう．すると写像** $C = S^{-1}BS$ **を得る**.

この写像は楕円型であり安定である．というのは, 変数変換 S によって安定な写像 B に変換できるからである．

例 C の構成法によって任意の楕円型写像を得ることができるか? もしそうなら, これによって安定性の問題に肯定的な解が得られることになる．

2. 形式解. Birkhoff の時代以来 [3], 級数の収束性を無視すれば, 条件

$$\omega \neq 2\pi \frac{m}{n} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ; n = 1, 2, \ldots) \tag{0.4.2}$$

の下で, 楕円型の写像 T はいつでも例 B の $STS^{-1} = B$ の形へと形式的な変数変換 S によって還元できる．S は摂動論の級数に似た「バーコフ級数」によって決定できる．一般の場合, これらの級数は**発散**する．写像 T の安定性は形式級数 S の存在からは出ない．

とは言え, 級数 S を途中で切ることは可能であり, 収束する変数変換 $S^{(s)}$ によって, B と任意に高い次数の量 $O(\tau^s)$ だけしか違わないように T を変形することが可能である．この際に得られる (0.4.1) の係数 $\omega_0, \omega_1, \ldots$ は T を B へ還元する方法 $S^{(s)}$ に依らない．これらは面積保存解析変換に関する T の不変量である．$\omega_1 \neq 0$ なら, 写像 T は**一般楕円型**とよばれる．

この場合, 写像 B を作用させたときに円 $\tau =$ 一定 が回転する角度 $\omega(\tau)$ は τ とともに変化する ((0.4.1) 参照)．したがって, ある円は 2π と尽数関係にある角度で回転し, 別の円は尽数関係にない角度で回転する．

適当な変数が与えられると, O の近くで, 写像 T は非常に小さな追加項を摂動された, 角度 $\omega(\tau)$ の回転 B と見ることができる．したがって, われわれの問題は, τ^s に比べて小さな摂動分だけ B と異なる写像 T の研究へと還元される．

3. 不変曲線. Birkhoff 級数が収束すれば, O の近傍全体は円 $\tau =$ 一定 に近い T の不変曲線から成っているはずである．

事実は, **写像 B の不変円のうち, 回転角度 $\omega(\tau)$ が 2π と尽数関係にないものは全体の大多数を占めるが, これらは B の小さな摂動のもとで消えず, 少し変形するだけである**ことがわかった．したがって, 不動点 O は任意に小さな解析的な閉 T 不変曲線によって囲まれ, よって安定である．これらの曲線は O を集積点とする正測度の集合を満たすことが証明できる (I 章および IV 章を見よ)．

ところが, これらの曲線は O の近傍を完全には満たさないし, 一般に, 任意の領域 (domain) を満たさない．これらの中間には「不安定ゾーン」(zones of instability) が残る．これらは $\omega(\tau)$ が 2π と尽数関係にあるような円 $\tau =$ 一定 から摂動で生じる．O からの各半径線を, 不変曲線はカントール完全集合のように切る．しかも正測度で切る．

図 6.

4. 不安定ゾーン. 角度 $\omega(\tau) = 2\pi\dfrac{m}{n}$ だけ回転する「無摂動」変換 B の不変円を考えよう. B の n 回の繰り返しにより, 円の各点は元の場所に戻る. B のこの性質は, 一般的に言えば, 小さな摂動の下では保持されず, 不変円はちぎれてばらばらになる. G.D.Birkhoff が証明したところによると, B^n に関して不変な完全な円の代りに, T^n は一般にこの円の近くに有限個偶数の不動点を持つ. このうちの半分の点は楕円型であり, 残りは「双曲的」である.

3 で示したように, 楕円型の点は一般的に言えば安定であり, O を囲まない不変曲線によって囲まれている (図 6). したがって, 一般の場合, O の近傍は不変閉曲線によって層状に区分けされていない. 上で指摘した Birkhoff 級数の. 発散はこのことから従う (項目 2 参照).

双曲点のセパラトリックスは互いに交差し, 「不安定ゾーン」に複雑な網目をつくり出す. 各楕円点の近傍には同じ描像が成り立つ. すなわち不変曲線と不安定ゾーンその他.

5. 安定性の条件. 不変曲線の存在 (3 参照) および T の安定性を証明するための仮定を述べよう.

著者が [14] で使った条件は, $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ が無理数であること, $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots \neq 0$, および T が解析的であること, であった. すると, J. Moser[25] が, $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ の無理数性の代りに, $\omega_0 \neq 2\pi\dfrac{m}{3}, 2\pi\dfrac{m}{4}$ であること, T の解析性の代りに 333 階の偏微分の連続性を要請するだけで十分なことを示した. $\omega_0 = 2\pi\dfrac{m}{3}$ のときは, T. Levi-Civita がすでに示したように ([8] 参照, 同じ主題で G.A.Merman が論文を書いている [21, pp.18-41]), 不安定性が起こり得る.

§5. 結果

この論文は 6 つの章から成る. 基本的なアイデアと方法は I 章に書いた. 記述は厳密さを犠牲にして発見的性格にした. しかし、聡明な読者は I 章を見ただけで厳密な数学的基礎を述べる IV 章 V 章を見ることなく基本結果の証明を再構成できるであろう.

II 章および III 章は I 章の一般論の応用を述べる. 「磁気トラップ」に応用した断熱不変量の概念を II 章で詳しく吟味する. III 章では, 多惑星の問題にかかわる. 離心率が小さく, 質量が小さい場合の平面三体問題を詳しく考察する.

IV 章と V 章, および III 章の 1 節,5 節を除いた部分は形式的に書いた. V 章の最後に記号をまとめて書いておいたので参考にして欲しい.

結論章はさまざまな覚書からなる. 中には未解決問題への言及もある.